

VĚDECKÉ SPISY VYSOKÉHO UČENÍ TECHNICKÉHO V BRNĚ

Edice PhD Thesis, sv. 530

ISSN 1213-4198

thesis IS

Ing. Jan Tomáš

**Měření
Hausdorffovy dimenze
reálných objektů**

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
Fakulta strojího inženýrství
Ústav matematiky

Ing. Jan Tomáš

MĚŘENÍ HAUSDORFFOVY DIMENZE REÁLNÝCH OBJEKTŮ

MEASUREMENT OF HAUSDORFF DIMENSION OF THE
REAL OBJECTS

Zkrácená verze Ph.D. Thesis

Obor: Matematické inženýrství
Školitel: Prof. RNDr. Miloslav Druckmüller, CSc.
Oponenti: Prof. Ing. Oldřich Zmeškal, CSc.
 Doc. PaedDr. Dalibor Martišek, Ph.D.
Datum obhajoby: 30.4.2009

ABSTRAKT

Cílem této práce je vytvoření chybějícího teoretického základu pro praktické aplikace měření fraktální dimenze reálných objektů, zejména vytvoření korektního přechodu od teoretických fraktálních množin k jejich konečným aproximacím. Dále se práce zabývá analýzou vlivů na odhad fraktální dimenze, které se v praktických aplikacích často vyskytují, a návrhem metod, jak tyto vlivy odstranit. V praktické části jsou na třech různých problémech demonstrovány výsledky dosažené v teoretické části.

Klíčová slova

Hausdorffova míra, Fraktální dimenze, Fraktální křivka, Fraktální plocha, Aproximace fraktální křivky, Aproximace fraktální plochy, Metoda Yard Stick, Metoda Box Counting, Zobecněná metoda Box Counting pro plochy

ABSTRACT

The main goal of this work is definition of the serious theoretical bases for practical application of a fractal dimension measurement of the real objects, mainly definition of a finite approximation of the real fractal objects. The theoretical part of the work also analyze various factors which impact fractal dimension estimation and methods how to minimize these factors are proposed in this work. The results of the theoretical part are used in the practical part of the work, where theoretical results are used for solution of three different practical problems.

Key words

Hausdorff Measure, Fractal Dimension, Fractal Curve, Fractal Surface, Approximation of Fractal Curve, Approximation of Fractal Surface, Yard Stick Method, Box Counting Method, Generalized Box Counting Method for Surfaces

Obsah

1 Úvod	5
2 Základní pojmy – Hausdorffova míra	5
3 Aproximace fraktálních křivek a ploch	6
3.1 Aproximace fraktálních křivek	7
3.2 Aproximace fraktálních ploch	8
4 Metody měření fraktální dimenze fraktálních křivek	9
4.1 Metoda „Yardstick“	10
4.2 Metoda „Box counting“	10
5 Metody měření dimenze fraktálních ploch	11
5.1 Počítačová reprezentace aproximace fraktální plochy	11
5.2 Metoda „Box Counting“ zobecněná pro plochy	12
5.3 Metoda řezů	12
6 Faktory ovlivňující odhad dimenze	13
6.1 Vliv aproximace fraktálu na odhad dimenze	13
6.2 Vliv měřítka na odhad dimenze	14
6.3 Vliv šumu v obraze a jeho filtrace na odhad dimenze	15
7 Analýza závislosti fraktální dimenze povrchů a koeficientu odolnosti proti tření	17
7.1 Popis vstupních dat	18
7.2 Faktory ovlivňující odhad fraktální dimenze	19
7.3 Změny fraktální dimenze v závislosti na zvětšení	19
7.4 Závislost fraktální dimenze a koeficientu odolnosti proti tření	20
8 Analýza závislosti mezi objemem pórů v keramice a fraktální dimenzí hranic pórů	21
8.1 Popis vstupních dat	22
8.2 Závislost mezi fraktální dimenzí hranic pórů a objemem pórů v keramice	22
9 Studium sluneční aktivity	23
9.1 Popis vstupních dat a konstrukce časové řady z naměřených dimenzí	23
9.2 Analýza závislosti fraktální dimenze na čase – hledání skrytých period	24
9.3 Porovnání nalezených period s periodami nalezenými jinými metodami	26
9.4 Sluneční skvrny, sluneční bouře a fraktální dimenze	26
10 Závěr	28
11 Životopis	29

1 Úvod

Tato práce se zabývá praktickými aplikacemi fraktální dimenze tak, aby byly korektní z matematického hlediska a výsledky byly postaveny na formálních a nikoli intuitivních základech. Hlavním motivem pro tento výzkum bylo to, že v inženýrské praxi je často využívána fraktální dimenze, ovšem obvykle velmi intuitivně. Odborná literatura na toto téma je většinou zaměřena na čistou matematickou teorii nebo naopak na praktické aplikace, ovšem přechod od teorie k praktickým aplikacím v podstatě chybí nebo zanedbává to, že fraktál je při praktických aplikacích obvykle reprezentován konečnou množinou bodů namísto původní fraktální množiny. V první části je zadefinován teoretický aparát, který je třeba ke korektním inženýrským aplikacím, v druhé části jsou pak tři praktické aplikace fraktální dimenze.

Práce je rozdělena na část teoretickou, v rámci které je podána formální definice aproximace fraktální křivky a fraktální plochy, které umožňují přechod od teoretických útvarů k reálným vstupním datům reprezentovaným konečnými množinami. Pro tyto aproximace byly poté popsány metody odhadu fraktální dimenze, které se obvykle vyskytují v praktických aplikacích, čímž byl vytvořen chybějící most mezi teoretickými poznatky z oblasti fraktálů a praktickými inženýrskými aplikacemi.

Dalším důležitým výsledkem teoretické části je analýza faktorů vyskytujících se v praxi, které mohou výrazně ovlivnit odhady dimenze reálných objektů. V rámci práce byly tyto faktory popsány a byly navrženy metody, jak dopad těchto faktorů na odhad fraktální dimenze vyloučit nebo alespoň minimalizovat.

Praktická část obsahuje příklady tří aplikací fraktální dimenze pro různá vstupní data. Na těchto aplikacích byly demonstrovány závěry teoretické části, zejména potlačení faktorů, které mohou změnit odhad dimenze. První dvě praktické aplikace byly řešeny ve spolupráci s Ruskou akademií věd, Ústavem mechaniky a nauky o materiálu (Institute of Strength Physics and Materials Science, Siberian Division, Russian Academy of Sciences). Jde konkrétně o hledání závislosti mezi koeficientem odolnosti tření různých materiálů a fraktální dimenzí povrchů těchto materiálů opotřebovaných třením, dále pak o hledání závislosti mezi fraktální dimenzí hranic pórů v keramice a objemem těchto pórů v keramice. Poslední aplikací, která je zde uvedena, je analýza sluneční aktivity a předpověď sluneční aktivity na základě fraktální dimenze spočtené z časové řady, která udává počet slunečních skvrn pozorovaných každý den již od roku 1820. Výsledky prvních dvou aplikací byly již publikovány, výsledek analýzy sluneční aktivity je momentálně posuzován odborníky z oboru astrofyziky a je připraven k publikování.

2 Základní pojmy – Hausdorffova míra

Hausdorffova míra a Hausdorffova dimenze jsou klíčové pojmy v teorii fraktálních množin, neboť pojem fraktální dimenze a fraktální množina jsou definovány s jejich pomocí. Dále, z definice Hausdorffovy dimenze lze přímo odvodit často používanou metodu odhadu fraktální dimenze, tzv. metodu „Box Counting“.

Definice 2.1: Nechť X je metrický prostor a $E \subset X$. Konečný nebo spočetný systém podmnožin $\{U_i\} \in X$, $\text{diam}(U_i) \leq \delta$, $0 < \delta < 1$, pro $\forall i$, se nazývá δ -pokrytí množiny E , pokud platí: $E \subseteq \bigcup_i U_i$.

Věta 2.1: Nechť X je metrický prostor, $E \subset X$, $s > 0$ a $\{U_i\} \in X$ je δ -pokrytí množiny E . Potom zobrazení $H_\delta^s(E) : P(X) \rightarrow \langle 0, \infty \rangle$

$$H_\delta^s(E) = \inf_{\{U_i\}} \sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam}(U_i))^s$$

je vnější míra na množině X (infimum ze všech možných δ -pokrytí $\{U_i\}$ množiny E , tj. v sumě se sčítají průměry infimálního pokrytí).

Definice 2.2: Nechť X je metrický prostor a $E \subset X$. Dále, zdefinujme následující zobrazení: $H^s(E) : P(X) \rightarrow \langle 0, \infty \rangle$

$$H^s(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} H_\delta^s(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \inf_{\{U_i\}} \sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam}(U_i))^s$$

Kde $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ je δ -pokrytí množiny E . Množina E se nazývá H^s -měřitelná, pokud platí: $0 < H^s(E) = K < \infty$ a zobrazení $H^s(E)$ se nazývá *Hausdorffova s -dimenzionální míra*.

Věta 2.2: Nechť X je metrický prostor a $E \subset X$. Dále, nechť $s > 0$ je libovolné reálné číslo a $\{U_i\} \in X$ je δ -pokrytí množiny E . Zobrazení $H^s(E) : P(X) \rightarrow \langle 0, \infty \rangle$,

$$H^s(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} H_\delta^s(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \inf_{\{U_i\}} \sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam}(U_i))^s$$

je vnější metrická míra na množině X . Její zúžení na σ -algebru všech H^s měřitelných množin je míra (*Hausdorffova s -dimenzionální míra*).

Věta 2.3: Nechť množina $E \subset M$ je H^s -měřitelná a nechť M je metrický prostor. Existuje právě jedno reálné číslo $t \geq 0$, takové že, Hausdorffova míra je nenulová a konečná $0 < H^t(E) = K < \infty$. Dále, Hausdorffova míra $H^s(E) = 0$ pro libovolné reálné číslo s , $s > t$ a $H^r(E) = \infty$ pro libovolné reálné číslo r , $r < t$. Jinými slovy: Existuje jediné číslo t , pro které je Hausdorffova míra množiny E konečná a nenulová.

Věta 2.3 je důležitá, protože zaručuje, že Hausdorffova dimenze je jedinečná – jinými slovy, neexistují dvě různé Hausdorffovy dimenze pro jedinou množinu takové, že by Hausdorffova míra této množiny byla pro obě dvě dimenze nenulová a konečná. Díky této vlastnosti Hausdorffovu dimenzi můžeme použít jako rozlišující parametr pro členité, fraktální množiny.

Definice 2.3: Nechť $E \subset M$, kde M je metrický prostor, je H^s -měřitelná. Potom číslo s nazýváme *Hausdorffovou dimenzí* nebo též *fraktální dimenzí* množiny E . (Tato dimenze, narozdíl od dimenze topologické, nemusí být celočíselná.)

Definice 2.4: *Fraktálem* nazveme takovou množinu, která je H^s -měřitelná a jejíž Hausdorffova dimenze je neceločíselná.

3 Aproximace fraktálních křivek a ploch

Tato kapitola se zabývá aproximací fraktální křivky a fraktální plochy (definice pojmů viz níže) nějakou jinou množinou, která se skládá z konečného počtu základních geometrických

obrazců – konkrétně konečný počet úseček je použit k aproximaci fraktální křivky, konečný počet trojúhelníků je použit k aproximaci fraktální plochy. Tyto konečné aproximace jsou pro praxi velmi důležité, protože počítačové algoritmy, které odhadují fraktální dimenzi objektů z digitálních obrazů, pracují s diskrétní množinou obrazových bodů a ne s opravdovou fraktální množinou. Tento přechod – od fraktální množiny ke konečné množině základních geometrických prvků – je ve většině inženýrských aplikací opomíjen, stejně jako vliv této „diskretizace“ na odhad dimenze. Přitom ve většině aplikací se fraktální dimenze počítá z digitálních obrazů reálných objektů, tedy z konečné množiny bodů reprezentovaných obrazovou maticí.

3.1 Aproximace fraktálních křivek

Definice 3.1.1: Nechť M je metrický prostor s Euklidovskou metrikou a $E \subset M$. *Bod uzávěru množiny E* rozumíme takový bod $x \in M$, jehož libovolné δ -okolí ($\delta \rightarrow 0^+$) obsahuje alespoň jeden bod ležící v množině E , tj. průnik δ -okolí s množinou E je neprázdná množina:

$$E \cap \{\forall y \in M : \varrho(x, y) < \delta\} \neq \emptyset$$

Definice 3.1.2: Nechť M je metrický prostor s Euklidovskou metrikou a $E \subset M$. *Uzávěr množiny E* (značíme \bar{E}) je sjednocení všech bodů uzávěru množiny E .

Definice 3.1.3: Nechť M je metrický prostor s Euklidovskou metrikou a $E \subset M$. *Hraničním bodem množiny E* rozumíme takový bod $x \in M$, jehož libovolné δ -okolí ($\delta \rightarrow 0^+$) obsahuje alespoň jeden bod ležící v množině E , a alespoň jeden bod ležící mimo množinu E .

Definice 3.1.4: Nechť M je metrický prostor s Euklidovskou metrikou a $E \subset M$. *Hranicí množiny E* (značíme ∂E) je sjednocení všech hraničních bodů množiny E .

Definice 3.1.5: Nechť M je metrický prostor s Euklidovskou metrikou a $E \subset M$. Množinu E nazveme *souvislou*, pokud neexistuje rozklad množiny E na dvě části E_1 a E_2 pro něž by platilo:

$$(E_1 \cap \bar{E}_2) \cup (E_2 \cap \bar{E}_1) = \emptyset$$

Definice 3.1.6: Souvislou množinu bodů $E \subset \mathbb{R}^2$, takovou, že platí $E = \partial E$, která se odebráním libovolného bodu této množiny rozpadne nejvýše na dvě souvislé množiny, nazveme *primitivní F-křivka*.

Definice 3.1.7: *Koncovými body* primitivní F-křivky nazveme takové body, jejichž odebráním se primitivní F-křivka nerozpadne na dvě souvislé množiny, ale zůstane jedinou souvislou množinou.

Definice 3.1.8: Souvislou množinu bodů $E \subset \mathbb{R}^2$, takovou, že platí $E = \partial E$, která se odebráním dvou libovolných, navzájem různých, bodů této množiny rozpadne na dvě souvislé množiny, nazveme *uzavřená F-křivka*.

Definice 3.1.9: Množinu, která vyhovuje definici primitivní nebo uzavřené F-křivky, budeme označovat stručně *F-křivka*.

Definice 3.1.10: *Fraktální křivka* je taková F-křivka, jejíž Hausdorffova dimenze je ostře větší než jedna.

Definice 3.1.11: Nechť $E \in \mathbb{R}^2$ je fraktální křivka, pro kterou platí: $H^s(E) = K < \infty$. Dále pro její průměr platí: $\text{diam}(E) < \infty$. Vybereme z této křivky podmnožinu bodů tak, aby tato podmnožina splňovala následující podmínky.

Ve vybrané podmnožině bodů musí být koncové body primitivní F-křivky. Označme x_0 jeden z koncových bodů a x_n druhý z koncových bodů primitivní F-křivky. Pro uzavřenou F-křivku zvolíme bod x_0 libovolně a položíme $x_0 = x_n$. Dále, vybíráme body na F-křivce tak, aby platilo, $0 < \varrho(x_i, x_{i+1}) \leq \varepsilon$, kde bod x_i je poslední vybraný bod a bod x_{i+1} je právě vybíraný bod. Dále, bod x_{i+1} vybíráme tak, aby $H^s(C_{i+1}) < H^s(C_i)$, kde C_i je úsek F-křivky mezi bodem x_i a bodem x_n . (Tato podmínka nám zaručuje, že se výběrem bodů přibližujeme konci F-křivky.) Startovním bodem x_0 výběru je jeden z koncových bodů F-křivky pro primitivní F-křivku, pro uzavřenou F-křivku je to libovolný bod F-křivky. Body vybíráme tak dlouho, dokud není splněna podmínka, že $\varrho(x_i, x_n) \leq \varepsilon$. Každou dvojici bodů x_i, x_{i+1} spojíme úsečkou l_i . Množinu A , $A = \bigcup_{i=0}^{n-1} l_i$ nazveme ε -*aproximací*, nebo stručně *aproximací* fraktální křivky E .

Z definice je zřejmé, že délka jednotlivých úseček nepřekročí předem zvolenou hodnotu ε , ovšem definice nic neříká o počtu těchto úseček. Aby aproximace fraktální křivky byla použitelná pro zobrazení fraktální křivky, počet těchto úseček musí být konečný.

Věta 3.1.1: Pro každou fraktální křivku E , pro kterou platí: $H^s(E) = K < \infty$ a $\text{diam}(E) < \infty$, existuje nekonečně mnoho aproximací pro libovolné $\varepsilon > 0$. Každá z těchto aproximací může být zkonstruována konečným počtem úseček.

Definice 3.1.12: Označme F_i konečný počet fraktálních křivek a \tilde{F}_i libovolné aproximace těchto křivek, $i = 1 \dots n$. Dále, nechť průnik fraktálních křivek F_i je prázdná množina: $\bigcap_{i=1}^n F_i = \emptyset$ a taktéž nechť $\bigcap_{i=1}^n \tilde{F}_i = \emptyset$. Potom množinu F , $F = \bigcup_{i=1}^n F_i$ nazveme *sjednocením fraktálních křivek* a množinu $\tilde{F} = \bigcup_{i=1}^n \tilde{F}_i$ nazveme *sjednocením aproximací fraktálních křivek*.

3.2 Aproximace fraktálních ploch

Definice 3.2.1: Nechť $E \subset \mathbb{R}^3$ a P je zobrazení $P : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definované pro $X \in \mathbb{R}^3$ takto:

$$X = [x_1, x_2, x_3]$$

$$P(X) = [x_1, x_2]$$

Průmětem množiny E do roviny (x, y) budeme rozumět následující podmnožinu E' roviny (x, y) :

$$E' = \bigcup_{X \in E} \{P(X)\}$$

Průmět množiny E bude dále taktéž označovat $P(E)$.

Definice 3.2.2: Nechť $E \subset \mathbb{R}^3$. Nechť je v \mathbb{R}^3 zaveden kartézský systém souřadnic. Dále nechť řez libovolnou rovinou kolmou na rovinu (x, y) takový, že je různý od libovolné hranice množiny E , rozdělí množinu E na právě dvě souvislé množiny a fraktální dimenze množiny E je větší nebo rovna dvěma. Nechť libovolná přímka kolmá na rovinu (x, y) , pro jejíž průsečík N s rovinou (x, y) platí $N \in E'$, má s množinou E právě jeden společný bod. Množinu E nazýváme *plochou vůči rovině (x, y)* , jestliže splňuje všechny výše popsané podmínky.

Definice 3.2.3: *Plocha* je taková množina $E \subset \mathbb{R}^3$, že jestliže všechny její body podrobíme stejné, konečné posloupnosti operací rotace a translace, výsledná množina E' bude plochou vůči rovině (x, y) . (Tj. jestliže tuto množinu vhodně natočíme, bude splňovat všechny podmínky předchozí definice).

Definice 3.2.4: *Fraktální plocha* je taková plocha, jejíž Hausdorffova dimenze je ostře větší než 2.

Definice 3.2.5: Nechť množina E je fraktální plocha¹ vůči rovině (x, y) . Dále, pokryjeme rovinu (x, y) čtvercovou sítí, označme délku strany jednoho čtverce ε , $0 < \varepsilon < \text{diam}(E)$. Ze čtvercové sítě vytvoříme trojúhelníkovou síť tak, že do každého čtverce přidáme jednu úhlopříčku. Strany čtverce a úhlopříčka vytváří dva trojúhelníky, které jsou součástí trojúhelníkové sítě. Množinu všech vrcholů trojúhelníků, které tvoří síť označme T_0 a $T_0 \cap P(E) = T$. *Aproximace fraktální plochy* je sjednocení všech trojúhelníků, jejichž vrcholy tvoří body na původní ploše E , jejichž průměty leží v T .

Věta 3.2.1: Pro každou plochu E vůči rovině (x, y) existuje aproximace, která se skládá z konečného počtu trojúhelníků.

Trojúhelníková síť, která definuje aproximaci fraktální plochy by mohla být vytvořena i jinak. Zvolená definice nejlépe vyhovuje potřebám praktické části, kde se zpracovávají snímky ploch pořízené elektronovým mikroskopem. Obrazová matice pak reprezentuje přímo aproximaci fraktální plochy dle výše uvedené definice.

Věta 3.2.2: Průnik fraktální plochy vůči rovině (x, y) , jejíž průmět do roviny (x, y) je konvexní množina, s rovinou kolmou na rovinu (x, y) je primitivní F-křivka. Tento průnik bude dále také nazýván *řez fraktální plochy*.

4 Metody měření fraktální dimenze fraktálních křivek

V této kapitole jsou popsány dvě základní metody měření fraktální dimenze fraktálních křivek – metoda „Yard Stick“ a metoda „Box Counting“, které jsou využity v této práci k odhadům dimenzí fraktálních křivek pro praktické aplikace. Je třeba si uvědomit, že fraktální křivky byly reprezentovány svými aproximacemi – tj. konečnými množinami úseček, které byly zobrazeny pomocí počítače obrazovou maticí o konečném počtu prvků $[m \times n]$. Změny odhadnuté dimenze od teoretické dimenze, způsobené tím, že se dimenze odhaduje z digitálního zobrazení aproximace fraktální křivky, jsou detailně popsány v podkapitole 6.1

Dále jsou zde popsány dva možné přístupy k odhadu fraktální dimenze fraktálních ploch. První metoda využívá zobecněný „Box Counting“ algoritmus, druhý přístup vychází z toho,

¹Každou fraktální plochu lze podrobit konečnému počtu rotací a translací, po kterých bude plochou vůči rovině (x, y) . Tudíž lze učinit požadavek, aby E byla plocha vůči rovině (x, y) , bez újmy na obecnosti.

že řezem fraktální plochou je fraktální křivka – díky tomu je možné usuzovat na „členitost“ fraktální plochy z vlastností řezů, které lze měřit metodami pro křivky.

4.1 Metoda „Yardstick“

Tato metoda je určena pro odhady fraktální dimenze fraktálních křivek na základě zobrazené aproximace fraktální křivky. Vychází z Richardsonova vzorce $L = K\varepsilon^{1-D}$, kde L značí délku křivky naměřenou měřidlem délky ε . Tento vzorec byl odvozen empiricky, proto je použití metody omezené jen na takové křivky, které se „chovají“ stejně jako Richardsonova experimentální data. Richardsonův vzorec upravíme následovně:

$$\ln L(\varepsilon) = \ln K + (1 - D) \ln \varepsilon$$

Hlavní myšlenka odhadu fraktální dimenze touto metodou je následující. Změříme délku křivky $L(\varepsilon_i)$ různými měřidly délky ε_i . Obdržíme dvojice bodů $[\ln \varepsilon_i, \ln L(\varepsilon_i)]$. Tyto body by měly ležet na přímce v logaritmických souřadnicích (toto je základní předpoklad platnosti Richardsonova vzorce), jejíž směrnice je rovna $1 - D$. Pro určení směrnice této přímky proložíme vypočtenými hodnotami přímku metodou nejmenších čtverců. Směrnice této přímky je přibližně rovna $1 - D$. Pro data, která splňují předpoklad použití Richardsonova vzorce lze dokázat, že konstanta K Hausdorffova míra a D je Hausdorffova dimenze.

Volba hodnot ε_i hraje významnou roli při odhadu fraktální dimenze fraktální křivky. Jestliže chceme porovnávat fraktální dimenze různých křivek, je nezbytné, aby jejich fraktální dimenze byly měřeny stejným počtem ε_i o stejných délkách. Jedině pak má takové porovnávání smysl, zejména u křivek, kde rozdíl mezi fraktálními dimenzemi je malý.

4.2 Metoda „Box counting“

Tuto metodu lze odvodit přímo z definice Hausdorffovy míry a na rozdíl od „Yard Stick“ metody ji lze použít i pro odhady fraktální dimenze sjednocení fraktálních křivek ze zobrazeného sjednocení aproximací fraktálních křivek. Hausdorffova míra je definována následovně:

$$H^D(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \inf \sum_{j=1}^{\infty} (\text{diam} U_j)^D$$

kde U_j jsou množiny δ – pokrytí. Položme $\delta = \frac{1}{k}$ a zvolme maximální metriku, tj. $\rho(x, y) = \max_i |x_i - y_i|$. Fraktální křivku pokryjeme čtvercovou sítí, kde průměr čtverců je roven v dané metrice $\frac{1}{k}$. Počet čtverců, které obsahují část fraktální křivky označme $P(k)$. Potom zřejmě platí:

$$H^D(E) = \lim_{k \rightarrow \infty} P(k) \left(\frac{1}{k} \right)^D$$

Při praktické realizaci výpočtu fraktální dimenze se obvykle pracuje s konečnou maticí čísel typu $[m \times n]$, která v počítači reprezentuje danou aproximaci fraktální křivky (případně sjednocení aproximací fraktálních křivek). Nejprve je třeba objasnit, jak chápat v tomto prostoru čtvercovou síť o průměru čtverců $\frac{1}{k}$.

Matici typu $[m \times n]$ lze doplnit na čtvercovou matici typu $h \times h$ tak, že se přidá potřebný počet řádků nebo sloupců s hodnotami barvy pozadí. Hodnotu h rozdělíme na $k \in \mathbb{N}$ dílů. Jestliže h je s k nesoudělné, tj. délka dílů není celočíselná, volíme délku dílů $\text{Round}\left(\frac{h}{k}\right)$. Tak je možné vytvořit čtvercovou síť, kde každý čtverec obsahuje $\text{Round}\left(\frac{h}{k}\right) \times \text{Round}\left(\frac{h}{k}\right)$ prvků obrazové matice (díky zaokrouhlování při krajích matice vzniknou obdélníky a ne čtverce,

ovšem na ně lze nahlížet jako na čtverce pokrytí, jejichž část už není zobrazena). Tyto čtverce nám reprezentují požadované δ – pokrytí v předchozím vzorci. Jinými slovy, předpokládá se, že obrazová matice odpovídá čtverci v prostoru \mathbb{R}^2 o délce strany jedna.

Dále, je zřejmé, že maximální počet dělení strany čtverce je h dílů, tj. každý čtverec je pak reprezentován jedním pixelem. Limita $k \rightarrow \infty$ je v obrazové matici nemožná a pozbývá smyslu. Musíme se spokojit s následující aproximací:

$$H^D(E) \approx P(k) \left(\frac{1}{k}\right)^D$$

Tuto aproximaci upravíme následovně:

$$\ln P(k) \approx -D \ln \frac{1}{k} + \ln H^D(E)$$

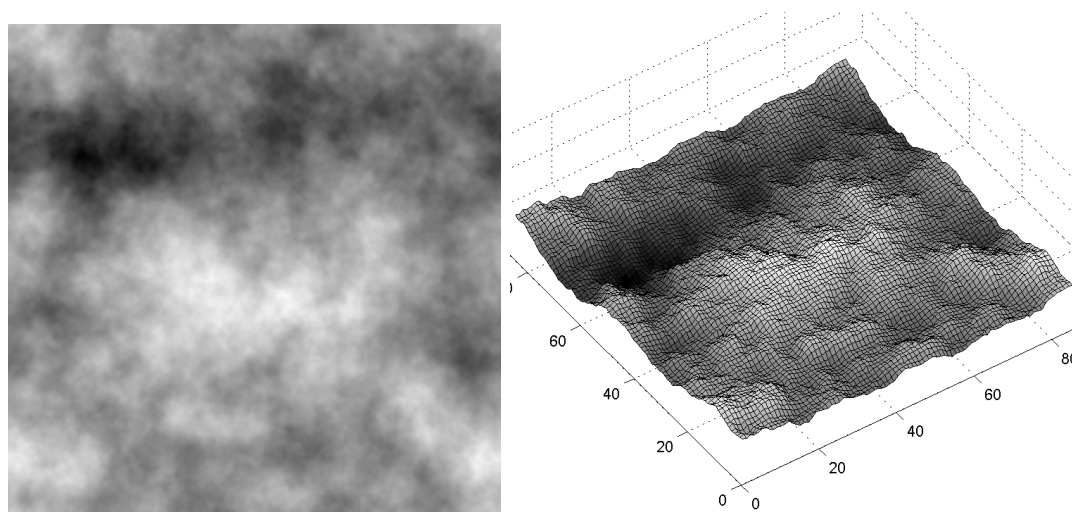
Při praktické realizaci zvolíme různé hodnoty k_i , pokryjeme měřenou množinu daným čtvercovým pokrytím a spočteme pro dané k_i počet čtverců $P(k_i)$, které obsahují části měřené množiny. Těmito naměřenými hodnotami proložíme metodou nejmenších čtverců přímkou.

Vhodnými úpravami algoritmu lze popsanou metodu zpřesnit. Více detailů o zpřesnění metody lze najít například v [8], kde je tato metoda pro fraktální křivky velmi dobře popsána.

5 Metody měření dimenze fraktálních ploch

5.1 Počítačová reprezentace aproximace fraktální plochy

Při praktických realizacích popsaných v praktické části byly odhadovány dimenze ploch snímaných elektronovým mikroskopem. V tomto případě jsou tedy data reprezentovaná obrazovou maticí, kde hodnota barvy určuje výšku (plochy byly reprezentovány odstíny šedé). Každý bod obrazové matice může být interpretován jako bod na snímané ploše, kde barva určuje souřadnici z a pozice v matici určuje souřadnice x, y . Tyto body interpretují konečnou podmnožinu bodů z původní snímané fraktální plochy a lze je využít ke konstrukci trojúhelníkové sítě, která splňuje definici aproximace plochy. Obrázek 1 ukazuje obrazovou matici a její trojrozměrnou interpretaci.



Obrázek 1: Příklad obrazové matice a její trojrozměrná interpretace.

5.2 Metoda „Box Counting“ zobecněná pro plochy

Metodu „Box Counting“ lze odvodit pro plochy stejně jako pro křivky přímo z definice Hausdorffovy míry:

$$H^D(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \inf \sum_{j=1}^{\infty} (\text{diam} U_j)^D$$

kde U_j jsou množiny δ – pokrytí. Položme $\delta = \varepsilon$ a zvolme maximální metriku, tj. $\rho(x, y) = \max_i |x_i - y_i|$. Fraktální plochu pokryjeme sítí krychlí, kde průměr krychlí je roven v dané metrice ε . Počet krychlí, které obsahují část fraktální plochy označme $P(\varepsilon)$. Potom zřejmě platí:

$$H^D(E) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} P(\varepsilon) (\varepsilon)^D$$

Při praktické realizaci výpočtu fraktální dimenze pracujeme s konečnou maticí čísel typu $[m \times n]$ (m počet řádků, n počet sloupců), která reprezentuje aproximaci fraktální plochy. Barva každého pixelu matice určuje výškovou souřadnici, pozice v matici určuje souřadnici x a y . Při praktické realizaci máme obvykle ke snímkům ploch k dispozici měřítko, takže lze spočítat kolik pixelů reprezentuje např. jeden mikrometr, a jaký je převod škály barev na výškovou souřadnici – a tedy lze převést souřadnice bodů zpět do E_3 , ve kterém byla definovaná aproximace fraktální plochy. Plochu uzavřeme do krychle, jejíž hrana má délku rovnu maximu ze všech tří rozměrů plochy a každou její hranu rozdělíme zvolenou délkou ε a vytvoříme pro dané ε síť krychlí. Odpovídající $P(\varepsilon)$ je počet krychlí, které obsahují nějakou část aproximace fraktální plochy.

5.3 Metoda řezů

Řez fraktální plochou vůči rovině (x, y) rovinou kolmou na (x, y) je primitivní F-křivka – viz věta 3.2.2. Teoreticky se může stát, že její fraktální dimenze bude rovna jedné, ale obecně lze předpokládat, že její dimenze bude větší než jedna. Na řádek (sloupec) obrazové matice lze nahlížet jako na reprezentaci řezu plochy rovinou kolmou na (x, y) a rovnoběžnou s osou x (y). Řádek (sloupec) obrazové matice je množina konečného počtu bodů, které leží v rovině řezu a pokud je propojíme úsečkami, získáme aproximaci fraktální křivky. Hodnota barvy udává výšku, ve které daný bod leží.

Pro korektní odhad dimenze takto zkonstruované aproximace křivky je třeba aproximaci křivky korektně zobrazit – to znamená, že musí být zachován poměr mezi výškou a délkou křivky. Aby bylo možné zachovat poměr mezi délkou a výškou musí být známé měřítko, tj. kolik pixelů reprezentuje jednu délkovou jednotku a transformace barev na výšku. Ze zobrazení křivky lze výše popsanými metodami odhadnout fraktální dimenzi zobrazené křivky. Pokud tento poměr nebude zachován, dojde ke zkreslení tvaru křivky, což může vést k chybnému odhadu dimenze křivky.

Jestliže obrazová matice reprezentující plochu měla rozměry $m \times n$, lze sestavit m aproximací fraktálních křivek ve směru osy x a n aproximací fraktálních křivek ve směru osy y , jejichž dimenzi lze změřit metodami popsanými výše.

Definice 5.1: Nechť fraktální plochou E vůči rovině (x, y) , jejíž průmět do roviny (x, y) je konvexní množina, prochází n různých rovin kolmých na (x, y) . Průnik těchto rovin s fraktální plochou E tvoří podle věty 3.2.2 n fraktálních křivek, označme je f_i , $i = 1 \dots n$. Potom číslo definované následujícím vztahem nazýváme *plošná dimenze fraktální plochy E* nebo zkráceně

plošná dimenze a značíme $D_P(E)$.

$$D_P(E) = \frac{\sum_{i=1}^n H^D(f_i) \cdot D(f_i)}{\sum_{i=1}^n H^D(f_i)}$$

kde $H^D(f_i)$ je Hausdorffova míra fraktální křivky f_i a $D(f_i)$ je fraktální dimenze křivky f_i .

V praxi číslo D_P obvykle odhadneme tak, že sestrojíme z obrazové matice plochy všechny aproximace křivek ve směru jedné osy a spočteme odhady fraktální dimenze $D_i, i = 0, \dots, m-1$ odpovídajících fraktálních křivek. Obě metody, „Box Counting“ i „Yard Stick“, lze použít nejen k odhadu dimenze, ale i Hausdorffovy míry, tudíž odhad čísla D_F lze spočítat přímo z definice. Pokud mají fraktální křivky stejnou nebo hodně podobnou Hausdorffovu míru, lze odhad D_P zjednodušit následujícím způsobem:

$$D_P \approx \frac{\sum_{i=0}^{m-1} D_i}{m}$$

6 Faktory ovlivňující odhad dimenze

Tato kapitola se zabývá vlivem různých faktorů na odhad fraktální dimenze metodami popsanými v kapitole 4. Tyto faktory je vždy třeba uvážit před samotným výpočtem, protože v některých případech mohou mít zásadní vliv na výslednou dimenzi a mohou zkreslit výsledek natolik, že výsledky již nelze použít. V této kapitole jsou rozebrány tři hlavní faktory: Aproximace křivky/plochy, použité měřítko a aditivní šum v obrazové matici.

6.1 Vliv aproximace fraktálu na odhad dimenze

V kapitole 3 byly definovány pojmy aproximace fraktální křivky a aproximace fraktální plochy jako konečná množina úseček a konečná množina trojúhelníků. Uvažujme nejprve vliv ε -aproximace fraktální křivky na výsledky měření metodou „Yard Stick“. Metoda „Yard Stick“ je založena na měření aproximace křivky různými měřidly délky ε_i , pro každé měřidlo obdržíme naměřenou délku $L(\varepsilon_i)$. Teoreticky by naměřená délka $L(\varepsilon_i)$ měla exponenciálně narůstat se zkracujícím se měřidlem. V praxi máme k dispozici pouze ε -aproximaci fraktální křivky, tj. konečnou množinu n úseček délky ε . Je tedy zřejmé, že pokud délka použitého měřidla ε_i je menší nebo rovna ε , exponenciální trend růstu vzdálenosti se zastaví a hodnota naměřené délky pro $\varepsilon_i = \varepsilon$ bude $L(\varepsilon_i) = n \times \varepsilon$, protože „pokládané“ měřidlo bude identické s úsečkami aproximace, a pro $\varepsilon_i \leq \varepsilon$ bude $L(\varepsilon_i) \leq n \times \varepsilon$, protože kratší měřidlo může „vynechat“ některé špice na aproximaci křivky, tj. měřidlo spojí dva body na sousedních úsečkách aproximace přímo a nikoli přes vrchol (přímá cesta je vždy kratší).

Věta 6.1.1: Nechť množina $A = \bigcup_{i=0}^{n-1} l_i$ je ε -aproximace fraktální křivky. Dále, označme $\varepsilon_{min} = \min_{i=0..n-1} \{l_i\}$ minimální délku úsečky z množiny A . Potom pro naměřenou délku aproximace fraktální křivky $L(\delta)$ změřenou měřidlem o délce $\delta \leq \varepsilon_{min}$ metodou „Yard Stick“ platí:

$$L(\delta) \leq \sum_{i=0}^{n-1} |l_i|$$

kde $|l_i|$ je délka úsečky l_i .

Zřejmě tedy při měření délky aproximace fraktální křivky existuje kritická délka měřidla taková, že pro měřidla, která jsou delší než kritická délka bude naměřená délka narůstat se zkracováním měřidla, zatímco pro měřidla, která jsou kratší než kritická délka měřidla, se délka nebude příliš lišit od součtu délek úseček aproximace fraktální křivky. Aby nedocházelo ke zkreslení výsledků, nejkratší použité měřidlo musí být delší než je délka jednotlivých úseček aproximace.

Další metodou měření dimenze, která se využívá v rámci této práce, je metoda „Box Counting“. Metoda je odvozena přímo z definice Hausdorffovy dimenze a je založená na pokrytí fraktální křivky čtvercovou sítí, a spočítání čtverců, které obsahují nějakou část křivky. Výpočet dimenze je odvozen ze vztahu $H^D(E) \approx P(k) \left(\frac{1}{k}\right)^D$, tj. závislost počtu čtverců pokrytí, které obsahují část fraktální křivky, na k je následující:

$$P(k) \approx H^D(E) \cdot k^D$$

Čím bude pokrytí jemnější, tím více bude pokrytí odpovídat pokrytí lomené čáry, tj. výsledek pokrytí bude spíše korespondovat s pokrytím konečného sjednocení úseček, než s ideálním pokrytím původní množiny, tj. reálná hodnota $P(k)$ bude spíše rovna následující hodnotě:

$$P(k) \approx H^D(E) \cdot k$$

Nalezení kritické hodnoty k není tak snadné jako pro metodu „Yard Stick“, protože kritická hodnota k nezávisí jen na minimální délce úsečky z ε -aproximace křivky, ale i na tvaru křivky. Zřejmě pro křivky, kde koncové body úseček jsou k sobě blíže než je minimální délka úsečky, bude kritická hodnota k vyšší, než pro křivky, které jsou více „roztažené“.

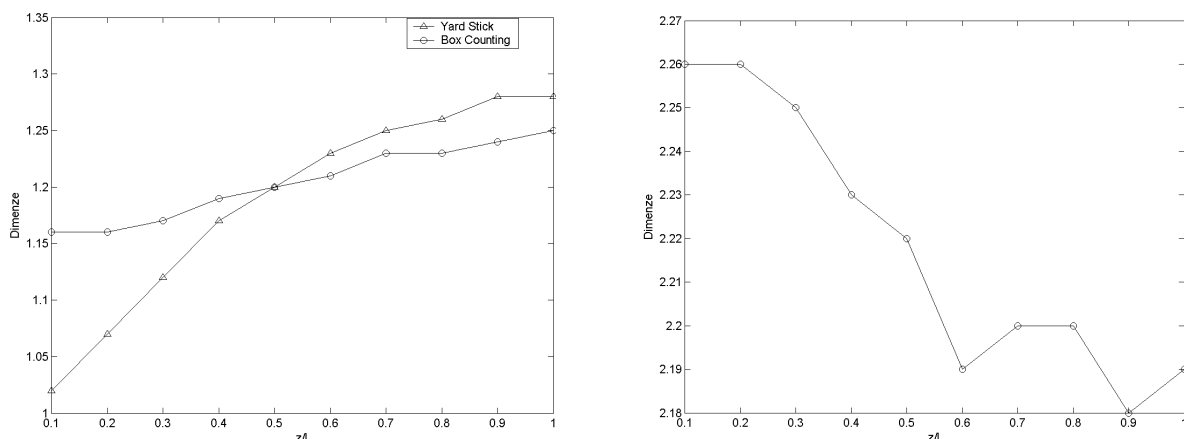
Kritickou hodnotu k lze odhadnout. Jak již bylo výše zmíněno – pro dostatečné jemné pokrytí se začnou prosazovat úsečky a počet čtverců, které obsahují nějakou část aproximace křivky začne růst lineárně namísto předchozího lineárního trendu a nakonec se zastaví úplně – ve chvíli, kdy velikost pokrývajících čtverců bude blízká velikosti jednoho pixelu. Nalezením hodnoty k , pro kterou trend růstu $P(k)$ poklesne z exponenciálního na lineární, lze odhadnout kritickou hodnotu k pro danou aproximaci křivky.

Výsledek pro metodu „Box Counting“ lze zobecnit i pro měření dimenze ploch zobecněnou metodou „Box Counting“. Veškeré úvahy zůstávají platné i pro aproximaci plochy trojúhelníky – i zde se pro dostatečně malé krychle pokrytí začíná prosazovat trend kousků rovin, tj. opět dochází k poklesu trendu růstu hodnot $P(k)$.

Metoda řezů je založena na výpočtu dimenzí aproximací křivek, které jsou získány jako průniky rovin kolmých na rovinu (x, y) s fraktální plochou. Pro výpočet dimenze získaných aproximací fraktálních křivek lze použít jak metodu „Yard Sick“ tak „Box Counting“. Vliv aproximace křivky popsany výše zůstává platný i pro aproximace fraktálních křivek, které jsou obdrženy jako řez aproximace fraktální plochy.

6.2 Vliv měřítka na odhad dimenze

Vliv měřítka na odhad dimenze je významný zejména pro fraktální plochy sestavené z obrazových matic, ať už se odhad dimenze provádí přímo zobecněnou metodou „Box Counting“ nebo metodou řezů. Důvod je ten, že když se zpracovávají přímo snímky křivek, jsou obvykle zobrazeny v reálném poměru výšky a šířky a tudíž není třeba tyto poměry upravovat. V případě, že aproximace fraktální plochy je reprezentována obrazovou maticí, kde indexy v matici určují souřadnice bodu x, y a barva určuje výškovou souřadnici z , je třeba před výpočtem dimenze kteroukoli metodou správně interpretovat výšku a indexy v matici.



Obrázek 2: Změna dimenze odhadnutá metodou řezů (vlevo) a změna dimenze odhadnutá zobecněnou metodou „Box Counting“ (vpravo).

Pro transformaci indexů matice do reálných souřadnic je obvykle k dispozici měřítko, ve kterém byl obraz snímán, a proto je snadné správně přepočítat indexy bodů v obrazové matici na reálné souřadnice bodů. Pro některé metody snímání ploch může být problém zjistit absolutní hodnoty výšky, například pro snímky ploch elektronovým mikroskopem je známo pouze relativní rozložení výšek, tj. lze rozlišit, které body leží níže a výše, ale chybí konkrétní údaj o výšce bodu. Proto se v této podkapitole zaměříme na analýzu situace, kdy délkové rozměry se nemění, a mění se výškové rozměry.

Pro účely analýzy měřítka byla sestavena zlomková Brownova plocha o teoretické dimenzi 2.2, jejíž řezy ve směru osy x a y mají teoretickou fraktální dimenzi 1.2. Pro test vlivu změny měřítka byl využit stejný software, jako pro zpracovávání reálných ploch v praktické části této práce. Tento software vyžaduje zadání délkového měřítka a umožňuje měnit poměr mezi výškou a délkou hrany obrazu. V rámci analýzy vlivu měřítka byly postupně měřeny plošné dimenze metodou řezů (s využitím metody „Yard Stick“ a „Box Counting“ pro odhad dimenzí jednotlivých křivek) a zobecněné metody „Box Counting“ pro odhad dimenze plochy. Délkové měřítko bylo nastaveno následovně: 3 pixely = 1 mikrometr. Poměr výšky z ku délce hrany l se měnil v rozsahu 0.1 až 1.0 s přírůstkem 0.1. Závislost odhadnuté dimenze a poměru z/l je vykreslena na obrázku 2.

Z obrázků plyne, že změna měřítka ovlivňuje odhady dimenzí provedené libovolnou metodou. Ze získaných výsledků je zřejmé, že nejlepší odhad dostáváme pro poměr 0.5 – při tomto poměru obě metody – „Yard Stick“ i „Box Counting“ naměřily stejnou dimenzi 1.2 a zobecněná metoda „Box Counting“ naměřila dimenzi 2.22. Pokud je poměr výšky a délky pro reálnou plochu neznámý, tato vlastnost může být využita k přibližnému odhadu poměru výšky ku délce – vyzkouší se několik poměrů a ten, pro který je rozdíl dimenze odhadnuté metodou „Box Counting“ a „Yard Stick“ minimální, použijeme pro danou plochu.

6.3 Vliv šumu v obraze a jeho filtrace na odhad dimenze

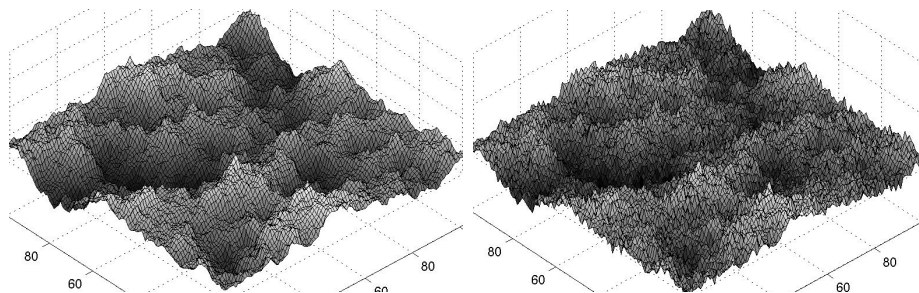
Vliv šumu na odhady fraktální dimenze byl analyzován pro fraktální plochy, ať už jsou měřeny metodou řezů, nebo zobecněnou metodou „Box Counting“. Fraktální plochy bývají v praktických aplikacích často reprezentovány obrazovou maticí. Při snímání ploch běžnými metodami je takřka nemožné pořídit snímky ploch takové, aby neobsahovaly šum. V praktické části této práce byly zpracovávány snímky ploch z elektronového mikroskopu. Tyto snímky obsahovaly

vysokou míru aditivního šumu, který může být modelován následovně:

$$G = A + S$$

kde G je výsledná obrazová matice, A je ideální matice, která obsahuje přesnou informaci o výšce bodů plochy, které jsou poté využity k sestrojení aproximace plochy a matice S reprezentuje aditivní šum – pro každý prvek $s_{i,j}$ matice S platí, že má normální rozdělení $s_{i,j} \sim N(0, \sigma^2)$.

Pro analýzu vlivu šumu na odhad fraktální dimenze byly generovány Brownovy zlomkové plochy s předem známou dimenzí a k nim byla přičtena matice náhodně generovaných hodnot S . Na obrázku 3 je vidět jak se změní aproximace plochy, pokud je sestrojena z matice G namísto matice A .



Obrázek 3: Příklad ideální Brownovy zlomkové plochy (vlevo) a stejné plochy sestrojené z obrazové matice s vysokou mírou aditivního šumu (vpravo).

Je zřejmé, že při vyšší míře šumu nebudou odhadnuté dimenze příliš korespondovat s původní dimenzí plochy, ale spíše budou korespondovat s členitostí, kterou do vstupních dat vnáší aditivní šum, proto je třeba míru šumu ve vstupní obrazové matici potlačit vhodnými filtry. V rámci této práce byl analyzován vliv následujících filtrů pro potlačení šumu na výslednou dimenzi:

$$F_1 = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad F_3 = \frac{1}{4.8976} \begin{pmatrix} 0.3679 & 0.6065 & 0.3679 \\ 0.6065 & 1.0000 & 0.6065 \\ 0.3679 & 0.6065 & 0.3679 \end{pmatrix}$$

$$F_2 = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad F_4 = \frac{1}{6.1689} \begin{pmatrix} 0.0183 & 0.0821 & 0.1353 & 0.0821 & 0.0183 \\ 0.0821 & 0.3679 & 0.6065 & 0.3679 & 0.0821 \\ 0.1353 & 0.6065 & 1.0000 & 0.6065 & 0.1353 \\ 0.0821 & 0.3679 & 0.6065 & 0.3679 & 0.0821 \\ 0.0183 & 0.0821 & 0.1353 & 0.0821 & 0.0183 \end{pmatrix}$$

Zřejmě filtry F_1 a F_2 reprezentují nejjednodušší filtr typu dolní propust. Hodnoty ve filtrech F_3 a F_4 byly zpočteny následujícím vztahem:

$$f_{i,j} = e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$$

kde $x = i - (k+1)$, $y = j - (k+1)$ pro $i, j = 1 \dots 2 \cdot k + 1$ ($k = 1$ pro F_3 , $k = 2$ pro F_4) a $\sigma = 1$. Teoretická hodnota $\frac{1}{2\pi\sigma^2}$, kterou je třeba násobit hodnoty $f_{i,j}$ aby šlo o dvojrozměrné Gaussovo rozdělení, byla nahrazena hodnotou $\frac{1}{\sum_{i=1}^{2k+1} \sum_{j=1}^{2k+1} f_{i,j}}$. Zřejmě tedy filtry F_3 a F_4 reprezentují filtry s

Gaussovým jádrem. Vliv šumu a filtrace šumu byl analyzován experimentálně. Byly vygenerovány plochy o teoretické dimenzi 1.2, 1.4 a 1.6 (při praktických aplikacích popsáných v této práci, se dimenze ploch pohybovala obvykle do 1.4). Pro každou hodnotu dimenze bylo vygenerováno 10 různých ploch, změřena jejich dimenze bez šumu, poté se šumem a s různou filtrací zobecněnou metodou „Box Counting“ a metodou řezů, kde dimenze řezů byla odhadována metodou „Yard Stick“ a metodou „Box Counting“. Rozptyl přičteného šumu byl $0.03 \times z$, kde z je rozdíl mezi minimální a maximální výškou na vygenerované ploše. Vygenerované obrazové matice reprezentující plochu měly rozměr 512×512 pixelů. Pro odhady fraktální dimenze byl použit stejný software, jako byl použit k odhadům dimenze v praktických aplikacích.

Všemi metodami byla postupně měřena dimenze z obrazové matice odpovídající vygenerované ploše, z obrazové matice se šumem a z matice filtrované konvolucí obrazové matice se šumem a filtrů F_1 až F_4 . Pro každou metodu odhadu fraktální dimenze byly testovány následující hypotézy na hladině významnosti 0.05:

1. Hodnota $\bar{x}_{1.2} = \bar{x}_{1.4}$ a $\bar{x}_{1.4} = \bar{x}_{1.6}$ pro ideální vstupní data bez šumu
2. Hodnota $\bar{x}_{1.2} = \bar{x}_{1.4}$ a $\bar{x}_{1.4} = \bar{x}_{1.6}$ pro obrazovou matici se šumem
3. Hodnota $\bar{x}_{1.2} = \bar{x}_{1.4}$ a $\bar{x}_{1.4} = \bar{x}_{1.6}$ pro obrazovou matici se šumem, filtrovanou filtrem F_1
4. Hodnota $\bar{x}_{1.2} = \bar{x}_{1.4}$ a $\bar{x}_{1.4} = \bar{x}_{1.6}$ pro obrazovou matici se šumem, filtrovanou filtrem F_2
5. Hodnota $\bar{x}_{1.2} = \bar{x}_{1.4}$ a $\bar{x}_{1.4} = \bar{x}_{1.6}$ pro obrazovou matici se šumem, filtrovanou filtrem F_3
6. Hodnota $\bar{x}_{1.2} = \bar{x}_{1.4}$ a $\bar{x}_{1.4} = \bar{x}_{1.6}$ pro obrazovou matici se šumem, filtrovanou filtrem F_4

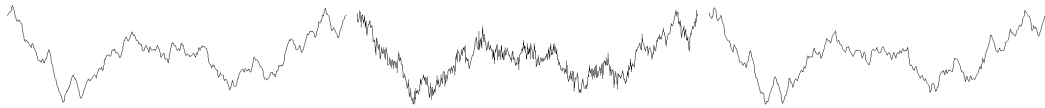
kde \bar{x}_D značí průměrnou dimenzi naměřenou pro deset ploch s teoretickou dimenzí D .

Nezamítnutí některé z hypotéz na dané hladině významnosti pro některou z použitých metod znamená, že tato metoda není schopná rozlišit pro dané vstupní obrazové matice mezi dvěma plochami, jejichž teoretické dimenze se liší o 0.2. Jinými slovy, testem těchto hypotéz lze nalézt takové metody odhadu dimenze a filtry pro potlačení šumu, které dohromady mají dostatečně dobrou rozlišovací schopnost a mohou být použity k porovnávání členitosti různých ploch. Z tohoto důvodu nebyly testovány hypotézy $\bar{x}_{1.2} = \bar{x}_{1.4} = \bar{x}_{1.6}$, protože k zamítnutí této hypotézy by stačilo, aby neplatila alespoň jedna rovnost, tj. metoda by rozlišovala mezi plochami jen v omezeném rozsahu fraktální dimenze.

Na základě popsané statistické analýzy bylo zjištěno, že všechny testované metody nerozlišují mezi plochami s různou teoretickou dimenzí pouze v případě, že šum není nijak filtrován, tj. filtrace kterýmkoli z výše uvedených filtrů umožní rozlišit mezi testovanými plochami. Experiment dále ukázal, že kvalita odhadu všemi metodami (i pro ideální vstupní data bez šumu) klesá s roztoucí dimenzí vstupní plochy. Z pohledu „přiblížení se“ teoretické dimenzi se nejlépe jeví metoda „Yard Stick“ a filtrace filtrem F_3 (případně F_1), protože rozdíl mezi odhadnutou dimenzí a teoretickou dimenzí je nejmenší a rozsah odhadovaných dimenzí je největší, což poskytuje lepší rozlišení pro praktické aplikace. Obrázek 4 ilustruje vliv šumu a jeho filtrace filtrem F_3 na tvar profilu a tedy i odhad fraktální dimenze.

7 Analýza závislosti fraktální dimenze povrchů a koeficientu odolnosti proti tření

Koeficient odolnosti proti tření (wear resistance coefficient) kvantifikuje odolnost povrchu proti opotřebení třením. Nízká hodnota koeficientu znamená, že materiál se třením opotřebuje poměrně rychle a je snadné ho „poškrábat“, vysoká hodnota koeficientu znamená, že materiál










Obrázek 4: Příklad jednoho řezu zlomkovou Brownovou plochou, levý řez byl sestrojen z původní plochy, prostřední řez ze stejné plochy zkonstruované z obrazové matice se šumem a pravý řez byl sestrojen ze stejné obrazové matice upravené filtrem F_3 .

je odolný proti tření a vhodný na plochy vystavené trvalému namáhání třením. Tento koeficient je znám pro některé kovy, ale určit ho pro nové slitiny je poměrně složité a drahé. V rámci této práce byla studována závislost mezi koeficientem odolnosti proti tření a fraktální dimenzí povrchu materiálu opotřebovaného třením, která by na základě fraktální dimenze umožnila jednoduchý způsob odhadu koeficientu odolnosti proti tření. Tento problém byl řešen ve spolupráci s Ruskou akademií věd, Ústavem mechaniky a nauky o materiálu (Institute of Strength Physics and Materials Science, Siberian Division, Russian Academy of Sciences).

7.1 Popis vstupních dat

Vstupní data pro měření byly snímky ploch různých kovů, pro které je znám jejich koeficient odolnosti proti tření. Snímky byly pořízeny elektronovým mikroskopem v různém zvětšení. Rozlišení snímků z elektronového mikroskopu bylo 512×512 pixelů, snímky byly osmibitové v odstínech šedi, kde číslo 0 reprezentovalo černou barvu, číslo 255 barvu bílou. Snímané materiály byly: olovo (Pb), hliník (Al), měď (Cu), zirkon (Zr), kobalt (Co), titan (Ti) a Wolfram (W). Koeficienty odolnosti proti tření a příklady ploch daných materiálů opotřebovaných třením jsou v tabulce 1 (v tabulce je jen jedno zvětšení).

Materiál	Pb	Al	Cu	Zr	Co	Ti	W
Koeficient	1.5	5.3	9.4	14.7	21.0	33.5	58.0
Snímek plochy							

Tabulka 1: Ukázka snímků ploch, které byly použity pro analýzu závislosti koeficientu odolnosti proti tření a fraktální dimenze povrchů opotřebovaných třením.

Plochy byly snímány v různém zvětšení, rozlišení 512×512 bylo zachováno pro všechna zvětšení. Délka hrany snímku byla postupně $14 \mu m$, $20 \mu m$, $41 \mu m$, $68 \mu m$, $102 \mu m$, $137 \mu m$, $205 \mu m$, $410 \mu m$, $682 \mu m$, $1024 \mu m$. Pro snímky snímané s malým zvětšením převládá pohled na množství škrábanců, s vysokým zvětšením je vidět detailní struktura jednotlivých škrábanců. Dál, pro vysoké a nízké rozlišení je struktura plochy pro všechny materiály podobná a rozdíly v struktuře plochy jsou dobře patrné jen pro určitá zvětšení – z toho důvodu je třeba hledat závislost mezi fraktální dimenzí plochy a koeficientem odolnosti proti tření při stejném zvětšení všech vzorků a lze předpokládat, že závislost nebude platit pro libovolné zvětšení, ale pouze pro takové zvětšení, kde je patrný rozdíl ve struktuře ploch.

Plochy snímaných materiálů byly nejprve vyleštěny a poté posouvány po podložce s brusnými částicemi. Každý vzorek byl přitlačován k podložce stejnou silou a posouván stejnou rychlostí po stejně dlouhé dráze a poté byl snímán elektronovým mikroskopem. Pro více detailů o experimentu viz [13].

7.2 Faktory ovlivňující odhad fraktální dimenze

Odhad dimenze snímaných ploch byl zásadně ovlivněn dvěma faktory. Prvním faktorem byla vysoká míra aditivního šumu v obraze (více o vlivu šumu v podkapitole 6.3), druhým faktorem, který komplikoval odhad dimenze, byl fakt, že použitý elektronový mikroskop poskytuje pouze relativní informaci o výšce, tj. černá barva koresponduje s nejnižším bodem na ploše a bílá barva s nejvyšším bodem na ploše, ale absolutní údaj o výšce plochy je neznámý (více o vlivu poměru mezi délkou a výškou měřených objektů v podkapitole 6.2).

Pro snížení míry šumu v obraze byla použita konvoluce obrazové matice s low pass filtrem F_1 . Gaussův filtr dával o něco málo lepší výsledky (viz podkapitola 6.3), nicméně rozdíl v hodnotách naměřených dat byl v řádu několik setin, proto je i filtr F_1 použitelný pro praktické aplikace v případě, že se neočekává velmi vysoká fraktální dimenze plochy.

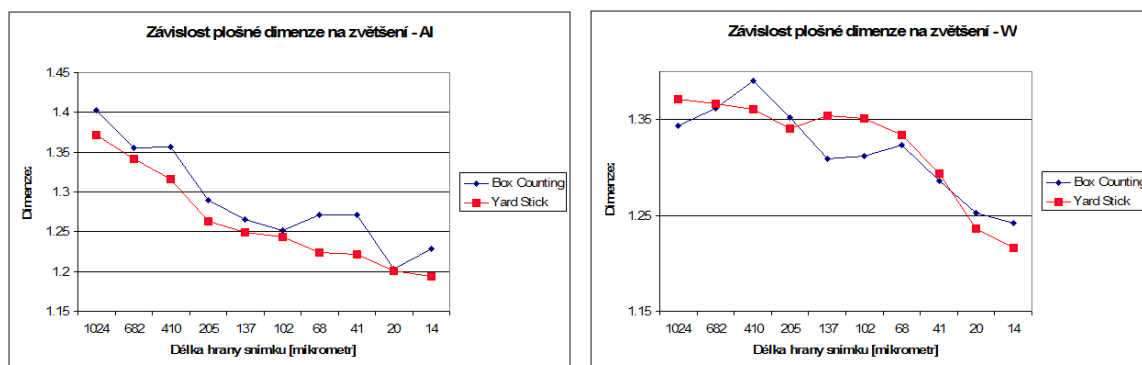
Po potlačení aditivního šumu v obraze bylo třeba odhadnout absolutní výšku plochy, tj. převést barvy na konkrétní hodnoty výšky v mikrometrech, tak, aby byl zachován poměr výšky a délky. Vzorky byly posouvány po podložce s brusnými částicemi přibližně kulového tvaru. Lze tedy předpokládat, že hlubka vrypů bude zhruba stejná jako jejich šířka.

Na základě předchozí úvahy lze odhadnout přibližný poměr mezi výškou a délkou plochy. Připomeňme, že na řádky obrazové matice lze nahlížet jako na reprezentaci řezu fraktální plochy ve směru osy x , tj. jako na aproximaci F-křivky, kterou lze zkonstruovat, pokud zvolíme rozsah výšky řezu (tj. zvolíme poměr mezi výškou a šířkou). Na vykreslené křivce lze detekovat vrypy vzniklé posunem brusných částic a lze změřit poměr výšky vrypu a šířky vrypu při daném vykreslení. Pokud jsme pro vykreslení zvolili správnou výšku, podíl výšky a šířky vrypu bude přibližně 1. Při praktické realizaci vykreslíme křivku ve zvoleném poměru mezi výškou a délkou a detekujeme několik vrypů pro každý řádek obrazové matice a vypočteme poměr mezi šířkou a výškou vrypu. V ideálním případě by měl být tento poměr pro všechny zdetekované vrypy stejný. V praxi se poměry budou mírně lišit. Při řešení popsaného problému byl použit průměr všech spočtených koeficientů ze zdetekovaných vrypů. Tento poměr pak vypovídá o zkruslení obrazu a na jeho základě lze křivku vykreslit správně.

7.3 Změny fraktální dimenze v závislosti na zvětšení

Před hledáním závislosti mezi fraktální dimenzí a koeficientem odolnosti proti tření bylo třeba ověřit, jestli zvětšení hraje skutečně významnou roli, nebo lze porovnávat mezi sebou snímky s různým zvětšením.

Pro každý materiál byla změřena plošná dimenze pro každé zvětšení. Následující grafy ukazují chování plošné dimenze odhadnuté metodou „Yard Stick“ a „Box Counting“ pro různá zvětšení.

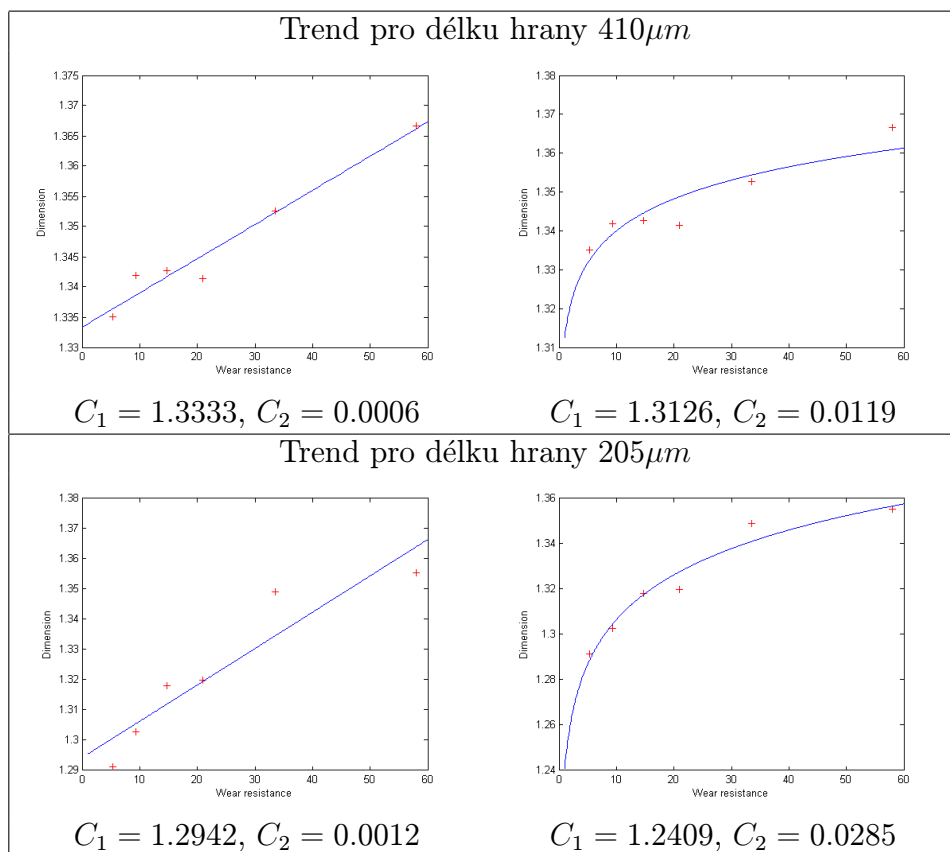


Obrázek 5: Závislost fraktální dimenze na zvětšení pro hliník a wolfram.

Z grafů na obrázku 5 je zřejmé, že dimenze plochy se měnila s použitím zvětšení. O plochách opotřebovaných třením tedy můžeme říci, že mají multifraktální charakter – tj. se změnou měřítka se mění dimenze, je proto třeba porovnávat plošné dimenze těchto ploch pouze pro plochy snímané se stejným zvětšením.

7.4 Závislost fraktální dimenze a koeficientu odolnosti proti tření

Pro každý materiál bylo připraveno celkem 40 snímků – 4 pro každé zvětšení. Pro každý snímek plochy byla změřena plošná dimenze D_P metodou „Box Counting“ a metodou „Yard Stick“. Pro každé 4 snímky stejného materiálu snímaného při stejném zvětšení byla spočtena průměrná plošná dimenze, která byla použita pro hledání trendu mezi fraktální dimenzí a koeficientem odolnosti proti tření. Následující grafy ukazují možnou závislost fraktální dimenze (plošná dimenze, řzy měřeny metodou „Yard Stick“) na koeficientu odolnosti proti tření. Zpracovaná data ukázala, že lze nalézt závislost mezi plošnou dimenzí měřenou metodou „Yard Stick“ a koeficientem odolnosti proti tření v rozsahu zvětšení od zhruba $400\mu m$ do $100\mu m$ (Pro ostatní zvětšení nebyl trend nalezen). Možné trendy (lineární a logaritmický) jsou zobrazeny na následujících grafech. Trend byl hledán metodou nejmenších čtverců a to jako lineární a logaritmická funkce.

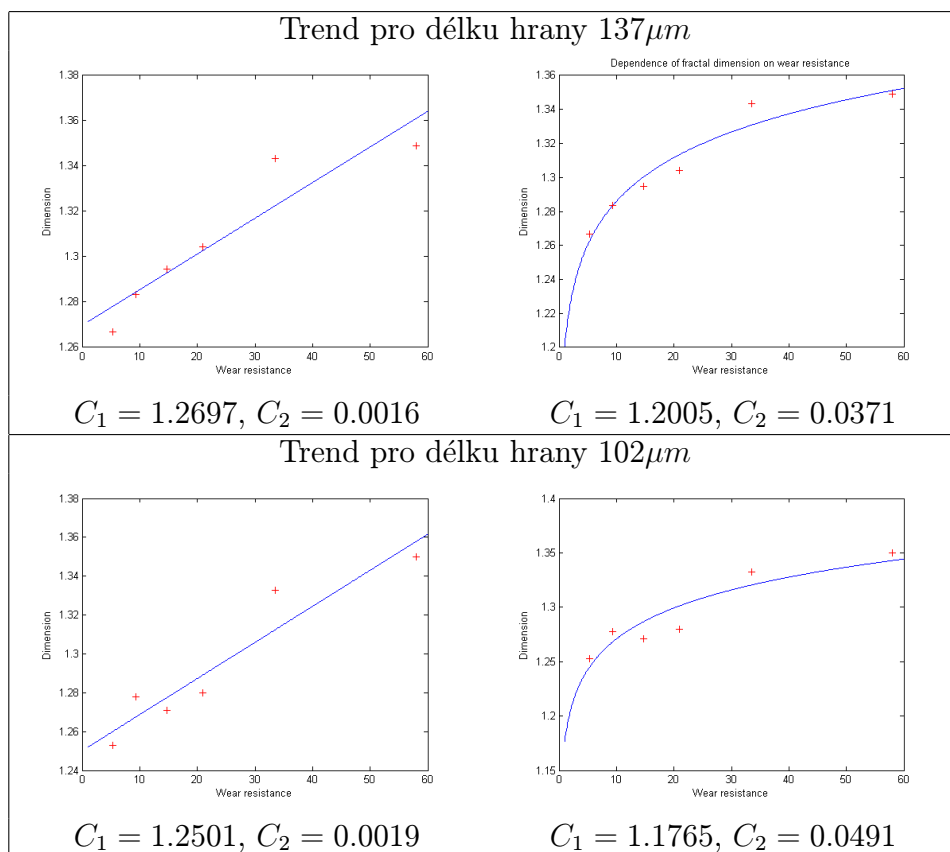


Z naměřených dat byly odhadnuty koeficienty pro hledané trendy a úpravou nalezených dat byly odvozeny vztahy pro W :

$$W = \frac{(D_P - C_1)}{C_2}$$

$$W = e^{\frac{D_P - C_1}{C_2}}$$

kde D_P je plošná dimenze, W je koeficient odolnosti proti tření, C_1 a C_2 jsou koeficienty spočtené metodou nejmenších čtverců pro daný trend (lineární nebo logaritmický).



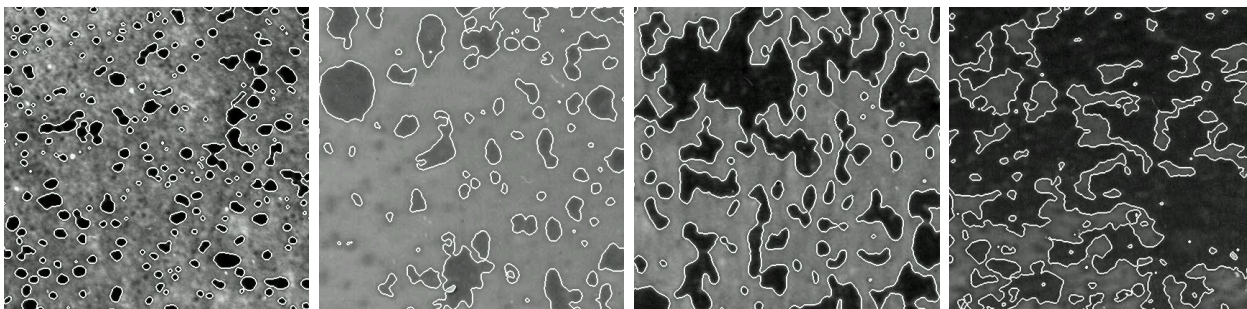
Na základě analýzy dat bylo z měření vyloučeno olovo. Plošná dimenze olova vykazovala výrazně jiné chování než ostatní materiály a znemožňovala nalezení trendu. Pro danou aplikaci to bylo přijatelné, protože metoda se vyvíjela zejména pro hledání slitin odolných proti tření a olovo je kov s nejnižším koeficientem odolnosti proti tření ze všech zkoumaných vzorků. V případě, že by bylo třeba hledat materiál s velmi nízkou odolností proti tření, bylo by nezbytné nalézt další materiály s podobnými vlastnostmi jako olovo a zopakovat experiment s těmito vzorky.

8 Analýza závislosti mezi objemem pórů v keramice a fraktální dimenzí hranic pórů

Tato kapitola se zabývá závislostí fraktální dimenze hranic pórů v pórovité keramice a objemem těchto pórů v keramice. Pórovitá keramika má velké uplatnění například v oblasti filtrů nebo kloubních náhrad. Pro tyto účely je třeba, aby keramika obsahovala co nejvíce pórů. Obvykle je pórovitá keramika velmi křehká, ale speciálním postupem přípravy lze její pevnost zvýšit (viz např. [6]). Nicméně i u takto připravené keramiky její křehkost roste s rostoucím objemem pórů. Pro výše zmíněné aplikace je třeba, aby póry měly dostatečně členité hranice. Je třeba nalézt minimální objem pórů, kdy materiál je ještě dostatečně pevný, ale množství pórů v materiálu je již dostatečné, aby jejich hranice byly členité. Tento problém byl řešen ve spolupráci s Ruskou akademií věd, Ústavem mechaniky a nauky o materiálu (Institute of Strength Physics and Materials Science, Siberian Division, Russian Academy of Sciences).

8.1 Popis vstupních dat

Vstupní data byly snímky pórovité keramiky z optického mikroskopu Neophot-21 se zvětšením $500\times$. Snímána byla keramika o různém objemovém procentu pórů (objemové procento pórů se dá poměrně přesně kontrolovat při výrobě, viz [6]). K dispozici byly snímky s následujícím objemem pórů (objem pórů uváděn v objemových procentech): 10%, 13%, 15%, 21%, 22%, 23%, 25%, 30%, 40%, 50%, 55% a 60%. Pro každý vzorek byly pořízeny 4 různé snímky. Snímky byly osmibitové v odstínech šedi, kde číslo 0 reprezentovalo černou barvu, číslo 255 barvu bílou. Rozlišení snímků bylo 837×627 pixelů. Na obrázku 6 je příklad čtyř snímků s různým objemem pórů (v obrazech je již zdetekována hranice pórů a je zvýrazněna bílou čarou).



Obrázek 6: Čtyři vzorky pórovité keramiky o objemu pórů 15%, 20%, 40% a 60% s již detekovanou hranicí pórů.

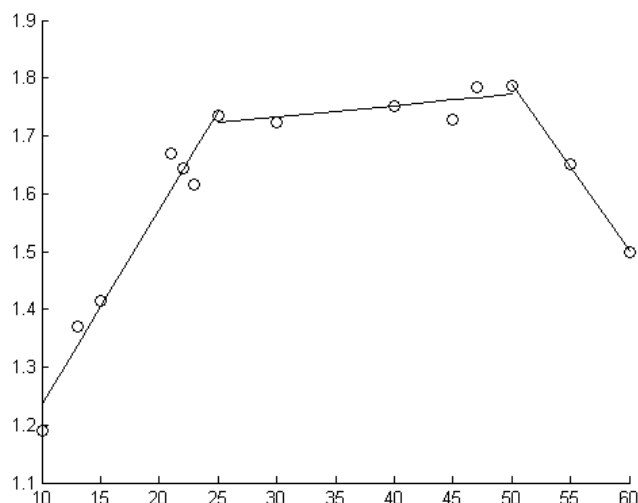
Před samotným měřením dimenze hranic pórů bylo třeba hranice v obraze detekovat. Obraz byl převeden na černobílý metodou prahování. V tomto černobílém obraze byla pak detekována hranice pórů. Hranice pórů byly zobrazeny body bílé barvy, pozadí černě.

Výše popsaným způsobem byla převedena vstupní data na černobílé obrazy, ve kterých je bíle zobrazena hranice pórů a zbytek je černé pozadí. Snímek zachycuje několik reprezentací fraktálních křivek – pro každou hranici póru máme jednu fraktální křivku (uzavřenou, pokud celý pór ležel na snímku, primitivní, pokud byl pór zachycen na snímku jen částečně), tj. celkový obraz je sjednocením aproximací fraktálních křivek dle definice 3.1.12 a její dimenzi lze odhadnout metodou „Box Counting“.

8.2 Závislost mezi fraktální dimenzí hranic pórů a objemem pórů v keramice

Sjednocení aproximací fraktálních křivek zdetekovaných výše popsaným způsobem bylo použito pro odhady fraktálních dimenzí. Jak již bylo zmíněno v podkapitole 4.2, k měření dimenze sjednocení fraktálních křivek je vhodné použít metodu „Box Counting“. Metoda „Yard Stick“ je ze své definice poměrně nevhodná – sice by ji bylo možné použít pro každou jednotlivou křivku sjednocení, ale pak by bylo potřeba korektně definovat zpracování těchto jednotlivých dimenzí, které se mohou pro jednotlivé hranice pórů dost lišit. I z hlediska naprogramování algoritmu by byl tento postup složitější – pro metodu „Box Counting“ stačí výše popsané zpracování vstupů, pro využití metody „Yard Stick“ by bylo třeba ještě jednoznačně určit každou křivku ze sjednocení, aby mohla být její dimenze změřena metodou „Yard Stick“.

Po vynesení hodnot fraktální dimenze do grafu v závislosti na objemovém procentu pórů bylo zjištěno, že data lze rozdělit do tří oblastí: oblast mezi 0% až 25%, 25% až 50% a 50% a více. V první oblasti fraktální dimenze s rostoucím objemem pórů poměrně prudce narůstá. V druhé oblasti se tento nárůst zastaví a dimenze se udržuje přibližně konstantní. V poslední oblasti dochází s rostoucím množstvím pórů k poklesu fraktální dimenze – viz obrázek 7.



Obrázek 7: Závislost fraktální dimenze na objemu pórů.

V první oblasti fraktální dimenze roste, protože póry, které byly při malých procentech izolované a měly poměrně jednoduchý tvar, se začínají propojovat dohromady a jejich hranice se stává více a více členitou. Tento trend pokračuje až do určitého objemu, kdy přidávání dalších a dalších pórů již nijak zásadně neovlivňuje změny ve tvaru hranice. Naopak s rostoucím objemem pórů v materiálu se hranice s pevným materiálem začne vyhlazovat, což vede k poklesu fraktální dimenze ve třetí části grafu.

Z výše popsaných výsledků plyne, že nemá smysl zvyšovat objem pórů v materiálu nad hodnotu 25%, protože členitost hranice pórů již nijak výrazně neporoste a materiál bude zbytečně křehnout.

9 Studium sluneční aktivity

V této kapitole byla pomocí fraktální dimenze analyzována časová řada počtu slunečních skvrn. Zhruba od roku 1820 je pravidelně zaznamenáván počet skvrn na Slunci. Tato časová řada je dobře známa a byla již mnohokrát analyzována pomocí klasických metod pro zpracování časových řad. V této práci byl použit jiný přístup k analýze těchto dat. Místo aby byl „šum“ z dat odstraněn, byla změřena jeho fraktální dimenze v různých časových intervalech a z těchto dat byla sestavena nová časová řada. Ukázalo se, že vlastnosti „šumu“ se v čase mění, tj. změny v počtu pozorovaných skvrn jsou různé v různých časových intervalech.

9.1 Popis vstupních dat a konstrukce časové řady z naměřených dimenzí

Denní pozorování počtu slunečních skvrn byla získána z veřejně dostupného zdroje [17] a vykreslena jako funkce času. Měřená data lze pospojovat úsečkami a tudíž splňují definici aproximace fraktální křivky, a i když, přísně vzato, data fraktální křivka nejsou, lze z této aproximace odhadnout fraktální dimenzi.

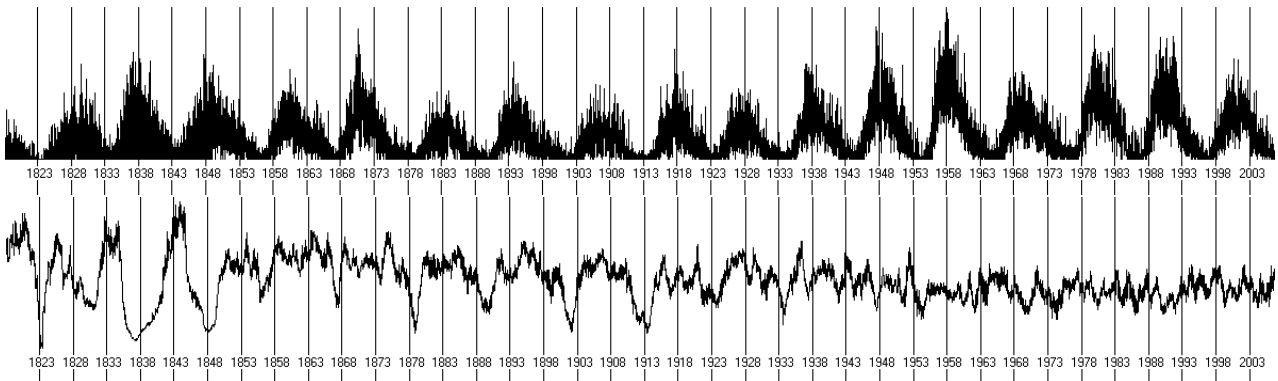
Jak bylo ukázáno dříve, pro výpočet dimenze je důležité, v jakém měřítku jsou data zobrazena. Pro zjištění změn fraktální dimenze v čase je třeba měnit délku časového okna, ve kterém je dimenze počítána. Pro výpočet byl vždy vykreslen jen měřený úsek. Dimenze v rámci časového okna byla měřena metodou „Yard Stick“. V rámci zvoleného časového úseku

byla délka měřena takto:

$$d = \sqrt{(v - u)^2 + (h_v - h_u)^2}$$

kde u a v jsou dny, h_u a h_v jsou počty skvrn. Metoda „Yard Stick“ byla implementována tak, že den u byl zafixován a den v byl postupně posouván tak dlouho, až byla splněna následující podmínka $d \geq \varepsilon_i$. Jakmile byla splněna tato podmínka, hodnota $L(\varepsilon_i)$ byla zvýšena a za nový výchozí den byl zvolen den v , přičemž výchozí den byl první den spadající do zvoleného časového okna. Postup se pro dané ε_i opakoval tak dlouho, až byl dosažen poslední den ve vybraném časovém okně. Takto se pro různá ε_i naměřily hodnoty $L(\varepsilon_i)$ a byla odhadnuta dimenze pro úsek spadající do daného časového okna. Z popsaného postupu je zřejmé, že délková (časová) jednotka je jeden den, a na ose y je to přímo počet skvrn v daném dni, který není nijak transformován. Pokud by bylo časové okno vykreslováno do obrazové matice o stejných rozměrech pro různá časová okna, docházelo by ke změnám ve směru časové osy, což by pravděpodobně vneslo do měření chyby. Z tohoto důvodu se provádělo měření výše popsaným způsobem.

Zvolené časové okno bylo posouváno o konstantní časový krok (konkrétně střed posunutého časového okna ležel vzdálen o časový krok od středu předchozího časového okna), kde časový krok byl udáván ve dnech. Fraktální dimenze naměřená v daném časovém okně byla vztažena ke středu časového okna. Tyto nové hodnoty, tj. středy časových oken a příslušná fraktální dimenze vytvořila novou časovou řadu.



Obrázek 8: Originální časová řada sestavená z počtu slunečních skvrn za den (horní časová řada) a jedna z možných časových řad fraktálních dimenzí.

9.2 Analýza závislosti fraktální dimenze na čase – hledání skrytých period

Z původní časové řady počtu slunečních skvrn bylo sestrojeno několik nových časových řad pro fraktální dimenzi. Byla použita následující časová okna: 365 dní, 730 dní a 1825 dní. Pro každé okno byly zvoleny následující časové kroky: 7 dní, 30 dní, 180 dní, 365 dní a 730 dní, tj. celkem bylo sestrojeno $3 \times 5 = 15$ různých časových řad.

Ve spočtených časových řadách pro fraktální dimenzi byly hledány významné periody pomocí tzv. periodogramu. Označme $F(t)$ časovou řadu fraktální dimenze. Funkce, která by aproximovala tuto časovou řadu byla hledaná ve tvaru:

$$F(t) \sim F_0 + \sum_{i=1}^u (a_i \sin(\bar{\lambda}_i t) + b_i \cos(\bar{\lambda}_i t))$$

Časová řada je složena z N hodnot fraktální dimenze $F(t_k)$ pro časy $t_0 \dots t_{N-1}$. Předpokádejme, že N je liché číslo ($N = 2m + 1$), pokud není, poslední člen časové řady může být

vynechán a tím bude tato podmínka splněna. Časová řada $F(t)$ může být transformována na novou časovou řadu $\widetilde{F}(t)$ takovou, že $\widetilde{F}(t) = F(t) - F_0$, kde F_0 je průměrná fraktální dimenze spočtená pro daný časový krok a časové okno: $F_0 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F(t_k)$.

Dále se spočtou hodnoty $I(\lambda_r)$:

$$I(\lambda_r) = \frac{1}{2\pi N} \left| \sum_{k=0}^{N-1} \widetilde{F}(t_k) \cdot e^{-i(k+1)\lambda_r} \right|^2$$

pro všechna $\lambda_r = \frac{2\pi r}{N}$, $r = 1 \dots m$. Hodnoty $I(\lambda_r)$ lze potom využít k nalezení významných frekvencí $\overline{\lambda}_i$, pomocí kterých lze sestavit aproximační funkci pro časovou řadu. Pokud v časové řadě není žádný periodický trend, tj. neexistují žádné významné frekvence, mají hodnoty $\widetilde{F}(t)$ normální rozdělení $N(0, \sigma^2)$. Významné frekvence $\overline{\lambda}_i$ lze nalézt s předem danou pravděpodobností následujícím postupem:

- Setřídíme hodnoty $I(\lambda_r)$ od maximální po minimální hodnotu:

$$V_1 = \max_{r=1, \dots, m} I(\lambda_r), \dots, V_m = \min_{r=1, \dots, m} I(\lambda_r)$$

- Pro hodnotu V_1 spočteme testovací kritérium $W = \frac{V_1}{\sum_{j=1}^m V_j}$
- Kritérium W porovnáme s $w(\alpha)$ (α je hladina významnosti). Pokud $W \geq w(\alpha)$ potom zamítáme pro dané α hypotézu, že hodnoty $\widetilde{F}(t)$ mají normální rozdělení a λ_r odpovídající hodnotě V_1 je považována za významnou frekvenci. Hodnotu V_1 odstraníme z množiny $\{V_i\}_{i=1}^m$ a postup opakujeme s novou množinou $\{V_i\}_{i=2}^m$ tak dlouho, až nenalezneme žádnou další významnou frekvenci λ .

Bližší detaily o periodogramu a testovacím kritériu lze nalézt například v [15] nebo [16].

Ve výše popsaném algoritmu byl časový krok roven jedné, ale při výpočtu časové řady pro fraktální dimenzi byl použit různě dlouhý časový krok v rozsahu od sedmi dnů až po 365 dnů, proto všechny nalezené významné frekvence musí být převedeny na nové frekvence $\overline{\lambda}_i$, $i = 1 \dots u$, které odpovídají použitému časovému kroku následovně:

$$\overline{\lambda}_i = \frac{\widetilde{\lambda}_i}{T}$$

kde T je použitý časový krok. Významné frekvence mohou být potom převedeny na periody p_i :

$$p_i = \frac{2\pi}{\overline{\lambda}_i}$$

Významné periody byly hledány pro každou časovou řadu. Počet nalezených period klesá s prodlužujícím se časovým krokem – zejména prudce klesá počet krátkých period, pravděpodobně proto, že pro krok vyšší než cca půl roku jsou krátké periody „přeskočeny“ kvůli prodlužující se délce kroku. Vliv změny šířky časového okna nemá až zas tak zásadní vliv na počet nalezených period a při stejném časovém kroku jsou nalezeny podobné periody pro různá časová okna.

9.3 Porovnání nalezených period s periodami nalezenými jinými metodami

Všechny nalezené periody pro různě nastavené hodnoty časového kroku a časového okna byly zkombinovány dohromady a porovnány s periodami, které byly nalezeny jinými metodami z různých vstupních dat, nejen z počtu slunečních skvrn. Řádek „A“ v tabulce 2 obsahuje všechny periody nalezené analýzou časových řad fraktální dimenze, řádek „B“ obsahuje periody nalezené jinými metodami – u těchto period je vždy v tabulce uveden pramen, ve kterém byly nalezeny. Jednotkou pro periody je jeden rok.

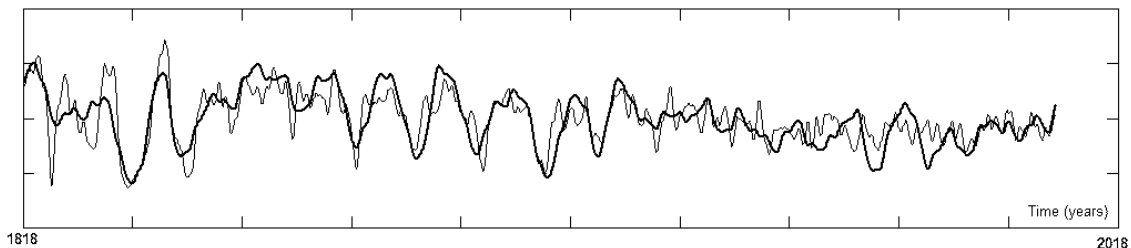
Periody								
A	1.71	2.75	3.51	4.55	5.52	7.59	8.42	9.69
B	1.30 _[22]	N	3.50 _[18]	4.16 _[18]	5.40 _[18]	7.89 _[18]	8.99 _[18]	N
A	10.50	11.30	12.59	13.48	14.52	15.73	17.16	18.88
B	10.46 _[18]	11.10 _[20]	12.06 _[23]	N	N	N	N	18.33 _[19]
A	20.98	26.97	31.46	37.79	47.20	62.98	94.39	189.08
B	20.95 _[19]	N	N	43.40 ± 7.1 _[24]		65 _[20]	90 _[21]	N

Tabulka 2: Porovnání nalezených period analýzou časových řad fraktální dimenze (označeno písmenem A) s periodami nalezenými jinými metodami (označeno písmenem B). Periody jsou uvedeny v letech.

Ze všech nalezených period byla sestrojena aproximační funkce pro časovou řadu $\widetilde{F}(t)$:

$$\widetilde{F}(t) \sim y = \sum_{i=1}^u (a_i \sin(\bar{\lambda}_i t) + b_i \cos(\bar{\lambda}_i t))$$

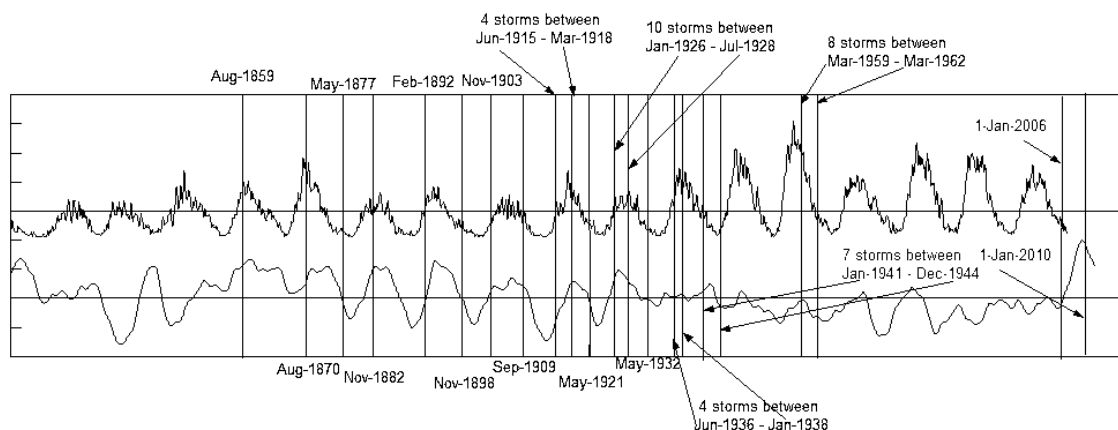
kde koeficienty a_i a b_i byly nalezeny metodou nejmenších čtverců. Hodnoty $\widetilde{F}(t)$ byly vypočteny z časové řady s časovým krokem 7 dní a časovým oknem 365 dní. Výsledek této aproximace je na obrázku 9, kde tenkou čarou je vykreslena původní časová řada a silnou čarou vypočtená aproximační funkce.



Obrázek 9: Časová řada fraktální dimenze (tenká čára) a její aproximace nalezenou aproximační funkcí (silná čára).

9.4 Sluneční skvrny, sluneční bouře a fraktální dimenze

Aproximační funkce popsaná výše a originální časová řada počtu slunečních skvrn byla také porovnána s výskytem nejsilnějších slunečních bouří zaznamenaných mezi lety 1857 až 2003, které jsou uvedeny v [25]. Datумы těchto bouří byly porovnány s maximy slunečních skvrn a průběhem aproximační funkce pro fraktální dimenzi – viz obrázek 10. Poznámka – na obrázku nejsou pro přehlednost vyznačeny všechny bouře, ale hlavně ty, které přesně nespadají do žádného maxima počtu slunečních skvrn.



Obrázek 10: Počty slunečních skvrn (horní část obrázku) a průběh aproximační funkce fraktální dimenze. Svislé čáry označují datумы slunečních bouří, vodorovné čáry jsou průměrné hodnoty počtu slunečních skvrn a fraktální dimenze.

Více než 90 slunečních bouří je zmíněno v [25] mezi lety 1857 až 2003. 55 bouří proběhlo mezi lety 1857 až 1945, 25 bouří mezi lety 1945 až 1970 a pouze 8 opravdu silných bouří je zmíněno mezi lety 1970 až 2003. Pokud porovnáme rozložení slunečních bouří s výskytem maxima počtu slunečních skvrn, většina z nich se odehrála právě v době maxima, zajímavé ovšem je, že většina bouří spadá do let, kdy maxima počtu skvrn byla obvykle nižší než mezi lety 1970 až 2003, kdy sice maxima počtu skvrn byla vyšší, ale počet opravdu silných bouří byl nižší. Dále mezi lety 1941 až 1944 proběhlo 7 silných bouří, i když zrovna bylo období, kdy byl počet slunečních skvrn na svém minimu.

Pokud výskyt slunečních bouří porovnáme s průběhem fraktální dimenze, zjistíme, že skoro všechny bouře spadají do období, kdy fraktální dimenze byla nadprůměrná a tato maxima fraktální dimenze byla spíše z těch vyšších. Dále 7 výše zmíněných bouří mezi lety 1941 až 1944, které připadly na období, kdy byl minimální počet slunečních skvrn, připadá na období maxima fraktální dimenze. V letech 1970 až 2003, kde byl nižší výskyt slunečních bouří i když maxima počtu slunečních skvrn byla vysoká, byla hodnota fraktální dimenze spíše podprůměrná.

Ukázalo se, že zvýšená sluneční aktivita dobře odpovídá nadprůměrné fraktální dimenzi, což znamená, že v některých případech může být zvýšená sluneční aktivita zaznamenána i v období, kde je minimální počet slunečních skvrn, jako například mezi lety 1941 až 1944. To, že je fraktální dimenze vysoká, znamená, že se počet slunečních skvrn poměrně často mění v poměrně krátkém časovém intervalu, tj. průběh výchozí časové řady je poměrně členitý. Fraktální dimenze může být dobrý dodatečný nástroj k předpovědím zvýšené sluneční aktivity. S ohledem na vývoj funkce, která byla použita pro odhad fraktální dimenze, lze očekávat silnou magnetickou bouři (nebo několik bouří) v letech 2007 až 2010, protože fraktální dimenze začíná prudce růst v roce 2005. Poznamenejme, že na začátku roku 2005 se objevila na Slunci velká skvrna, která byla doprovázena silnou magnetickou bouří (viz [26]), tedy v době, kdy předpovídaný průběh fraktální dimenze začíná prudce růst vzhůru. Tato bouře spadá takřka přesně do lokálního minima počtu slunečních skvrn a do období, kdy se očekával spíše klid. Polární záře, která doprovázela tuto bouři, byla viditelná i z území České republiky.

10 Závěr

Teoretická část této práce je zaměřena na formalizaci metod měření fraktální dimenze a na analýzu vlivů na měření fraktální dimenze. Tyto oblasti jsou často opomíjeny v praktických aplikacích, což může vést k nepřesným až chybným výsledkům. Protože metody měření jsou obvykle aplikovány na digitální obrazová data, tj. na konečné množiny bodů, byly v teoretické zadefinovány pojmy aproximace fraktální křivky a aproximace fraktální plochy. Tyto definice umožňují korektní přechod od teoretických fraktálních množin k obrazovým datům, které jsou pro většinu praktických aplikací k dispozici. Metody měření fraktální dimenze jsou potom definovány pro tyto aproximace a nikoli teoretické množiny, což umožňuje analyzovat vliv aproximace na odhad fraktální dimenze na funkčnost zvolené metody měření a také to umožňuje předejít chybám způsobeným nevhodným nastavením parametrů metody.

Dalším významným výsledkem teoretické části práce, je analýza vlivů, které ovlivňují výsledek odhadu dimenze, a které se často vyskytují v praktických aplikacích. U každého pospaného vlivu, je také objasněna metoda, jak efekt daného vlivu eliminovat. Zejména analýza vlivu šumu a jeho filtrace je důležitým výsledkem této práce, neboť standardními metodami je takřka nemožné pořídit obrazová data tak, aby neobsahovala šum a filtry používané k potlačení šumu obvykle potlačují i malé detaily v obraze, což může vést ke snížení fraktální dimenze. V rámci práce byl zanalyzován vliv filtrace šumu různými konvolučními na odhad dimenze, což umožnilo vybrat nejvhodnější typ filtrace pro praktické aplikace.

V praktické části byly posané metody měření a metody potlačování různých vlivů na odhad fraktální dimenze aplikovány na tři různé problémy. První dva problémy byly z oblasti materiálového inženýrství a byly řešeny ve spolupráci s Ruskou akademií věd, Ústavem mechaniky a nauky o materiálu (Institute of Strength Physics and Materials Science, Siberian Division, Russian Academy of Sciences), poslední aplikace byla spojena s analýzou sluneční aktivity.

Prvním problémem bylo hledání závislosti koeficientu odolnosti proti tření a fraktální dimenze povrchu kovu namáhaného třením. V tomto případě bylo před samotným měřením fraktální dimenze třeba potlačit šum a správně odhadnout poměr výšky plochy ku délkovému rozměru, protože elektronový mikroskop použitý k snímkování povrchu poskytoval pouze relativní informaci o výšce. Bylo zjištěno, že zkoumané plochy mají multifraktální charakter, tj. že jejich dimenze se mění se zvětšením. Pro určitá zvětšení se podařilo nalézt závislost mezi fraktální dimenzí a koeficientem odolností proti tření a to buď lineární nebo logaritmickou.

Dalším praktickým problémem, který byl řešen v rámci této práce, byla analýza závislosti fraktální dimenze pórů v pórovité keramice a objemem pórů. Bylo zjištěno, že při zhruba 25 objemových procentech pórů se již členitost hranic pórů příliš nezvyšuje. To je důležitý výsledek, neboť s rostoucím objemem pórů v keramice roste i její křehkost. Zřejmě pro praktické aplikace, kde je třeba dostatečně členitá hranice pórů (filtry, kloubní náhrady,...) nemá smysl zvyšovat objem pórů nad tuto hodnotu.

Posledním řešeným problémem byla analýza sluneční aktivity pomocí analýzy fraktální dimenze časové řady poštu slunečních skvrn v čase. Posunem časového okna po této původní časové řadě, byla sestrojena nová časová řada z hodnot fraktální dimenze. Hodnota fraktální dimenze vypovídá o tom, jak se měnila „členitost“ původních dat, tj. jestli se počty skvrn v daném čase prudce měnily, nebo byly spíše stálé. Poznamenáme, že originální časová řada není fraktální množina, nicméně splňuje definici aproximace fraktální křivky, a proto lze odhadnout její dimenzi metodami odvozenými pro aproximaci fraktální křivky. Pro novou časovou řadu byly nalezeny významné periody a porovnány s periodami slunečního cyklu, které byly nalezeny jinými metodami. Ukázalo se, že fraktální analýza může být zajímavým dodatečným nástrojem pro výzkum sluneční aktivity.

11 Životopis

Osobní údaje

Jméno a příjmení: Jan Tomáš
Titul: Ing.
Trvalý pobyt: Ondráčkova 545/171, Brno, 625 00
Stav: ženatý

Zaměstnání

Září 2007 – Dodnes: Technical Manager – Honeywell Aerospace
Ledem 2006 – Září 2007: System Engineer – Honeywell Aerospace

Dosažené vzdělání

2003 – 2009: Doktorské studium, obor Matematické Inženýrství, VUT Brno, FSI
1998 – 2003: Magisterské studium, obor Matematické Inženýrství, VUT Brno, FSI

Zahraniční stáže

Leden 2005 – Červenec 2005: Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Rusko
Ledem 2005 – Červenec 2005: Russian Academy of Science, Siberian Division, Tomsk, Rusko

Jazykové znalosti

Anglický jazyk: Středně pokročilý
Ruský jazyk: Středně pokročilý

Další dovednosti

Zkušenosti s řízením projektu
Zkušenosti s výukou na VŠ
Znalost MATLABu, Simulinku, Delphi, ANSYSu
Certifikován jako Six Sigma Green Belt
Instruktor bezmotorového létání

Reference

- [1] Alligood K.T., Sauer T., Yorke J.A., Chaos: An Introduction to Dynamical Systems, New York Springer, New York 1996
- [2] Čížek V., Diskrétní Fourierova transformace a její použití, Matematický seminář SNTL sv. 15, Praha 1981
- [3] Falconer, K.J., The geometry of fractal sets, Cambridge University Press, Cambridge 1985
- [4] Kilgour A., Kjelldahl L., Fast Generation and Surface Structuring Methods for Terrain and Other Natural Phenomena, Eurographics 92, Volume 11 (1992), number 3, pages 169 - 180, Blackwell Publishers, Eurographics Associations, 1992
- [5] Klíč A., Volka K., Dubcová M., Fourierova transformace příklady z infračervené spektroskopie, Ediční a audiovizuální centrum VŠCHT, Praha 1994
- [6] Kulkov S. N., Bujakova S. P., Maslovskij V. I., Ctruktura fazovij sostav i mehaničeskije svojstva keramik na osnově dioksida cirkonija
- [7] Mandelbrot B.B. THE FRACTAL GEOMETRY OF NATURE, W. H. Freeman and Company, New York, 1983
- [8] Martišek D., Matematické principy grafických systémů, PhDr. Karel Kovařík, nakladatelství Littera Brno, Brno 2002
- [9] Sahimi M., Heterogenous materials II, Nonlinear and Breakdown Properties and Atomistic Modeling, New York Springer, New York 2003
- [10] Addison P.S., Fractals and Chaos an Illustrated Course, Institute of Physics Publishing Bristol and Philadelphia, London 1997
- [11] Peitgen H., Jürgens H., Saupe D., Chaos and Fractals: New Frontiers of Science, Springer, 2004
- [12] Sheluhin O., Smolskiy S., Andrey V. O., Self-Similar Processes in Telecommunications, John Wiley and Sons, 2007
- [13] Kulkov, S. N., Proc. Int. Conf. "Tribotechnics in theory and practice", Praha, 1997, pp. 117 - 122
- [14] M. Sahimi, Application of Percolation Theory, Taylor & Francis, London, 1994
- [15] Fan J., Yao Q., Nonlinear Time Series: Nonparametric and Parametric Methods, Springer, 2005
- [16] Grenander U. Rosenblatt M., Statistical Analysis of Stationary Time Series, Chelsea Pub Co., 2nd edition, 1984
- [17] <http://solarscience.msfc.nasa.gov/SunspotCycle.shtml>
- [18] Krivova N. A., Solanki S. K., The 1.3-year and 156-day periodicities in sunspot data: Wavelet analysis suggests a common origin, Astronomy & Astrophysics, pp. 701 - 706, ESO, 2002

- [19] Meko D. M., Stockton C. W., Blasing T. J. , Periodicity in Three Rings from the Corn Belt, *Science* 26, July 1985, Vol. 229. no. 4711, pp. 381 - 384
- [20] Currie R. G., Fine Structure in the sunspot spektrum - 2 to 70 years, *Astrophysics and Space Science*, Volume 20, Number 2, pp. 509 - 518, Springer Netherlands, December 2004
- [21] Hathaway D. H., Wilson R. M., What the Sunspot Record Tell Us About Space Climate, *Solar Physics*, Volume 224, Numbers 1-2, SPringer Netherlands, October 2004
- [22] Richardson J.D., Paularena K. I., Belcher J. W., Lazarus A. J., Solar wind oscilation with 1.3 year period, *Geophysical Research Letters*, 1994, space.mid.edu
- [23] Castagnoli C., Bonino G., Provenzale A., The thermoluminescence profile of a recent sea sediment core and the solar variability, *Solar Physics*, Volume 117, Number 1, pp. 187-197, March 1988
- [24] Knaack R., Stenflo J. O., Berdyugina S. V., Periodic oscillations in the north-south asymmetry of the solar magnetic field, *Astronomy & Astrophysics*, pp. 418, ESO, 2004
- [25] <http://www.solarstorms.org/SRefStorms.html>
- [26] http://science.nasa.gov/headlines/y2005/10jun_newstorm.htm