VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A BIOMECHANIKY

INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND BIOMECHANICS

NAPĚŤOVÁ ANALÝZA ŠROUBŮ S OKEM

STRESS ANALYSIS OF EYE BOLTS

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE Pavel Kareš

AUTHOR

VEDOUCÍ PRÁCE Ing. Jiří Vaverka, Ph.D.

SUPERVISOR

BRNO 2024

Zadání bakalářské práce

Ústav:	Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky
Student:	**Pavel Kareš**
Studijní program:	Základy strojního inženýrství
Studijní obor:	Základy strojního inženýrství
Vedoucí práce:	**Ing. Jiří Vaverka, Ph.D.**
Akademický rok:	2023/24

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Napěťová analýza šroubů s okem

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Šrouby s okem jsou zvláštním typem šroubů, jejichž hlava má podobu oka sloužícího např. k uchycení nebo napnutí kabelů, lan apod. Oko má zakřivený tvar (nejčastěji kruhový) a může být uzavřené i otevřené. Obvykle jej lze modelovat jako silně zakřivený prut, a tedy provést pro dané zatížení výpočet napětí pomocí přístupů pružnosti a pevnosti. Detailnější výsledky lze získat analýzou pomocí metody konečných prvků.

Cíle bakalářské práce:

1.) Zpracovat přehled používaných šroubů (popř. vrutů) s okem. Uvést základní části těchto šroubů, jejich různé typy a provedení, vhodné/nevhodné aplikace, výhody a nevýhody, používané materiály, zajímavosti apod.

2.) Na základě získaných poznatků z bodu 1 naformulovat dvě reprezentativní úlohy pro následný analytický a numerický výpočet napětí v oku reálného šroubu. První úloha bude zahrnovat šroub s otevřeným okem, druhá s uzavřeným.

3.) Provést analytické řešení obou úloh a posoudit věrohodnost výsledků (komentovat možné odchylky od prutových předpokladů).

4.) Provést numerické řešení v softwaru Ansys (Workbench nebo APDL). Srovnat numerické a analytické výsledky.

Seznam doporučené literatury:

JANÍČEK, Přemysl; ONDRÁČEK, Emanuel; VRBKA, Jan; BURŠA, Jiří. Mechanika těles: pružnost a pevnost I. 3. vyd. Brno: CERM, 2004, 287 s. ISBN 80-214-2592-X.

BORESI, Arthur P.; SCHMIDT, Richard J.; SIDEBOTTOM, Omar M. Advanced Mechanics of Materials. 5. vyd. John Wiley & Sons, 1993. 811 s. ISBN: 978-0471551577.

Ansys® Workbench, Release 2023 R2, Help System, Workbench User's Guide, ANSYS, Inc.

Internetové stránky výrobců a prodejců (českých i zahraničních).

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2023/24

V Brně, dne

L. S.

prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc.	doc. Ing. Jiří Hlinka, Ph.D.
ředitel ústavu	děkan fakulty

Abstrakt

Bakalářská práce se zabývá výpočtem napětí, které vzniká zatížením šroubu s otevřeným, popřípadě uzavřeným okem. V první části práce je uveden přehled šroubů s okem, jejich využití a jejich rozdíly. Dále je popsán teoretický základ, který je nutný znát pro správné řešení úloh v druhé části práce. V druhé části práce jsou pak uvedeny celkem čtyři příklady na výpočet napětí. První dvě úlohy jsou řešeny pro šroub s otevřeným okem a poslední dvě pro šroub s uzavřeným okem. Pro každý typ oka jsou tedy vyřešeny dva příklady, vždy jedna úloha pro namáhání v ose šroub a jedna úloha pro namáhání kolmo k ose šroubu. V každé úloze je provedena analýza příkladu a určení výsledných vnitřních účinků (VVÚ). Ze znalosti VVÚ je pak nalezeno kritické místo a v něm je určeno maximální napětí, nejdříve teorii slabě zakřivených prutů a následně teorii silně zakřivených. Dále je pomocí každého maximálního napětí vypočítána bezpečnost. Na závěr každého příkladu je také provedena analýza numerickou metodou v softwaru ANSYS Workbench. Následně je provedeno porovnání výsledků z analytického výpočtu a ze softwaru ANSYS.

Summary

The bachelor's thesis focuses on the calculation of stress arising from the loading of an open or closed eye bolts. The first part of the thesis provides an overview of eye bolts, their uses, and their differences. It also describes the theoretical background necessary for correctly solving the tasks in the second part of the thesis. The second part presents a total of four examples of stress calculations. The first two examples are solved for an open eye bolts, and the last two for a closed eye bolt. For each type of eye, two examples are solved: one task for axial loading and one task for loading perpendicular to the bolt's axis. Each task includes an analysis of the example and determination of the internal stress resultants (ISR). From the knowledge of the ISR, the critical point is found, and the maximum stress is determined, first using the theory of straight beams and then the theory of curved beams. Additionally, the safety factor is calculated using each maximum stress. At the end of each example, an analysis is also performed using the numerical method in the ANSYS Workbench software. Finally, a comparison is made between the results from the analytical calculation and those from the ANSYS software.

Klíčová slova

Šroub s okem, šroub s otevřeným okem, šroub s uzavřeným okem, slabě zakřivený prut, silně zakřivený prut, napětí, bezpečnost, ANSYS

Keywords

Eye bolt, open eye bolt, closed eye bolt, curved beam, stress, safety factor, ANSYS

Bibliografická citace

KAREŠ, Pavel. *Napěťová analýza šroubů s okem.* Brno, 2024. Dostupné také z: https://www.vut.cz/studenti/zav-prace/detail/157462. Bakalářská práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky. Vedoucí práce Jiří Vaverka.

Čestné prohlášení

Prohlašuji, že předloženou bakalářskou práce jsem vypracoval samostatně pod vedením svého vedoucího bakalářské práce pana Ing. Jiřího Vaverky za použití uvedené literatury.

V Brně dne

Pavel Kareš

Poděkování

Rád bych upřímně poděkoval svému vedoucímu bakalářské práce panu Ing. Jiřímu Vaverkovi za pomoc, cenné rady, čas a ochotu při tvorbě mé bakalářské práce. Také bych chtěl poděkovat rodině a přátelům, kteří mě podporovali během celé doby mého studia.

Obsah

1 Úvod 12
2 Šrouby s okem 13
2.1 Význam šroubů s okem 13
2.2 Popis částí šroubu s okem 13
2.3 Přehled používaných šroubů s okem 14
2.4 Používané materiály 16
3 Teoretický základ 18
3.1 Lineární pružnost 17
3.1.1 Energie napjatosti a deformační práce 17
3.1.2 Vybrané věty lineární pružnosti 18
4 Prut v pružnosti a pevnosti 21
4.1 Prutové předpoklady 21
4.2 Klasifikace prutů 22
4.3 Slabě a silně zakřivené pruty 23
5 Výsledné vnitřní účinky (VVÚ) prutů 24
5.1 Určování VVÚ integrálním přístupem 25
5.2 Využití symetrie a antimetrie při řešení VVÚ 25
6 Přehled vztahů pro výpočet napětí a deformace 26
6.1 Vztahy pro výpočet napětí 26
6.2 Vztahy pro výpočet energie napjatosti prutu 27
6.2.1 Energie napjatosti pro slabě zakřivené pruty 27
6.2.2 Energie napjatosti pro silně zakřivené pruty 28
6.3 Určení bezpečnosti 29
7 Řešení reprezentativních úloh 30
7.1 Úlohy pro šroub s otevřeným okem 32
7.1.1 Namáhání v ose šroubu 32
7.1.2 Namáhání kolmo k ose šroubu 37
7.2 Úlohy pro šroub s uzavřeným okem 42
7.2.1 Namáhání v ose šroubu 42
7.2.2 Namáhání kolmo k ose šroubu 49
8 Závěr 60
Seznam použitých zdrojů 63
Seznam příloh 63

1 Úvod

Šrouby s okem jsou významným komponentem, který se využívá v mnoha oblastech. Mohou se používat v průmyslu, stavebnictví nebo i sportu. Tyto šrouby se vyrábějí ve dvou základních variantách: s otevřeným a s uzavřeným okem. Každá varianta má své specifické vlastnosti a doporučený způsob použití. Pro správné a bezpečné využití těchto šroubů je tedy potřeba znát jejich rozdíly a jaké je jejich doporučené použití.

Oko šroubu je při analytickém výpočtu bráno již jako silně zakřivený prut. Nicméně výpočet se dá také provést teorii slabě zakřivených prutů, ale výsledek vyjde s určitou chybou. Toto porovnání je také provedeno v praktické části této práce. Je tedy potřeba znát teorii pro počítání slabě i silně zakřivených prutů. V teoretické části jsou tak popsány všechny znalosti a vztahy potřebné pro správný výpočet takových úloh.

Analytické výpočty umožňují základní stanovení napětí a bezpečnosti, dnes se ale čím dál tím více využívá numerických řešení problémů jako jsou tyto. Je proto v této práci také provedena analýza ve výpočetním softwaru ANSYS Workbench. Následně jsou zhodnoceny rozdíly v analytickém výpočtu a v numerickém řešení.

Cílem bakalářské práce není tedy jen objasnit a popsat rozdíly mezi typy šroubů s okem, ale také jak se určí napětí v těchto šroubech způsobené vnějším zatížením, a hlavně jaká je poté bezpečnost pro použití takových šroub při daném zatížení.

2 Šrouby s okem

Tato kapitola byla zpracována využitím zdrojů [5] [6]

2.1 Význam šroubů s okem

Šrouby s okem jsou speciální typy šroubů, které mají na hlavě šroubu závěsné oko. Díky tomuto oku bývají používány pro zvedání a zavěšování břemen. Díky jejich snadné montáži, použití a výdrži se využívají ve spoustě oborech jak ve vnitřních, tak venkovních prostorech.
Hlavní oblasti využití šroubů s okem jsou:
a) V průmyslu
Používají se například pro zavěšení a zvedání strojních součástí
b) Pro dekorativní účely
Šrouby s okem se dají použít například pro zavěšení závěsů nebo světel
c) Jako sportovní vybavení
Využívají se například při horolezectví pro zavěšení lan ve skále

2.2 Popis částí šroubu s okem

Obr. 2.1: Struktura šroubu s okem (převzato a upraveno z [5])

Z obr. 2.1 je patrné, že šrouby s okem se skládají až ze 4 částí, kterými jsou:
1 – Oko
Oko šroubu slouží k uchycení zátěže. Je to významná část šroubu s okem.
2 – Límec
Šroub je vyráběn s límcem pro zlepšení odolávání ohýbání při zatěžování mimo osu šroubu. Límec je jedna z nepovinných součástí šroubu.
3 – Dřík
Dřík bývá na šroubech pro snadnější montáž a přenos tahové síly. Také patří mezi nepovinné části šroubu.
4 – Závit
Závit je základní část každého šroubu. Slouží pro připevnění šroubu k jinému tělesu.

2.3 Přehled používaných šroubů s okem

Šrouby s okem se dají rozdělit do několika skupin podle různých kritérií. Každá skupina má svoje výhody, nevýhody a využití. Rozdělují se tedy následovně:

Podle uzavření oka na:

1) Šrouby s uzavřeným okem (obr. 2.2a)
   - Mají uzavřené oko
   - Díky uzavřenému oku dokážou unést větší zátěže
   - Vyrábí se vtlačováním do formy
2) Šrouby s otevřeným okem (obr. 2.2b)
   - Mají otevřené oko.
   - Vyrábí se ohýbáním
   - Využívají se pro lehčí zátěže

a) b)

Obr. 2.2: a) Šroub s uzavřeným okem, b) Šroub s otevřeným okem (převzato z [5])

Podle límce na:

1) Šrouby s okem s límcem (obr. 2.3a)

Tyto šrouby mají větší odolnost vůči zatížení, které nepůsobí v ose oka. Při tomto zatížení vzniká ohyb v dříku. Díky límci je pak dřík výrazně odolnější vůči bočnímu zatížení. Mohou se tedy používat i pro větší zátěže, které nemusí působit pouze v ose šroubu.

2) Šrouby s okem bez límce (obr. 2.3b)

Šrouby bez límce mají tedy nevýhodu v tom, že nemohou snášet velké síly působící pod úhlem a měly by se tedy používat jen pro případy, kdy zatížení působí v ose šroubu.

a) b)

Obr. 2.3: a) Šroub s límcem, b) Šroub bez límce (převzato z [5])

Podle uložení na:

1) Šrouby s maticí (obr. 2.4a)

Dřík šroubu projde dírou v zátěži a je z druhé strany zajištěn maticí.

2) Závěsné (obr. 2.4b)

Zašroubují se přímo do předem připravených děr.

3) Vruty (obr. 2.4c)

Navrtají se do materiálu, především do dřeva. Jejich upevnění v materiálu tak není příliš pevné. Používají se proto pouze pro malé zátěže.

a) b) c)

Obr. 2.4: Rozdělení šroubů s okem podle uložení a) s maticí, b) závěsné, c) vruty (převzato z [5])

2.4 Používané materiály

Šrouby s okem se vyrábí hlavně z následujících materiálů:

- Ocel
- Slitiny
- Nerezová ocel
- Kalená ocel
- Bronz
- Titan
- Mosaz

Často se jejich povrchy ještě dále upravují pozinkováním nebo galvanickým pokovováním pro další zlepšení vlastností.

3 Teoretický základ

Tato kapitola byla zpracována s využitím zdrojů [1] [2]

3.1 Lineární pružnost

V rámci této bakalářské práce budou všechny úlohy řešeny pomocí lineární pružnosti. To znamená, že všechna řešení úloh mají lineární charakter. Zavede se tak předpoklad, že existuje lineární závislost mezi parametry vnějšího zatížení, deformací a napětím. Tento předpoklad usnadní řešení úloh, ale dá se využít jenom pokud jsou splněny podmínky lineární pružnosti. Tyto podmínky jsou:

- Okrajové podmínky jsou lineární
- Deformace tělesa je malá
- Materiál tělesa je dokonale pružný
- Složky tenzoru přetvoření jsou malé

Pokud tedy platí tyto podmínky, pak se materiál chová podle lineární závislosti. Tato závislost je popsána Hookeovým zákonem:

$$\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x \tag{3.1}$$

kde σ_x je napětí, E je modul pružnosti v tahu (Youngův modul) a ε_x je přetvoření. Tato lineární závislost má pak charakter přímky.

3.1.1 Energie napjatosti a deformační práce

Pro lineárně pružné těleso platí, že během zatěžování tělesa vnějšími silami dochází pouze k pružným deformacím. To jsou deformace, které jsou vratné, když přestane působit vnější zatížení. V průběhu tohoto zatěžování konají vnější síly deformační práci A. Podle zákona zachování mechanické energie se pak tato deformační práce mění na energii napjatosti W. V praktické části práce zatěžujeme těleso vždy z nezatíženého stavu (těleso je bez napjatosti). Pro tento způsob zatěžování pak platí:

$$A = W \tag{3.2}$$

3.1.2 Vybrané věty lineární pružnosti

Při počítání úloh lineární pružnosti platí několik zásadních vět. Pro praktickou část bakalářské práce jsou důležité následující vybrané věty a dále je přidán Saint-Venantův princip.

Věta o deformační práci silové soustavy

Pokud na těleso, které je lineárně pružné působí silová soustava obsahující osamělé síly $\overrightarrow{F_1}$ ... $\overrightarrow{F_n}$ a osamělé silové dvojice $\overrightarrow{M_1}$ ... $\overrightarrow{M_m}$, pak deformační práce, kterou tato silová soustava vykoná je:

$$A = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} F_i u_i + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m} M_j \varphi_j \tag{3.3}$$

kde u je posuv působiště síly a φ je natočení v místě působení momentu.

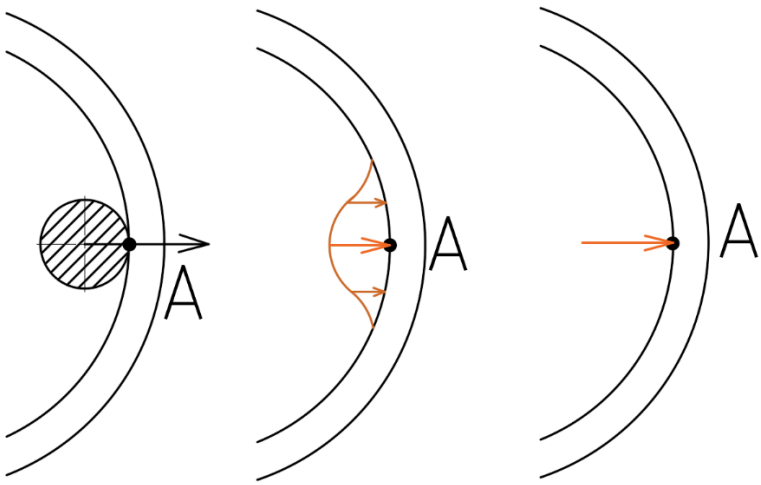
V tomto vyjádření věty o deformační práci silové soustavy jsou využita jen zatížení, která se vyskytují v této bakalářské práci. Celé znění je v literatuře [1, str. 41]

Věta o superpozici

Celková deformace a napjatost tělesa způsobená silovou soustavou je rovna součtu jednotlivých napjatostí a deformací od jednotlivých složek silové soustavy. Nezáleží na pořadí zatěžování.

Saint-Venantův princip

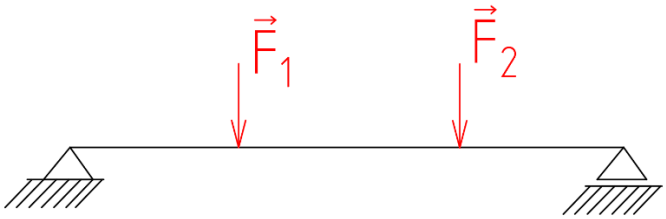
Umožňuje nahradit reálné zatížení a reálné vazby modelovými silami a modelovými vazbami (Obr. 3.1). Tato náhrada se využívá pro snadnější analytické výpočty. Platí, že v okolí bodu *A* tělesa můžeme nahradit jednu silovou soustavu jinou, staticky ekvivalentní silovou soustavou. Napjatost tělesa je stejná pro obě zatížení, s výjimkou jisté části, která obsahuje bod *A*. Kvalita tohoto nahrazení je však určena mezními stavy skutečného tělesa. Nahrazení tedy nelze provést, pokud oblast, ve které provádíme náhradu je rozhodující pro vznik mezních stavů.



Obr. 3.1: Saint-Venantův princip

Věta o vzájemnosti prací (Bettiho věta)

Bettiho věta určuje, že pokud na těleso působí více sil, tak nezáleží na pořadí, ve kterém se počítá výsledný posuv a deformační práce od těchto sil. Výsledek vyjde vždy stejně. Odvození se provádí pomocí nosníku, který se zatíží silami $\overrightarrow{F_1}$ a $\overrightarrow{F_2}$ (obr. 3.2).



Obr. 3.2: Zatížený nosník (převzato z [2])

Pokud zatížíme nosník nejdříve silou $\overrightarrow{F_1}$ pak tato síla vykoná deformační práci $A_{11} = \frac{1}{2}F_1u_{11}$, kde u_{11} je posuv po nositelce síly $\overrightarrow{F_1}$ způsobený silou $\overrightarrow{F_1}$. Následně bude působit síla $\overrightarrow{F_2}$, která vykoná deformační práci $A_{22} = \frac{1}{2}F_2u_{22}$. Síla $\overrightarrow{F_2}$ také způsobí posuv působiště síly $\overrightarrow{F_1}$, takže síla $\overrightarrow{F_1}$ vykoná další deformační práci $A_{12} = \frac{1}{2}F_1u_{12}$. Součet těchto prací A_1 pak bude:

$$A_1 = A_{11} + A_{22} + A_{12} = \frac{1}{2}F_1u_{11} + \frac{1}{2}F_2u_{22} + \frac{1}{2}F_1u_{12} \tag{3.4}$$

Při druhém způsobu bude nejdříve působit síla $\overrightarrow{F_2}$ a následně $\overrightarrow{F_1}$. Postup zatěžování bude analogický. Výsledný součet deformačních prací pak bude:

$$A_2 = A_{22} + A_{11} + A_{21} = \frac{1}{2}F_2u_{22} + \frac{1}{2}F_1u_{11} + \frac{1}{2}F_2u_{21} \tag{3.5}$$

Protože v lineární pružnosti nezáleží na historii zatěžovaní tak platí:

$$A_1 = A_2 \tag{3.6}$$

Dosazením vztahů (3.4) a (3.5) do rovnice (3.6) a následnou úpravou pak vyjde vztah:

$$F_1u_{12} = F_2u_{21} \tag{3.7}$$

Věta o vzájemnosti posuvů

Zavedením jednotkových sil za síly F_1 a F_2 do výsledné rovnice z Bettyho věty, lze získat příslušné posuvy, které nazýváme příčníkové součinitele a platí pro ně pak:

$$\eta_{12} = \eta_{21} \tag{3.8}$$

Příčníkový součinitel η_{12} vyjadřuje posuv působiště síly $\overrightarrow{F_1}$ od síly $\overrightarrow{F_2}$ a analogicky pro η_{21}. Tyto příčníkové součinitele jsou tedy pro dané těleso a jeho body konstantami a lze pomocí nich určit posuv působiště sil vztahem:

$$u_1 = F_1\eta_{11} + F_2\eta_{12} \tag{3.9}$$

Castiglianova věta

Odvození Castiglianovy věty je zde provedeno zjednodušeně pro prutové těleso. Obecné odvození je dostupné v literatuře [1, str. 41].

Máme-li prut zatížený dvěma silami jako například na obr. 3.2 pak při jeho zatěžování byla odvozena deformační práce A jako:

$$A = W = \frac{1}{2}F_1u_1 + \frac{1}{2}F_2u_2 \tag{3.10}$$

Oba tyto posuvy lze vyjádřit pomocí příčníkových součinitelů jako:

$$u_1 = F_1\eta_{11} + F_2\eta_{12} \tag{3.11}$$

$$u_1 = F_2\eta_{22} + F_1\eta_{21} \tag{3.12}$$

Dosazením do rovnice deformační práce dostaneme vztah pro energii napjatosti jako:

$$W = \frac{1}{2}(F_1^2\eta_{11} + F_1F_2\eta_{12} + F_2^2\eta_{22} + F_1F_2\eta_{21}) \tag{3.13}$$

Tento vztah pak lze snadno derivovat podle kterékoli síly F. Pokud derivujeme například podle síly F_1, tak dostaneme vztah:

$$\frac{\partial W}{\partial F_1} = \frac{1}{2}(2F_1\eta_{11} + F_2\eta_{12} + F_2\eta_{21}) \tag{3.14}$$

Z věty o vzájemnosti posuvů víme, že platí $\eta_{12} = \eta_{21}$, lze tedy vztah ještě upravit do podoby:

$$\frac{\partial W}{\partial F_1} = \frac{1}{2}(2F_1\eta_{11} + 2F_2\eta_{12}) \tag{3.15}$$

Z této podoby vztahu je vidět, že pravá strana je rovna vztahu pro posuv u_1. Získali jsme tak tedy 1. část Castiglianovi věty:

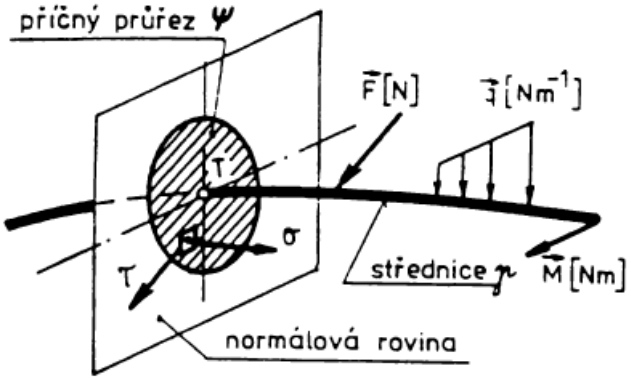
$$u_i = \frac{\partial W}{\partial F_i} \tag{3.16}$$

Stejný postup bychom mohli provést, pokud by na prutové těleso působila silová dvojice $\vec{M}$. Tímto způsobem bychom dostali druhou část Castiglianovi rovnice, tentokrát pro natočení φ:

$$\varphi_i = \frac{\partial W}{\partial M_i} \tag{3.17}$$

4 Prut v pružnosti a pevnosti

Pro jednodušší analytické počítání úloh se používá jako modelové těleso prut (obr. 4.1), který se označuje jako nejjednodušší těleso pro počítání úloh v pružnosti a pevnosti. Prut je dán, jak svým geometrickým tvarem, tak i svými předpoklady, které musí splňovat.[1]



Obr. 4.1: Náčrt geometrie prutu s popisem (převzato z [1])

4.1 Prutové předpoklady

Jak bylo zmíněno výše, prut je charakterizován soustavou prutových předpokladů, které se člení na tyto skupiny podle literatury [1]:

1) Geometrické

1) Každý prut je určen střednicí γ a v každém bodě střednice pak existuje příčný průřez ψ. Příčný průřez je spojitá oblast, která obsahuje všechny body tělesa ležící v normálové rovině. Geometrické těžiště T průřezu ψ je pak průsečík střednice γ a příčného průřezu ψ (obr. 4.1).
2) Střednice γ je hladká a spojitá křivka konečné délky.
3) Příčný průřez ψ je spojitá jedno nebo vícenásobně souvislá oblast. Tato oblast je ohraničená obrysem a dá se charakterizovat charakteristikami příčného průřezu.
4) Délka střednice je řádově alespoň stejně velká jako největší rozměr příčného průřezu.

2) Zatěžovací a vazbové

1) Vazby omezují pouze deformaci střednice
2) Zatížení působí na střednici. Silovým působením na prut jsou tedy síly a silové dvojice s působištěm na střednici (Obr. 4.1)

3) Deformační

1) Střednice prutu zůstává spojitá a hladká při deformaci.
2) Příčné průřezy si zachovávají rovinnost a kolmost ke střednici během deformace. Podle typu zatěžování se příčné průřezy:
    - Oddalují (tah), přibližují (tlak) a deformují
    - Natáčejí kolem osy kolmé k příčnému průřezu a nedeformují se (krut)
    - Natáčejí se kolem osy, která leží v příčném průřezu a deformují se (ohyb)
    - Posouvají se kolmo ke střednici a nedeformují se (smyk)

4) Napjatostní
V prutu je napjatost určena normálným napětím σ a smykovým napětím τ v průřezu ψ (obr. 4.1) Tato dvojosá napjatost je zvláštní typ napjatosti, který se nazývá jako prutová napjatost.

4.2 Klasifikace prutů

Pruty mají různorodé tvary a využití a lze je dělit podle různých hledisek do několika skupin. Podle literatury [1] je můžeme dělit do skupin podle těchto hledisek:

1) Z hlediska modelovosti

- Pruty ideální:
  Splňují všechny prutové předpoklady
- Pruty jako výpočtové modely těles:
  Jsou pro ně formulovány podmínky, které říkají, kdy lze těleso považovat za prut a kdy lze pro řešení problému použít prostou pružnost prutů.

2) Z hlediska geometrie

- Podle křivosti střednice:
  - Přímé
  - Křivé rovinné – střednice je rovinná křivka.
  - Křivé prostorové – střednice je prostorová křivka.
- Podle uzavřenosti střednice:
  - Otevřené – střednice prutu je taková křivka, že lze prut rozdělit na dva pomocí řezu jedním bodem střednice.
  - Uzavřené – střednice prutu je křivka, při které nelze rozdělit prut na dva pomocí řezu určeného pouze jedním bodem střednice.
- Podle poměru charakteristického rozměru příčného průřezu k poloměru křivosti střednice prutu:
  - Slabě zakřivené – u prutů lze ještě řešit napětí a deformace jako pro přímé pruty.
  - Silně zakřivené – u těchto prutů již nelze řešit napětí a deformace jako pro přímé pruty.
- Podle natočení příčného průřezu:
  - Šroubovité – osy charakterizující příčný průřez se podél střednice nenatáčejí.
  - Nešroubovité – osy se natáčejí podél střednice.
- Podle proměnlivosti příčného průřezu:
  - Pruty s konstantním průřezem – rozměry i tvar příčného průřezu se nemění podél střednice.
  - Pruty s proměnným průřezem – rozměry nebo tvar se mění podél střednice.
- Podle tvaru příčného průřezu:
  - Elementární (např.: čtverec, kruh, obdélník)
  - Profily (např.: I, T, U)
  - S obecným průřezem
- Podle hladkosti střednice:
  - Pruty s hladkou střednicí
  - Pruty s konečným počtem bodů nespojitosti v hladkosti střednice

3) Z hlediska vazeb

- Volné
- Vázané:
    - Staticky určité
    - Staticky neurčité

4) Z hlediska zatížení

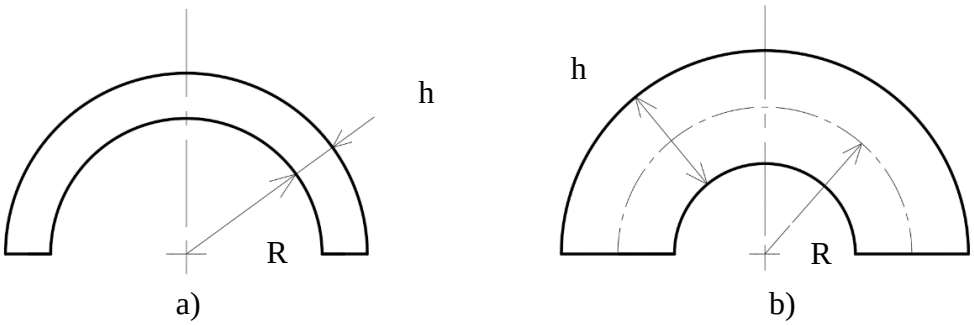
- Jednoduše
- Kombinovaně více způsoby například tahem a ohybem

5) Z hlediska vazeb mezi stupněm prostorovosti geometrie a prostorovosti deformace

- Rovinné geometricky i deformačně
- Rovinné geometricky a prostorové deformačně
- Prostorové geometricky i deformačně

4.3 Slabě a silně zakřivené pruty

Zakřivené pruty jsou pruty jejichž střednice je křivka, která je hladká a spojitá. Dělí se na slabě (obr. 4.2a) a silně (obr. 4.2b) zakřivené. Rozdělují se podle poměru poloměru zakřiveného prutu R k charakteristickému rozměru h příčného průřezu. [1]



Obr. 4.2: a) Slabě zakřivený prut, b) Silně zakřivený prut (převzato a upraveno z [1])

a) Slabě zakřivené ($R \gg h$):

Napětí a deformace lze řešit stejně jako u přímého prutu.

b) Silně zakřivené ($R \geq h$):

Napětí po průřezu není rozděleno lineárně. Napjatost a deformace se musí řešit pomocí teorie silně zakřivených prutů. [1]

5 Výsledné vnitřní účinky (VVÚ) prutů

Při řešení úloh v praktické části hraje významnou roli správné určení výsledných vnitřních účinků (VVÚ) v prutu. Podle průběhu VVÚ se totiž poté určí kritické místo s největším napětím, ve kterém se následně vypočítá bezpečnost.

Pokud tedy na prutové těleso působí silová soustava, pak se toto zatížení vnitřně projeví deformací a napjatostí tělesa, v každém jeho bodě. Toto chování je pak popsáno dvojící vzájemně závislých tenzorů napětí τ_σ a přetvoření τ_ε. Pokud chceme tedy určit vnitřní napětí pak se provede příčný řez, který rozdělí zatížený prut na dva prvky. V každém prvku pak musí platit statická rovnováha. Tuto rovnováhu zajišťují vnitřní síly, které jsou spojitě rozložené v průřezu celého prvku. Pro vyjádření těchto sil se zavádí veličina $\overrightarrow{f_\omega}$, která se nazývá obecné napětí.

Jelikož, ale podmínek statické rovnováhy, které můžeme použít je až šest, tak nestačí k určení napětí, které nastává v každém bodě řezu pouze toto obecné napětí. Úloha by byla mnohonásobně staticky neurčitá. Pro řešitelnost úlohy se tak nahradí obecné napětí $\overrightarrow{f_\omega}$ v řezu staticky ekvivalentně silovou výslednicí $\overrightarrow{F_V}$ a momentovou výslednicí $\overrightarrow{M_V}$ v těžišti příčného průřezu R. Tyto výslednice jsou vektory dané třemi složkami. Tyto složky se nazývají jako výsledné vnitřní účinky a určují se z uvolněného prvku pomocí rovnic statické rovnováhy. Silová a momentová výslednice se tak dají rozložit do směrů souřadných os jako:

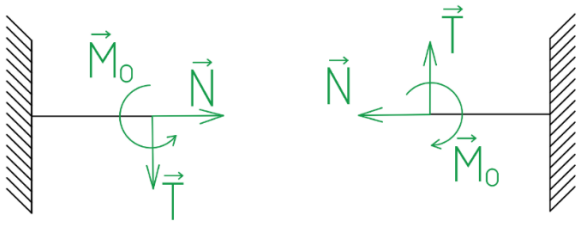
$$\overrightarrow{F_V} = \overrightarrow{F_{Vx}} + \overrightarrow{F_{Vy}} + \overrightarrow{F_{Vz}} = N\vec{\imath} + T_y\vec{\jmath} + T_z\vec{k}$$

$$\overrightarrow{M_V} = \overrightarrow{M_{Vx}} + \overrightarrow{M_{Vy}} + \overrightarrow{M_{Vz}} = M_k\vec{\imath} + M_{oy}\vec{\jmath} + M_{oz}\vec{k}$$

Pro složky VVÚ jsou zavedeny označení následovně:

- Normálová síla N
- Posouvající síly T_y, T_z
- Ohybové momenty M_{oy}, M_{oz}
- Kroutící moment M_k

V praktické části se řeší všechny úlohy jen jako rovinné úlohy a vyskytují se v nich pouze normálová síla N, posouvající síla T a ohybový moment M_o. Jejich znaménková konvence je zavedena podle obr. 5.1. [2]



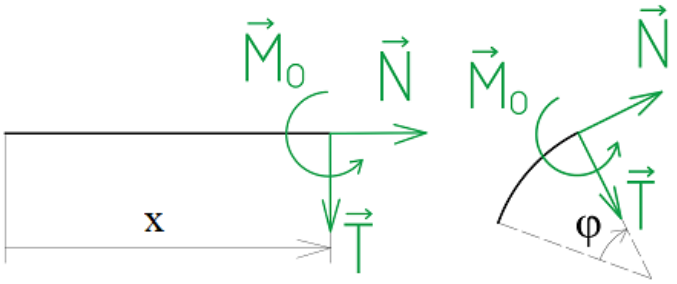
Obr. 5.1: Znaménková konvence VVÚ

5.1 Určování VVÚ integrálním přístupem

V praktické části práce se využívá integrálního přístupu pro určení VVÚ. Tento přístup vychází ze sestavení a řešení podmínek statické rovnováhy pro daný konečný prvek prutu. Postupuje se tak že pro uvolněný prvek v bodě *A* zavedeme podmínky statické rovnováhy jako:

- Silové: $\sum F = 0$ v normálovém a tečném směru
- Momentové: $\sum M_{oA} = 0$ k bodu *A*, ve kterém jsou momenty od normálové a posouvající síly nulové

Z těchto rovnic rovnováhy pak lze vyjádřit vztahy pro jednotlivé složky VVÚ. Průběh VVÚ po celé délce střednice se pak zjistí jako funkce s konečným počtem bodů nespojitosti. Daný řez, ve kterém zjišťujeme VVÚ se vymezí v intervalu od x_1 po x_2, pokud řešíme řez v kartézském souřadném systému (obr. 5.2a) a od φ_1 po φ_2, pokud řešíme v polárním souřadném systému (obr. 5.2b). [2]



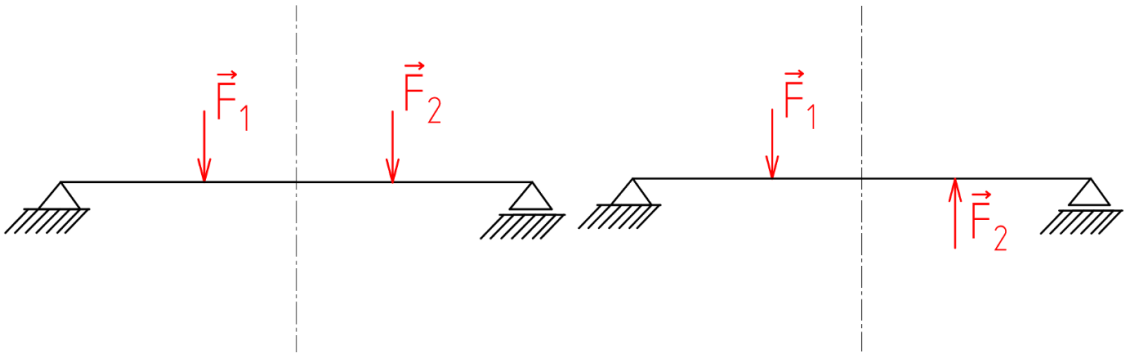
a) b)

Obr. 5.2: Intervaly řezu a) kartézský, b) polární souřadný systém

5.2 Využití symetrie a antimetrie při řešení VVÚ

Při řešení průběhu VVÚ lze dosáhnout podstatného zjednodušení, pokud je prut symetrický z hlediska geometrie, vazeb a zatížení. Pokud je prut zatížen symetricky (obr. 5.3a) nebo antimetricky (obr. 5.3b) vůči ose symetrie pak průběhy VVÚ budou také symetrické nebo antimetrické. Platí že:

- Symetrické složky VVÚ (*N*, M_o) mají symetrický průběh vůči ose symetrie a antimetrický vůči ose antimetrie.
- Antimetrické složky VVÚ (*T*) mají naopak antimetrický průběh vůči ose symetrie a symetrický vůči ose antimetrie [2]



a) b)

Obr. 5.3: Prut zatížen a) symetricky, b) antimetricky

6 Přehled vztahů pro výpočet napětí a deformace

V praktické části bakalářské práce je za úkol navrhnout a vypočítat 4 vzorové úlohy na výpočet maximálního napětí v prutech. Tyto výpočty se provádí pomocí vzorců, které jsou pro to odvozeny v literatuře [1] [2] [3]. V následující kapitole jsou pak shrnuty všechny tyto potřebné vztahy.

6.1 Vztahy pro výpočet napětí

Jednotlivé složky VVÚ vyvolávají napětí v příčném průřezu. V následující kapitole jsou uvedeny potřebné vztahy pro výpočet napětí způsobených normálovou a posouvající silou a ohybovým momentem.

1) Normálové napětí od normálové síly *N*

Normálové napětí od normálové síly se počítá stejně pro slabě i silně zakřivené pruty. Určí se ze vztahu:

$$\sigma_N = \frac{N}{S} \tag{6.1}$$

kde N je normálová síla a S je plocha příčného průřezu. Pro všechny příklady v této bakalářské práci bude pro plochu S platit vztah:

$$S = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \tag{6.2}$$

kde d je průměr příčného průřezu.

2) Smykové napětí od posouvající síly *T*

Smykové napětí lze počítat podle teorie pružnosti a pevnosti jen pro tyto příklady:

1) Příčný průřez má alespoň jednu osu symetrie
2) Příčný průřez je tenkostěnný profil, který je prizmatický a na povrchu prutu nepůsobí smykové síly

Pro tyto příklady se pak dá smykové napětí určit pomocí Žuravského vztahu jako:

$$\tau = \frac{T(x) \cdot U_{y\psi_1}(z)}{b(z) \cdot J_y} \tag{6.3}$$

kde $T(x)$ je posouvající síla, $U_{y\psi_1}(z)$ je lineární moment plochy ψ_1 k neutrální ose, $b(z)$ je šířka příčného průřezu a J_y je osový kvadratický moment k neutrální ose. V této práci se vždy řeší kruhový příčný průřez. Takže pro J_y vždy platí:

$$J_y = \frac{\pi \cdot d^4}{64} \tag{6.4}$$

Žukovského vztah, ale platí pouze za předpokladu, že nositelka posouvající síly je osa symetrie příčného průřezu a smyková napětí jsou po jeho šířce rozložena rovnoměrně. Což platí ve všech příkladech v této práci.

Pro kruhový průřez se dostane po úpravě ze Žukovského vztahu zjednodušený vztah:

$$\tau = \frac{4}{3} \cdot \frac{T}{S} \tag{6.5}$$

3) Normálové napětí od ohybového momentu M_o

Normálové napětí od ohybového momentu se počítá rozdílně pro slabě a silně zakřivený prut. Pro případ základního ohybu pro slabě zakřivený prut se normálové napětí určí ze vztahu:

$$\sigma_{M_o} = \frac{M_o}{J_y} \cdot z \tag{6.6}$$

kde M_o je ohybový moment, J_y je osový kvadratický moment k neutrální ose a z určuje polohu. Napětí od ohybového momentu pro silně zakřivené pruty je pak určeno jako:

$$\sigma_{M_o} = \frac{M_o}{S \cdot e} \cdot \frac{z_n}{r - z_n} \tag{6.7}$$

kde e je excentricita, r je poloměr neutrální plochy a z_n je souřadnice rovnoběžná s osou z vedená od neutrální osy. Excentricita se určí ze vztahu:

$$e = R - r \tag{6.8}$$

kde R je poloměr zakřivení střednice prutu a r je poloměr neutrální plochy. Tento poloměr se pro kruhový průřez určí jako [3]:

$$r = \frac{S}{2 \cdot \pi \cdot \left(R - \sqrt{R^2 - r_\psi^2}\right)} \tag{6.9}$$

kde r_ψ je poloměr kruhového průřezu. Z rovnice (6.7) je tedy zřejmé, že ohybové napětí pro silně zakřivené pruty má hyperbolický průběh, na rozdíl od přímého prutu, kde je průběh lineární.

4) Celkové normálové napětí

Výsledné celkové normálové napětí se určí jako součet napětí od normálové síly N a ohybového momentu M_o:

$$\sigma_C = \sigma_N + \sigma_{M_o} \tag{6.10}$$

6.2 Vztahy pro výpočet energie napjatosti prutu

Složky VVÚ způsobují, že se v prutu akumuluje energiie napjatosti. Celková energie napjatosti se dá určit pomocí superpozice jako:

$$W = W_\sigma + W_\tau \tag{6.11}$$

kde W_σ je energie napjatosti od normálových napětí a W_τ je energie napjatosti od smykových napětí. Tato napětí se určují odlišně pro slabě a silně zakřivené pruty.

6.2.1 Energie napjatosti pro slabě zakřivené pruty

Energie napjatosti pro slabě zakřivené pruty se vyjadřuje pomocí vztahů pro přímé pruty. Jediný rozdíl je, že integrace probíhá přes zakřivenou střednici. Potřebné vztahy pro výpočty energii napjatosti od jednotlivých složek VVÚ jsou tedy takto:

1) Energie napjatosti od normálové síly N

$$W_N = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{N^2}{2 \cdot E \cdot S} \cdot R \cdot d\varphi \tag{6.12}$$

2) Energie napjatosti od posouvající síly *T*

$$W_T = \beta \cdot \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{T^2}{2 \cdot G \cdot S} \cdot R \cdot d\varphi \tag{6.13}$$

kde β je tvarový součinitel příčného průřezu. Pro kruhové průřezy platí $\beta = \frac{10}{9}$.

3) Energie napjatosti od ohybového momentu M_o

$$W_{M_o} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{M_o^2}{2 \cdot E \cdot J_y} \cdot R \cdot d\varphi \tag{6.14}$$

6.2.2 Energie napjatosti pro silně zakřivené pruty

Při určování vztahů pro energii napjatosti silně zakřivených prutů se použije vztah (6.7) pro určení napětí σ_{M_o} v silně zakřivených prutech. Kvůli tomu vznikne jiný tvar energie napjatosti W_{M_o} a přibude také nový člen W_{M_oN}, který závisí na N i M_o. Vztahy pro energii napjatosti pak budou mít následující tvary:

1) Energie napjatosti od normálové síly *N*

$$W_N = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{N^2}{2 \cdot E \cdot S} \cdot R \cdot d\varphi \tag{6.15}$$

2) Energie napjatosti od posouvající síly *T*

$$W_T = \beta \cdot \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{T^2}{2 \cdot G \cdot S} \cdot R \cdot d\varphi \tag{6.16}$$

3) Energie napjatosti od ohybového momentu M_o

$$W_{M_o} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{M_o^2}{2 \cdot E \cdot S \cdot e} \cdot d\varphi \tag{6.17}$$

4) Energie napjatosti od normálové síly *N* a ohybového momentu M_o

$$W_{M_oN} = -\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{M_o \cdot N}{E \cdot S} \cdot d\varphi \tag{6.18}$$

6.3 Určení bezpečnosti

V pružnosti a pevnosti lze hodnotit pruty v tvárném stavu z hlediska bezpečnosti k meznímu stavu pružnosti. Toto hodnocení se provádí na základě znalosti meze kluzu materiálu σ_K a srovnáním s redukovaným napětím σ_{RED}, které působí na zatížený prut. V obecném případě se v prutu vyskytuje normálové i smykové napětí, redukované napětí se pak určuje podle dvou podmínek:

a) Podmínka HMH

$$\sigma_{RED} = \sqrt{\sigma_C^2 + 3{\tau_K}^2} \tag{6.19}$$

kde τ_K je smykové napětí od kroutícího momentu M_K.

b) Podmínka max τ

$$\sigma_{RED} = \sqrt{\sigma_C^2 + 4{\tau_K}^2} \tag{6.20}$$

Bezpečnost k meznímu stavu pružnosti se pak určí jako:

$$k = \frac{\sigma_K}{\sigma_{RED}} \tag{6.21}$$

kde σ_K je mez kluzu materiálu, ze kterého je prut vyroben.

V celé praktické části této práce nebude nikdy vznikat smykové napětí τ_K, protože nikdy nedojde k vzniku kroutícího momentu. Bude tedy vždy platit pouze jednoduchý vztah $\sigma_{RED} = \sqrt{\sigma_C^2}$.

7 Řešení reprezentativních úloh

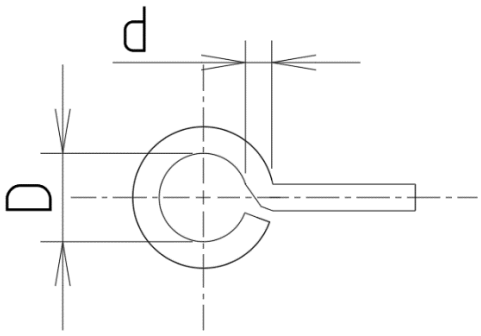
Tématem práce bylo navrhnout celkem čtyři reprezentativní úlohy. Pro každý typ šroubu dvě, tedy pro šroub s otevřeným okem dvě a pro šroub s uzavřeným okem také dvě. Vždy se zatížením v ose a kolmo k ose šroubu. Úlohy jsou řešené nejdříve pomocí teorie pro slabě zakřivené pruty, dále pomocí teorie pro silně zakřivené pruty a následně je ještě provedeno numerické řešení v softwaru ANSYS Workbench. Poté je provedeno zhodnocení všech výsledků a porovnání daných metod.

Úlohy jsou navrženy podle skutečného vzorového šroubu s otevřeným okem (obr. 7.1). U výpočtů je uvažováno, že šroub je zašroubován celou délkou závitu do základního tělesa a posuzuje se pouze oko šroubu a krátká část dříku. Střednice se uvažuje jako kružnice nebo její část a na ni navazující svislý dřík. Ve všech příkladech je stejné zatížení F = 500 N. Toto zatížení bylo voleno jako zatížení, které by mohlo nastat v realitě. Zátěž je provedena tak, že za oko je zavěšeno lano a na tomto laně je břemeno. Díky Saint-Venantovu principu (viz. kapitola 3.1.5) se ale provede náhrada a zatížení se projeví jako modelová síla.

Obr. 7.1: Vzorový šroub s otevřeným okem

Rozměry šroubu:

Od dodavatele [4] jsou zjištěny rozměry (obr. 7.2) potřebné pro řešení úloh. Průměr oka šroubu je tedy D = 15 mm a průměr kruhového průřezu je d = 8,9 mm. Dále se uvažuje, že šroub je zašroubován do základního tělesa tak, že vyčnívá pouze krátká část dříku o délce l = 10 mm. Tato vzdálenost odpovídá vzdálenosti závitové části a oku šroubu z obr. 7.1.



Obr. 7.2: Rozměry šroubu

Materiál šroubu:

Dodavatel vzorového šroubu [4] poskytl informaci, že šroub je vyroben z nerezové oceli A2, která je vhodná do běžného prostředí. Vlastnosti této ocele jsou zjištěny od výrobce [7]. Vlastnosti této oceli jsou tedy:

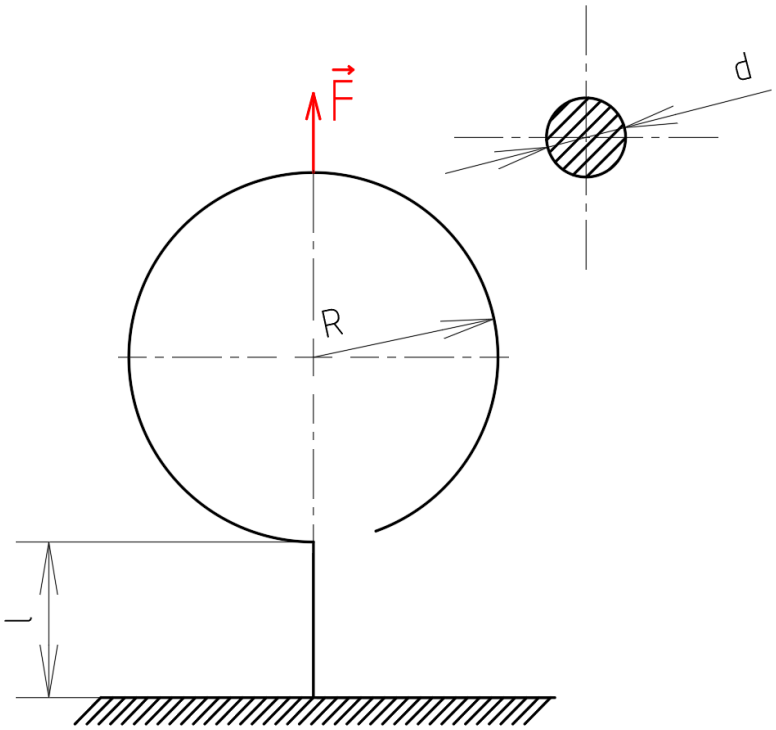
- Modul pružnosti E = 200 GPa
- Modul pružnosti ve smyku G = 77 GPa
- Mez kluzu σ_K = 190 MPa

7.1 Úlohy pro šroub s otevřeným okem

7.1.1 Namáhání v ose šroubu

Šroub s otevřeným okem je namáhaný v ose šroubu (Obr. 7.3). Toto namáhání je doporučený způsob, jakým by měly být šrouby zatíženy. Průměr d je uveden výrobcem a poloměr R střednice se dopočítá pomocí obr. 7.2 jako:

$$R = \frac{D + d}{2} = 11{,}95 \text{ mm} \tag{7.1}$$



Obr. 7.3: Šroub s otevřeným okem namáhaný v ose šroubu

Rozbor úlohy

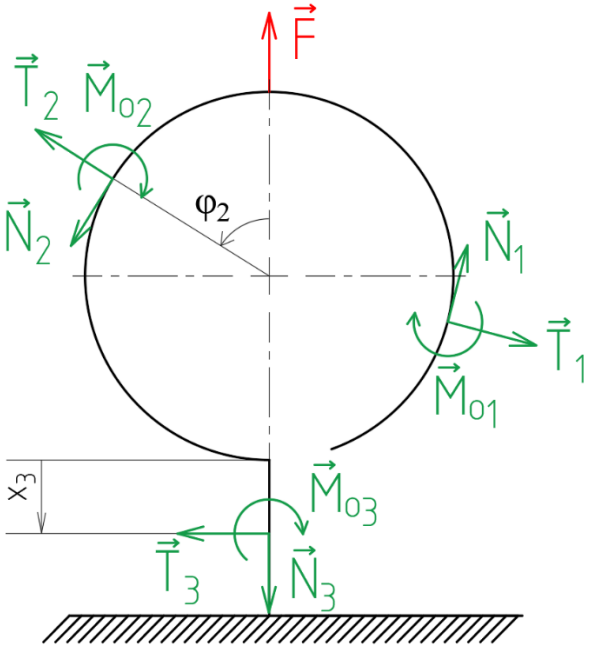
Z hlediska volby způsobu řešení je potřebné zjistit poměr *R/d*. Pro rozměry toho šroubu vychází *R/d* = 1,34, což je poměrně nízká hodnota, takže řešení by se správně mělo provést pomocí teorie silně zakřivených prutů. Cílem práce je však také vyhodnocení odchylek, k nimž dojde při počítání úloh méně přesnou teorii slabě zakřivených prutů a přesnější teorii silně zakřivených prutů.

Hodnota *R/d* vyšla blízká 1, což je hraniční hodnota, kdy můžeme zakřivené těleso počítat jako prut [1]. Můžeme tedy řešit oko jako prut, ale dá se očekávat, že výsledky budou mít určitou chybu.

Úloha je staticky určitá, takže není zapotřebí provádět částečné uvolnění.

Průběh VVÚ

Průběh VVÚ (obr. 7.4) se určí integrálním přístupem (viz. kapitola 5.1). Prut lze řešit rozdělením na tři intervaly. V prvním intervalu je vidět, že budou všechny složky VVÚ nulové, protože v něm nepůsobí žádná vnější síla. V druhém intervalu se již projeví působení vnějšího zatížení od síly *F*. Dále je přidán i třetí interval na dříku, kde jedinou nenulovou složkou VVÚ bude normálová síla.



Obr. 7.4: Působení VVÚ pro první úlohu

$$N_2 = F \cdot sin\varphi_2 \tag{7.2}$$

$$T_2 = -F \cdot cos\varphi_2 \tag{7.3}$$

$$M_{o2} = F \cdot R \cdot sin\varphi_2 \tag{7.4}$$

$$\varphi_2 \in \langle 0; \pi \rangle$$

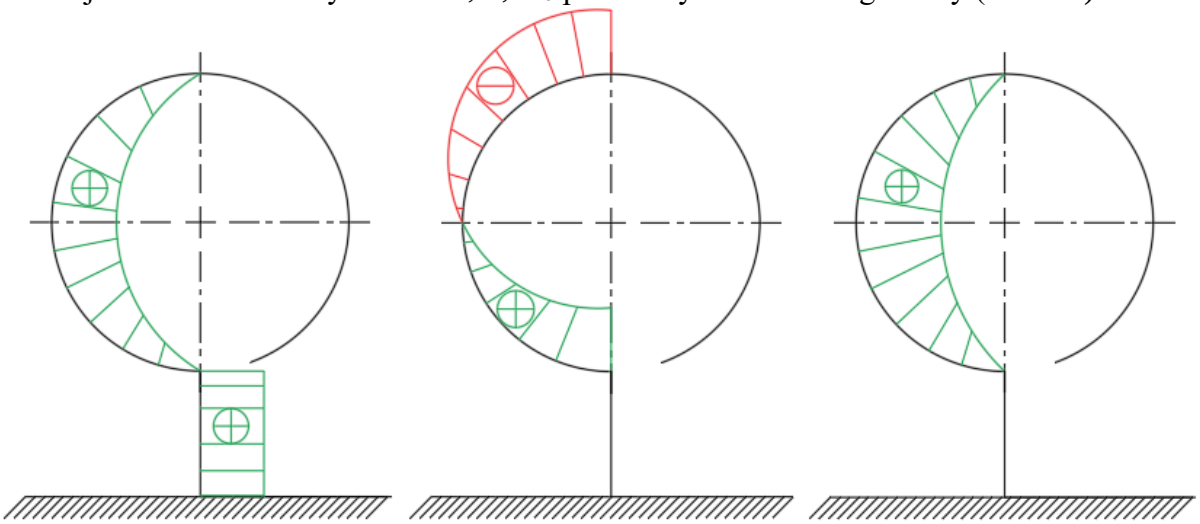
Ve třetím intervalu na dříku je tedy nenulová pouze normálová síla:

$$N_3 = F \tag{7.5}$$

$$x_3 \in \langle 0; l \rangle$$

Grafické zobrazení VVÚ

Pokud jsou známe všechny funkce *N*, *T*, M_o pak lze vykreslit VVÚ graficky (obr. 7.5).



a) b) c)

Obr. 7.5: Průběh a) normálové síly, b) posouvající síly, c) ohybového momentu

Zjištění kritického místa

Z průběhu VVÚ lze určit, že kritické místo leží ve druhém intervalu na souřadnici $\varphi_2 = \frac{1}{2}\pi$ (Obr. 7.5). V tomto bodě bude dále určeno napětí a následně bezpečnost.

Výpočet napětí a bezpečnosti

1) Teorii slabě zakřivených prutů

Dosazením do rovnic z kapitoly 6.1 lze určit napětí způsobené vnějším zatížením pro slabě zakřivený prut. Do rovnic se dosadí hodnoty složek VVÚ z druhého intervalu s hodnotou $\varphi_2 = \frac{1}{2}\pi$. Následně se provede výpočet redukovaného napětí a bezpečnosti dosazením do vztahů z kapitoly 6.3. Výpočet tedy bude vypadat následovně:

- Napětí od normálové síly:

$$\sigma_N = \frac{N_2}{S} = \frac{F}{S} = 8{,}04 \text{ MPa} \tag{7.6}$$

- Napětí od ohybového momentu:

$$\sigma_{M_o1} = \frac{M_{o2}}{J_y} z = \frac{FR}{J_y}\frac{d}{2} = 86{,}33 \text{ MPa} \tag{7.7}$$

- Celkové normálové napětí:

$$\sigma_{C1} = \sigma_N + \sigma_{M_o1} = 94{,}37 \text{ MPa} \tag{7.8}$$

- Smykové napětí:

Z obr. 7.5 je zřejmé, že v nebezpečném průřezu je posouvající síla rovna nule. Smykové napětí bude tedy taky nulové.

- Redukované napětí se zjistí dosazením do rovnice (6.19):

$$\sigma_{RED1} = \sqrt{{\sigma_{C1}}^2} = 94{,}37 \text{ MPa} \tag{7.9}$$

- Výpočet bezpečnosti dosazením do rovnice (6.20):

$$k_1 = \frac{\sigma_K}{\sigma_{RED1}} = 2{,}01 \tag{7.10}$$

2) Teorii silně zakřívených prutů

Opět dosazením do rovnic z kapitoly 6.1 a následným dosazením do rovnic z kapitoly 6.3 lze určit napětí způsobené vnějším zatížením a poté i bezpečnost pro toto zatížení. Změna při výpočtu pomocí teorie silně zakřivených prutů je při výpočtu ohybového momentu kdy se použije rovnice (6.7). Výpočet bude tedy následující:

- Normálové napětí:

Napětí od normálové síly má stejnou hodnotu jako pro slabě zakřivený prut, tedy $\sigma_N = 8{,}04\ MPa$.

- Napětí od ohybového momentu na vnitřním poloměru:

$$\sigma_{M_o2} = \frac{M_{o2}}{Se}\frac{z_n}{r - z_n} = \frac{FR}{Se}\frac{\frac{d}{2} - e}{r - \left(\frac{d}{2} - e\right)} = 119{,}8 \text{ MPa} \tag{7.11}$$

Pokud bychom určovali na vnějším poloměru, kde $z_n = -\frac{d}{2} - e$ tak by ohybové napětí vyšlo $\sigma_{M_o} = -57{,}82$ MPa. Což je v absolutní hodnotě menší napětí než na vnitřním poloměru.

– Celkové normálové napětí na vnitřním poloměru je tedy:

$$\sigma_{C2} = \sigma_N + \sigma_{M_o 2} = 127{,}84 \text{ MPa} \tag{7.12}$$

– Smykové napětí:

Stejně jako u řešení pomocí teorie slabě zakřivených prutů je smykové napětí opět nulové.

– Redukované napětí:

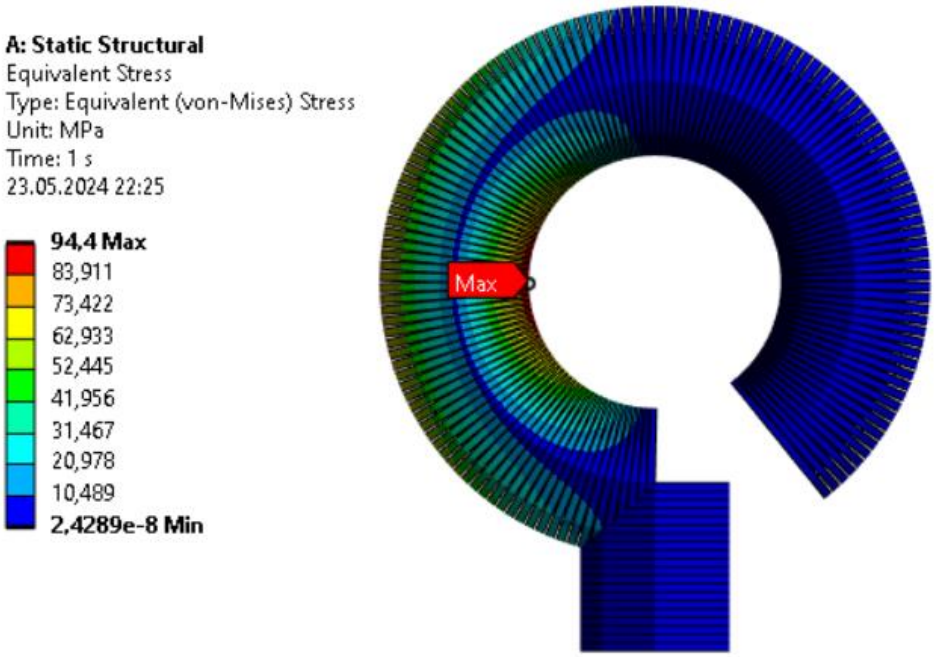
$$\sigma_{RED2} = \sqrt{{\sigma_{C2}}^2} = 127{,}84 \text{ MPa} \tag{7.13}$$

– Výpočet bezpečnosti:

$$k_2 = \frac{\sigma_K}{\sigma_{RED2}} = 1{,}49 \tag{7.14}$$

Numerické řešení

K numerickému řešení byl tedy zvolen software ANSYS Workbench. Jeho použití není v práci rozvedeno, podrobnější popis funkcí je obsažen v literatuře [8]. V tomto softwaru byla tedy načrtnuta střednice podle obr. 7.3 a této střednici byl přiřazen kruhový průřez *d* podle informací od výrobce (viz. výše). Model tak zcela neodpovídá realitě, protože na začátku příkladu byla zvolena zjednodušená střednice bez zaoblené části na přechodu mezi okem a dříkem. Dále byla vytvořena síť prvků s elementárním prvek o velikosti 0,5 mm. Na konci dříku bylo určeno vetknutí a v nejvyšším bodě oka šroubu byla umístěna síla podle zadání a byla provedena analýza. Výsledky na obr. 7.6 určují *Equivalent (von-Mises) Stress*, což odpovídá redukovanému napětí podle podmínky HMH (viz. kapitola 6.3).



Obr. 7.6: Výsledky z ANSYS Workbench pro první úlohu

Touto metodou tedy vyšlo maximální redukované napětí jako $\sigma_{RED3} = 94{,}4$ MPa.

Porovnání výsledků

Tab. 7.1: Porovnání výsledků pro první příklad

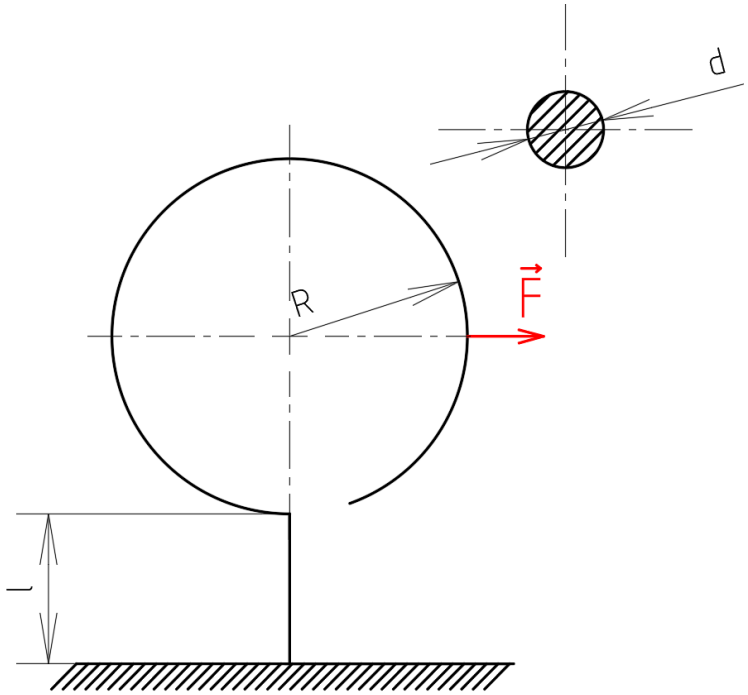
	Slabě zakřivený pruty	Silně zakřivený prut	Numerické řešení
Redukované napětí σ_{RED} [MPa]	94,37	127,84	94,4
Bezpečnost k [-]	2,01	1,49	2,01

Z tab. 7.1. je patrné, že při analytickém řešení pomocí teorie slabě a silně zakřivených prutů vzniká docela podstatný rozdíl v redukovaném napětí. Pomocí teorie silně zakřivených prutů tak vychází napětí, které je skoro o 36% větší než to při řešení pomocí teorie slabě zakřivených prutů, a tudíž vyšla i podstatně nižší bezpečnost celé součásti.

Dále si lze všimnout zajímavého výsledku při numerickém řešení. Tento výsledek se liší pouze o setiny MPa od výsledku pomocí teorie slabě zakřivených prutů. Je zajímavé, že se tento výsledek blíží výsledku vypočítanému méně přesnou teorii slabě zakřivených prutů. Toto chování je způsoben tím, že poměr *R/d* vyšel opravdu nízký. Při odvození vztahů pro napětí se totiž u silně zakřivených prutů vycházelo z předpokladu, že zůstane zachována rovinnost příčných průřezů při zatěžování. Toto tvrzení však přestává platit, pokud se blížíme k poměru *R/d* = 1. U vzorového šroubu k tomuto dochází, protože poměr *R/d* = 1,34. Prut se tak začíná silně odchylovat od prutových předpokladů a napjatost v něm bude obecnější než prutová. Výsledek získaný teorii silně zakřivených prutů je tedy velmi nepřesný [1].

7.1.2 Namáhání kolmo k ose šroubu

Šroub s otevřeným okem je namáhaný kolmo k ose šroubu (Obr. 7.7). Tento způsob namáhání je výrobcem nedoporučován. Šrouby s otevřeným okem jsou vyráběny pouze pro zatížení, které působí v ose šroubu.



Obr. 7.7: Šroub s otevřeným okem namáhaný kolmo k ose šroubu

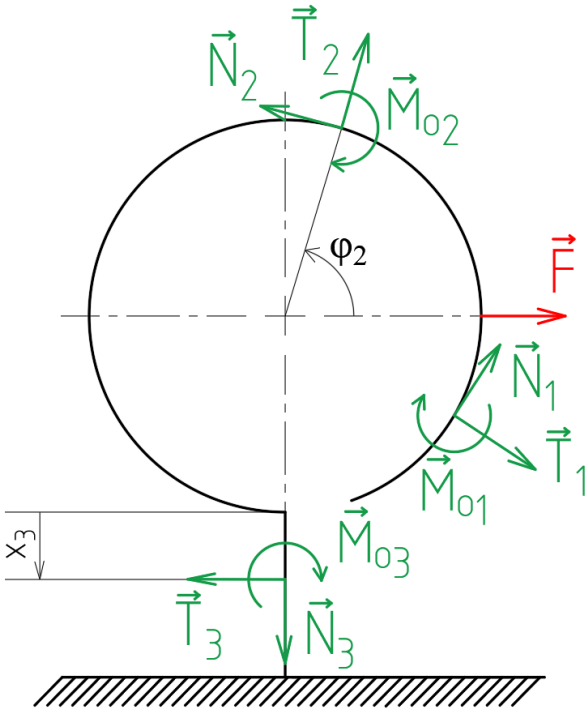
Rozbor úlohy

Úloha je obdobná úloze 1, tentokrát ale bude mít větší význam i dřík o délce $l = 10$ mm. V této části totiž bude vznikat ohybové napětí, takže je potřeba prověřit i tuto část.

Úloha je opět staticky určitá, takže není potřeba provádět žádná částečná uvolnění.

Průběh VVÚ

Průběh VVÚ (Obr. 7.8) se určí integrálním přístupem. Prut se řeší rozdělením na 3 intervaly. V prvním intervalu budou všechny složky VVÚ nulové, protože v tomto intervalu nepůsobí žádná vnější síla. V druhém intervalu se již projeví působení vnějšího zatížení od síly F. Třetí interval je na dříku, kde na rozdíl od předchozí úlohy bude nulová pouze normálová síla.



Obr. 7.8: Působení VVÚ pro druhou úlohu

$$N_2 = F \cdot sin\varphi_2 \tag{7.15}$$

$$T_2 = -F \cdot cos\varphi_2 \tag{7.16}$$

$$M_{o2} = F \cdot R \cdot sin\varphi_2 \tag{7.17}$$

$$\varphi_2 \in \langle 0; \frac{3}{2}\pi \rangle$$

Ve dříku je v tomto případě nulová pouze normálová síla:

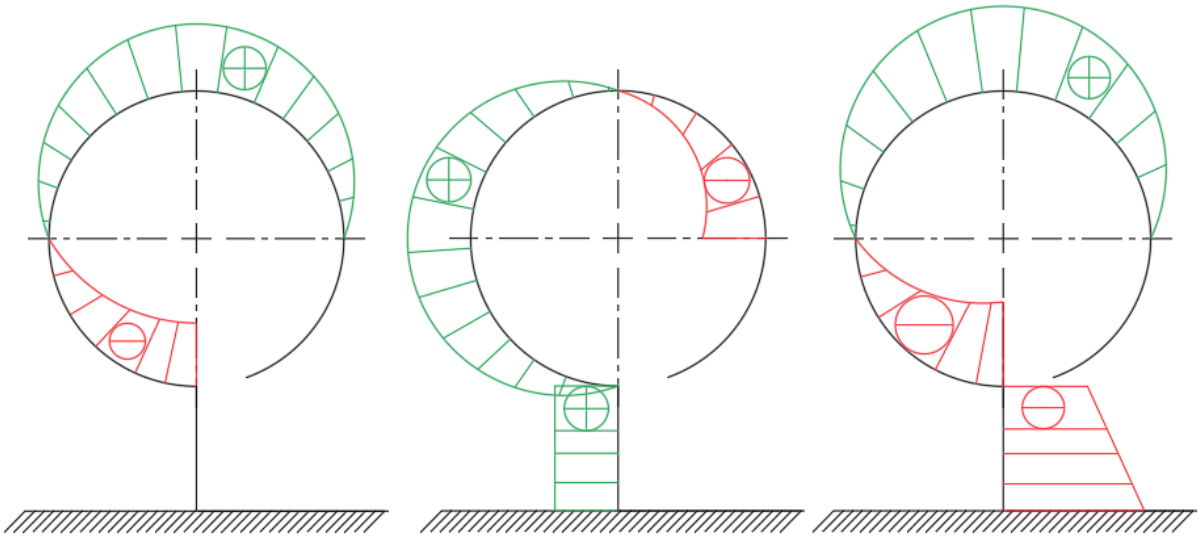
$$T_3 = F \tag{7.18}$$

$$M_{o3} = -F \cdot (R + x_3) \tag{7.19}$$

$$x_3 \in \langle 0; l \rangle$$

Grafické zobrazení VVÚ

Pokud jsou známe všechny funkce N, T, M_o pak lze vykreslit VVÚ graficky (obr. 7.9).



a) b) c)

Obr. 7.9: Průběh a) normálové síly, b) posouvající síly, c) ohybového momentu

Zjištění kritického místa

Z průběhu VVÚ nelze bezpečně určit, kde je kritické místo. Kritické místo se může nacházet ve druhém intervalu na oku šroubu na souřadnici $\varphi_2 = \frac{1}{2}\pi$ nebo ve třetím intervalu na konci dříku ve vetknutí v místě $x_3 = l$. Kritické místo se tak zjistí až analýzou napětí v obou těchto místech.

Výpočet napětí a bezpečnosti v kritickém místě na oku

1) Teorii slabě zakřivených prutů

Výpočet napětí opět proběhne obdobně jako v prvním příkladu. Do rovnice VVÚ pro druhý interval se dosadí $\varphi_2 = \frac{1}{2}\pi$. Rovnice budou pak následující:

– Napětí od normálové síly:

$$\sigma_N = \frac{N_2}{S} = \frac{F}{S} = 8{,}04 \text{ MPa} \tag{7.20}$$

– Napětí od ohybového momentu:

$$\sigma_{M_o1} = \frac{M_{o2}}{J_y} z = \frac{FR}{J_y}\frac{d}{2} = 86{,}33 \text{ MPa} \tag{7.21}$$

– Celkové normálové napětí:

$$\sigma_{C1} = \sigma_N + \sigma_{M_o1} = 94{,}37 \text{ MPa} \tag{7.22}$$

– Smykové napětí:

Smykové napětí bude v tomto místě nulové, jak je vidět na obr. 7.9.

– Redukované napětí:

$$\sigma_{RED1} = \sqrt{{\sigma_{C1}}^2} = 94{,}37 \text{ MPa} \tag{7.23}$$

– Výpočet bezpečnosti:

$$k_1 = \frac{\sigma_K}{\sigma_{RED1}} = 2{,}01 \tag{7.24}$$

2) Teorii silně zakřívených prutů

– Napětí od normálové síly:

Normálové napětí bude stejné jako pro slabě zakřivený prut, tedy $\sigma_N = 8{,}04$ MPa.

– Napětí od ohybového momentu na vnitřním poloměru:

$$\sigma_{M_o2} = \frac{M_{o2}}{Se}\frac{z_n}{r - z_n} = \frac{FR}{Se}\frac{\frac{d}{2} - e}{r - \left(\frac{d}{2} - e\right)} = 119{,}8 \text{ MPa} \tag{7.25}$$

Na vnějším poloměru by opět vycházelo podstatně nižší napětí.

– Celkové normálové napětí na vnitřním poloměru:

$$\sigma_{C2} = \sigma_N + \sigma_{M_o2} = 127{,}84 \text{ MPa} \tag{7.26}$$

– Smykové napětí:

Smykové napětí bude opět rovno nule.

– Redukované napětí:

$$\sigma_{RED2} = \sqrt{\sigma_{C2}{}^2} = 127{,}84 \text{ MPa} \tag{7.27}$$

– Výpočet bezpečnosti:

$$k_2 = \frac{\sigma_K}{\sigma_{RED2}} = 1{,}49 \tag{7.28}$$

Výpočet napětí a bezpečnosti v kritickém místě na dříku

Napětí v dříku se počítá pouze teorii přímých prutů. Můžeme tedy použít vztahy pro slabě zakřivené pruty, protože se používají stejné jako při počítání přímých prutů. Použijí se rovnice VVÚ pro třetí interval a dosadí se $x_3 = l$. Výpočet pak bude následující:

– Napětí od normálové síly:

Z obr. 7.9 je zřejmé, že v celém dříku je normálová síla rovna nule. Normálové napětí bude tedy taky nulové v kritickém místě.

– Napětí od ohybového momentu:

$$\sigma_{M_o3} = \frac{M_{o3}}{J_y}z = \frac{-F(R + l)}{J_y}\frac{d}{2} = -158{,}58 \text{ MPa} \tag{7.29}$$

– Celkové normálové napětí:

$$\sigma_{C3} = \sigma_{N3} + \sigma_{M_o3} = \sigma_{M_o3} = -158{,}58 \text{ MPa} \tag{7.30}$$

– Smykové napětí:

$$\tau = \frac{4}{3}\frac{T_3}{S} = \frac{4}{3}\frac{F}{S} = 10{,}72 \text{ MPa} \tag{7.31}$$

– Redukované napětí:

$$\sigma_{RED3} = \sqrt{\sigma_{C3}{}^2} = 158{,}58 \text{ MPa} \tag{7.32}$$

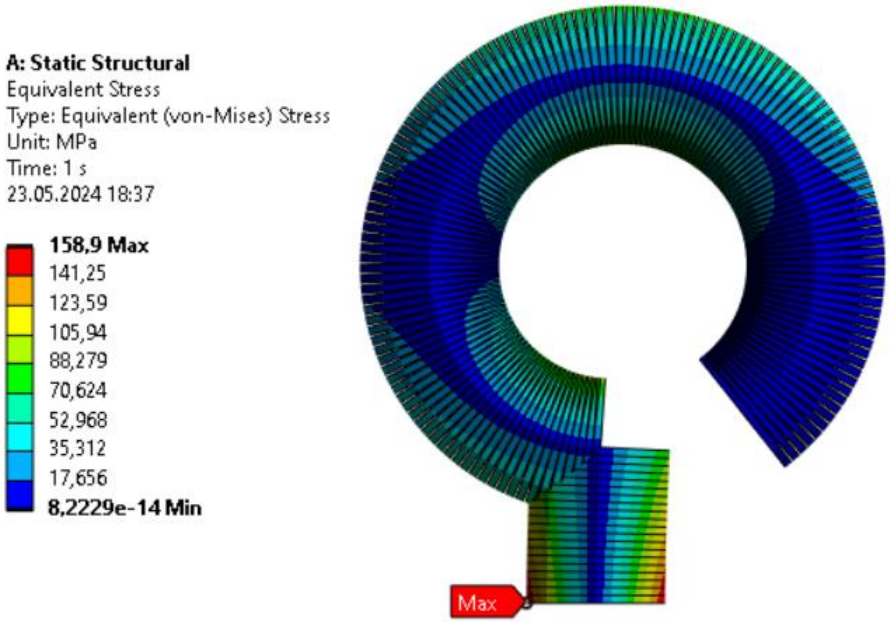
– Výpočet bezpečnosti:

$$k_3 = \frac{\sigma_K}{\sigma_{RED3}} = 1{,}2 \tag{7.33}$$

Z výpočtu napětí a bezpečnosti je tedy zřejmé, že kritické místo je na konci dříku v místě vetknutí.

Numerické řešení

Model pro numerickou analýzu byl použit stejný jako pro první příklad (obr. 7.10). Jediná změna byla provedena v umístění síly, která byla určena do místa podle zadání podle obr. 7.7.



Obr. 7.10: Výsledky z ANSYS Workbench pro druhou úlohu

Touto metodou vyšlo maximální redukované napětí $\sigma_{RED4} = 158{,}9$ MPa.

Porovnání výsledků

Tab. 7.2: Porovnání výsledků pro druhý příklad

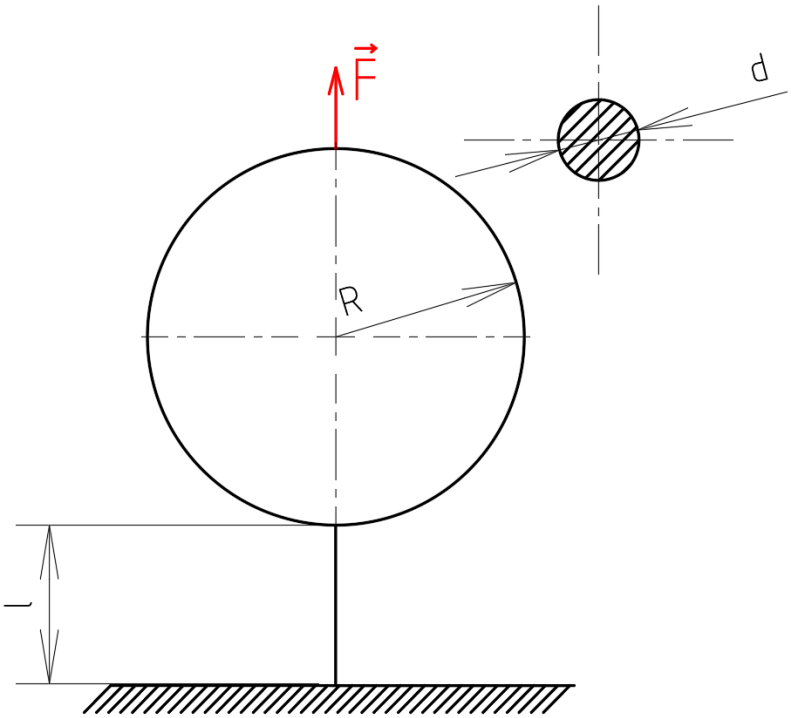
	Slabě zakřivený pruty	Silně zakřivený prut	Dřík	Numerické řešení
Redukované napětí σ_{RED} [MPa]	94,4	127,84	158,58	158,9
Bezpečnost k [-]	2,01	1,49	1,2	1,2

Z výsledků z tab. 7.2 je důležité si všimnout, že největší napětí se nachází ve vetknutí na konci dříku a vyšlo s rozdílem desetin MPa stejné jak při numerickém řešení, tak při analytickém. To že výsledky vyšly prakticky totožné není tentokrát tak překvapivé, protože dřík lze počítat pouze teorii přímých prutů, která používá stejné vztahy jako teorie slabě zakřivených prutů. Stejně úlohu zhodnotil i ANSYS a vypočítal tak prakticky stejnou hodnotu jako při analytickém výpočtu.

7.2 Úlohy pro šroub s uzavřeným okem

7.2.1 Namáhání v ose šroubu

Šroub s uzavřeným okem je namáhaný v ose šroubu (Obr. 7.11). Toto namáhání je doporučováno výrobcem. Šrouby s uzavřeným okem mají obecně větší únosnost než, šrouby s okem otevřeným. Dá se tak očekávat, že napětí, které bude působit v uzavřeném oku, bude podstatně nižší než to, které působilo v oku otevřeném, a tudíž bude i větší bezpečnost.



Obr. 7.11: Šroub s uzavřeným okem namáhaný v ose šroubu

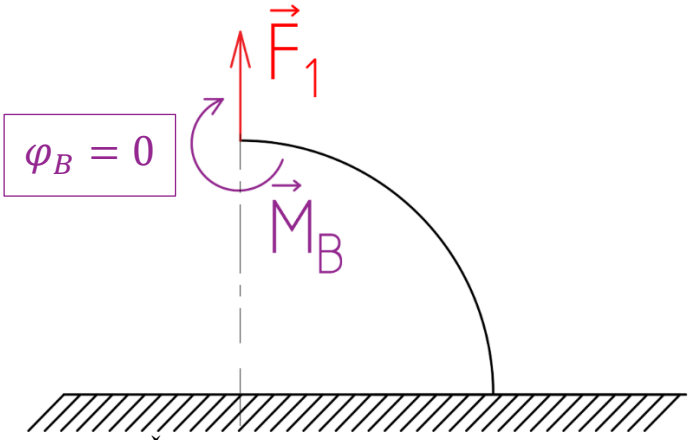
Rozbor úlohy

Jedná se o symetrickou úlohu. Dá se využít obou os symetrie pro řešení. U této úlohy se již bude provádět částečné uvolnění, takže bude zapotřebí zavést deformační podmínku. Jelikož působí síla ve směru osy šroubu, tak nebude potřeba kontrolovat napětí v dříku, protože zde opět bude působit pouze normálové napětí, které je nižší než v zaoblené části, jak víme z řešení prvního příkladu.

Částečné uvolnění

Provede se částečné uvolnění a do bodu B se zavede nenulová složka VVÚ, kterou je moment M_B (obr. 7.12). Zavede se i deformační podmínka v bodě B pro nulové natočení $\varphi_B = 0$. Celková síla F se nahradí silou F_1. Pro sílu F_1 platí:

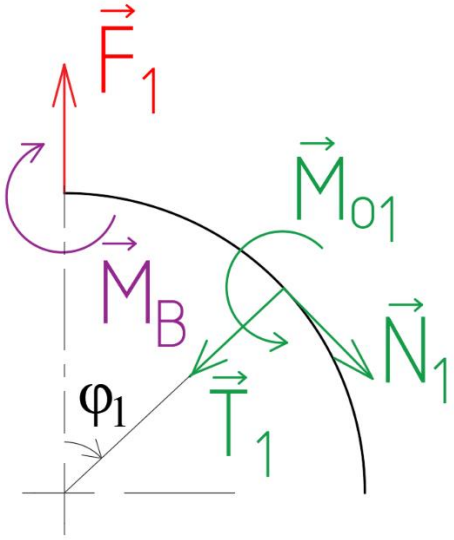
$$F_1 = \frac{F}{2} = 250 \text{ N} \tag{7.34}$$



Obr. 7.12: Částečné uvolnění pomocí dvou os symetrie

Průběh VVÚ

Průběh VVÚ v částečně uvolněné části oka (obr. 7.13) bude vypadat následovně:



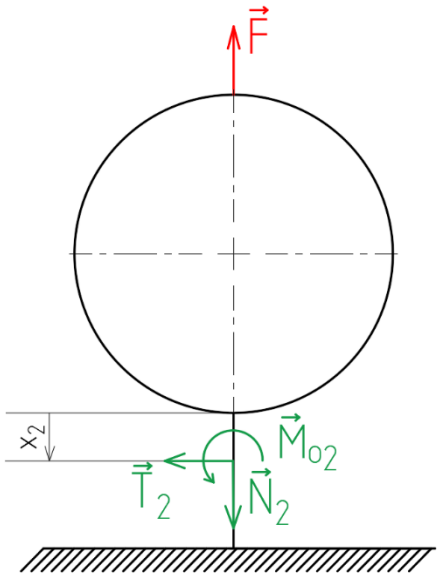
Obr. 7.13: Působení VVÚ pro třetí úlohu

$$N_1 = F_1 \cdot sin\varphi_1 \tag{7.35}$$

$$T_1 = F_1 \cdot cos\varphi_1 \tag{7.36}$$

$$M_{o1} = M_B + F_1 \cdot R \cdot sin\varphi_1 \tag{7.37}$$

$$\varphi_1 \in \langle 0; \frac{1}{2}\pi \rangle$$



Obr. 7.14: Působení VVÚ ve dříku

Ve dříku je tedy nenulová pouze normálová síla (obr. 7.14):

$$N_2 = F \qquad (7.38)$$
$$x_2 \in \langle 0, l \rangle$$

1) Teorii slabě zakřivených prutů

Vyjádření deformační podmínky

Vyjádření deformační podmínky pro nulové natočení $\varphi_B = 0$:

$$\varphi_B = \frac{\partial W}{\partial M_B} = 0 \qquad (7.39)$$

Jelikož délka střednice není řádově větší než průměr prutu tak by se kromě vlivu ohybového momentu M_o, měly brát v úvahu také vlivy normálové síly N a posouvající síly T. Energie napjatosti W je tedy potřeba vyjádřit součtem všech příspěvků z rovnic (6.12), (6.13) a (6.14). Jelikož ale N_1 a T_1 nezávisí na M_B tak $\frac{\partial N_1}{\partial M_B} = 0$ a $\frac{\partial T_1}{\partial M_B} = 0$, což rovnici výrazně zkrátí. Po této úpravě pak vyjde deformační podmínka pro nulové natočení $\varphi_B = 0$ jen jako:

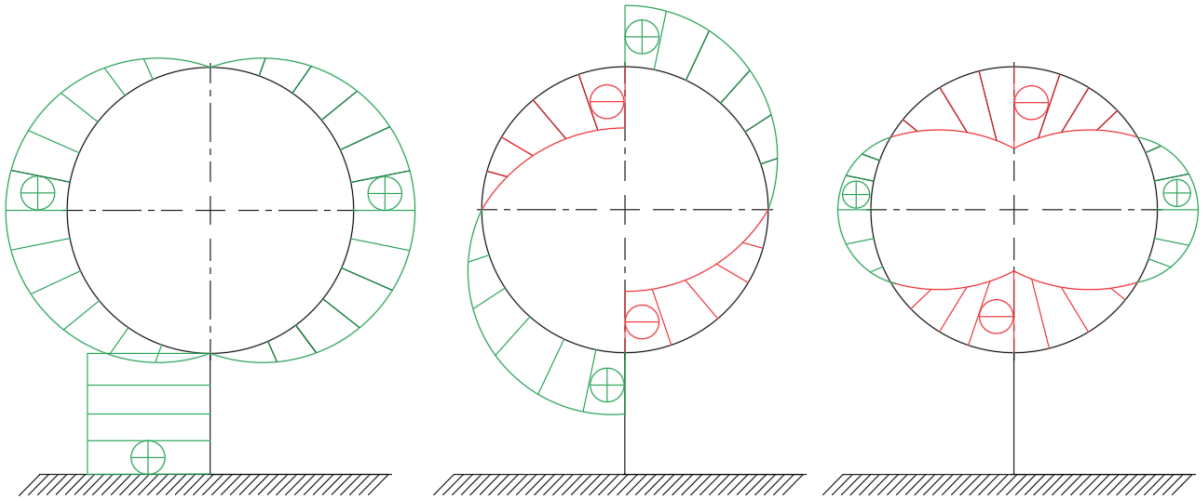
$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{M_{o1}}{E \cdot J_y} \cdot \frac{\partial M_{o1}}{\partial M_B} \cdot R \cdot d\varphi = 0 \qquad (7.40)$$

V této rovnici je pouze jedna neznámá M_B. Vyřešením se tedy získá hledaný moment, který má hodnotu:

$$M_B = -1902 \text{ Nmm}$$

Grafické zobrazení VVÚ

Pokud jsou známe všechny funkce N, T, M_o pak lze vykreslit VVÚ graficky (obr. 7.15) pomocí symetrie (viz. kapitola 5.2).



a) b) c)

Obr. 7.15: Průběh a) normálové síly, b) posouvající síly, c) ohybového momentu

Zjištění kritického místa

Z obr. 7.15 není opět na první pohled jasné, kde přesně bude kritické místo. Podle průběhu VVÚ může být kritické místo, buď v průřezech ležících na svislé, kde $\varphi_1 = 0$, nebo na vodorovné ose symetrie, kde $\varphi_1 = \frac{1}{2}\pi$. V těchto místech se tedy provede analýza napětí a určí bezpečnost.

Výpočet napětí a bezpečnosti na svislé ose symetrie

– Napětí od normálové síly:

Z obr. 7.15 je zřejmé, že v průřezu ležícím na svislé ose symetrie je normálová síla rovna nule. Normálové napětí bude tedy taky nulové v tomto místě.

– Napětí od ohybového momentu:

$$\sigma_{M_o1} = \frac{M_{o1}}{J_y} z = \frac{M_B}{J_y} \frac{d}{2} = -27{,}48 \text{ MPa} \tag{7.41}$$

– Celkové normálové napětí:

$$\sigma_{C1} = \sigma_{N1} + \sigma_{M_o1} = -27{,}48 \text{ MPa} \tag{7.42}$$

– Smykové napětí:

$$\tau_1 = \frac{4}{3}\frac{T_1}{S} = \frac{4}{3}\frac{F_1}{S} = 5{,}36 \text{ MPa} \tag{7.43}$$

– Redukované napětí:

$$\sigma_{RED1} = \sqrt{{\sigma_{C1}}^2} = 27{,}48 \text{ MPa} \tag{7.44}$$

– Výpočet bezpečnosti:

$$k_1 = \frac{\sigma_K}{\sigma_{RED1}} = 6{,}91 \tag{7.45}$$

Výpočet napětí a bezpečnosti v kritickém místě na vodorovné ose symetrie

– Napětí od normálové síly:

$$\sigma_{N2} = \frac{N_1}{S} = \frac{F_1}{S} = 8{,}04 \text{ MPa} \tag{7.46}$$

– Napětí od ohybového momentu:

$$\sigma_{M_o2} = \frac{M_{o1}}{J_y} z = \frac{M_B + F_1 R}{J_y} \frac{d}{2} = 15{,}68 \text{ MPa} \tag{7.47}$$

– Celkové normálové napětí:

$$\sigma_{C2} = \sigma_{N2} + \sigma_{M_o2} = 23{,}72 \text{ MPa} \tag{7.48}$$

– Smykové napětí:

Posouvající síla je v tomto průřezu nulová podle obr. 7.15, takže i smykové napětí je nulové.

– Redukované napětí:

$$\sigma_{RED2} = \sqrt{{\sigma_{C2}}^2} = 23{,}72 \text{ MPa} \tag{7.49}$$

– Výpočet bezpečnosti:

$$k_2 = \frac{\sigma_K}{\sigma_{RED2}} = 8{,}01 \tag{7.50}$$

Z výpočtu napětí a bezpečnosti v daných místech je tedy zřejmé, že kritické místo se nachází na svislé ose symetrie.

2) Teorii silně zakřívených prutů

Vyjádření deformační podmínky

Jelikož uvažujeme prut jako silně zakřivený, tak je zapotřebí brát v úvahu nejenom vliv ohybového momentu M_o, ale také vliv normálové síly N a posouvající síly T. Energie napjatosti W je tedy potřeba vyjádřit součtem všech příspěvků z rovnic (6.15) až (6.18). Jelikož ale N_1 a T_1 nezávisí na M_B tak $\frac{\partial N_1}{\partial M_B} = 0$ a $\frac{\partial T_1}{\partial M_B} = 0$, to opět některé členy vynuluje. Po této úpravě pak vyjde deformační podmínka pro nulové natočení $\varphi_B = 0$ jako:

$$\varphi_B = \frac{\partial W}{\partial M_B} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{M_{o1}}{ESe} \frac{\partial M_{o1}}{\partial M_B} R d\varphi - \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{1}{ES} \left(\frac{\partial M_{o1}}{\partial M_B} N_1 + \frac{\partial N_1}{\partial M_B} M_{o1}\right) d\varphi = 0 \tag{7.51}$$

Řešením deformační podmínky pak vyjde moment:

$$M_B = -1834 \text{ Nmm}$$

Zjištění kritického místa

Z řešení pomocí teorie slabě zakřivených prutů již víme, že kritické místo se nachází na svislé ose symetrie. Provede se tedy výpočet napětí a bezpečnosti pouze v tomto místě.

Výpočet napětí a bezpečnosti v kritickém místě

– Napětí od normálové síly:

Napětí od normálové síly bude stejné jako u slabě zakřiveného prutu opět nulové.

– Napětí od ohybového momentu na vnitřním poloměru:

$$\sigma_{M_o3} = \frac{M_{o1}}{Se} \frac{z_n}{r - z_n} = \frac{M_B}{Se} \frac{\frac{d}{2} - e}{r - \left(\frac{d}{2} - e\right)} = -36{,}77 \text{ MPa} \tag{7.52}$$

Pokud bychom toto napětí určovali na vnějším poloměru tak by opět vyšlo nižší.

- Celkové normálové napětí:

$$\sigma_{C3} = \sigma_{N2} + \sigma_{M_o3} = -36{,}77 \text{ MPa} \tag{7.55}$$

- Smykové napětí:

$$\tau_1 = \frac{4}{3}\frac{T_1}{S} = \frac{4}{3}\frac{F_1}{S} = 5{,}36 \text{ MPa} \tag{7.56}$$

- Redukované napětí:

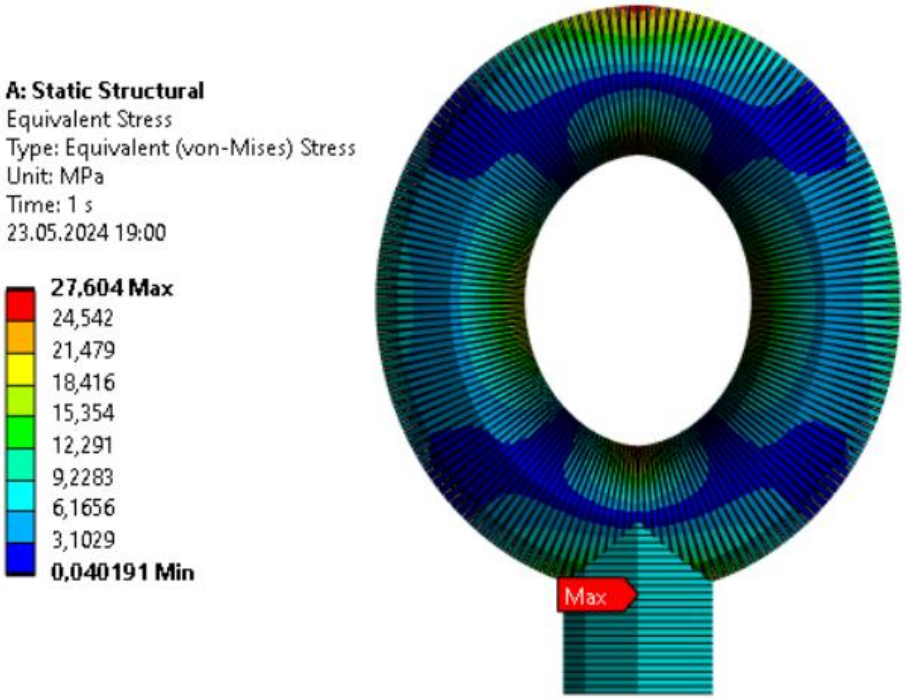
$$\sigma_{RED3} = \sqrt{{\sigma_{C3}}^2} = 36{,}77 \text{ MPa} \tag{7.57}$$

- Výpočet bezpečnosti:

$$k_2 = \frac{\sigma_K}{\sigma_{RED2}} = 5{,}17 \tag{7.58}$$

Řešení pomocí metody konečných prvků

V programu ANSYS Workbench byla opět provedena analýzu tohoto příkladu. Pro tento příklad byl navrhnut nový model podle obr. 7.11. Postup vytváření modelu se nijak nelišil od postupu při návrhu modelu pro první dvě úlohy.



Obr. 7.16: Výsledky z ANSYS Workbench pro třetí úlohu

Touto metodou vyšlo maximální redukované napětí jako $\sigma_{RED3} = 27{,}604$ MPa (obr. 7.16).

Porovnání výsledků

Tab. 7.3: Porovnání výsledků pro třetí příklad

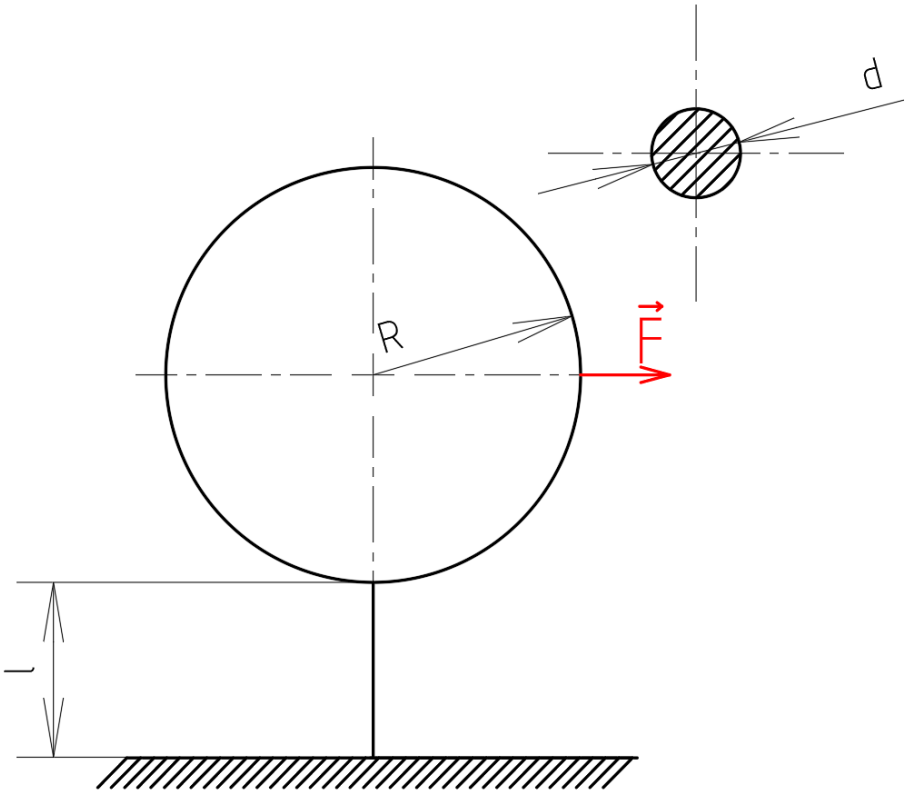
	Slabě zakřivený pruty	Silně zakřivený prut	Numerické řešení
Redukované napětí σ_{RED} [MPa]	27,48	36,77	27,604
Bezpečnost k [-]	6,91	5,17	6,88

Výsledky z tab 7.3 lze porovnat s výsledky z tab 7.1 a z tohoto porovnání je znát, jak velký rozdíl způsobuje, jestli je oko otevřené nebo uzavřené. Při výpočtu otevřeného oka vyšla bezpečnost okolo 2 a při výpočtu oka uzavřeného je bezpečnost až 6,91.

Dále si lze opět všimnout prakticky stejných výsledků analytickým řešením teorii slabě zakřivených prutů a numerickým řešením. Tento rozdíl mezi výsledky numerickým výpočtem v softwaru ANSYS a analytickým výpočtem pomocí teorie silně zakřivených prutů je opět způsoben nízkou hodnotou *R/d* viz první příklad.

7.2.2 Namáhání kolmo k ose šroubu

Šroub s uzavřeným okem je namáhaný kolmo k ose šroubu (obr. 7.17). Toto namáhání je nedoporučováno výrobcem. Pokud jsou tímto způsobem šrouby namáhány, pak je zapotřebí aby byly opatřeny límcem pod okem, což šroub v tomto případě není.



Obr. 7.17: Šroub s uzavřeným okem namáhaný kolmo k ose

Rozbor úlohy

V této úloze se již nedá využít žádné osy symetrie, proto se provede částečné uvolnění a provádí se VVÚ ve 4 intervalech. Na oku budou 3 intervaly a jeden pak na dříku. V místě, kde se rozdělí oko na dvě půlky se zavedou tři deformační podmínky. Dojde tedy k řešení až tří rovnic o třech neznámých. Tyto rovnice jsou pro usnadnění vyřešeny v programu Matlab. Skripty, podle kterých byly rovnice vyřešeny jsou obsaženy v příloze této bakalářské práce.

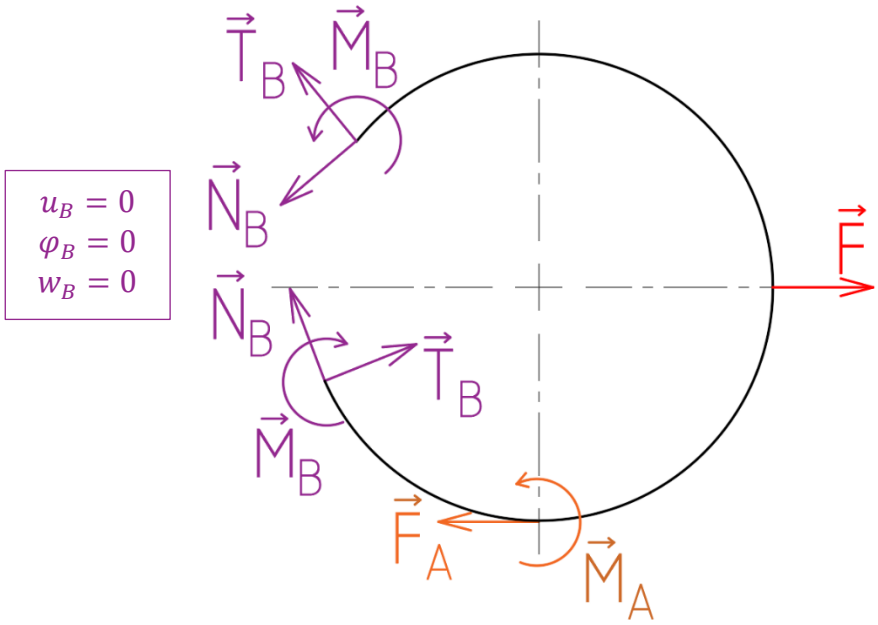
Částečné uvolnění

Pro zjednodušení se určí délka dříku l = 0 mm. A pomocí silové rovnováhy se určí síla a moment, který působí v tomto místě. Síla F_A a moment M_A budou tedy vypadat následovně:

$$F_A = F = 500 \text{ N} \tag{7.59}$$

$$M_A = F \cdot R = 5975 \text{ Nmm} \tag{7.60}$$

Poté se provede částečné uvolnění (obr. 7.18) na vodorovné ose v bodě B a zavedou se tři deformační podmínky. Nulový posuv $u_B = 0$, nulové natočení $\varphi_B = 0$ a nulový průhyb $w_B = 0$. V bodě B tak působí tři nenulové složky VVÚ a ty jsou N_B, T_B, M_B.

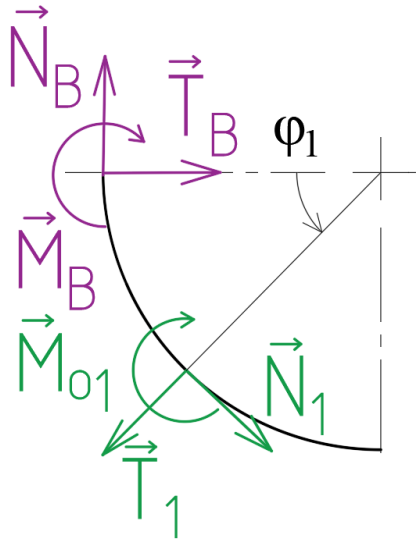


Obr. 7.18: Částečné uvolnění

Průběh VVÚ

1. Interval

V prvním intervalu působí VVÚ podle obr. 7.19.



Obr. 7.19: Působení VVÚ pro první úsek

$$N_1 = N_B cos\varphi_1 - T_B sin\varphi_1 \tag{7.61}$$

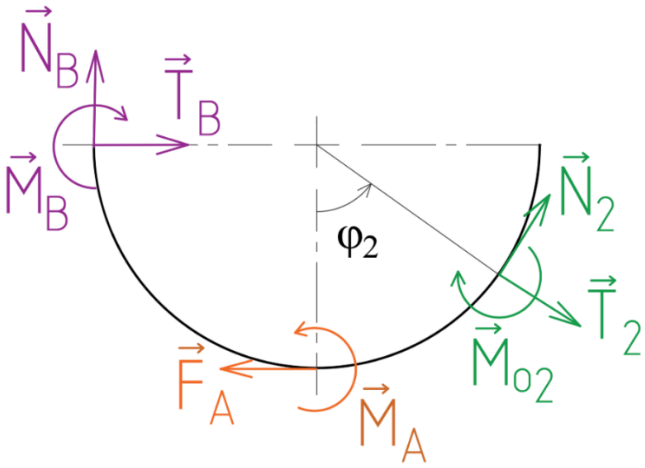
$$T_1 = T_B cos\varphi_1 + N_B sin\varphi_1 \tag{7.62}$$

$$M_{o1} = -M_B - T_B R sin\varphi_1 - N_B(R - R cos\varphi_1) \tag{7.63}$$

$$\varphi_1 \in \langle 0; \frac{1}{2}\pi \rangle$$

2. Interval

V druhém intervalu působí VVÚ podle obr. 7.20.



Obr. 7.20: Působení VVÚ pro druhý interval

$$N_2 = -N_B sin\varphi_2 - T_B cos\varphi_2 + F_A cos\varphi_2 \tag{7.64}$$

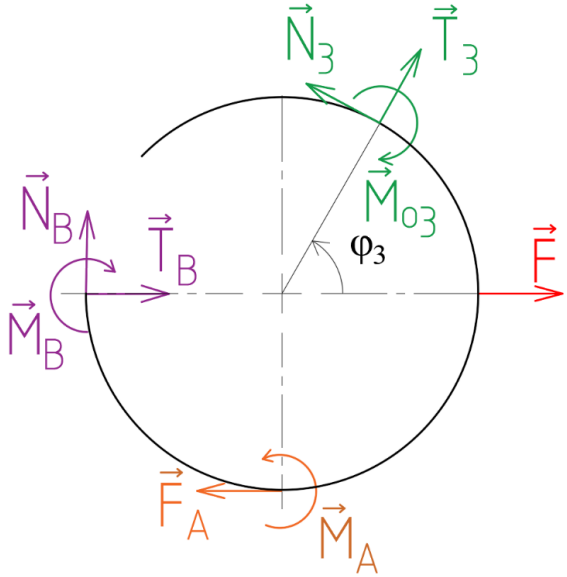
$$T_2 = N_B cos\varphi_2 - T_B sin\varphi_2 + F_A sin\varphi_2 \tag{7.65}$$

$$M_{o2} = M_A - M_B - F_A(R - Rcos\varphi_2) - N_B(R + Rsin\varphi_2) - T_B Rcos\varphi_2 \tag{7.66}$$

$$\varphi_2 \in \langle 0; \frac{1}{2}\pi \rangle$$

3. Interval

V třetím intervalu působí VVÚ podle obr. 7.21.



Obr. 7.21: Působení VVÚ pro třetí interval

$$N_3 = -N_B cos\varphi_3 + T_B sin\varphi_3 + F sin\varphi_3 - F_A sin\varphi_3 \tag{7.67}$$

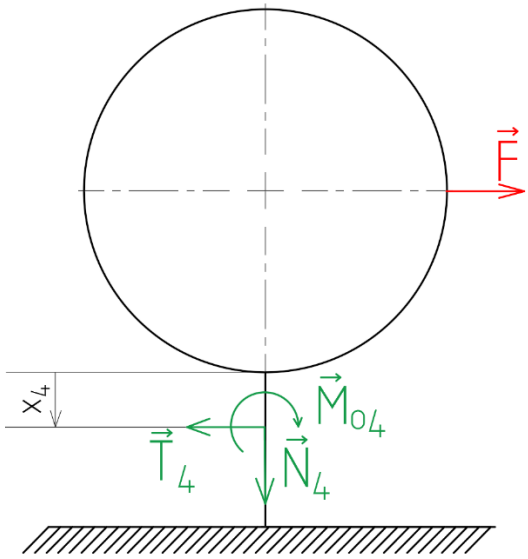
$$T_3 = -N_B sin\varphi_3 - T_B cos\varphi_3 - F cos\varphi_3 + F_A cos\varphi_3 \tag{7.68}$$

$$M_{o3} = M_A - M_B - N_B(R + Rcos\varphi_3) + T_B Rsin\varphi_3 + FRsin\varphi_3 - F_A(R + Rsin\varphi_3) \tag{7.69}$$

$$\varphi_3 \in \langle 0; \pi \rangle$$

4. Interval

Čtvrtý interval je na dříku. VVÚ ve dříku působí podle obr. 7.22.



Obr. 7.22: Působení VVÚ ve čtvrtém intervalu

$$T_4 = F \tag{7.70}$$

$$M_{o4} = -F(R + x_4) \tag{7.71}$$

$$x_4 = \langle 0; l \rangle$$

1) Teorii slabě zakřivených prutů

Vyjádření deformačních podmínek

Deformační podmínky se vyjádří pomocí vztahů z kapitoly 6.2.1 jako:

– Nulový posuv $u_B = 0$:

$$\begin{aligned} u_B = \frac{\partial W}{\partial N_B} = & \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{N_1}{ES}\frac{\partial N_1}{\partial N_B} R d\varphi_1 + \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{N_2}{ES}\frac{\partial N_2}{\partial N_B} R d\varphi_2 + \int_0^{\pi} \frac{N_3}{ES}\frac{\partial N_3}{\partial N_B} R d\varphi_3 \\ & + \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{M_{o1}}{EJ_y}\frac{\partial M_{o1}}{\partial N_B} R d\varphi_1 + \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{M_{o2}}{EJ_y}\frac{\partial M_{o2}}{\partial N_B} R d\varphi_2 \\ & + \int_0^{\pi} \frac{M_{o3}}{EJ_y}\frac{\partial M_{o3}}{\partial N_B} R d\varphi_3 \\ & + \beta\Big(\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{T_1}{GS}\frac{\partial T_1}{\partial N_B} R d\varphi_1 \\ & + \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{T_2}{GS}\frac{\partial T_2}{\partial N_B} R d\varphi_2 + \int_0^{\pi} \frac{T_3}{GS}\frac{\partial T_3}{\partial N_B} R d\varphi_3\Big) = 0 \end{aligned} \tag{7.72}$$

– Nulové natočení $\varphi_B = 0$:

$$\varphi_B = \frac{\partial W}{\partial M_B} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{N_1}{ES}\frac{\partial N_1}{\partial M_B} R d\varphi_1 + \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{N_2}{ES}\frac{\partial N_2}{\partial M_B} R d\varphi_2 + \int_0^{\pi} \frac{N_3}{ES}\frac{\partial N_3}{\partial M_B} R d\varphi_3$$
$$+ \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{M_{o1}}{EJ_y}\frac{\partial M_{o1}}{\partial M_B} R d\varphi_1 + \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{M_{o2}}{EJ_y}\frac{\partial M_{o2}}{\partial M_B} R d\varphi_2$$
$$+ \int_0^{\pi} \frac{M_{o3}}{EJ_y}\frac{\partial M_{o3}}{\partial M_B} R d\varphi_3 \tag{7.73}$$
$$+ \beta\left(\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{T_1}{GS}\frac{\partial T_1}{\partial M_B} R d\varphi_1\right.$$
$$\left. + \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{T_2}{GS}\frac{\partial T_2}{\partial M_B} R d\varphi_2 + \int_0^{\pi} \frac{T_3}{GS}\frac{\partial T_3}{\partial M_B} R d\varphi_3\right) = 0$$

– Nulový průhyb $w_B = 0$:

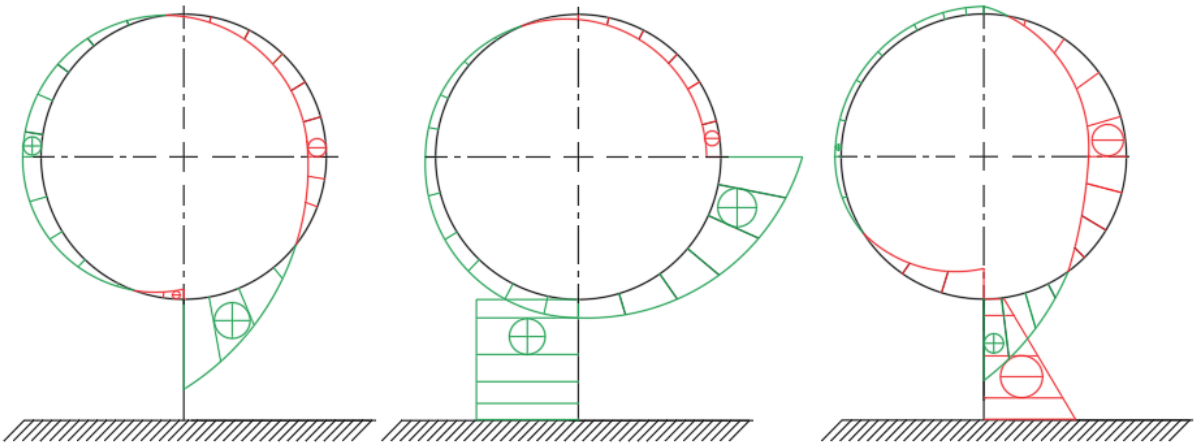
$$w_B = \frac{\partial W}{\partial T_B} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{N_1}{ES}\frac{\partial N_1}{\partial T_B} R d\varphi_1 + \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{N_2}{ES}\frac{\partial N_2}{\partial T_B} R d\varphi_2 + \int_0^{\pi} \frac{N_3}{ES}\frac{\partial N_3}{\partial T_B} R d\varphi_3$$
$$+ \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{M_{o1}}{EJ_y}\frac{\partial M_{o1}}{\partial T_B} R d\varphi_1 + \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{M_{o2}}{EJ_y}\frac{\partial M_{o2}}{\partial T_B} R d\varphi_2$$
$$+ \int_0^{\pi} \frac{M_{o3}}{EJ_y}\frac{\partial M_{o3}}{\partial T_B} R d\varphi_3 \tag{7.74}$$
$$+ \beta\left(\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{T_1}{GS}\frac{\partial T_1}{\partial T_B} R d\varphi_1\right.$$
$$\left. + \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{T_2}{GS}\frac{\partial T_2}{\partial T_B} R d\varphi_2 + \int_0^{\pi} \frac{T_3}{GS}\frac{\partial T_3}{\partial T_B} R d\varphi_3\right) = 0$$

Z deformačních podmínek tak vyjde soustava tří lineárních rovnic o třech neznámých. Tato soustava rovnic je vyřešena v programu Matlab. Výsledné silové působení je tedy:

$$N_B = 105{,}57 \text{ N}$$
$$T_B = 84{,}97 \text{ N}$$
$$M_B = -310{,}65 \text{ Nmm}$$

Grafické zobrazení VVÚ

Pokud jsou známe všechny funkce N, T, M_o pak lze vykreslit VVÚ graficky (Obr. 7.23).



a) b) c)

Obr. 7.23: Průběh a) normálové síly, b) posouvající síly, c) ohybového momentu

Zjištění kritického místa

Z průběhu VVÚ (obr. 7.23) opět není na první pohled jasné, kde je kritické místo. Může se nacházet ve čtvrtém intervalu na dříku ve vetknutí v místě $x_4 = l$ nebo na oku na 2. intervalu v místě $\varphi_2 = 0$. Provede se tedy analýza napětí a bezpečnosti v těchto místech a z výsledků se pak určí kritické místo.

Výpočet napětí a bezpečnosti na oku

– Napětí od normálové síly:

$$\sigma_{N1} = \frac{N_2}{S} = \frac{-T_B + F_A}{S} = 6{,}67 \text{ MPa} \tag{7.75}$$

– Napětí od ohybového momentu:

$$\sigma_{M_o1} = \frac{M_{o2}}{J_y} z = \frac{M_A - M_B - N_B R - T_B R}{J_y} \frac{d}{2} = 57{,}92 \text{ MPa} \tag{7.76}$$

– Celkové normálové napětí:

$$\sigma_{C1} = \sigma_{N1} + \sigma_{M_o1} = 64{,}59 \text{ MPa} \tag{7.77}$$

– Smykové napětí:

$$\tau_1 = \frac{4}{3}\frac{T_2}{S} = \frac{4}{3}\frac{N_B}{S} = 2{,}26 \text{ MPa} \tag{7.78}$$

– Redukované napětí:

$$\sigma_{RED1} = \sqrt{{\sigma_{C1}}^2} = 64{,}59 \text{ MPa} \tag{7.79}$$

– Výpočet bezpečnosti:

$$k_1 = \frac{\sigma_K}{\sigma_{RED1}} = 2{,}94 \tag{7.80}$$

Výpočet napětí a bezpečnosti na konci dříku

– Napětí od normálové síly:

Na obr. 7.23 jde poznat, že normálové napětí v dříku je nulové.

– Napětí od ohybového momentu:

$$\sigma_{M_o 2} = \frac{M_{o4}}{J_y} z = \frac{F(R+l)}{J_y} \frac{d}{2} = 158{,}58 \text{ MPa} \tag{7.81}$$

– Celkové normálové napětí:

$$\sigma_{C2} = \sigma_{N2} + \sigma_{M_o 2} = 158{,}58 \text{ MPa} \tag{7.82}$$

– Smykové napětí:

$$\tau_2 = \frac{4}{3} \frac{T_4}{S} = \frac{4}{3} \frac{F}{S} = 10{,}72 \text{ MPa} \tag{7.83}$$

– Redukované napětí:

$$\sigma_{RED2} = \sqrt{{\sigma_{C2}}^2} = 158{,}58 \text{ MPa} \tag{7.84}$$

– Výpočet bezpečnosti:

$$k_2 = \frac{\sigma_K}{\sigma_{RED2}} = 1{,}2 \tag{7.85}$$

Z výpočtů je tedy jasné, že kritické místo se opět nachází na konci dříku ve vetknutí.

2) Teorii silně zakřívených prutů

Vyjádření deformačních podmínek

Deformační podmínky se vyjádří pomocí vztahů z kapitoly 6.2.1 jako:

- Nulový posuv $u_B = 0$.

$$
\begin{aligned}
u_B = \frac{\partial W}{\partial N_B} = & \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{N_1}{ES}\frac{\partial N_1}{\partial N_B} R d\varphi_1 + \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{N_2}{ES}\frac{\partial N_2}{\partial N_B} R d\varphi_2 + \int_0^{\pi} \frac{N_3}{ES}\frac{\partial N_3}{\partial N_B} R d\varphi_3 \\
& - \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{1}{ES}\left(\frac{\partial M_{o1}}{\partial N_B} N_1 + \frac{\partial N_1}{\partial N_B} M_{o1}\right) d\varphi_1 \\
& - \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{1}{ES}\left(\frac{\partial M_{o2}}{\partial N_B} N_2 + \frac{\partial N_2}{\partial N_B} M_{o2}\right) d\varphi_2 \\
& - \int_0^{\pi} \frac{1}{ES}\left(\frac{\partial M_{o3}}{\partial N_B} N_3 + \frac{\partial N_3}{\partial N_B} M_{o3}\right) d\varphi_3 \\
& + \beta\left(\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{T_1}{GS}\frac{\partial T_1}{\partial N_B} R d\varphi_1 + \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{T_2}{GS}\frac{\partial T_2}{\partial N_B} R d\varphi_2 \right. \\
& \left. + \int_0^{\pi} \frac{T_3}{GS}\frac{\partial T_3}{\partial N_B} R d\varphi_3\right) \\
& + \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{M_{o1}}{ESe}\frac{\partial M_{o1}}{\partial N_B} d\varphi_1 \\
& + \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{M_{o2}}{ESe}\frac{\partial M_{o2}}{\partial N_B} d\varphi_2 + \int_0^{\pi} \frac{M_{o3}}{ESe}\frac{\partial M_{o3}}{\partial N_B} d\varphi_3 = 0
\end{aligned}
\tag{7.86}
$$

– Nulové natočení $\varphi_B = 0$:

$$\varphi_B = \frac{\partial W}{\partial M_B} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{N_1}{ES}\frac{\partial N_1}{\partial M_B} R d\varphi_1 + \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{N_2}{ES}\frac{\partial N_2}{\partial M_B} R d\varphi_2 + \int_0^{\pi} \frac{N_3}{ES}\frac{\partial N_3}{\partial M_B} R d\varphi_3 - \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{1}{ES}\left(\frac{\partial M_{o1}}{\partial M_B} N_1 + \frac{\partial N_1}{\partial M_B} M_{o1}\right) d\varphi_1 - \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{1}{ES}\left(\frac{\partial M_{o2}}{\partial M_B} N_2 + \frac{\partial N_2}{\partial M_B} M_{o2}\right) d\varphi_2 - \int_0^{\pi} \frac{1}{ES}\left(\frac{\partial M_{o3}}{\partial M_B} N_3 + \frac{\partial N_3}{\partial M_B} M_{o3}\right) d\varphi_3 + \beta\left(\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{T_1}{GS}\frac{\partial T_1}{\partial M_B} R d\varphi_1 + \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{T_2}{GS}\frac{\partial T_2}{\partial M_B} R d\varphi_2 + \int_0^{\pi} \frac{T_3}{GS}\frac{\partial T_3}{\partial M_B} R d\varphi_3\right) + \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{M_{o1}}{ESe}\frac{\partial M_{o1}}{\partial M_B} d\varphi_1 + \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{M_{o2}}{ESe}\frac{\partial M_{o2}}{\partial M_B} d\varphi_2 + \int_0^{\pi} \frac{M_{o3}}{ESe}\frac{\partial M_{o3}}{\partial M_B} d\varphi_3 = 0 \tag{7.87}$$

– Nulový průhyb $w_B = 0$:

$$w_B = \frac{\partial W}{\partial T_B} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{N_1}{ES}\frac{\partial N_1}{\partial T_B} R d\varphi_1 + \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{N_2}{ES}\frac{\partial N_2}{\partial T_B} R d\varphi_2 + \int_0^{\pi} \frac{N_3}{ES}\frac{\partial N_3}{\partial T_B} R d\varphi_3 - \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{1}{ES}\left(\frac{\partial M_{o1}}{\partial T_B} N_1 + \frac{\partial N_1}{\partial T_B} M_{o1}\right) d\varphi_1 - \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{1}{ES}\left(\frac{\partial M_{o2}}{\partial T_B} N_2 + \frac{\partial N_2}{\partial T_B} M_{o2}\right) d\varphi_2 - \int_0^{\pi} \frac{1}{ES}\left(\frac{\partial M_{o3}}{\partial T_B} N_3 + \frac{\partial N_3}{\partial T_B} M_{o3}\right) d\varphi_3 + \beta\left(\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{T_1}{GS}\frac{\partial T_1}{\partial T_B} R d\varphi_1 + \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{T_2}{GS}\frac{\partial T_2}{\partial T_B} R d\varphi_2 + \int_0^{\pi} \frac{T_3}{GS}\frac{\partial T_3}{\partial T_B} R d\varphi_3\right) + \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{M_{o1}}{ESe}\frac{\partial M_{o1}}{\partial T_B} d\varphi_1 + \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{M_{o2}}{ESe}\frac{\partial M_{o2}}{\partial T_B} d\varphi_2 + \int_0^{\pi} \frac{M_{o3}}{ESe}\frac{\partial M_{o3}}{\partial T_B} d\varphi_3 = 0 \tag{7.88}$$

Z deformačních podmínek tak vyjde soustava tří lineárních rovnic o třech neznámých. Vyřešením této soustava se získá výsledné silové působení jako:

$$N_B = 105{,}5 \text{ N}$$
$$T_B = 83{,}99 \text{ N}$$
$$M_B = -344 \text{ Nmm}$$

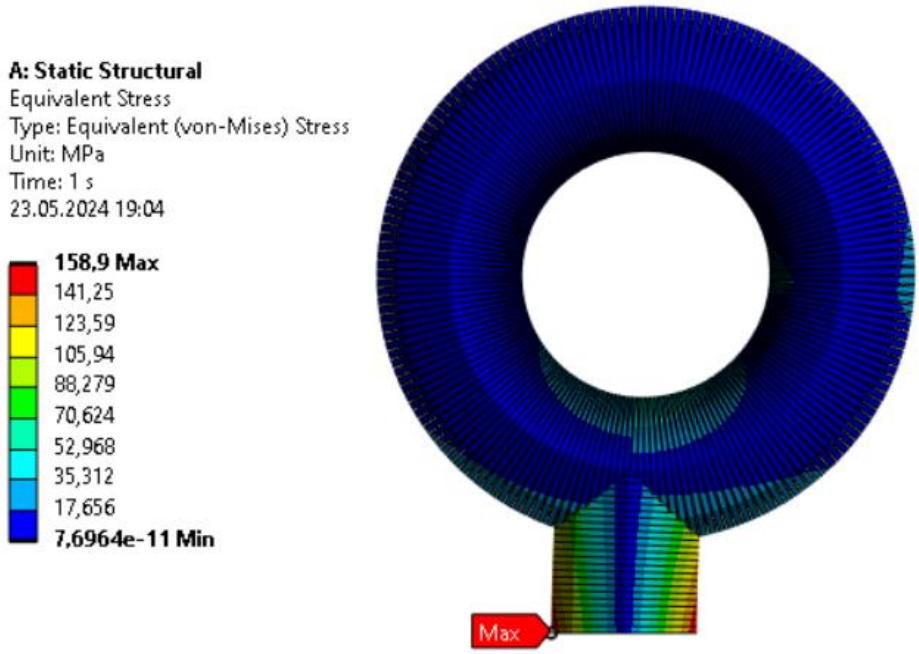
Zjištění kritického místa

Z řešení úlohy pomocí teorie slabě zakřivených prutů víme, že kritické místo je na konci dříku ve vetknutí. Napětí v dříku se nijak nezmění, protože ve dříku nijak nevystupují síly a moment z deformačních podmínek. Takže výsledné maximální redukované a bezpečnost jsou opět:

$$\sigma_{RED2} = 158{,}58 \text{ MPa}$$
$$k_2 = 1{,}2$$

Numerické řešení

V programu ANSYS Workbench byla opět provedena analýza napětí. Tato analýza byla opět provedena na stejném modelu jako pro třetí úlohu, jen byl změněno působiště síly podle zadání z obr. 7.17.



Obr. 7.24: Výsledky z ANSYS Workbench pro čtvrtou úlohu

Touto metodou vyšlo maximální redukované napětí jako $\sigma_{RED3} = 158{,}9$ MPa (obr. 7.24)

Porovnání výsledků

Tab. 7.4: Porovnání výsledků pro čtvrtý příklad na dříku

	Analytický výpočet	Numerický výpočet
Redukované napětí σ_{RED} [MPa]	158,58	158,9
Bezpečnost k [-]	1,2	1,2

Z tab. 7.4 lze tedy posoudit, že ani šrouby s uzavřeným okem nejsou vhodné pro namáhání kolmo k ose šroubu. Pokud by byly tyto šrouby opatřeny límcem, pak by nejspíš vyšlo podstatně nižší napětí, a tudíž i větší bezpečnost. Šrouby s límcem jsou totiž jako jediné určené pro takové zatížení.

Dále je zajímavé, že vyšel prakticky stejný výsledek nejen analytickým a numerickým výpočtem pro uzavřené oko, ale stejné hodnoty vyšly i v úloze pro otevřené oko (tab. 7.2). Lze tedy říct, že při namáhání šroub ve směru kolmém na osu šroubu nezáleží, jestli je oko otevřené nebo uzavřené bezpečnost je stejná.

8 Závěr

Cílem bakalářské práce bylo zpracovat přehled, využití, výhody a nevýhody šroubů s okem. Z těchto poznatků poté naformulovat reprezentativní úlohy pro šrouby s otevřeným a šrouby s uzavřeným okem. Tyto úlohy následně analyticky vyřešit pomocí teorie slabě a silně zakřivených prutů. Poté provést numerické řešení v softwaru ANSYS a následně zhodnotit výsledky ze všech těchto metod.

V úvodní části práce byl stručně uveden přehled šroubů s okem, jejich využití, jejich výhody a nevýhody a také materiály a způsoby jakými se vyrábí.

Dále byl v kapitolách 3 až 6 obsažen teoretický základ pro analytický výpočet úloh pro šroub s otevřeným a uzavřeným okem. V těchto kapitolách byly obsaženy důležité věty lineární pružnosti, které byly následně využívány v dalších kapitolách. Dále zde byl definován prut a jak se následně rozhoduje, jestli je prut silně nebo slabě zakřivený. Poté zde bylo vysvětleno, co jsou to vnitřní výsledné účinky (VVÚ), které jsou velmi zásadní pro nalezení místa s největším napětím na prutu. Na závěr teoretického úvodu byly také uvedeny vztahy, které jsou potřebné pro správný výpočet napětí a deformačních podmínek v následné praktické části.

Dále byly naformulovány 4 úlohy. První úloha byla naformulována pro šroub s otevřeným okem, který je zatížení v ose šroubu. Toto zatížení bylo naformulováno podle doporučení výrobce a byl proveden analytický výpočet pomocí teorie slabě zakřivených a následně pomocí teorie silně zakřivených prutů. Poté bylo provedeno i řešení numerickou metodou v softwaru ANSYS. Na konci řešení byly uvedeny všechny výsledky a jejich porovnání. Výsledky z numerického řešení a z řešení teorii slabě zakřivených prutů byly prakticky shodné. To bylo trochu překvapivé, protože se očekávalo, že výsledek vyjde bližší tomu z analytického výpočtu teorii silně zakřivených prutů. Tento rozdíl byl způsoben tím, že poměr *R/d* vyšel velmi blízký hraniční hodnotě 1. Při odvození vztahů pro výpočet napětí pro silně zakřivené pruty se totiž vychází z předpokladu, že je zachována rovinnost příčných průřezů. To ale přestává platit při tak nízkém *R/d*. Prut se tak odchyluje od prutových předpokladů a napjatost v něm začíná obecnější než prutová. Výsledky získané teorii silně zakřivených prutů jsou tak velmi nepřesné.

V druhé úloze byla formulována úloha opět pro šroub s otevřeným okem, ale tentokrát byl šroub zatížen kolmo k ose. Toto zatížení výrobce nedoporučuje, protože šrouby s otevřeným okem nejsou na toto zatížení vyrobeny. Opět byl proveden analytický výpočet pomocí obou teorii zakřivených prutů a numerickou metodou. Z řešení této úlohy vyšlo, že největší napětí se nachází na konci dříku, kde je šroub namontován do dalšího tělesa.

Třetí úloha byla již naformulována pro šroub s uzavřeným okem. Tato úloha byla opět jako úloha první vytvořena podle doporučení výrobce, takže zátěž na oko působila v ose šroubu. U tohoto šroubu se analytický výpočet provedl usnadněním díky osám symetrie. Provedlo se částečné uvolnění a uvedla se jedna deformační podmínka. Tato deformační podmínka se pak také řešila dvěma způsoby. Jednou použitím vztahů pro deformaci pro slabě zakřivené pruty a podruhé použitím vztahů pro silně zakřivené. Následně byl opět proveden analytický výpočet a numerické řešení. Z výsledků pak bylo znát, že šrouby s uzavřeným okem mají podstatně větší bezpečnost než šrouby s okem otevřeným. Dále se opět projevilo to, že poměr *R/d* je blízký 1, takže se neshodovaly výsledky z numerického řešení s výsledky pomocí teorie silně zakřivených prutů.

Čtvrtá úloha byla také navržena pro šroub s uzavřeným okem. Tentokrát bylo oko namáháno kolmo k ose šroubu. Toto namáhání je sice doporučeno pro šrouby s uzavřeným

okem, ale pouze pro ty, které jsou opatřeny límcem, který lépe snáší toto ohybové namáhání. Při řešení této úlohy nastal problém, že nelze použít žádné osy symetrie pro usnadnění řešení. Provedlo se tak částečné uvolnění a zavedly se tři deformační podmínky. Tyto podmínky byly následně opět vyřešeny teorii slabě a silně zakřivených prutů. Následně se provedl analytický výpočet napětí a poté i numerický výpočet. Z výsledku opět vyšlo, že kritické místo s největším napětím se nachází na dříku v místě vetknutí.

Závěrem lze tedy zhodnotit, že výsledky vyšly podle očekávání z informací od výrobce. Pokud zatížení působí v ose šroubu pak šrouby splňují funkci v pořádku, a to ať už s otevřeným nebo s uzavřeným okem. S uzavřeným okem je nicméně bezpečnost několikrát větší. A pokud tedy působí zátěž kolmo k ose, pak je jedno, jestli je šroub s otevřeným nebo uzavřeným okem, součást je na hranici bezpečnost a neměla by tedy být použita.

Seznam použitých zdrojů

[1] JANÍČEK, Přemysl; ONDRÁČEK, Emanuel; VRBKA, Jan; BURŠA, Jiří. Mechanika těles: pružnost a pevnost I. 3. vyd. Brno: CERM, 2004, 287 s. ISBN 80-214-2592-X.

[2] HORNÍKOVÁ, Jana, Jiří BURŠA a Pavel ŠANDERA. Pružnost a pevnost: Interaktivní učební text. Brno: CERM, 2003. ISBN 80-7204-268-8.

[3] BORESI, Arthur P.; SCHMIDT, Richard J.; SIDEBOTTOM, Omar M. Advanced Mechanics of Materials. 5. vyd. John Wiley & Sons, 1993. 811 s. ISBN: 978-0471551577.

[4] *Šroub s okem10 x 70 AN 9078/A2*. Online. Akros b2c. 2024. Dostupné z: https://www.akros.cz/sroub-s-okem10-x-70-an-9078-a2. [cit. 2024-05-24].

[5] *What Are The Different Types of Eye Bolts Used for Overhead Lifts?* Online. CLOSE, Mike. Mazella Companies. 2019, 4. 12. 2019. Dostupné z: https://www.mazzellacompanies.com/learning-center/types-of-eye-bolts-nut-shoulder-machinery-screw/. [cit. 2024-05-24].

[6] *A Complete Guide to Eye Bolts*. Online. RS Components Ltd. 2023, 29.8.2023. Dostupné z: https://uk.rs-online.com/web/content/discovery/ideas-and-advice/eye-bolts-guide. [cit. 2024-05-24].

[7] METALCOR GMBH. *Datasheet 1.4301*. Online. METALCOR GmbH. 2018. Dostupné z: http://www.metalcor.de/en/datenblatt/5/. [cit. 2024-05-24].

[8] DECHAUMPHAI, Pramote a SUCHARITPWATSKUL, Sedthawat. *Finite Element Analysis with ANSYS Workbench*. 7200 The Quorom, Oxford Business Park North, Garsington Road, Oxford OX4 2JZ, U.K.: ALPHA SCIENCE INTERNATIONAL, 2018. ISBN 978-1-78332-369-2.

Seznam příloh

(1) priloha1slabezakriveny.m
(2) priloha2silnezakriveny.m