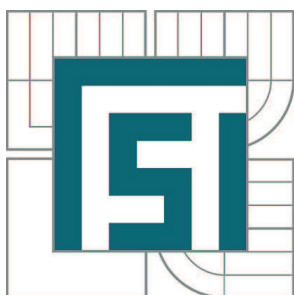


VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A
BIOMECHANIKY

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND
BIOMECHANICS

DYNAMICKÁ ANALÝZA KMITÁNÍ S VÍCE STUPNI VOLNOSTI

DYNAMIC ANALYSIS OF OSCILLATIONS WITH MULTIPLE DEGREES OF FREEDOM

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

JIŘÍ SCHULMEISTER

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Ing. LUKÁŠ BŘEZINA, Ph.D.

BRNO 2012

Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství

Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky

Akademický rok: 2011/2012

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

student(ka): Jiří Schulmeister

který/která studuje v **bakalářském studijním programu**

obor: **Strojní inženýrství (2301R016)**

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Dynamická analýza kmitání s více stupni volnosti

v anglickém jazyce:

Dynamic analysis of oscillations with multiple degrees of freedom

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Řešení zadání předpokládá tvorbu matematického (simulačního) modelu soustavy, která bude kmitat s více stupni volnosti a analýzu chování modelu v prostředí Matlab, Simulink. Jako reprezentační model vhodný pro tuto analýzu bude sestaven čtvrtinový model podvozku automobilu.

Cíle bakalářské práce:

1. nastudovat a popsat problematiku kmitání s více stupni volnosti
2. sestavit čtvrtinový model podvozku automobilu
3. analyzovat chování sestaveného modelu

Seznam odborné literatury:

Brepta R., Půst L., Turek F.: Mechanické kmitání, Sobotáles, 1994

Zuščík M.: Návrh semiaktivního odpružení vozidla, disertační práce SjF, STU Bratislava, 2010

Stejskal V., Okrouhlík M.: Kmitání s Matlabem, Česká technika, 2001

Vedoucí bakalářské práce: Ing. Lukáš Březina, Ph.D.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2011/2012.

V Brně, dne 5.11.2011

L.S.

prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc.
Ředitel ústavu

prof. RNDr. Miroslav Doupovec, CSc., dr. h. c.
Děkan fakulty

Abstrakt

Tato práce se zabývá analýzou kmitání s více stupni volnosti a ukázkou chování dynamického systému s dvěma stupni volnosti na různé vstupní signály pro účely výuky dynamiky. V práci je popsán obecný postup sestavení pohybových rovnic Lagrangeovou metodou a jejich další analýza. Jako modelový příklad systému se dvěma stupni volnosti je vybrán čtvrtinový model automobilu, na kterém jsou ukázány odezvy na různé vstupní signály. Modely jsou vytvořeny v programu MATLAB/SIMULINK.

Abstract

This thesis is dealing with analysis of oscillating with multiple degrees of freedom and with example of dynamic behavior of system with two degrees of freedom with different input signals for purposes of dynamic lessons. Conventional method of making equations of motion by Lagrange's method and their consecutive analysis is inscribed in the work. As example of system with two degrees of freedom is chosen quarter car model. Responses to different input signals are shown for the model. It is made in MATLAB/SIMULINK.

Klíčová slova

dynamická analýza, kmitání s více stupni volnosti, Lagrangeovy rovnice, čtvrtinový model automobilu, MATLAB/SIMULINK

Keywords

dynamic analysis, oscillating with multiple degrees of freedom, Lagrange's equations, quarter car model, MATLAB/SIMULINK

Bibliografická citace

SCHULMEISTER, J. *Dynamická analýza kmitání s více stupni volnosti*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2012. 28 s. Vedoucí bakalářské práce Ing. Lukáš Březina, Ph.D..

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracoval samostatně a že jsem uvedl všechny použité prameny a literaturu.

V Brně dne 23. 5. 2012

.....
Jiří Schulmeister

Poděkování

Děkuji vedoucímu bakalářské práce Ing. Lukáši Březinovi Ph.D. za konzultace, poskytnuté zdroje a cenné rady.

Obsah

1. Úvod	10
2. Analýza kmitání s více stupni volnosti	11
2.1 Sestavení pohybových rovnic	11
2.2 Kmitání se dvěma stupni volnosti	13
2.3 Kmitání s n stupni volnosti	14
3. Čtvrtinový model automobilu	16
4. Odvození pohybových rovnic čtvrtinového modelu	17
5. Simulační modely	18
5.1 Model Simulink	18
5.2 Stavový model	19
5.3 Model SimMechanics	21
6. Odezva čtvrtinového modelu na různé vstupy	22
7. Závěr	25
Literatura a odkazy	26
Seznam použitých symbolů	27
Seznam příloh	28

1. Úvod

Kmitání je periodický pohyb hmotného bodu nebo tělesa kolem rovnovážné polohy, na kterou je toto těleso vázáno. V této poloze je součet všech vnějších sil působících na těleso roven nule, výsledný moment sil je také nulový. Pro kmitavý děj je typická závislost polohy, rychlosti a zrychlení na čase. Maximální hodnoty těchto veličin se nazývají amplitudy.

V dnešní době se s kmitajícími soustavami setkáváme neustále. V mnoha případech se jedná o nežádoucí kmitání a je potřeba použít tlumiče kmitání jako např. u automobilové nápravy, kde se tlumí otřesy přenášené z vozovky na karoserii. Dále u menších mostů se zaměřujeme na jejich odolnost vůči frekvencím větru nebo lidské chůze. Z důvodů bezpečnosti a efektivity výroby je nutné kmitající soustavy analyzovat kvůli optimalizaci různých parametrů.

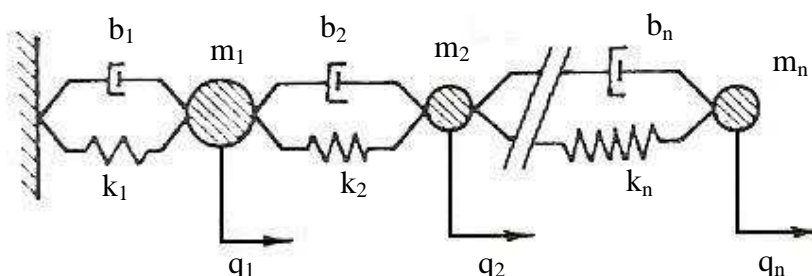
Pro co nejlepší optimalizaci kmitajícího systému a návrh parametrů je vhodné systém namodelovat pomocí simulačního softwaru. Mezi nejznámější programy na vytváření a simulaci dynamických soustav patří Matlab/Simulink nebo podknižovna SimMechanics. Dalším programovým balíkem je VisSim, který nabízí snadnou konstrukci a simulaci složitých dynamických systémů. Příkladem softwaru určeného pro analýzu vlastních kmitů a vynuceného kmitání prutových konstrukcí je Rstab/Dynam.

Cílem této práce je vytvoření čtvrtinového modelu automobilu v programu Matlab/Simulink jako příklad sestavení matematického modelu a analýzy kmitání soustavy se dvěma stupni volnosti pro pozdější potřeby výuky dynamiky. Dále ukázka odezvy tohoto systému na různý vstupní signál, která je základem dalších úprav parametrů pro návrhy řízení automobilu. Za tímto účelem je model vytvořen ve třech variantách, které mají své výhody a nevýhody.

2. Analýza kmitání s více stupni volnosti

2.1 Sestavení pohybových rovnic

Kmitající soustava se analyzuje po sestavení jejího matematického modelu. Způsobem tvorby modelu vhodným pro soustavy se soustředěnými parametry je odvození pohybových rovnic Lagrangeovou metodou. Tato metoda má podstatně kratší postup než vyjádření pohybových rovnic Hamiltonovým principem, protože se zde neobjeví síly, které nemění energii soustavy. Hamiltonův princip a Lagrangeovy rovnice jsou popsány v [1]. Lagrangeovy rovnice vychází z určení kinetické a potenciální energie, zatlučené funkce, práce vnějších sil a derivací těchto vztahů podle zobecněných souřadnic. Počet stupňů volnosti soustavy odpovídá počtu pohybových rovnic, kterými je tato soustava popsána. Pro diskrétní soustavu n těles dle obr. 1 probíhá sestavení pohybových rovnic následovně.



Obr. 1: Model soustavy s n stupni volnosti. [1]

Význam jednotlivých symbolů

$m_{1,2,\dots,n}$... hmotnosti kmitajících těles

$k_{1,2,\dots,n}$... tuhost pružin

$b_{1,2,\dots,n}$... tlumení kmitání pomocí tlumičů

$q_{1,2,\dots,n}$... výchylka kmitajících těles (zobecněná souřadnice)

$\dot{q}_{1,2,\dots,n}$... zobecněná souřadnice rychlosti

Kinetická energie je vyjádřena vztahem

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot \dot{q}_2^2 + \dots + \frac{1}{2} \cdot m_n \cdot \dot{q}_n^2 \quad (1.1)$$

Potenciální energie

$$E_p = \frac{1}{2} \cdot k_1 \cdot (q_1)^2 + \frac{1}{2} \cdot k_2 \cdot (q_2 - q_1)^2 + \dots + \frac{1}{2} \cdot k_n \cdot (q_n - q_{n-1})^2 \quad (1.2)$$

Pro zatlumenou funkci platí vztah

$$E_D = \frac{1}{2} \cdot b_1 \cdot (\dot{q}_1)^2 + \frac{1}{2} \cdot b_2 \cdot (\dot{q}_2 - \dot{q}_1)^2 + \dots + \frac{1}{2} \cdot b_n \cdot (\dot{q}_n - \dot{q}_{n-1})^2 \quad (1.3)$$

Práce vnějších sil

$$A = Q_1 \cdot q_1 + Q_2 \cdot q_2 + \dots + Q_n \cdot q_n \quad (1.4)$$

$Q_{1,2,\dots,n}$... vnější buzení, síly bez potenciálu

K sestavení Lagrangeových rovnic druhého druhu se provedou derivace vztahů (1.1) až (1.4) podle zobecněných souřadnic q, \dot{q} .

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial q_i} + \frac{\partial E_D}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial E_p}{\partial q_i} = \frac{\partial A}{\partial q_i} \quad \text{kde, } i = 1, 2, \dots, n$$

Po zderivování dostaneme soustavu n diferenciálních rovnic druhého řádu.

$$\begin{aligned} m_1 \cdot \ddot{q}_1 + b_1 \cdot \dot{q}_1 - b_2 \cdot (\dot{q}_2 - \dot{q}_1) + k_1 \cdot q_1 - k_2 \cdot (q_2 - q_1) &= Q_1(t) \\ m_2 \cdot \ddot{q}_2 + b_2 \cdot (\dot{q}_2 - \dot{q}_1) - b_3 \cdot (\dot{q}_3 - \dot{q}_2) + k_2 \cdot (q_2 - q_1) - k_3 \cdot (q_3 - q_2) &= Q_2(t) \\ \vdots & \\ m_n \cdot \ddot{q}_n + b_n \cdot (\dot{q}_n - \dot{q}_{n-1}) + k_n \cdot (q_n - q_{n-1}) &= Q_n(t) \end{aligned} \quad (1.5)$$

Tyto rovnice pro vynucené kmitání tlumené soustavy se v literatuře [1] objevují v maticovém tvaru

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{Q}(t) \quad (1.6)$$

Význam jednotlivých symbolů v rovnici:

M ... matice hmotnosti

q ... matice zobecněných souřadnic a jejich derivace

B ... matice tlumení

K ... matice tuhosti pružin

Q ... matice buzení

2.2 Kmitání se dvěma stupni volnosti

Pro kmitání se dvěma stupni volnosti má soustava rovnic (1.5) dvě diferenciální rovnice druhého řádu. Řešení tohoto typu rovnic se provede ve dvou krocích, jako první se vyřeší homogenní část rovnice a až poté partikulární integrál. V textu [4] se analyzuje kmitání v maticovém tvaru. Homogenní část řešení má tedy podobu

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (1.7)$$

Kde matice \mathbf{M} , \mathbf{B} , \mathbf{K} mají konstantní členy. Při hledání vlastních čísel se použije postup pro snížení řádu rovnice zavedením nové proměnné

$$\mathbf{p} = \dot{\mathbf{q}}. \quad (1.8)$$

Rovnice (1.7) a (1.8) můžeme zapsat v maticovém tvaru

$$\begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{M} \\ \mathbf{E} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

kde \mathbf{E} je jednotková matice. Nebo ve zkráceném maticovém tvaru

$$\bar{\mathbf{m}}\dot{\bar{\mathbf{q}}} + \bar{\mathbf{k}}\bar{\mathbf{q}} = \bar{\mathbf{0}}. \quad (1.10)$$

Horní pruh udává rozšířenou matici soustavy. Řešení této rovnice má tvar

$$\bar{\mathbf{q}}_h = \bar{\mathbf{q}}_{h0} e^{\lambda t}. \quad (1.11)$$

Po dosazení rovnice (1.11) do (1.10) a po úpravě vyjde

$$(\lambda \cdot \bar{\mathbf{m}} + \bar{\mathbf{k}})\bar{\mathbf{q}}_{k0} = \bar{\mathbf{0}}, \quad (1.12)$$

aby měla tato soustava rovnic netriviální řešení, její frekvenční determinant musí být roven nule. Toto je nutná a postačující podmínka. Frekvenční determinant je tedy

$$\det|\lambda \cdot \bar{\mathbf{m}} + \bar{\mathbf{k}}| = 0, \quad (1.13)$$

λ ... vlastní čísla soustavy ve tvaru $\lambda = \lambda_{\text{Re}} \pm i \cdot \lambda_{\text{Im}}$

Vlastní čísla jsou pro netlumenou soustavu v komplexním tvaru. Reálná část, která určuje zda je systém stabilní, odpovídá tlumení a imaginární část je vlastní frekvence tlumeného kmitání. Je-li reálná část kladná dynamický systém je nestabilní, záporná hodnota znamená stabilitu systému. [5]

Výsledný výstup ze systému je součtem homogenní části a partikulárního integrálu. Tvar tohoto integrálu je závislý na buzení. Jedním ze způsobů řešení je odhad odezvy systému v závislosti na tvaru buzení. Nehomogenní rovnice má tvar

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{Q}(t) \quad (1.14)$$

Jedním z nejčastějších případů je buzení harmonické. Pohybová rovnice má poté tvar

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{b}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{k}\mathbf{q} = \mathbf{Q}_0 e^{i\varpi t} \quad (1.15)$$

\mathbf{Q}_0 ... amplituda budících sil, v obecném případě může být v komplexním tvaru

ϖ ... budící frekvence

Lze odhadnout, že odezva bude mít harmonický charakter jako pravá strana rovnice a frekvenci rovnou budící frekvenci. Partikulární integrál bude tedy ve tvaru

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_p = \mathbf{q}_0 e^{i\omega t} \quad (1.16)$$

Po dosazení výrazu (1.16) do (1.15) a pro obecný případ amplitudy kmitání v komplexním tvaru se obdrží vztah pro odezvu systému na harmonický vstup ve tvaru [4]

$$\mathbf{q}_0 = \mathbf{q}_{\text{Re}} + i \cdot \mathbf{q}_{\text{Im}} = (-\omega^2 \cdot \mathbf{m} + i \cdot \omega \cdot \mathbf{b} + \mathbf{k})^{-1} \mathbf{Q}_0. \quad (1.17)$$

2.3 Kmitání s n stupni volnosti

Modely soustav se soustředěnými parametry s n stupni volnosti dovolují s dostatečnou přesností řešit složité úlohy kmitání nejrůznějších strojních konstrukcí i v případech, kdy analytické řešení v uzavřeném tvaru vycházející ze spojitých modelů není možné. [4] Pohybové rovnice modelů se soustředěnými parametry jsou sestaveny z obyčejných lineárních diferenciálních rovnic s konstantními parametry. Kvůli vysokému počtu rovnic je numerické řešení prováděno na počítačích.

Model se soustředěnými parametry se získá ze spojitého modelu pomocí metody přímé fyzikální diskretizace kontinua, metodou konečných prvků nebo metodou hraničních prvků. Soustavy pohybových rovnic získané metodou konečného prvku mohou mít prvky vektoru \mathbf{q} fyzikální veličiny jako výchylky, natočení, momenty, posouvající síly, tedy vyšší derivace obecných souřadnic.

Nejjednodušším případem je volné netlumené kmitání soustavy s n stupni volnosti. Pohybové rovnice v maticovém zápisu mají tvar

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (1.18)$$

Matice hmotnosti $\mathbf{M} \in R^{n,n}$ je symetrická a pozitivně definitní, matice tuhosti $\mathbf{K} \in R^{n,n}$ je také symetrická a bývá pozitivně definitní nebo semidefinitní [1]. Řešení rovnice je ve tvaru

$$\mathbf{x} = \mathbf{v} e^{i\Omega t} \quad (1.19)$$

kde Ω je úhlová frekvence a \mathbf{v} je vektor amplitud. Při hledání vlastních hodnot nebo také vlastních úhlových frekvencí Ω_i se dosadí rovnice (1.19) do (1.18). Vzniklá rovnice

$$(-\lambda \mathbf{M} + \mathbf{K})\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (1.20)$$

má netriviální řešení za podmínky, že determinant matice stojící u \mathbf{v} je roven nule.

$$\det |-\lambda \mathbf{M} + \mathbf{K}| = 0 \quad (1.21)$$

Kde $\lambda = \Omega^2$. Determinant (1.21) se nazývá frekvenční a jeho rozepsáním se dostane charakteristická nebo také frekvenční rovnice, jejíž kořeny jsou vlastní hodnoty λ_i . Odmocněním se získají vlastní úhlové frekvence Ω_i [4].

Soustavy s více stupni volnosti jsou většinou ovlivňovány tlumením a vnějšími silami. Hovoříme tedy o vynuceném kmitání tlumené soustavy a pohybové rovnice jsou ve tvaru

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{Q}(t) \quad \mathbf{M}, \mathbf{B}, \mathbf{K} \in R^{n,n} \quad (1.22)$$

Matice \mathbf{B} , \mathbf{K} jsou obecně nesymetrické. Pro počáteční podmínky $\mathbf{q}(0), \dot{\mathbf{q}}(0)$ má pohybová rovnice (1.22) řešení ve tvaru

$$\mathbf{q}(t) = \sum_{i=1}^{2n} \mathbf{v}_i \mathbf{w}_i^T e^{\lambda_i t} \left[\int_0^t \mathbf{Q}(\tau) e^{-\lambda_i \tau} d\tau + \mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}(0) + \mathbf{B}\mathbf{q}(0) + \lambda_i \mathbf{M}\mathbf{q}(0) \right]. \quad (1.23)$$

kde $\mathbf{v}_i, \mathbf{w}_i$ jsou pravostranné a levostranné vlastní vektory, které se vypočítají z rovnic

$$\begin{aligned} (\lambda_i^2 \mathbf{M} + \lambda_i \mathbf{B} + \mathbf{K}) \mathbf{v}_i &= \mathbf{0} & i = 1, \dots, 2n \\ \mathbf{w}_i^T (\lambda_i^2 \mathbf{M} + \lambda_i \mathbf{B} + \mathbf{K}) &= \mathbf{0} & i = 1, \dots, 2n \end{aligned} \quad (1.24)$$

Řešení (1.23) je dané součtem pohybu vyvolaného nenulovými počátečními podmínkami a pohybu vyvolaného buzením $\mathbf{Q}(t)$. Je-li $\mathbf{Q}(t)$ funkcí jako např. nižší transcendent, exponenciála nebo polynom lze konvolutorní integrál přímo vyjádřit funkcemi a pokud bude buzením harmonická funkce, po utlumení přechodového děje se pro vlastní hodnoty ve tvaru

$$\lambda_i = -\delta_i + i \cdot \Omega_i$$

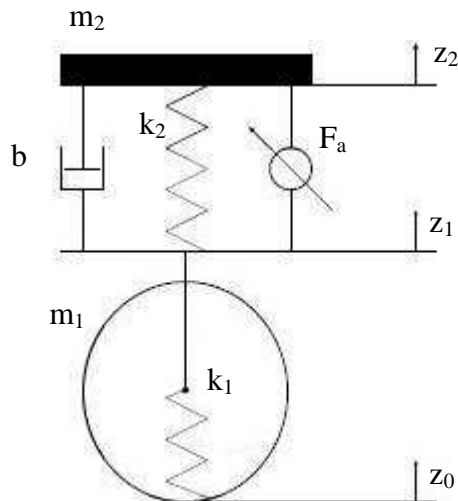
kmitající soustava ustálí na harmonickém kmitání popsaném vztahem

$$\mathbf{q}(t) = \sum_{i=1}^{2n} \frac{\mathbf{v}_i \mathbf{w}_i^T}{i\omega - \lambda_i} \mathbf{Q}_0 e^{i\omega t} . \quad (1.25)$$

Soustava je v rezonanci pro budící úhlové frekvence ω blízké imaginární části některé vlastní hodnoty λ_i , která má malou reálnou část δ_i . Poté tento zlomek v (1.25) je dominantní vůči ostatním a soustava kmitá tvarem blízkým vlastnímu tvaru kmitání odpovídajícímu pravostrannému vlastnímu vektoru \mathbf{v}_i . Tvar kmitání afinní vůči levostrannému vlastnímu vektoru \mathbf{w}_i lze zjistit experimentálně buzením úhlovou frekvencí v blízkosti rezonance jediným zdrojem, který se postupně přesouvá na místa soustředěných hmotností a odezva se měří v jediném místě soustavy [4].

3. Čtvrtinový model automobilu

Modelovou soustavou se dvěma stupni volnosti byl zvolen čtvrtinový model automobilu. Je to základní model popisující chování vozidla v jedné ose, který obsahuje jedno kolo, tlumič, pružiny, aktivní tlumení a čtvrtinu hmoty automobilu. Používá se v automobilovém průmyslu k určení dynamické odezvy na nerovnosti vozovky, k optimalizaci a ke kontrole jízdních vlastností. Standartně se modeluje podle schématu na obrázku 1.



Obr. 1: Čtvrtinový model automobilu [3]

Čtvrtinový model vytvořený pro tuto práci je zjednodušen zanedbáním síly aktivního tlumení $F_a = 0\text{N}$, která není pro účely práce podstatná. Význam jednotlivých symbolů je uveden u odvození pohybových rovnic.

Převedení modelu do matematického zápisu pomocí Lagrangeových rovnic druhého druhu je uvedeno níže. Lagrangeovy rovnice jsou zvoleny kvůli jejich vhodnosti k analýze kmitavých dějů. Na tomto modelu jsou demonstrovány odezvy soustavy se dvěma stupni volnosti na různé vstupní signály.

4. Odvození pohybových rovnic čtvrtinového modelu

Jak je zmíněno v úvodu práce, pro sestavení pohybových rovnic (1.5) je nutné vyjádřit kinetickou, potenciální energii a zatlumenou funkci systému a práci vnějších sil.

Pro kinetickou energii čtvrtinového modelu platí

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot \dot{z}_2^2 + \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot \dot{z}_1^2, \quad (2.1)$$

potenciální energie

$$E_p = \frac{1}{2} \cdot k_2 \cdot (z_2 - z_1)^2 + \frac{1}{2} \cdot k_1 \cdot (z_1 - z_0)^2, \quad (2.2)$$

zatlumená funkce

$$E_D = \frac{1}{2} \cdot b \cdot (\dot{z}_2 - \dot{z}_1)^2, \quad (2.3)$$

práce vnějších sil

$$A = F_a \cdot z_2 - F_a \cdot z_1. \quad (2.4)$$

Po provedení příslušných derivací dle zobecněných souřadnic z_1 a z_2 a následné úpravě dostaneme pohybové rovnice čtvrtinového modelu ve tvaru

$$\begin{aligned} m_2 \cdot \ddot{z}_2 + k_2 \cdot (z_2 - z_1) + b \cdot (\dot{z}_2 - \dot{z}_1) &= F_a \\ m_1 \cdot \ddot{z}_1 + k_1 \cdot (z_1 - z_0) - k_2 \cdot (z_2 - z_1) - b \cdot (\dot{z}_2 - \dot{z}_1) &= -F_a \end{aligned} \quad (2.5)$$

Význam a hodnoty jednotlivých symbolů v rovnicích

m_1 ... hmotnost kola a neodpružené části automobilu	$m_1 = 1500\text{kg}$
m_2 ... hmotnost odpružené části automobilu	$m_2 = 10900\text{kg}$
b ... tlumení	$b = 50000\text{Nsm}^{-1}$
k_1 ... tuhost pneumatiky	$k_1 = 4900\text{kNm}^{-1}$
k_2 ... tuhost péra	$k_2 = 650\text{kNm}^{-1}$
F_a ... síla od aktivního tlumení	
z_0 ... poloha nerovností vozovky	
z_1 ... poloha osy kola	
z_2 ... poloha odpružené části automobilu	

Tyto rovnice jsou základem k další analýze kmitání a sestavení modelů použitých v této práci.

5. Simulační modely

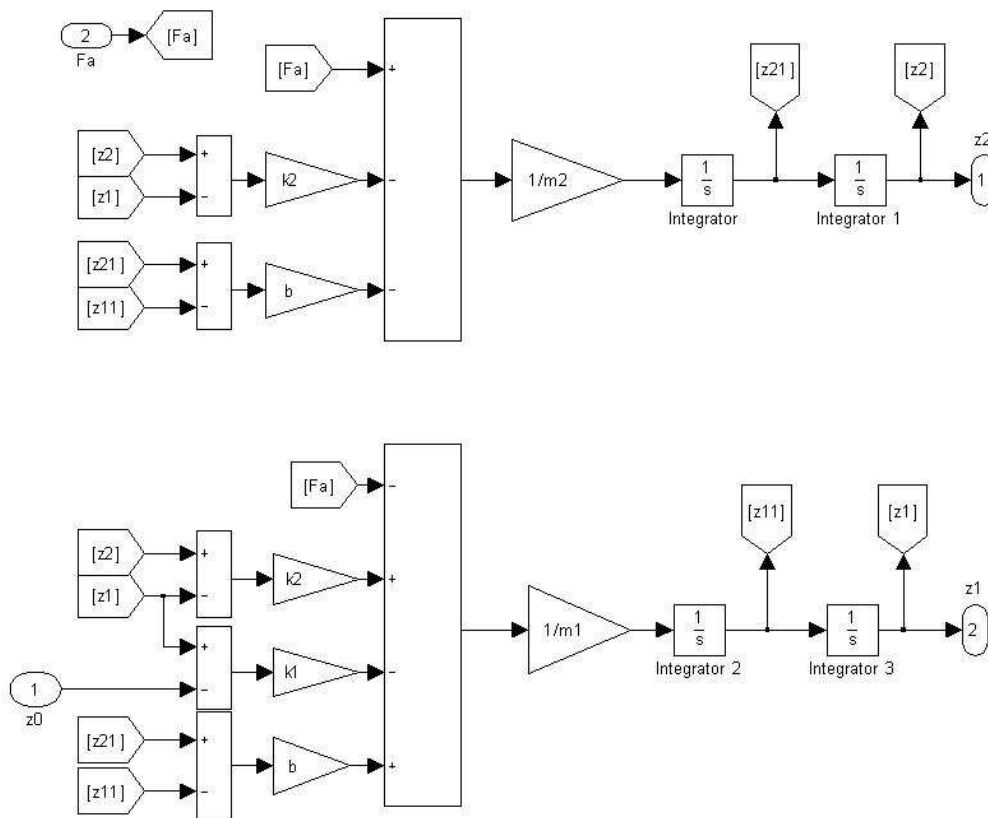
Simulační model je zjednodušení a převedení reálné soustavy na matematický popis, který udává představu o chování tohoto systému a o reakcích na různé vstupy. Modely vycházejí z pohybových rovnic (2.5). Modely byly vytvořeny v programu Matlab/Simulink, který je vhodný pro numerické výpočty, modelování, počítačové simulace, měření a zpracování signálu [2]. Pro pozdější výukové účely tohoto příkladu byly pro tvorbu simulačního modelu zvoleny tři různé přístupy.

5.1 Model Simulink

Pohybové rovnice (2.5) se upraví do potřebné podoby vyjádřením členu s nejvyšší derivací obecné souřadnice \ddot{z}_1, \ddot{z}_2 .

$$\begin{aligned} m_2 \cdot \ddot{z}_2 &= F_a - k_2 \cdot (z_2 - z_1) - b \cdot (\dot{z}_2 - \dot{z}_1) \\ m_1 \cdot \ddot{z}_1 &= -F_a + k_2 \cdot (z_2 - z_1) - k_1 \cdot (z_1 - z_0) + b \cdot (\dot{z}_2 - \dot{z}_1) \end{aligned} \quad (3.1)$$

K sestavení modelu v prostředí Simulink jsou zapotřebí násobící, sumační a integrační bloky, které se sestaví dle schématu na obrázku 2.



Obr. 2: Schéma modelu Lagrangeových rovnic v Simulinku

Výhodou tohoto modelu je, že výstupní veličina se může měnit bez zásahu do sestaveného modelu, pouze přesunutím výstupního monitoru. Nevýhodou je možná nepřehlednost a rozsáhlost při řešení soustav s vyšším počtem stupňů volnosti.

5.2 Stavový model

Stavový model je matematický popis dynamického systému, který definuje stavy a různé přechody mezi nimi. V případě čtvrtinového modelu automobilu jsou vnitřními stavy systému polohy z_1, z_2 a rychlosti odpružené a neodpružené části automobilu \dot{z}_1, \dot{z}_2 . Tento model také vychází z pohybových rovnic a obecně je popsán maticovými rovnicemi

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A \cdot x + B_S \cdot u \\ y &= C \cdot x + D \cdot u \end{aligned} \quad (3.2)$$

x ... vnitřní stavy systému

y ... výstupy ze systému

u ... vstupy do systému

A, B_S, C, D ... matice popisující vnitřní strukturu systému

Vstupy do systému jsou nerovnosti vozovky z_0 a síla aktivního tlumení F_a , která se pro účely této práce zanedbá a bere se rovna $F_a = 0\text{N}$. Výstupy jsou polohy odpružené a neodpružené části automobilu z_1, z_2 .

Matice A, B_S, C, D popisují různé závislosti potřebné k sestavení stavového modelu.

Matice A – popisuje vztahy mezi vnitřními stavy systému a jejich derivacemi

$$A = \begin{pmatrix} z_2 & \dot{z}_2 & z_1 & \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \ddot{z}_2 & -\frac{k_2}{m_2} & -\frac{b}{m_2} & \frac{k_2}{m_2} & \frac{b}{m_2} \\ \dot{z}_1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \ddot{z}_1 & \frac{k_2}{m_1} & \frac{b}{m_1} & -\frac{k_2 + k_1}{m_1} & -\frac{b}{m_1} \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

Matice B_S – popisuje vztahy mezi vstupy do systému a derivacemi vnitřních stavů systému

$$B_S = \begin{pmatrix} z_0 & F_a \\ \dot{z}_2 & 0 & 0 \\ \ddot{z}_2 & 0 & \frac{1}{m_2} \\ \dot{z}_1 & 0 & 0 \\ \ddot{z}_1 & \frac{k_1}{m_1} & -\frac{1}{m_1} \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

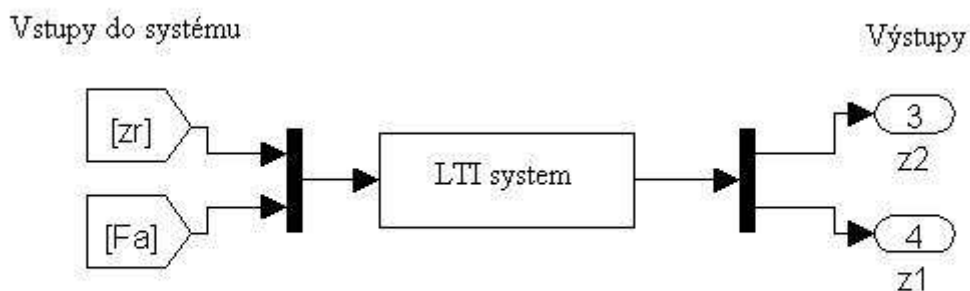
Matice C - popisuje vztahy mezi vnitřními stavy a výstupy systému

$$C = \begin{pmatrix} z_2 & \dot{z}_2 & z_1 & \dot{z}_1 \\ z_2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ z_1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

Matice D - popisuje vztahy mezi vstupy a výstupy systému

$$D = \begin{pmatrix} z_0 & F_a \\ z_2 & 0 & 0 \\ z_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

V programu Matlab, Simulink se stavový model získá pomocí bloku LTI system, který má za své parametry matice A , B_S , C a D .

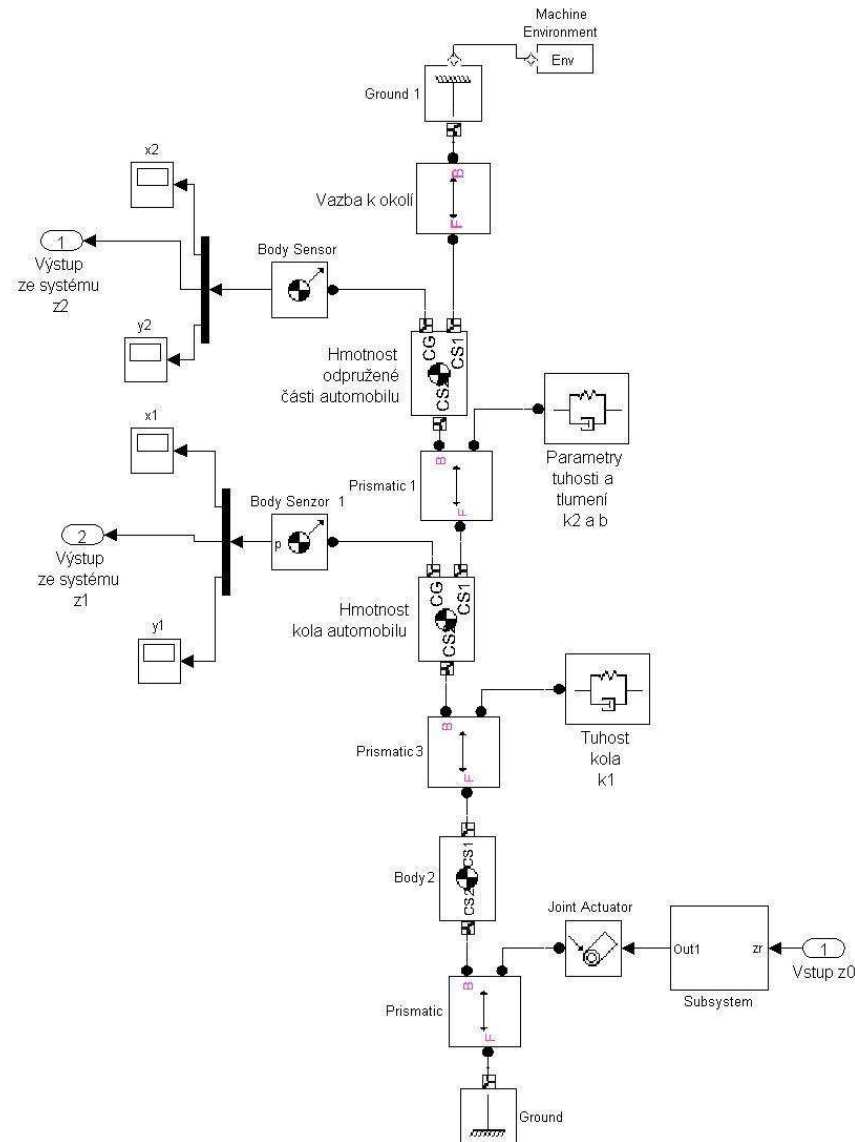


Obr. 3: Schéma stavového modelu v programu Matlab

Tímto způsobem se mohou popsat systémy se složitou vnitřní strukturou a s více vstupy a výstupy [6], dále je vhodný pro frekvenční analýzu kmitání. Nevýhodou stavového modelu je, že pokud se na výstupu požaduje jiná veličina než veličina na začátku zvolená jako výstupní, musí se změnit matice C a D než se může veličina analyzovat.

5.3 Model SimMechanics

SimMechanics je podknižovnou Simulinku s nástroji určenými k modelování a simulaci kinematiky a dynamiky mechanismů s tuhými tělesy. V SimMechanics nejde o modelování pomocí bloků, které představují matematické operace, ale bloky představujícími přímo fyzické části strojů a vazby mezi nimi, proto k sestavení modelu v SimMechanics není nutná znalost pohybových rovnic. Těmto blokům dále přiřadíme parametry jako jsou hmotnost, tuhost pružin a tlumení tlumičů ve vazbách. Matematický model si dále SimMechanics vytváří sám, což je jeho hlavní výhodou.

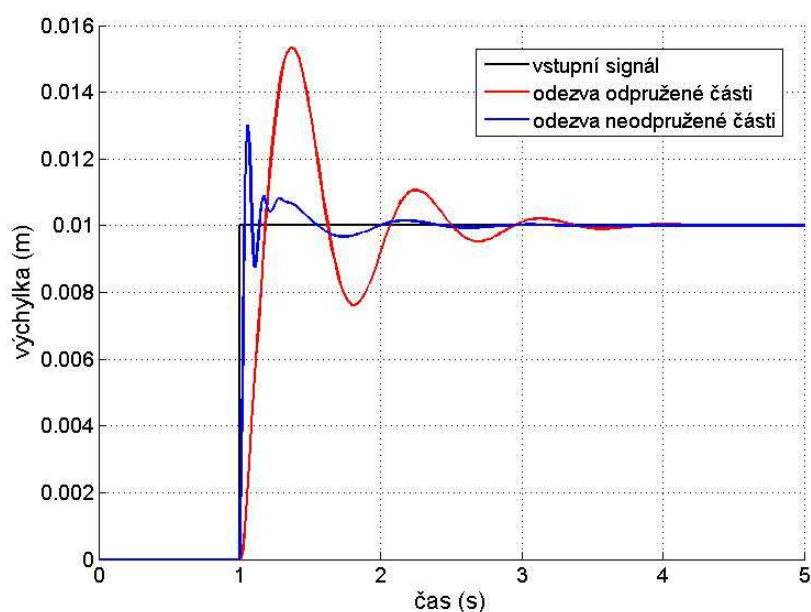


Obr. 4: Schéma čtvrtinového modelu vytvořené v SimMechanics

6. Odezva čtvrtinového modelu na různé vstupy

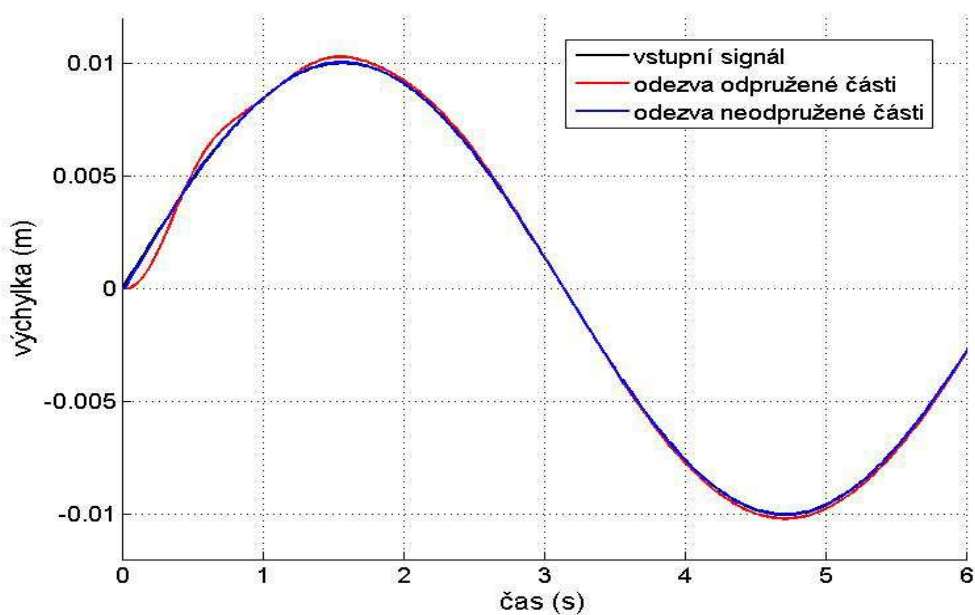
Pro kmitající systém je důležitá odezva na různé signály. Všechny modely popsané výše zobrazují stejnou soustavu, proto jsou jejich výstupy stejné. Porovnání těchto modelů bylo provedeno na skokovém signálu o hodnotě z_0 . Rozdíly v poloze odpružené části automobilu z_2 dvou modelů byly v řádu 10^{-14} m. Takto malé odchylky můžeme zanedbat.

Vstupní skokový signál



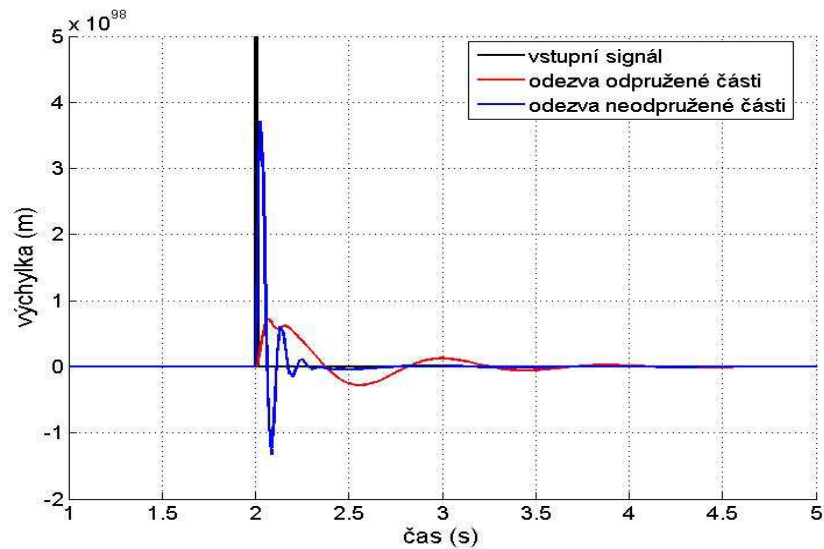
Obr. 5: Odezva čtvrtinového modelu na skokový signál o velikosti $z_0 = 0,01$ m

Harmonický signál



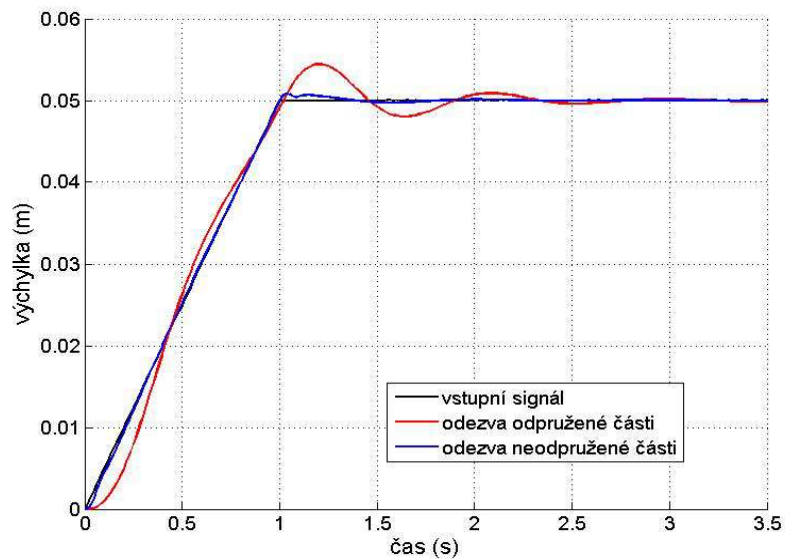
Obr. 6: Odezva čtvrtinového modelu na harmonický (sinusový) signál

Diracův impuls



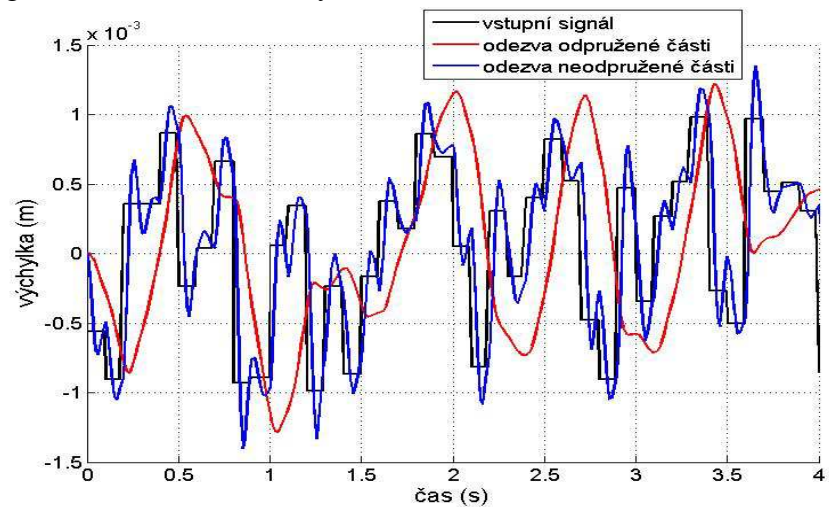
Obr. 7: Odezva čtvrtinového modelu na impuls blížký Diracovu

Lineárně rostoucí vstup



Obr.8: Odezva čtvrtinového modelu na lineárně rostoucí signál

Stochastický signál (nerovnosti vozovky)



Obr. 9: Odezva čtvrtinového modelu na náhodně generované skoky (nerovnosti vozovky)

U harmonického vstupního buzení se odezva systému skládá z přechodového jevu a dále ustálení na harmonický pohyb, což je patrné z odezvy na sinusový signál na obr. 6. Většinou se hodnotí přechodový děj a následné ustálení není tak podstatné pokud nedochází k rezonanci.

Z reakcí na vstupy vyplývá, že odezvy jsou závislé na velikosti a rychlosti buzení. U Diracova impulsu jsou výchylky největší kvůli nejsilnějšímu vstupu. Při porovnání odezvy na lineární vstup a skokový signál je patrné, že náhlá změna vyvolá větší vychýlení než pozvolné buzení. Z odezvy na skokový signál a Diracův impuls je patrné i vzájemné ovlivňování odpružené a neodpružené části.

Neodpružená část (pneumatika) rychleji sleduje změny vozovky kvůli vysoké hodnotě tuhosti a absenci tlumení než odpružená část (karoserie). Zvýšení hodnoty tuhosti u pneumatiky by ještě zrychlilo odezvu na změny, ale zvětšilo by výchylku a zvýšil by se počet kmitů okolo rovnovážné polohy, zatímco nižší hodnota by negativně ovlivnila dobu za kterou se kmitání uklidní. Odpružená část pomaleji sleduje změny vozovky kvůli menší hodnotě tuhosti pružiny a díky zapojenému tlumení, které výrazně omezuje pohyb odpružené a neodpružené části vůči sobě. Při menší hodnotě tlumení by se tyto části více ovlivňovaly a ustálení do rovnovážné polohy by trvalo déle, naopak při zvětšení tlumení by byl pohyb pneumatiky a karoserie vůči sobě omezen až po souhlasný pohyb těchto částí. Kvůli pozitivním i negativním změnám při zvětšení či zmenšení hodnoty tlumení a tuhosti je potřeba optimalizovat tyto parametry pro potřeby uživatele.

7. Závěr

Cílem práce je popsat analýzu kmitání soustav s více stupni volnosti a použít tento postup na modelové soustavě se dvěma stupni volnosti jako ukázkový příklad pro účely výuky dynamiky. Vytvořit model pomocí programu Matlab/Simulink v několika variantách (model Simulink, stavový model a model SimMechanics), porovnat je a vyhodnotit jejich chování pro různé vstupy jako první krok při návrhu a optimalizaci jízdních vlastností, které lze vyhodnocovat z tohoto modelu.

Úvod práce se zaměřuje na teoretické vyjádření pohybových rovnic a jejich analytické řešení pro vyjádření odezvy na harmonické buzení u obecné soustavy se dvěma nebo více stupni volnosti. Dále jsou sestaveny pohybové rovnice Lagrangeovou metodou pro čtvrtinový model automobilu.

Znázorněním pohybových rovnic v Simulinku je vytvořen první z modelů. Tento model není náročný na sestavení a jeho hlavní výhoda tkví v možnosti kdykoliv změnit požadovanou výstupní veličinu bez zásahu do modelu, ale naopak analýza systému s větším počtem stupňů volnosti by se tímto způsobem nedala řešit kvůli vysokému počtu rovnic a vazeb mezi nimi, tím by se model stal nepřehledným. Pokud se pohybové rovnice dále upraví a vyjádří se z nich závislosti mezi stavy systému, jejich derivacemi, vstupy do systému a výstupy z něj dostaneme stavový model soustavy. Předností stavového modelu je analýza kmitající soustavy ve frekvenčním spektru. Další výhodou je snadný popis soustav se složitou vnitřní strukturou. Za nevýhodu se může považovat, že výstupní veličina se volí před tvorbou modelu a pokud je potřeba analyzovat nějakou jinou veličinu musí se model částečně předělat. Třetí sestavený model, v podknižovně SimMechanics, nepotřebuje ke zhotovení znalost žádných rovnic popisujících systém jako tomu bylo u předchozích modelů. K sestavení tohoto modelu je zapotřebí pouze znalost fyzické podoby systému, který chceme analyzovat. Pohybové rovnice si poté SimMechanics vytvoří automaticky.

Všechny tyto modely charakterizují stejnou kmitající soustavu, proto musí být jejich výstupy shodné. Jejich srovnání bylo provedeno na jednotkovém skoku a rozdíl jednotlivých výstupů byl zanedbatelný. Odezva kola a neodpružené části automobilu se liší od vstupního signálu méně než odezva odpružené části kvůli velmi vysoké hodnotě tuhosti pneumatiky. Celková odezva čtvrtinového automobilu se skládá z přechodového děje a následného ustálení. Pohyby obou částí automobilu se navzájem ovlivňují, to je zřejmé z odezvy na skokový signál a Diracův impuls. V dalších pracích by bylo vhodné se zabývat návrhem a optimalizací parametrů tlumení a tuhosti pro různé požadavky zrychlení nebo výchylek odpružené části automobilu.

Závěrem můžeme konstatovat, že všechny vytyčené cíle byly splněny.

Literatura a odkazy

- [1] Brepta R., Půst L., Turek F.: Mechanické kmitání, Sobotáles, 1994
- [2] Stejskal V., Okrouhlík M.: Kmitání s Matlabem, Česká technika, 2001
- [3] Zuščík M.: Návrh semiaktívneho odpruženia vozidla, disertační práce SjF, STU Bratislava, 2010
- [4] Malenovský E.: Kmitání se dvěma stupni volnosti, volné kmitání [on-line]. 2005
[Citováno dne 2011-05-04].
Dostupné z: <http://www.umt.fme.vutbr.cz/~pkrejci/opory/dynamika/kapitola_8.html#sestaveni_pohybovych_rovnic>
- [5] Malenovský E.: Metody řešení rotorových soustav – modální vlastnosti [on-line] 2007
[Citováno dne 2011-05-06]. Dostupné z: <http://www.umt-old.fme.vutbr.cz/~pkrejci/opory/dyn_rot/kapitola_6.html>
- [6] Turek M.: Tvorba stavového modelu [on-line] 2007 [Citováno dne 2011-05-12]
Dostupné z: <http://uai.fme.vutbr.cz/lab/a4-716/vyuka/rir/pdf/stavovy_model.pdf>

Seznam použitých symbolů

$b_{1,2,\dots,n}$	konstanta tlumení kmitání [$\text{N}\cdot\text{s}\cdot\text{m}^{-1}$]
E_D	zatlumená funkce (disipativní energie) [J]
E_k	kinetická energie [J]
E_p	potenciální energie [J]
A	práce vnějších sil [J]
$k_{1,2,\dots,n}$	tuhosti pružin kmitající soustavy [$\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$]
$m_{1,2,\dots,n}$	hmotnosti jednotlivých částí kmitající soustavy [kg]
$q_{1,2,\dots,n}$	výchylka kmitajících těles (zobecněná souřadnice) [m]
$\dot{q}_{1,2,\dots,n}$	zobecněná souřadnice rychlosti [$\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$]
$\ddot{q}_{1,2,\dots,n}$	zobecněná souřadnice zrychlení [$\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$]
$Q_{1,2,\dots,n}$	vnější buzení, síly bez potenciálu [N]
F_a	síla od aktivního tlumení [N]
z_0	poloha nerovností vozovky [m]
z_1	poloha osy kola [m]
z_2	poloha odpružené části automobilu [m]
\mathbf{v}_i	pravostranné vlastní vektory
\mathbf{w}_i	levostranné vlastní vektory
\mathbf{u}	vektor vstupů do systému pro stavový model
\mathbf{x}	vektor vnitřních stavů systému pro stavový model
\mathbf{y}	vektor výstupů ze systému pro stavový model
\mathbf{B}	matice tlumení
\mathbf{K}	matice tuhosti pružin
\mathbf{M}	matice hmotnosti
\mathbf{q}	matice zobecněných souřadnic a jejich derivace
\mathbf{Q}	matice buzení
Q_0	amplituda budících sil
A, B_s, C, D	matice popisující vnitřní strukturu stavového modelu
λ	vlastní čísla soustavy
ϖ	budící frekvence [$\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$]

Seznam příloh

- Příloha 1 soubor konstanty.m se vstupními parametry na přiloženém CD
- Příloha 2 soubor model.mdl se srovnáním modelů a s odezvou na různé vstupy
na přiloženém CD