

# Robustná stabilita vzduchového tunelu

## Robust stability of Air-tunnel Model

*Michal Dobias, Petr Pivoňka*

*xdobia04@stud.feec.vutbr.cz, pivonka@feec.vutbr.cz*

Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií VUT v Brně.

**Abstrakt:** Tento článok pojednáva o pojme robustná stabilita, ktorá je jednou zo základných vlastností robustného systému. Táto vlastnosť je v texte popísaná, sú uskutočnené vyšetrenia robustnej stability pomocou frekvenčných charakteristík na získaných modeloch (spojité a diskretné) a tiež prespojité a diskretný regulačný obvod. Tieto výsledky sú porovnané s výsledkami získanými z fyzikálneho modelu. Všetky výsledky sú dosiahnuté pomocou programu MATLAB-Simulink a B&R Automation Studio.

**Abstract:** Text deals briefly with robust stability which is one of the characteristics of a robust system. This attribute is described in the text; there are investigations carried out of robust stability by complex characteristics on taken models (continuous and discrete) and also on continuous and discrete feedback loop. These results are compared with the results of the physical model.

# Robustná stabilita vzduchového tunelu

Michal Dobias, Petr Pivoňka

Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií VUT v Brně  
Email: xdobia04@stud.feec.vutbr.cz, pivonka@feec.vutbr.cz

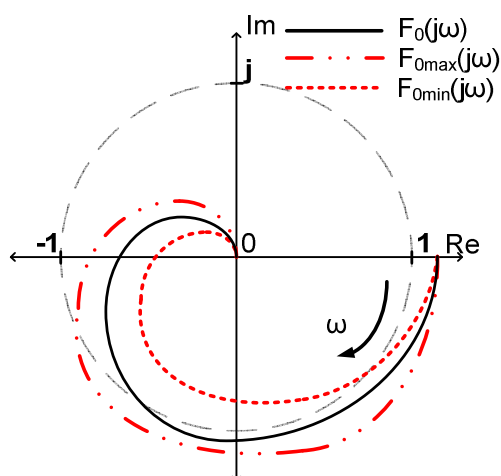
**Abstrakt** – Tento článok pojednáva o pojme robustná stabilita, ktorá je jednou zo základných vlastností robustného systému. Táto vlastnosť je v texte popísaná, sú uskutočnené vyšetrenia robustnej stability pomocou frekvenčných charakteristík na získaných modeloch (spojité a diskrétné) a tiež pre spojité a diskrétny regulačný obvod. Tieto výsledky sú porovnané s výsledkami získanými z fyzikálneho modelu. Všetky výsledky sú dosiahnuté pomocou programu MATLAB-Simulink a B&R Automation Studio.

## 1 Úvod

V tomto článku sa budeme zaoberať skúmaním robustnej stability modelu vzduchového tunelu, získaním jeho matematického popisu, stanovením neurčitostí jeho parametrov a nájdením hraničných hodnôt frekvenčných charakteristík v komplexnej rovine. Ďalej overíme túto vlastnosť pre použitý spojité a diskrétny regulačný obvod. Následne sa pokúsime dosiahnuté výsledky overiť na fyzickom modeli vzduchového tunelu.

## 2 Robustná stabilita

Slovník pojem robustnosť definuje ako sila, mohutnosť alebo „vlastnosť byť silný“. Jedná sa o takú dynamiku regulačného obvodu, ktorá umožní regulátoru vykonávať činnosť podľa požiadaviek na vybranej sústave aj v prípade, že ide o sústavu, ktorá v priebehu času mení svoje vlastnosti [2].



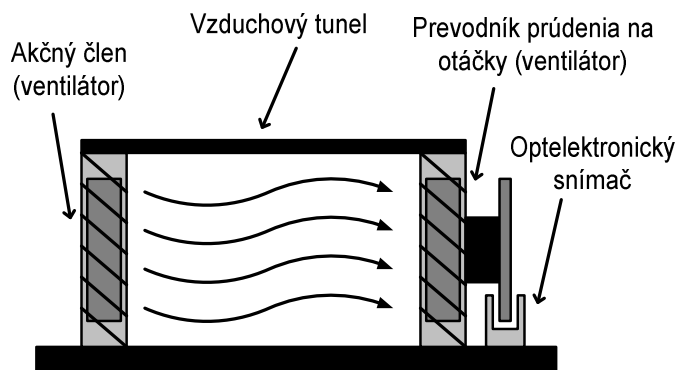
Obrázok 1: Robustná stabilita [2].

Jednou z podmienok robustnosti systému môže byť robustná stabilita, ktorá je definovaná tak, že regulačný obvod

musí byť stabilný pre všetky prípustné zmeny parametrov sústavy, ktoré sú definované rozsahom neurčitostí systému. Pričom pojem stabilný chápeme tak, že frekvenčná charakteristika v komplexnej rovine otvoreného regulačného obvodu  $F_0(j\omega)$  s narastajúcou frekvenciou ( $\omega \geq 0$ ) nepretína bod  $(-1; 0j)$  a prebieha napravo od tohto bodu (Obrázok 1).

### 2.1 Popis modelu

Na overenie robustnej stability sme vybrali model vzduchového tunelu. Tento model obsahuje vlastný vzduchový tunel, ktorý má na jednom konci pripevnený ventilátor, pôsobiaci ako akčný člen (ovládaný pomocou PLC B&R v rozsahu  $0 \div 10$  V s 12-bitovým A/D a D/A prevodníkom). V tuneli sa nachádza niekoľko prekážok, ktoré spôsobujú drobné turbulencie prúdenia vzduchu. Na druhom konci tunelu je umiestnený ventilátor, ktorý slúži ako prevodník prúdenia vzduchu na rotačný pohyb. Pomocou optoelektronického snímača je rotačný pohyb prevádzaný na elektrický signál, ktorý ďalej spracováva prídavná elektronika a tá spracovaný signál posielala do PLC B&R. PLC je pripojené pomocou Ethernetu k PC, na ktorom beží program MATLAB-Simulink, ktorý celú úlohu realizuje.



Obrázok 2: Model vzduchového tunelu.

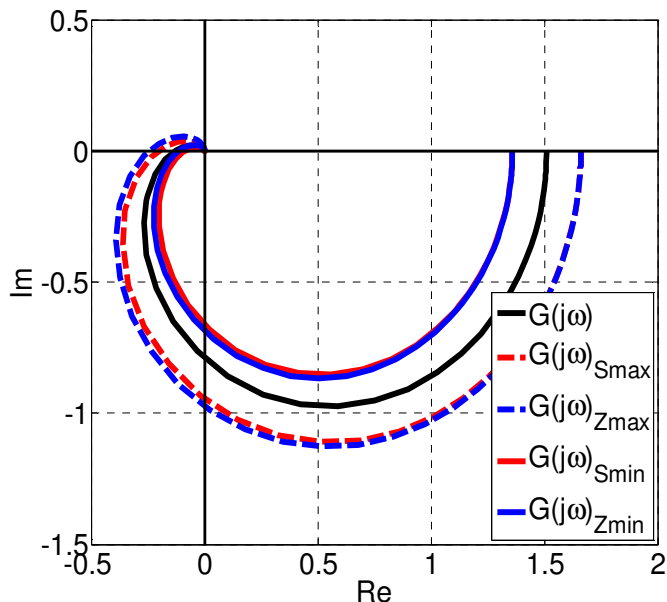
Na základe skúseností s fyzikálnym modelom vzduchového tunelu stanovíme jeho operátorový prenos v nasledujúcom tvare:

$$G(s) = \frac{K}{a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + 1} \quad (1)$$

Parametre prenosu sú určené z prechodovej charakteristiky pomocou hľadania minima kvadrátu. Pre zníženie vplyvu nelinearít, ktoré obsahuje fyzikálny model, je identifikácia uskutočnená pre pracovný rozsah  $3 \div 4$  V. Hodnoty parametrov sú nasledovné:  $K = 1,51$ ;  $a_1 = 4,55$ ;  $a_2 = 4,79$ ;  $a_3 = 1,75$ . Na

každý z týchto parametrov pripustíme neurčitosť  $\pm 10\%$  od fyzikálneho modelu.

Na Obrázku 3 vidíme priebehy frekvenčných charakteristík pre spojité aj diskretné model. Priebeh  $G(j\omega)$  je pre nominálne hodnoty, ktoré boli uvedené vyššie v texte. Priebehy  $G(j\omega)_{Smin}$  a  $G(j\omega)_{Smax}$  tvoria „obálku“, ktorá bola získaná porovnaním kombinácií zmien parametrov. Priebehy  $G(j\omega)_{Zmin}$  a  $G(j\omega)_{Zmax}$  sú získané diskretizáciou (tvarovač nultého rádu, perióda vzorkovania 0,2 s).



Obrázok 3: Zobrazenie frekvenčných charakteristík pre spojité a diskretné model.

## 2.2 Regulátor a regulačný obvod

Zaradením sústavy do regulačného obvodu už nemusí byť situácia tak priaznivá, ako ukazuje Obrázok 3. Pridaním regulátora sa nám zmenia frekvenčné vlastnosti systému a tým aj priebehy frekvenčných charakteristík. Použitým regulátorom bude spojité (2) podľa [4] a diskretný (3) s filtráciou derivačnej zložky podľa [1]:

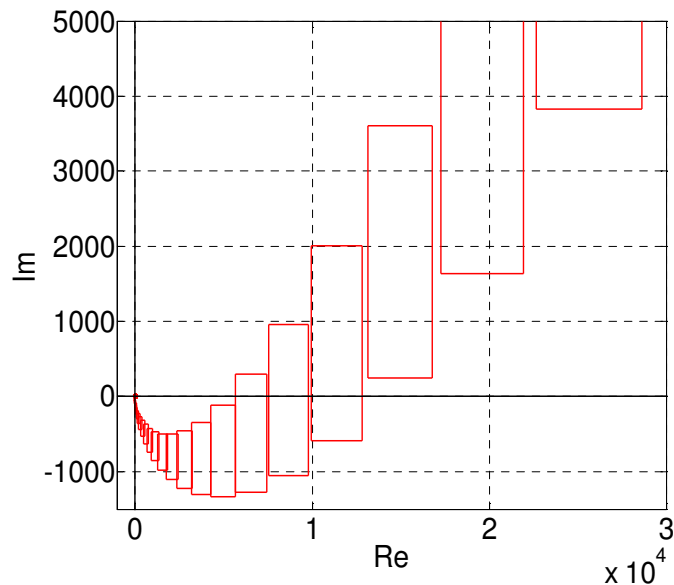
$$F_R(s) = K \left[ 1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d s}{\frac{T_d}{N} s + 1} \right] \quad (2)$$

$$F_R(z) = K \left[ 1 + \frac{T z^{-1}}{T_i (1 - z^{-1})} + \frac{T_d}{T} \left( 1 - e^{-\frac{TN}{T_d}} \right) \frac{1 - z^{-1}}{1 - e^{-\frac{TN}{T_d}} z^{-1}} \right] \quad (3)$$

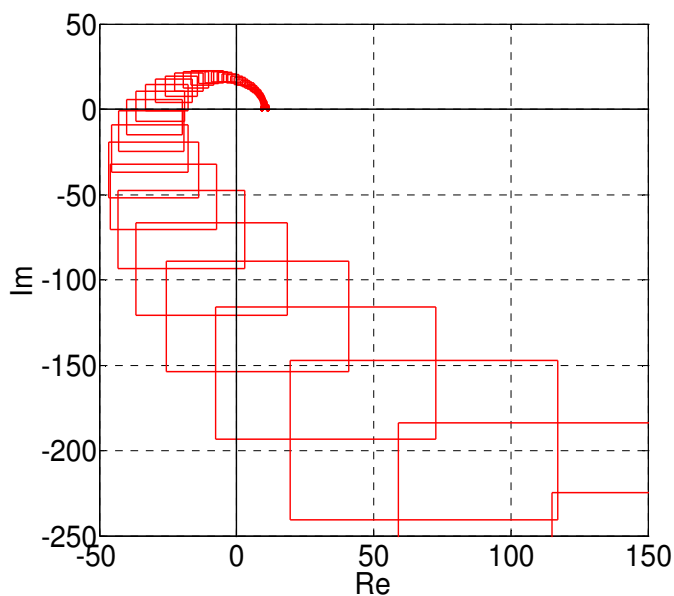
Parametre regulátora sú navrhnuté pomocou modifikovanej metódy Ziegler-Nichols [4]. Výsledné parametre pre regulačný obvod so sústavou (1) sú:  $K = 2,28$ ;  $T_i = 3,90$ ;  $T_d = 0,49$ ;  $N = 3,00$ .

Podľa [5] a na základe Obrázku 4 a 5 môžeme tvrdiť, že neurčitosti systému nespôsobia nestabilitu regulačného obvo-

du. Toto tvrdenie nemusí platiť aj pre diskretný obvod. Preto musíme overiť vlastnosti diskretného regulačného obvodu.



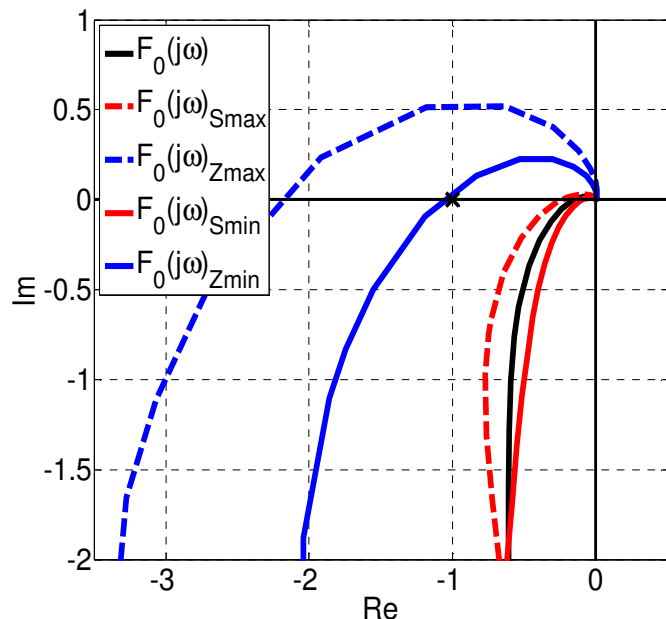
Obrázok 4: Kharitonovo zobrazenie charakteristického polynómu.



Obrázok 5: Detail Kharitonovho zobrazenia v okolí počiatku súradnicového systému.

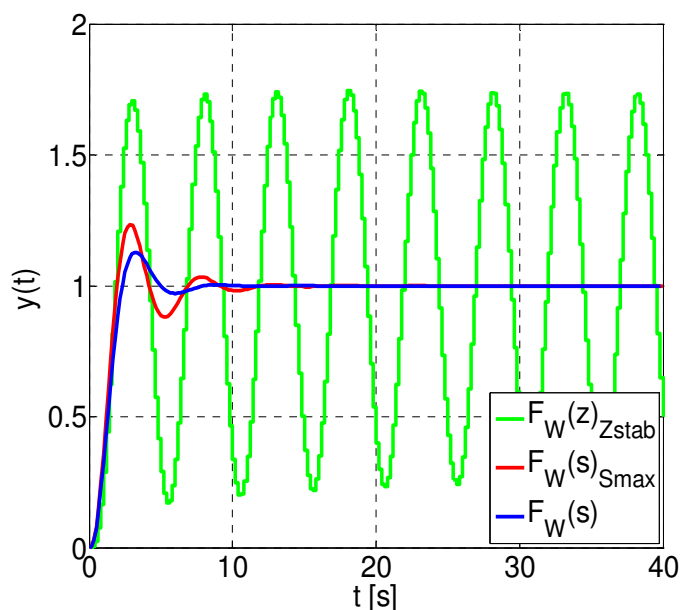
Na Obrázku 6 je vidieť priebehy frekvenčných charakteristík spojitého regulačného obvodu  $F_0(j\omega)_{Snom}$ ,  $F_0(j\omega)_{Smax}$  a  $F_0(j\omega)_{Smin}$ . Tiež môžeme pozorovať, že otvorené diskretné (perióda vzorkovania  $T = 0,20$ ) regulačné obvody  $F_0(j\omega)_{Zmax}$  aj  $F_0(j\omega)_{Zmin}$  sú nestabilné. Je teda nutné navrhnuť taký regulátor, ktorý zabezpečí stabilitu diskretného uzatvoreného regulačného obvodu.

Takéto podmienky splní regulátor s parametrami  $K = 1,59$ ;  $T_i = 3,90$ ;  $T_d = 0,25$ ;  $N = 3,00$ ;  $T = 0,20$ .

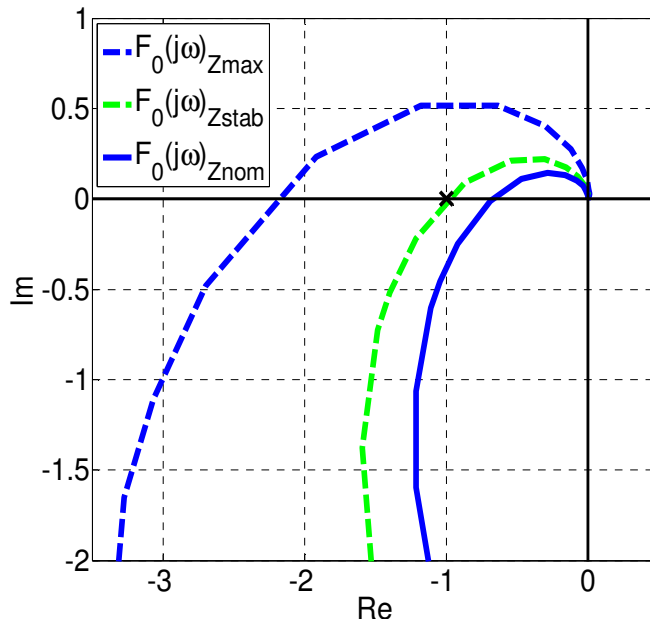


Obrázok 6: Zobrazenie frekvenčnej charakteristiky otvoreného regulačného obvodu.

Obrázok 7 zobrazuje priebeh skokovej odozvy obvodu  $F_W(s)$ , ktorý obsahuje spojitý model sústavy s nominálnymi hodnotami parametrov a s počiatočným nastavením spojitého regulátora (2) ( $K = 2,28; T_i = 3,90; T_d = 0,49; N = 3,00$ ). Priebeh  $F_W(s)_{Smax}$  je zobrazením skokovej odozvy regulačného obvodu so spojitým regulátorom (2) a spojitým modelom sústavy s parametrami zodpovedajúcimi priebehu  $G(j\omega)_{Smax}$ . Priebeh  $F_W(z)_{Zstab}$  zobrazuje skokovú odozvu regulačného obvodu s diskretným (3) regulátorom (so stabilizujúcimi parametrami  $K = 1,59; T_i = 3,90; T_d = 0,25; N = 3,00; T = 0,20$ ) a s diskretným modelom sústavy s parametrami zodpovedajúcimi  $G(j\omega)_{Zmax}$ .



Obrázok 7: Skokové odozvy systémov  $F_W(s)$ ,  $F_W(s)_{Smax}$  a  $F_W(z)_{Zstab}$ .



Obrázok 8: Zobrazenie frekvenčnej charakteristiky stabilizovaného diskretného regulačného obvodu.

Z Obrázku 8 vidíme vplyv zmeny parametrov ( $K = 1,59; T_i = 3,90; T_d = 0,25; N = 3,00; T = 0,20$ ) diskretného regulátora (3) vo frekvenčnej oblasti. Pre sústavu s parametrami  $G(j\omega)_{Zmax}$  je dosiahnutá robustá stabilita (priebeh  $F_0(j\omega)_{Zstab}$  prechádza v blízkosti bodu  $[-1;0j]$ ). To znamená, že pre najhorší prípad neurčitosti parametrov sústavy, bude diskretný obvod stabilný. Priebeh  $F_0(j\omega)_{Znom}$  vyjadruje vlastnosti obvodu s diskretným modelom s nominálnymi hodnotami parametrov.

Na základe týchto výsledkov je dôležité pýtať sa, čo spôsobilo nestabilitu diskretného regulačného obvodu. Bolo to spôsobené náhradou spojitého regulátora za regulátor diskretný (3) alebo zanedbaním dopravného oneskorenia pri získaní kritických parametrov pre diskretný regulátor?

### 2.3 Dopravné oneskorenie

V tejto časti článku aplikujeme pri získaní parametrov diskretného regulátora spojitý model s dopravným oneskorením o veľkosti polovice vzorkovacej periódy (0,1 s). Pre dopravné oneskorenie použijeme Padého rozvoj, ktorý je štandardným spôsobom náhrady dopravného oneskorenia pre analytické použitie.

K ďalšej práci bude použitý Padého rozvoj podľa [6] v nasledujúcom tvare:

$$e^{-\frac{T}{2}s} \approx P(s) = \frac{\sum_{i=0}^m p_i \left(\frac{T}{2}s\right)^i}{\sum_{i=0}^n q_i \left(\frac{T}{2}s\right)^i} \quad (4)$$

Pre prvky čitateľa ( $m = 3$ ) a menovateľ ( $n = 5$ ) platí:

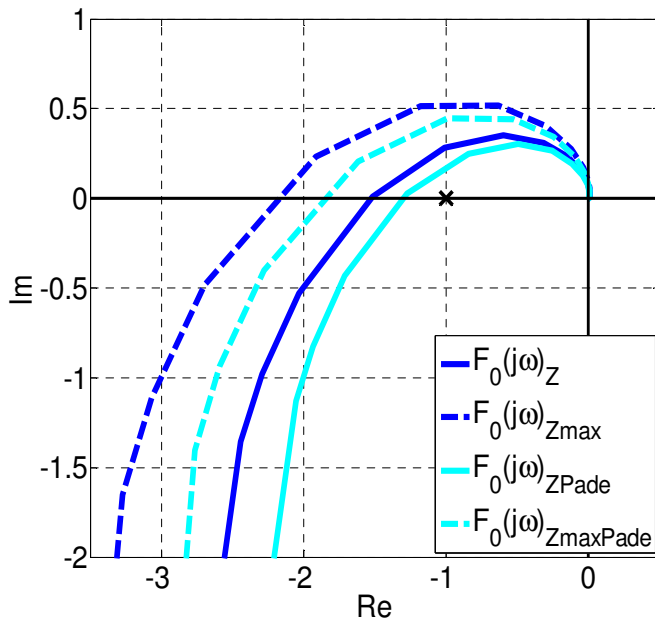
$$p_i = (-1)^i \frac{(m+n-i)!m!}{(m+n)!i!(n-i)!} \quad (5)$$

$$q_i = \frac{(m+n-i)!n!}{(m+n)!i!(n-i)!} \quad (6)$$

Sústava bude mať potom tvar:

$$G_p(s) = G(s) \cdot P(s) \quad (7)$$

Získané parametre pre diskretný PSD regulátor (3) pomocou modifikovanej metódy Ziegler-Nichols sú:  $K = 1,80$ ;  $T_i = 4,35$ ;  $T_d = 0,54$ ;  $N = 3,00$ ;  $T = 0,20$ .



Obrázok 9: Porovnanie frekvenčných charakteristík diskretného obvodu s parametrami regulátoru získaného bez dopravného oneskorenia ( $F_0(j\omega)_Z$ ,  $F_0(j\omega)_{Zmax}$ ) a s parametrami získaných zo sústavy so zahrnutým dopravným oneskorením ( $F_0(j\omega)_{ZPade}$ ,  $F_0(j\omega)_{ZmaxPade}$ ).

Z Obrázku 9 je vidieť, že situácia sa príliš nezmenila hoci sme očakávali zlepšenie. Je teda nutné aj pre tento prípad nájsť také parametre diskretného regulátoru (3), ktoré zaručia robustnú stabilitu diskretného regulačného obvodu.

Podmienky robustnej stability splňuje opäť regulátor s parametrami  $K = 1,59$ ;  $T_i = 3,90$ ;  $T_d = 0,25$ ;  $N = 3,00$ ;  $T = 0,20$  (perióda vzorkovania).

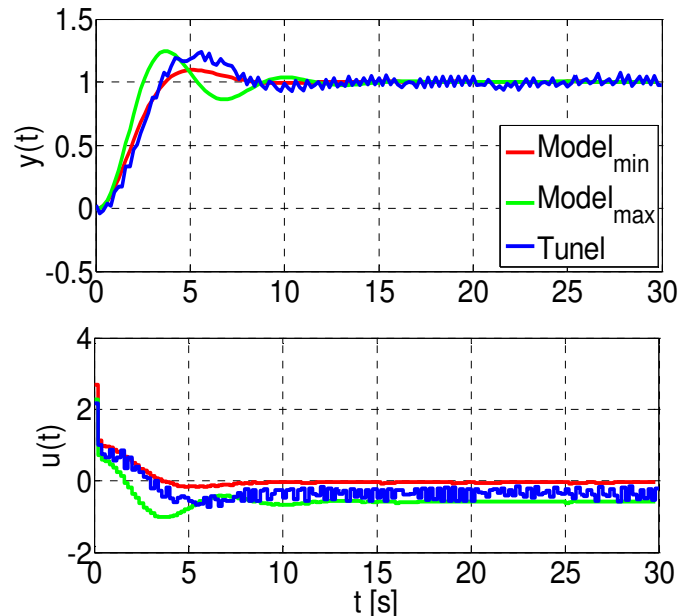
## 2.4 Regulácia fyzikálneho modelu

V tejto časti aplikujeme dosiahnuté výsledky na fyzický model vzduchového tunelu a porovnáme ich so simuláciou s modelom s vlastnosťami  $G(j\omega)_{Smin}$  a  $G(j\omega)_{Smax}$  („najpomalší“ a „najhorší“ prípad neurčitosti parametrov).

Diskretný regulátor (3) obsahuje dynamický anti-windup podľa [4] a obmedzenie akčného zásahu (nelinearita typu

nasýtenie). Regulačný obvod ďalej obsahuje 12 bitový A/D a D/A prevodník.

Regulácia je vykonaná v pracovnom rozsahu 3÷4 V, v ktorom bol fyzikálny model identifikovaný. Následne sú výsledky normalizované na jednotkový skok pre vhodnejšie porovnanie.



Obrázok 10: Porovnanie výsledkov simulácií a regulácie na fyzikom modeli.

Na Obrázku 10 sú zobrazené tri priebehy regulácie. Priebeh Tunel je výsledkom z regulačného obvodu obsahujúceho diskretný regulátor (3) s parametrami:  $K = 1,59$ ;  $T_i = 3,90$ ;  $T_d = 0,25$ ;  $N = 3,00$ ;  $T = 0,20$  a fyzikálny model vzduchového tunelu. Priebeh Model<sub>min</sub> je výsledkom regulácie obvodu s diskretným regulátorom a matematickým modelom s parametrami  $G(j\omega)_{Smin}$ . Jedná sa teda o „najpomalší“ prípad, ktorý mohol nastať v rozsahu stanovených neurčitostí. Priebeh Model<sub>max</sub> je výsledkom regulácie obvodu s diskretným regulátorom (3) a matematickým modelom s parametrami  $G(j\omega)_{Smax}$ , ktoré predstavujú „najhorší“ prípad, ktorý mohol nastať v rozsahu stanovených neurčitostí.

## 3 Záver

Našou úlohou bolo preskúmať robustnú stabilitu regulačného obvodu obsahujúceho model vzduchového tunelu. Ďalej sme mali navrhnúť regulátor na tento systém, ktorého matematický popis sme poznali len približne. Na začiatku sme zistili, že matematický model vykazuje stabilitu pre spojitú aj diskretnú variantu, aj v hraničných oblastiach vyplývajúcich z rozsahu neurčitosti (Obrázok 3). Následne sa ukázalo, že podľa Kharitonovho teorému (Obrázok 4 a 5), bude spojitý regulačný obvod stabilný pre všetky prípady zmeny parametrov. Čo sa nám aj potvrdilo na simuláciách. Zaujímavé výsledky priniesol diskretný regulačný obvod, ktorý bol nestabilný pre celý rozsah definovaný neurčitostami (Obrázok 6), hoci sme použili diskretný ekvivalent (3) k spojitému (2) regulátoru. Pre diskretný regulačný obvod sme boli nútení nájsť parametre regulátoru, ktoré by stabilizovali regulačnú slučku ( $K = 1,59$ ;

$T_i = 3,90$ ;  $T_d = 0,25$ ;  $N = 3,00$ ;  $T = 0,20$ ). Dosiahnutý výsledok je na Obrázku 7 priebeh  $F_w(z)_{Zstab}$  a priebeh  $F_0(j\omega)_{Zstab}$  na Obrázku 8. Ďalej sme preverili či nestabilitu diskretného regulačného obvodu nemohlo spôsobiť zanedbanie dopravného oneskorenia pri získaní parametrov pre diskretný regulátor (typická chyba v praxi). Ukázalo sa, že v tomto prípade bol diskretný obvod nestabilný, ako ukazuje Obrázok 9. Stabilizujúce parametre viedli opäť k hodnotám  $K = 1,59$ ;  $T_i = 3,90$ ;  $T_d = 0,25$ ;  $N = 3,00$ ;  $T = 0,20$ . Poslednou úlohou bolo aplikovanie teoretických výsledkov na obvod, ktorý obsahuje diskretný regulátor a spojitú sústavu (1) a následne túto sústavu nahradíť fyzikálnym modelom vzduchového tunelu. Tieto výsledky sú na Obrázku 10. Môžeme vidieť, že vo všetkých prípadoch je zaručená robustná stabilita regulačného obvodu.

#### 4 Pod'akovanie

Táto práca vznikla za podpory grantu „Moderné metódy a prístupy v automatizácii“ financovanej z Interní grantové agentury Vysokého učení technického v Brně (číslo grantu FEKT-S-10-12).

#### 5 Referencie

- [1] Pivoňka, P., Schmidt, M.: Comparative Analysis of Discrete Derivative Implementations in PID Controllers. In Systems Theory and Applications. vol.2. Greece: WSE-AS, 2007. s. 33-37. ISBN: 978-960-8457-90-4.
- [2] Dobias, M.: Robustnost regulátoru [diplomová práca], VUT FEKT Brno, 2009.
- [3] Mackenhort, U.: Robust Control Systems - Theory and Case Studies, Springer-Verlag Berlin Hiedelberg, 2004
- [4] Pivoňka, P.: Číslicová řídicí technika, Skriptum VUT v Brně, Brno 2003.
- [5] Ackermann, J., Bartlett, A., Kaesbauer, D., Sienel, W., Steinhauser, R.: Robust Control: Systems whit Uncertain Physical Parameters, Springer-Verlag, London 1993.
- [6] Hanta, V., Procházka, P.: Rational Approximation of Time Delay, Technical Computing Prague 2009, Prague, 2009, s. 35-41. ISBN: 978-80-7080-733-0.