Prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc.
Ústav matematiky FSI VUT
Technická 2, 616 69 Brno

Oponentský posudek

na disertační práci Mgr. Štěpána Křehlíka

„Strukturované multisystémy a multiautomaty indukované časovými procesy“

Disertační práce je zaměřena na výzkum v oblasti využití hyperstruktur při studiu vztahů a souvislostí mezi časovými funkcemi modelujícími různé děje probíhající v elektrotechnických zařízeních a elektrických přístrojích. Hyperstruktury tvoří moderní odvětví obecné algebry, jehož rozvoj je motivován významnými aplikacemi v matematice samotné i v jiných disciplínách, zejména v informatice a technických oborech. Rozvojem teorie hyperstruktur se zabývá mnoho významných odborníků, mezi kterými důležité místo zastává prof. Jan Chvalina, školitel Mgr. Křehlíka. V předkládané práci jsou hyperstrukturami vesměs chápány mono-binární hyperalgebry, tedy množiny s jednou binární hyperoperací. Z nich nejdůležitější roli hrají hypergrupy a spojnicové prostory.

Disertant vypracoval samostatnou studii, ve které se věnuje zkoumání vlastností hyperstruktur lineárních diferenciálních operátorů, kvaziautomatů a jimi tvořených systémů. Čtenáře nejprve seznamuje se základními pojmy a klasickými výsledky z oblastí signálů a modelování, hyperstruktur, multiautomatů a systémů typu vstup-výstup. Podrobněji se pak zaměřuje na studium lineárních diferenciálních rovnic 2. řádu za pomoci jejich algebraizace, která spočívá v získání příslušného lineárního diferenciálního operátoru. Jedná se o metodu, která byla rozpracována slavným brněnským matematikem profesorem Otakarem Borůvkou. Zatímco dosud byly při algebraizaci diferenciálních rovnic vesměs používány klasické algebraické struktury, disertační práce jako svůj hlavní přínos popisuje možnost využití hyperstruktur.

V práci jsou studovány základní algebraické vlastnosti hyperstruktur, konkrétně hypergrup a spojnicových prostorů speciálních diferenciálních operátorů 2. řádu v Jacobiho tvaru. Pozornost je také věnována konstruování a následnému studiu kvazi-multiautomatů, které jsou přirozeným zobecněním automatů bez výstupu. Pro zkonstruované kvazi-multiautomaty jsou pak vytvářeny systémy vstup-výstup. Prezentované výsledky jsou převzaty z pěti příspěvků publikovaných ve sbornících vědeckých konferencí, u čtyřech z nichž je Mgr. Křehlík jediným autorem, u zbývajícího je spoluautorem svého školitele prof. Chvaliny, se kterým napsal ještě jeden příspěvek vztahující se k hyperstrukturám.

Z matematického hlediska je text až na malé výjimky dobře srozumitelný a vhodně uspořádán. Jednotlivé výsledky jsou korektně dokázány, případně je uveden odkaz na literaturu, z níž je výsledek převzat. V kontrastu s odbornou kvalitou práce je však její poněkud méně pečlivé zpracování po stránce formální. Kromě drobných matematických nejasností se v práci totiž vyskytuje značný počet překlepů, několik nesprávných jazykových formulací a také řada hrubých pravopisných chyb.

Disertační práce je členěna do šesti kapitol, z nichž první je stručným úvodem popisujícím tématiku práce a nastiňujícím její hlavní cíl, kterým je zkoumání multistruktur vytvářených lineárními diferenciálními operátory, které jsou levými stranami homogenních diferenciálních rovnic uvažovaných především v elektrických obvodech. Ve druhé kapitole jsou shrnuty základní poznatky z oblastí, do kterých práce zasahuje, tedy ze signálů a modelování, hyperstruktur, multiautomatů a systémů. Třetí kapitola je pak věnována současnému stavu studované problematiky se zaměřením na modelovací časové funkce, hyperstruktury, kvazi-multiautomaty a systémy vstup-výstup. Cíle disertační práce jsou podrobně popsány v kapitole čtvrté – tyto cíle jsou diskutovány zvlášť pro každou z následujících čtyř oblastí: lineární operátory modelovacích časových signálů, hyperstruktury lineárních diferenciálních operátorů, kvazi-multiautomaty a systémy. Jádrem celé práce je kapitola pátá, v níž jsou prezentovány vlastní výsledky. Nejprve jsou zde pro čtyři známé časové funkce sestaveny homogenní lineární diferenciální rovnice, jejichž řešeními jsou tyto funkce, a popsány lineární diferenciální operátory, které jsou levými stranami sestavených rovnic. Poté jsou studovány základní algebraické vlastnosti hyperstruktur speciálních diferenciálních operátorů druhého řádu, které jsou levými stranami diferenciálních rovnic vyskytujících se při modelování dějů probíhajících v elektrických obvodech. Vyšetřovány jsou také hyperstruktury *n*-dimenzionálních vektorových prostorů a lineárních diferenciálních operátorů *n*-tého řádu. S využitím výsledků teorie svazů jsou definovány a studovány hyperoperace jako minima a maxima na množinách čtvercových matic. Další část kapitoly je věnována kvazi-multiautomatům. Jsou zde zkonstruovány kvazi-multiautomaty s množinou stavů danou jednak množinou lineárních diferenciálních operátorů, jednak množinou vektorů. Jsou také definovány a studovány operace homogenního a heterogenního součinu a kartézské kompozice kvazi-multiautomatů. Kapitola je uzavřena příklady popisujícími možné způsoby získání obecných systémů vstup-výstup z kvazi-multiautomatů. V šesté, závěrečné kapitole práce jsou zhodnoceny dosažené výsledky a je zde nastíněn možný směr dalšího studia.

Výše uvedené skutečnosti ukazují, že téma disertační práce zcela odpovídá oboru disertace. Je také vysoce aktuální z hlediska současného stavu vědního oboru, neboť studium multisystémů a multiautomatů za pomoci algebraických metod odpovídá nejmodernějším trendům specializovaného výzkumu. Práce obsahuje původní netriviální výsledky spočívající v nalezení a vyšetření chování efektivních metod založených na využití hyperstruktur pro studium diferenciálních rovnic popisujících časové procesy, které se vyskytují v různých technických oborech. Výrazně také přispívá k rozvoji teorie kvazi-multiautomatů založené prof. Chvalinou. Svoje výsledky publikoval disertant v odborných časopisech a sbornících vědeckých konferencí. Proto lze konstatovat, že má požadovanou vědeckou erudici.

K práci mám následující poznámky:

1. I když je pojem kvazi-automatu zaveden v Definici 2.8 na str. 11, je tento pojem (zbytečně) zaváděn také v textu předcházejícím tuto definici (uprostřed strany 11), kde je ovšem přenosová funkce δ definována nekorektně – správně má být $\delta\colon S\times A\rightarrow S$ a $\delta(s,\delta(a,r)= \delta(rs,a)$.
2. Na str. 20 se píše, že *n*-ární hyperoperace zavedli B. Davvaz a T. Vougiouklis v práci publikované v r. 2006. Chtěl bych autora práce informovat, že *n*-ární hyperoperace se vyskytují již v článku [J.Šlapal, On exponentiation of universal hyperalgebras, *Algebra Universalis* 44 (2000), 187-193], kde *n* může být dokonce libovolný kardinál. Na téže stránce se v Lemmatu 3.3 vyskytuje pojem uspořádané pologrupy, který nebyl definován – definovány byly pouze uspořádané grupy, viz Definici. 2.6. Bylo by vhodnější Definici 2.6 formulovat pro uspořádané pologrupy a tzv. koncové lemma by pak ihned vyplývalo z Lemmatu 3.3.
3. V Definici 3.6 na str. 21 by měla být třetí mocnina prvku *a* uvažovaného hypergrupoidu definována, jelikož daná hyperoperace nemusí být asociativní. V Lemmatu 3.7 na téže stránce

by bylo vhodné definovat pojem kvaziuspořádané množiny (G,R) a vysvětlit užité značení $R(a)$, dále pak definovat pojmy (silně) izotonního zobrazení a (silného) hyperhomomorfismu. Namísto nedefinovaného pojmu „extenzivní" má zde zřejmě být „kvazipořádková". Bylo by také vhodné zmínit definici pojmu pořádkové hypergrupy, který je následně užíván (definovány jsou pouze kvazipořádkové hypergrupy).

4. Definice 3.9 je zmatečná – je třeba napsat větnou čárku za „polohypergrupa X" a „takové" nahradit jiným výrazem, např. „definováno vztahem". Dále je třeba psát $X \times G$ namísto $G \times X$ a také (x,g) namísto (g,x) (nebo změnit tvar formulí na posledním řádku definice).
5. Pojem *množina všech generátorů automatu* užitý na str. 26 by měl být definován.
6. Bylo by vhodné uvést definici pojmu *normální podhypergrupa*, který se vyskytuje v Poznámce 5.10.
7. Ve Větě 5.27 má být „Hypergrupoidy" namísto „Hypergrupy".
8. V poznámce 5.28 je třeba za slovem „Polohypergrupy" obě myšlené polohypergrupy uvést.
9. V Definici 5.51 má být v obou případech namísto symbolu A symbol H – tato definice je ovšem zbytečná, neboť se kryje s Definicí 2.10. V poslední větě před Definicí 5.52 by mělo být „symbolem" namísto „formulí", neboť se nejedná o formuli, a „pro všechna" by mělo být nahrazeno středníkem, jak bývá u zápisu množin zvykem. V Definici 5.55 není potřeba vyžadovat splnění podmínek E-GMAC – ty musí být automaticky splněny, protože A a B jsou e-kvazi-multiautomaty.
10. V kapitole Závěr, jejíž délka je asi 2/3 stránky, jsem napočítal 12 překlepů a jazykových chyb.

Nedostatky zmíněné ve výše uvedených poznámkách mají převážně formální charakter. Matematické nepřesnosti lze považovat za marginální, neboť je vždy snadné si domyslet správné formulace. Jazykové nesrovnalosti sice nevrhají pěkné světlo na autora a působí poněkud rušivě při čtení práce, významnou měrou však nesnižují její odbornou kvalitu.

Na disertanta mám následující dva dotazy:

1. Podle Definice 2.8 tvoří vstupní symboly kvazi-automatu vždy pologrupu. V Definici 3.13 je zaveden pojem kartézského součinu dvou kvazi-automatů jako jistý (kvazi-)automat, jehož množina vstupních symbolů je sjednocením množin vstupních symbolů obou činitelů. Jak je definována příslušná binární operace na tomto sjednocení, která z něj činí pologrupu?
2. V Definici 5.52 se autor odvolává na Definici 5.51, ale používá nedefinovaný symbol I. Pokud tento symbol značí nosnou množinu vstupní polohypergrupy, pro kterou byl v Definici 5.51 užit symbol H, pak nerozumím podmínce E-GMAC. Množina $\delta(xy,s)$ je totiž podmnožinou množiny $\delta(I,s)$, takže místo sjednocení těchto dvou množin stačí psát jen $\delta(I,s)$. Jak je tedy podmínka E-GMAC myšlena?

Závěrem konstatuji, že předložená práce splňuje požadavky kladené na disertační práci a proto ji

d o p o r u č u j i   k   o b h a j o b ě.

V případě úspěšné obhajoby pak doporučuji, aby byl Mgr. Štěpánu Křehlíkovi udělen akademický titul Ph.D.

ÚSTAV MATEMATIKY
TECHNICKÉ... STROJNÍHO INŽENÝ...

V Brně 16. listopadu 2015 ....