

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ  
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ  
ÚSTAV MATEMATIKY  
FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING  
INSTITUTE OF MATHEMATICS

## APLIKACE OBYČEJNÝCH DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC S OKRAJOVÝMI PODMÍNKAMI

APPLICATIONS OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH BOUNDARY  
CONDITIONS

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE  
BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE  
AUTHOR

LUCIE FELIXOVÁ

VEDOUCÍ PRÁCE  
SUPERVISOR

doc. RNDr. JAN ČERMÁK, CSc.



LICENČNÍ SMLOUVA  
POSKYTOVANÁ K VÝKONU PRÁVA UŽÍT ŠKOLNÍ DÍLO  
uzavřená mezi smluvními stranami:

**1. Paní**

Jméno a příjmení: Lucie Felixová  
Bytem: Schwaigrova 19, 61700, Brno - Komárov  
Narozena (datum a místo): 15. 11. 1986, Brno  
(dále jen autor)

a

**2. Vysoké učení technické v Brně**

Fakulta strojního inženýrství  
se sídlem Technická 2896/2, 61669, Brno - Královo Pole  
jejímž jménem jedná na základě písemného pověření děkanem fakulty:  
doc. RNDr. Miroslav Doupovec, CSc.  
(dále jen nabyvatel)

**Čl. 1**  
**Specifikace školního díla**

1. Předmětem této smlouvy je vysokoškolská kvalifikační práce (VŠKP):

- disertační práce
- diplomová práce
- bakalářská práce
- jiná práce, jejíž druh je specifikován jako .....

(dále jen VŠKP nebo dílo)

Název VŠKP: Aplikace obyčejných diferenciálních rovnic s okrajovými podmínkami  
Vedoucí/ školitel VŠKP: doc. RNDr. Jan Čermák, CSc.  
Ústav: Ústav matematiky  
Datum obhajoby VŠKP: 23. 6. 2009

VŠKP odevzdal autor nabyvateli v<sup>1</sup>:

- tištěné formě — počet exemplářů 2
- elektronické formě — počet exemplářů 1

2. Autor prohlašuje, že vytvořil samostatnou vlastní tvůrčí činností dílo shora popsané a specifikované. Autor dále prohlašuje, že při zpracovávání díla se sám nedostal do rozporu s autorským zákonem a předpisy souvisejícími a že je dílo dílem původním.

3. Dílo je chráněno jako dílo dle autorského zákona v platném znění.

4. Autor potvrzuje, že listinná a elektronická verze díla je identická.

---

<sup>1</sup>hodící se zaškrtněte

## Čl. 2 Udělení licenčního oprávnění

1. Autor touto smlouvou poskytuje nabyvateli oprávnění (licenci) k výkonu práva uvedené dílo nevýdělečně užít, archivovat a zpřístupnit ke studijním, výukovým a výzkumným účelům včetně pořizování výpisů, opisů a rozmnoženin.
2. Licence je poskytována celosvětově, pro celou dobu trvání autorských a majetkových práv k dílu.
3. Autor souhlasí se zveřejněním díla v databázi přístupné v mezinárodní síti
  - ihned po uzavření této smlouvy
  - 1 rok po uzavření této smlouvy
  - 3 roky po uzavření této smlouvy
  - 5 let po uzavření této smlouvy
  - 10 let po uzavření této smlouvy(z důvodu utajení v něm obsažených informací)
4. Nevýdělečné zveřejňování díla nabyvatelem v souladu s ustanovením §47b zákona č. 111/1998 Sb., v platném znění, nevyžaduje licenci a nabyvatel je k němu povinen a oprávněn ze zákona.

## Čl. 3 Závěrečná ustanovení

1. Smlouva je sepsána ve třech vyhotoveních s platností originálu, přičemž po jednom vyhotovení obdrží autor a nabyvatel, další vyhotovení je vloženo do VŠKP.
2. Vztahy mezi smluvními stranami vzniklé a neupravené touto smlouvou se řídí autorským zákonem, občanským zákoníkem, vysokoškolským zákonem, zákonem o archivnictví, v platném znění a popř. dalšími právními předpisy.
3. Licenční smlouva byla uzavřena na základě svobodné a pravé vůle smluvních stran, s plným porozuměním jejímu textu i důsledkům, nikoliv v tísní a za nápadně nevýhodných podmínek.
4. Licenční smlouva nabývá platnosti a účinnosti dnem jejího podpisu oběma smluvními stranami.

V Brně dne:

Nabyvatel

Autor

## **Abstrakt**

Tato bakalářská práce se zabývá aplikacemi obyčejných diferenciálních rovnic s okrajovými podmínkami. Cílem této práce je především ukázat řešení stability prutů posuzovaných na vzpěr s různým typem uložení (kloubové uložení, vetknutí a jejich kombinace), prutů namáhaných na ohyb, jež jsou horizontálně zatíženy, a prutů, u kterých musíme brát v úvahu vliv podloží, tzv. prut na pružném (Winklerově) podkladě. Práce si dále klade za cíl odvodit rovnice pro teplotní pole v tenké tyči a pro matematické kyvadlo.

## **Summary**

This bachelor's thesis is concerned with the applications of ordinary differential equations with boundary conditions. The aim of this thesis is to find the solution of straight bar stability under different boundary conditions (hinging, clamping and their combinations), of bended bars under horizontal loading and of straight bars on an elastic foundation (Winkler's foundation). Further, the thesis deals with the derivation of the equation for temperature field in a thin rod and for mathematical pendulum.

## **Klíčová slova**

Obyčejná diferenciální rovnice, okrajové podmínky, prut

## **Keywords**

Ordinary differential equation, boundary conditions, beam

FELIXOVÁ, L. *Aplikace obyčejných diferenciálních rovnic s okrajovými podmínkami*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2009. 38 s. Vedoucí bakalářské práce doc. RNDr. Jan Čermák, CSc.

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci *Aplikace obyčejných diferenciálních rovnic s okrajovými podmínkami* vypracovala samostatně pod vedením doc. RNDr. Jana Čermáka, CSc., s použitím materiálů uvedených v seznamu literatury.

Lucie Felixová

Děkuji svému školiteli doc. RNDr. Janu Čermákovi, CSc. za vedení mé bakalářské práce, mnohé rady a připomínky, které pomohly ke zlepšení obsahové stránky této práce. Dále bych chtěla poděkovat panu Ing. Tomáši Profantovi, Ph.D. za cenné rady týkající se zejména prutových konstrukcí.

Lucie Felixová





# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>10</b>
<b>2</b>	<b>Matematický aparát</b>	<b>11</b>
2.1	Diferenciální rovnice . . . . .	11
2.2	Pojem řešení diferenciální rovnice . . . . .	11
2.3	Okrajová úloha . . . . .	11
2.4	Typy okrajových podmínek . . . . .	12
2.5	Problém existence a jednoznačnosti řešení . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Prut namáhaný na vzpěr</b>	<b>14</b>
3.1	Prut na jednom konci vetknutý . . . . .	15
3.2	Prut na obou koncích kloubově uložený . . . . .	16
3.3	Prut na jednom konci vetknutý a na druhém kloubově uložený . . . . .	18
3.4	Prut na obou koncích vetknutý . . . . .	19
<b>4</b>	<b>Prut namáhaný na ohyb</b>	<b>22</b>
4.1	Prut příčně i podélně zatížený . . . . .	22
4.2	Prut na pružném (Winklerově) podkladě . . . . .	25
<b>5</b>	<b>Teplotní pole v tenké tyči</b>	<b>29</b>
5.1	Odvození rovnice . . . . .	29
5.2	Formulace dodatečných podmínek . . . . .	30
5.3	Příklady teplotních polí . . . . .	31
<b>6</b>	<b>Matematické kyvadlo</b>	<b>32</b>
6.1	Odvození rovnice . . . . .	32
6.2	Příklady rovnic kyvadla . . . . .	33
<b>7</b>	<b>Závěr</b>	<b>35</b>
<b>8</b>	<b>Seznam použitých zkratk a symbolů</b>	<b>37</b>



# 1 Úvod

Obyčejné diferenciální rovnice hrají zásadní roli při řešení mnoha technických a přírodovědeckých problémů. Z hlediska matematické teorie a z hlediska aplikací rozlišujeme dva typy doplňujících podmínek - počáteční podmínky a okrajové podmínky. V případě zahrnutí počátečních podmínek má nezávisle proměnná, vystupující v dané rovnici, nejčastěji fyzikální význam času. V případě okrajových podmínek je to délka (poloha). Předložená bakalářská práce se zabývá výhradně okrajovými problémy pro diferenciální rovnice (přehled matematického aparátu je omezen na nezbytné minimum). Mezi řešené problémy patří především otázka stability prutů konstantního průřezu, problém teplotního pole v tenké tyči a také matematické kyvadlo.

Struktura této práce je následující: druhá kapitola shrnuje potřebný matematický aparát. Třetí kapitola je věnována řešení stability prutů namáhaných na vzpěr: jsou zmíněny čtyři základní druhy uložení - prut na jednom konci vetknutý a na druhém volný, prut na obou koncích kloubově uložený, prut na jednom konci vetknutý a na druhém kloubově uložený a v neposlední řadě prut na obou koncích vetknutý. Všechny tyto případy budeme řešit pomocí diferenciálních rovnic druhého řádu, a to homogenních i nehomogenních, lišit se budou také okrajové podmínky.

Čtvrtá kapitola se bude týkat prutů namáhaných na ohyb. Nejprve budeme uvažovat prut namáhaný mimo jiné také příčným zatížením, který budeme řešit pomocí diferenciální rovnice druhého řádu. Později navíc připustíme namáhání nosníku ve smyku a působení podloží, tzv. prut na pružném (Winklerově) podkladu, což způsobí, že diferenciální rovnice druhého řádu přejde v rovnici čtvrtého řádu, jejíž řešení je poněkud náročnější. Výpočet ukážeme na příkladu.

Pátá kapitola bude obsahovat problém teplotního pole v tenké tyči. Odvodíme rovnici a doplníme ji dodatečnými podmínkami, následně ukážeme příklady několika teplotních polí. V šesté kapitole se budeme zabývat matematickým kyvadlem. I když tento problém - na rozdíl od předcházejících - je ve své podstatě počátečním problémem, předepsání okrajových podmínek má také dobrý smysl. Stejně jako v předcházející kapitole nejprve odvodíme rovnici a poté ukážeme výpočet na několika příkladech.

## 2 Matematický aparát

V této kapitole zavedeme nezbytný matematický aparát, který bude využit v následujících kapitolách. Zdrojem přehledu byly učební texty [1] a [7].

### 2.1 Diferenciální rovnice

Budeme se zabývat především rovnicemi typu

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = g(x), \quad x \in \langle 0, l \rangle, \quad (2.1)$$

kde  $a, b, c$  jsou *koefficienty* rovnice (2.1),  $g$  *pravá strana* rovnice (2.1); jsou to dané funkce definované na intervalu  $\langle 0, l \rangle$ ,  $l > 0$ , zatímco  $y = y(x)$  je funkce hledaná<sup>1</sup> (případné další podmínky na  $a, b, c, g$  budou uvedeny později). Pak je rovnice (2.1) *lineární diferenciální rovnicí druhého řádu*. Pokud  $g(x) \equiv 0$ , nazývá se tato rovnice *homogenní diferenciální rovnicí*.

Obecněji hovoříme o *lineárních diferenciálních rovnicích  $n$ -tého řádu* ( $n > 1$ ), tj. o rovnicích tvaru (2.1), kde levá strana je tvaru

$$a_n(x)y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y.$$

V následujících kapitolách ale budeme uvažovat především diferenciální rovnice druhého řádu.

### 2.2 Pojem řešení diferenciální rovnice

Řešením diferenciální rovnice (2.1) budeme rozumět funkci  $y = y(x)$  definovanou na intervalu  $\langle 0, l \rangle$ , která je na tomto intervalu spojitá, má na něm spojitou první i druhou derivaci (v krajním bodě 0, resp.  $l$  jde pochopitelně o derivaci zprava, resp. zleva) a vyhovuje identitě

$$a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = g(x)$$

pro všechna  $x \in \langle 0, l \rangle$ .

### 2.3 Okrajová úloha

Okrajovou úlohu lze definovat pro obecnou diferenciální rovnici alespoň druhého řádu, zůstaňme však u rovnice typu (2.1).

*Okrajovou úlohou* pro lineární diferenciální rovnici (2.1) nazýváme úlohu najít řešení  $y = y(x)$  této rovnice, které navíc splňuje tzv. *okrajové podmínky*

$$\alpha y(0) + \beta y'(0) = y_0, \quad (2.2)$$

$$\gamma y(l) + \delta y'(l) = y_l,$$

---

<sup>1</sup>Pro hledanou funkci a její argument budeme užívat i jiné označení, např.  $u = u(x)$ ,  $\varphi = \varphi(t)$ .

kde  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, y_0, y_l$  jsou daná čísla, pro něž platí

$$|\alpha| + |\beta| \neq 0, \quad |\gamma| + |\delta| \neq 0.$$

Předepisujeme tedy navíc podmínky pro hodnotu řešení  $y$  a jeho derivace  $y'$  v krajních bodech intervalu  $\langle 0, l \rangle$  – odtud také název úlohy. Tyto podmínky nám slouží například při popisu průhybu nosníku (je zde třeba charakterizovat jeho uložení v krajních bodech).

## 2.4 Typy okrajových podmínek

Speciálními případy okrajových podmínek (2.2) jsou

- *Dirichletovy podmínky* (podmínky 1. druhu)

$$y(0) = y_0, \quad y(l) = y_l,$$

kteří dostaneme, volíme-li v (2.2)  $\alpha = \gamma = 1, \beta = \delta = 0$ .

- *Neumannovy podmínky* (podmínky 2. druhu)

$$y'(0) = y_0, \quad y'(l) = y_l,$$

jež dostaneme, zvolíme-li v (2.2)  $\alpha = \gamma = 0, \beta = \delta = 1$ .

- *Newtonovy podmínky* jsou obecné podmínky (2.2), které dostaneme, zvolíme-li za  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  libovolná čísla různá od nuly.

Uvedené okrajové podmínky lze pochopitelně kombinovat. Těmto úlohám někdy říkáme též *smíšené úlohy*.

V kontextu dále řešených problémů (zejména průhyb prutu) lze některým okrajovým podmínkám přisoudit tuto interpretaci: ( $y(x)$  představuje průhyb tyče v místě  $x$ , význam symbolů  $E, J_z$  viz str. 14)

$y(0), y(l)$	průhyb na koncích tyče,
$y'(0), y'(l)$	natočení na koncích tyče,
$-EJ_z y''(0), -EJ_z y''(l)$	moment na koncích tyče,
$-EJ_z y'''(0), -EJ_z y'''(l)$	síla na koncích tyče.

## 2.5 Problém existence a jednoznačnosti řešení

Z hlediska matematické teorie je zásadní rozdíl mezi počátečními a okrajovými podmínkami pro obyčejné diferenciální rovnice. Otázka existence a jednoznačnosti je zaručena (za předpokladu spojitosti  $a, b, c, g$  a nenulovosti  $a$  na daném intervalu) tzv. Picardovou větou (viz [1]). Její analogie pro okrajové úlohy však neplatí.

## 2.5 PROBLÉM EXISTENCE A JEDNOZNAČNOSTI ŘEŠENÍ

Otázka existence a jednoznačnosti řešení okrajových problémů má kladnou odpověď pouze ve velmi specifických případech, např. pokud v rovnici (2.1) zvolíme  $a > 0$ ,  $b = 0$  a  $c \leq 0$  na  $\langle 0, l \rangle$  a zároveň platí okrajové podmínky  $y(0) = y_0$ ,  $y(l) = y_l$ . Jednoznačnou řešitelnost daného okrajového problému neovlivní v daném případě volba  $y_0, y_l$ . Jinak vyjádřeno: je-li tento okrajový problém jednoznačně řešitelný s tzv. homogenními okrajovými podmínkami ( $y(0) = 0, y(l) = 0$ ), pak je jednoznačně řešitelný s libovolnými Dirichletovými okrajovými podmínkami.

V obecném případě je diskuze existence a jednoznačnosti řešení okrajových problémů zásadní otázkou, jak vyplývá i z dalšího textu.

### 3 Prut namáhaný na vzpěr

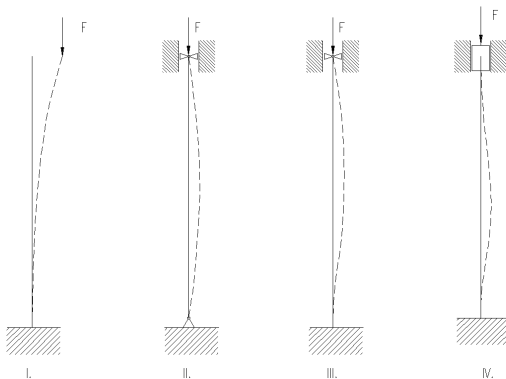
V této části se budeme zabývat prutem namáhaným na vzpěr. Pomocí diferenciálních rovnic odvodíme kritickou sílu pro různé typy uložení. Více podrobností k této problematice lze nalézt v [3], [5], [6], [9] a [11].

Stlačujeme-li přímý prut podélnou silou, která působí v ose prutu a délka prutu je oproti příčným rozměrům velká, zjišťujeme, že prut si zachovává svůj přímý tvar jen do té doby, pokud je síla  $F$  dostatečně malá.

Vychýlíme-li prut pomalu z přímočarého tvaru krátkodobou příčnou silou, zjišťujeme, že po odstranění krátkodobě působící příčné síly se prut opět vrátí do původního přímého tvaru. V takovém případě říkáme, že prut je ve stabilní rovnováze. Při postupném zvětšování podélné síly  $F$  se bude prut stále pomaleji vracet do původní polohy. Dosáhne-li síla  $F$  určité mezní hodnoty, potom se prut po nevelkém vybočení již nevrátí do původního přímého tvaru a zůstane ohnutý. Prut se ustálí v nové kvalitativně úplně odlišné rovnovážné poloze.

Tuto mezní hodnotu síly nazýváme kritickou silou  $F_{kr}$  nebo také Eulerovou vzpěrnou silou  $F_E$ . Kritické hodnoty dosahuje síla  $F$  náhle. Stačí jen velmi málo zmenšit tlakovou sílu vzhledem k její kritické hodnotě, aby prut znovu dosáhl stabilní rovnováhy. V opačném případě, převýší-li tlaková síla  $F$  kritickou hodnotu, potom průhyb prutu rychle roste, až dosáhne tzv. labilní polohy, což je vlastně porušení.

Můžeme tedy sílu  $F_{kr}$  považovat za hodnotu mezního stavu stability, tj. za kritickou hodnotu, kterou zatěžující síla  $F$  nesmí dosáhnout. Obecně můžeme říci, že úkazy nestability se vyskytují při každém druhu namáhání, kde se vyskytuje tlakové napětí. U prutů namáhaných tlakem závisí velikost kritické síly na způsobu upevnění konce prutu. Podle toho rozeznáváme čtyři základní druhy vzpěru.

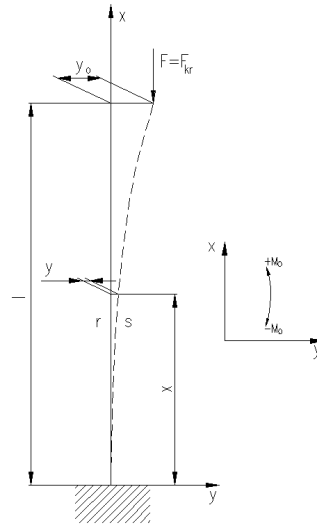


Obrázek 3.1: Čtyři základní druhy vzpěru

Před jejich uvedením zmíníme následující označení, které bude využíváno v celé kapitole

$M_o$	ohybový moment,
$E$	Youngův modul pružnosti,
$J_z$	moment setrvačnosti průřezu,
$F$	síla působící na prut.

### 3.1 Prut na jednom konci vetknutý



Obrázek 3.2: První případ vzpěru.

Předpokládejme, že přímý prizmatický prut zanedbatelné tíhy, vetknutý na jednom konci, je zatížen podélnou silou  $F = F_{kr}$ . Libovolný průřez prutu (obvykle označený  $r - s$ ), jež má souřadnice  $[x, y]$ , je přitom namáhán tlakem a ohybem. Protože napětí příslušející tlaku mají jen malý vliv na deformaci, nebudeme je při výpočtu uvažovat.

Předpokládáme-li malé průhyby, můžeme k řešení použít diferenciální rovnice přibližné průhybové čáry prutu. Pro zvolený souřadnicový systém a smysl kladného ohybového momentu podle obr. 3.2 bude diferenciální rovnice průhybové čáry

$$y'' = -\frac{M_o}{EJ_z}. \quad (3.1)$$

Ohybový moment síly  $F$  k řezu  $r - s$  je

$$M_o = -F(y_0 - y).$$

Po dosazení do (3.1) dostaneme

$$y'' + k^2 y = k^2 y_0,$$

kde

$$k^2 = \frac{F}{EJ_z}.$$

Pro řešení této diferenciální rovnice platí

$$y = A \sin kx + B \cos kx + y_0, \quad (3.2)$$

$$y' = Ak \cos kx - Bk \sin kx,$$

kde  $A$  a  $B$  jsou integrační konstanty, které určíme z okrajových podmínek. Jak je z obr. 3.2 vidět, pro vyšetřovaný případ platí okrajové podmínky:

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$



### 3.2 PRUT NA OBOU KONCÍCH KLOUBOVĚ ULOŽENÝ

První podmínka nám říká, že průhyb prutu na začátku je nulový. Z druhé podmínky plyne, že natočení na začátku prutu je nulové. Po dosazení okrajových podmínek do rovnice (3.2) obdržíme

$$0 = B + y_0, \quad 0 = Ak,$$

tedy

$$A = 0, \quad B = -y_0.$$

Rovnice (3.2) potom nabude tvaru

$$y = y_0(1 - \cos kx).$$

Zároveň musí platit, že na konci prutu je průhyb roven  $y_0$ , tj.

$$y_0 = y_0(1 - \cos kl).$$

Tato rovnice je při  $y_0 \neq 0$  splněna pouze tehdy, když

$$\cos kl = 0$$

nebo-li

$$kl = (2n + 1)\frac{\pi}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Dosadíme-li za  $k = \sqrt{\frac{F}{EJ_z}}$  dostaneme po úpravě

$$F = \frac{\pi^2 EJ_z}{4l^2} (2n + 1)^2. \quad (3.3)$$

Z praktického hlediska nás zajímá nejmenší hodnota tlakové síly  $F$ , která může udržet prohnutý prut v rovnováze. Získáme ji z rovnice (3.3), jestliže položíme  $n = 0$ . Kritická (Eulerova) síla je pak dána vztahem

$$F_{kr} = \frac{\pi^2 EJ_z}{(2l)^2}.$$

## 3.2 Prut na obou koncích kloubově uložený

V tomto případě zatížíme prut podélnou tlakovou silou  $F = F_{kr}$  a mírně jej prohne. Zanedbáme-li účinek tlaku a zvolíme-li souřadnicový systém a kladný ohybový moment podle obr. 3.3, je diferenciální rovnice průhybové čáry tvaru (3.1). Ohybový moment síly  $F$  k řezu  $r - s$  je

$$M_o = Fy.$$

Po dosazení do (3.1) dostaneme

$$y'' + k^2 y = 0, \quad (3.4)$$

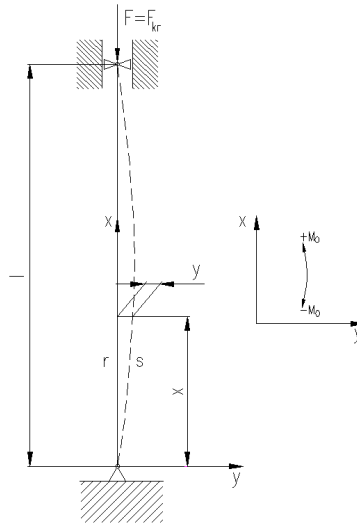
kde

$$k^2 = \frac{F}{EJ_z}. \quad (3.5)$$

Řešení diferenciální rovnice (3.4) je

$$y = A \sin kx + B \cos kx,$$

### 3.3 PRUT NA JEDNOM KONCI VETKNUTÝ A NA DRUHÉM KLOUBOVĚ ULOŽENÝ



Obrázek 3.3: Druhý případ vzpěru.

kde  $A$  a  $B$  jsou integrační konstanty, které určíme z okrajových podmínek. Jak je z obr. 3.3 vidět, jsou pro vyšetřovaný případ uvažovány okrajové podmínky

$$y(0) = 0, \quad y(l) = 0,$$

jež říkají, že na začátku i na konci je průhyb prutu nulový.

Z první podmínky plyne, že

$$B = 0.$$

Průhybová čára je zde sinusovka a je dána rovnicí

$$y = A \sin kx. \quad (3.6)$$

Použijeme-li druhou okrajovou podmínku, dostaneme

$$0 = A \sin kl. \quad (3.7)$$

Jak je vidět z rovnice (3.6), má-li nastat průhyb prutu, musí být  $A \neq 0$ . Rovnice (3.7) může být splněna jen tehdy, pokud

$$\sin kl = 0,$$

tedy

$$kl = n\pi, \quad n = 1, 2, \dots$$

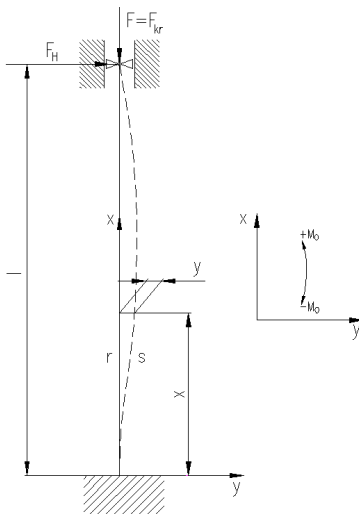
Po umocnění a dosazení do rovnice (3.5) dostaneme

$$F = \frac{\pi^2 EJ_z}{l^2} n^2. \quad (3.8)$$

Z praktického hlediska nás opět bude zajímat hodnota nejmenší tlakové síly  $F$  (kritické síly). Získáme ji z rovnice (3.8), jestliže položíme  $n = 1$ , tedy

$$F_{kr} = \frac{\pi^2 EJ_z}{l^2}.$$

### 3.3 PRUT NA JEDNOM KONCI VETKNUTÝ A NA DRUHÉM KLOUBOVĚ ULOŽENÝ



Obrázek 3.4: Třetí případ vzpěru.

### 3.3 Prut na jednom konci vetknutý a na druhém kloubově uložený

Je-li jedna část prutu vetknutá a druhá opřená v posuvně vedeném kloubu ve směru podélné síly  $F$  obr. 3.4, potom tento případ uložení označujeme jako třetí případ vzpěrné pevnosti. K řešení tohoto problému je výhodné zavést reakci kloubové vazby - příčnou sílu  $F_H$ , viz obr. 3.4.

Diferenciální rovnice průhybové čáry pro zvolený souřadnicový systém a kladný ohybový moment má tvar (3.1). Ohybový moment síly  $F$  k řezu  $r - s$  je

$$M_o = Fy - F_H(l - x).$$

Po dosazení do rovnice (3.1) dostaneme po úpravě

$$y'' + k^2 y = \frac{F_H}{EJ_z}(l - x), \quad (3.9)$$

kde

$$k^2 = \frac{F}{EJ_z}.$$

Rovnice (3.9) je lineární diferenciální rovnice druhého řádu s pravou stranou ve tvaru polynomu prvního stupně. Metodou neurčitých koeficientů určíme její řešení jako

$$y = A \sin kx + B \cos kx + \frac{F_H}{F}(l - x), \quad (3.10)$$

$$y' = Ak \cos kx - Bk \sin kx - \frac{F_H}{F}.$$

K určení třech neznámých, tj. dvou integračních konstant  $A, B$  a neznámé síly  $F_H$ , sestavíme tři okrajové podmínky

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y(l) = 0.$$

### 3.4 PRUT NA OBOU KONCÍCH VETKNUTÝ

Podmínka první a třetí říká, že průhyb na začátku a na konci prutu je nulový, druhá podmínka určuje natočení na začátku, které je také nulové. Po dosazení těchto okrajových podmínek do rovnic (3.10) dostáváme

$$0 = B + \frac{F_H}{F}l, \quad 0 = Ak - \frac{F_H}{F}, \quad 0 = A \sin kl + B \cos kl.$$

Z první a druhé podmínky získáme

$$B = -\frac{F_H}{F}l, \quad A = \frac{F_H}{Fk}$$

a ze třetí podmínky po dosazení za  $A$  a  $B$  pak

$$\frac{F_H}{F} \left( \frac{1}{k} \sin kl - l \cos kl \right) = 0. \quad (3.11)$$

Má-li rovnice (3.10) v libovolném místě daném souřadnicí  $x$  nenulové  $y$ , musí být splněna podmínka  $F_H \neq 0$ . Rovnice (3.11) bude tedy splněna jen tehdy, jestliže

$$\frac{1}{k} \sin kl = l \cos kl,$$

nebo-li

$$\tan kl = kl. \quad (3.12)$$

Rovnice (3.12) má nekonečně mnoho řešení. Nejmenší kladný kořen je

$$kl \cong 4,493.$$

Odtud po umocnění a dosazení za  $k^2$  obdržíme

$$F_{kr} = \frac{20,19EJ_z}{l^2} \cong \frac{2\pi^2EJ_z}{l^2} = \frac{\pi^2EJ_z}{\left(\frac{l}{\sqrt{2}}\right)^2}.$$

## 3.4 Prut na obou koncích vetknutý

Jsou-li obě části prutu vetknuté, jedná se o čtvrtý případ vzpěrné pevnosti. Vzhledem k charakteru uložení je podobně jako v předchozím případě výhodné zavést v jedné z vazeb moment  $M$  (viz obr. 3.5). Pak pro zvolený souřadnicový systém a kladný moment nabývá diferenciální rovnice průhybové čáry (3.1). Ohybový moment síly  $F$  k řezu  $r - s$  je

$$M_o = Fy - M.$$

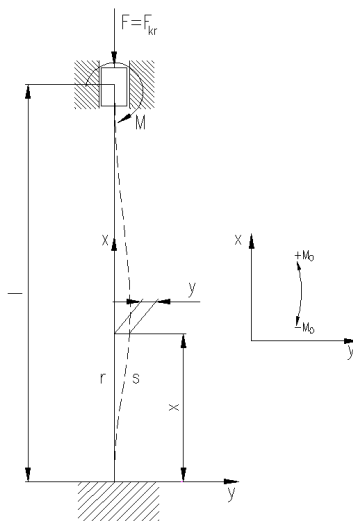
Po dosazení do rovnice (3.1) dostaneme po úpravě

$$y'' + k^2y = \frac{M}{EJ_z},$$

kde

$$k^2 = \frac{F}{EJ_z}.$$

### 3.4 PRUT NA OBOU KONCÍCH VETKNUTÝ



Obrázek 3.5: Čtvrtý případ vzpěru.

Pro řešení této diferenciální rovnice tedy platí

$$y = A \sin kx + B \cos kx + \frac{M}{F}, \quad (3.13)$$

$$y' = Ak \cos kx - Bk \sin kx.$$

K určení třech neznámých, tj. dvou integračních konstant  $A, B$  a neznámého momentu  $M$ , sestavíme tři okrajové podmínky

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y(l) = 0.$$

Podmínka první a třetí říká, že průhyb na začátku a na konci prutu je nulový, druhá podmínka určuje natočení na začátku prutu, které je také nulové. Po dosazení těchto podmínek do rovnic (3.13) dostaneme

$$0 = B + \frac{M}{F}, \quad 0 = Ak, \quad 0 = A \sin kl + B \cos kl + \frac{M}{F},$$

tedy

$$A = 0, \quad B = -\frac{M}{F}.$$

Po jejich dosazení do třetí rovnice dostaneme

$$\frac{M}{F}(1 - \cos kl) = 0. \quad (3.14)$$

Má-li být  $y$  z rovnice (3.13) v libovolném místě daném souřadnicí  $x$  nenulové, musí být  $M \neq 0$ . Za této podmínky bude řešení rovnice (3.14)

$$\cos kl = 1,$$

odtud získáme vztah

$$kl = 2\pi n, \quad n = 1, 2, \dots$$

### 3.4 PRUT NA OBOU KONCÍCH VETKNUTÝ

Po umocnění a dosazení za  $k^2$  obdržíme

$$F = \frac{4\pi^2 EJ_z}{l^2} n^2 = \frac{\pi^2 EJ_z}{\left(\frac{l}{2}\right)^2} n^2. \quad (3.15)$$

Z praktického hlediska nás zajímá nejmenší hodnota tlakové síly  $F$  různá od nuly, která může udržet prut v rovnováze. Tuto hodnotu získáme z rovnice (3.15) dosadíme-li  $n = 1$ . Tedy

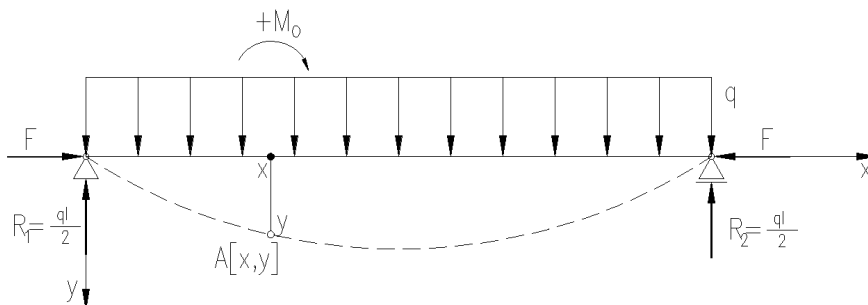
$$F_{kr} = \frac{\pi^2 EJ_z}{\left(\frac{l}{2}\right)^2}.$$

# 4 Prut namáhaný na ohyb

V této kapitole ukážeme výpočet průhybu prutu namáhaného na ohyb, tedy prutu příčně zatíženého nebo prutu na pružném (Winklerově) podkladě, kde navíc působí síla od podloží. Více podrobností lze nalézt v [2], [4], [7], [8], [10], [11] a [12].

## 4.1 Prut příčně i podélně zatížený

Jedná se o prut prostě uložený, namáhaný na vzpěr podélnou silou  $F$  a příčně zatížený rovnoměrným liniovým zatížením  $q$ , což je speciální případ prutu na obou koncích kloubově uloženého. Liší se pouze tím, že po celé délce působí liniové zatížení. Toto zatížení bychom mohli aplikovat na každý ze čtyř předchozích případů. Z důvodu jednoduchosti provedeme výpočet na prutu kloubově uloženém na obou koncích.



Obrázek 4.1: Prut příčně zatížený.

Budeme hledat průhyb vodorovného homogenního prostě uloženého prutu délky  $l$  s konstantním průřezem, namáhaného na vzpěr podélnou silou  $F$  a příčně zatíženého rovnoměrným zatížením  $q$ . Viz obr. 4.1, kde jsou rovněž vyznačeny reakce podpory  $R_1$ ,  $R_2$ . Pak při zvolené orientaci os platí pro průhyb  $y(x)$  v bodě  $A[x, y]$  rovnice (3.1), kde  $M_o$  je velikost momentu, kterým působí na bod  $A$  všechny síly (včetně reakce  $R_1$ ) zleva, přičemž  $M_o$  bereme kladně, točí-li tento moment ve smyslu vyznačeném na obrázku šipkou. V našem případě je celkový moment součtem tří momentů, a to od reakce  $R_1$ , od podélné síly  $F$  a od části příčného zatížení na intervalu  $\langle 0, x \rangle$  (příslušnou sílu zde můžeme uvažovat jako sílu o velikosti  $qx$ , soustředěnou v těžišti o souřadnici  $x/2$ ). Tedy

$$M_o = \frac{ql}{2}x + Fy - qx\frac{x}{2}.$$

Rovnice (3.1) tak dostane tvar

$$y'' = -\frac{Fy}{EJ_z} + \frac{q}{2EJ_z}x^2 - \frac{ql}{2EJ_z}x. \quad (4.1)$$

Označíme-li

$$\frac{F}{EJ_z} = a^2 \quad (a > 0), \quad \frac{q}{2EJ_z} = b, \quad -\frac{ql}{2EJ_z} = c, \quad (4.2)$$

bude

$$y'' + a^2 y = bx^2 + cx. \quad (4.3)$$

To je diferenciální rovnice pro hledaný průhyb prutu. K této rovnici přistupují okrajové podmínky

$$y(0) = 0, \quad y(l) = 0, \quad (4.4)$$

neboť v koncových bodech prutu je průhyb nulový.<sup>2</sup>

Řešme tedy problém (4.3), (4.4). Homogenní řešení  $y_h$  příslušné rovnice je

$$y_h = A \sin ax + B \cos ax.$$

Partikulární řešení  $y_p$  rovnice (4.3) určíme metodou neurčitých koeficientů.

$$y_p = \frac{b}{a^2} x^2 + \frac{c}{a^2} x - \frac{2b}{a^4}.$$

Obecné řešení rovnice (4.3) tedy je

$$y = \frac{b}{a^2} x^2 + \frac{c}{a^2} x - \frac{2b}{a^4} + A \sin ax + B \cos ax.$$

Z první okrajové podmínky (4.4) plyne

$$0 = \frac{b}{a^2} \cdot 0 + \frac{c}{a^2} \cdot 0 - \frac{2b}{a^4} + A \cdot 0 + B \cdot 1,$$

odkud  $B = 2b/a^4$ , takže

$$y = \frac{b}{a^2} x^2 + \frac{c}{a^2} x + \frac{2b}{a^4} (\cos ax - 1) + A \sin ax.$$

Druhá z podmínek (4.4) dává

$$0 = \frac{b}{a^2} l^2 + \frac{c}{a^2} l + \frac{2b}{a^4} (\cos al - 1) + A \sin al = \frac{2b}{a^4} (\cos al - 1) + A \sin al \quad (4.5)$$

neboť

$$\frac{b}{a^2} l^2 + \frac{c}{a^2} l = 0$$

v důsledku posledních dvou vztahů v (4.2). Je-li

$$\sin al \neq 0,$$

pak z (4.5) plyne

$$A = \frac{2b}{a^4} \cdot \frac{1 - \cos al}{\sin al},$$

---

<sup>2</sup>V obecném případě je třeba při vyšetřování průhybu prutu uvažovat diferenciální rovnici čtvrtého řádu (která vznikne v podstatě dvojnásobným derivováním rovnice (3.1)), aby bylo možno dostatečným počtem okrajových podmínek zachytit uložení prutu. Zde však z rovnice (4.1) a z podmínek (4.4) plyne přímo  $y''(0) = 0, y''(l) = 0$ , což jsou podmínky charakterizující nulové momenty při prostém uložení. Stačí tedy uvažovat rovnici druhého řádu.



takže konečně

$$y = \frac{b}{a^2}x^2 + \frac{c}{a^2}x + \frac{2b}{a^4}(\cos ax - 1) + \frac{2b}{a^4} \cdot \frac{1 - \cos al}{\sin al} \sin ax.$$

To je hledaný průhyb uvažovaného prutu.

Pro

$$al = \pi \tag{4.6}$$

nemá uvažovaný problém řešení. Pak je totiž  $\sin al = 0$ ,  $\cos al = -1$  a rovnice (4.5) dostane tvar

$$0 = -\frac{4b}{a^4} + A \cdot 0,$$

což nelze splnit (neboť  $b \neq 0$  podle (4.2)) pro žádné  $A$ . Druhou z okrajových podmínek (4.4) tedy nelze splnit, takže problém (4.3), (4.4) skutečně není v případě (4.6) řešitelný.

Z rovnice (4.6) plyne

$$a^2 = \frac{\pi^2}{l^2}$$

a podle prvního ze vztahů (4.2)

$$F_{kr} = \frac{EJ_z\pi^2}{l^2}. \tag{4.7}$$

**Poznámka:** Uvažujme vztah mezi problémem (4.3),(4.4) a problémem odpovídajícím nulovému příčnému zatížení.

Všimněme si (viz rovnice (4.7)), že kritická síla nezávisí na tom, jak je prut příčně zatížen (abychom z rovnice (4.5) mohli vypočítat  $A$ , je rozhodující, zda se  $\sin al \neq 0$ , nebo  $\sin al = 0$ ). Uvažujme případ, kdy příčné zatížení prutu je nulové, tj. uvažujme problém

$$y'' + a^2y = 0, \tag{4.8}$$

$$y(0) = 0, \quad y(l) = 0. \tag{4.9}$$

Není zde důvod, proč by se prut měl prohnut. Ale i zde hraje kritická síla svou úlohu: Obecné řešení rovnice (4.8) je

$$y = A \sin ax + B \cos ax.$$

Z první podmínky (4.9) plyne  $B = 0$ , takže

$$y = A \sin ax.$$

Druhá z podmínek (4.9) dává

$$0 = A \sin al. \tag{4.10}$$

Je-li  $0 < F < F_{kr}$ , je  $0 < al < \pi$ . Tedy  $\sin al > 0$  a z rovnice (4.10) plyne  $A = 0$ . Dostáváme tak jediné řešení

$$y \equiv 0.$$

Je-li  $F = F_{kr}$ , je  $al = \pi$ ,  $\sin al = 0$  a  $A$  v rovnici (4.10) je libovolné. Problém (4.8), (4.9) má v tomto případě nekonečně mnoho řešení,

$$y = A \sin ax, \quad A \text{ libovolné.} \tag{4.11}$$

## 4.2 PRUT NA PRUŽNÉM (WINKLEROVĚ) PODKLADĚ

Je-li  $F = F_{kr}$ , je v případě *nenulového* rovnoměrně příčného zatížení průhyb „nekonečný“, v případě *nulového* příčného zatížení je „neurčitý“, prut je „nestabilní“. V tomto druhém případě jde po technické stránce zejména o kritické zatížení prutů, které mají úlohu tzv. nosných sloupů. Prut je zde ve vertikální poloze, podélné síly jsou rovněž vertikální (prut „nese“ konstrukci), příčné zatížení je rovné nule. Je-li tíha konstrukce taková, že podélná síla nabude kritické hodnoty, může průhyb prutu zůstat nulový (podle (4.11) pro  $A = 0$ ); stačí však nepatrné příčné zatížení (například závan větru), čímž nastane situace vedoucí k „nekonečnému“ průhybu, a nosný sloup se zřítí.

Všimněme si ještě, že obtíže s řešitelností problému (4.3), (4.4) nastanou jen tehdy, když  $a^2$  je takové, že problém (4.8), (4.9) má i jiná řešení než jen řešení nulové. Vztah mezi problémy typu (4.3), (4.4) a příslušnými homogenními problémy (4.8), (4.9) je zajímavý jak z technického, tak z matematického hlediska a vede přirozeným způsobem ke studiu tzv. problému vlastních čísel (viz např. [12]).

### 4.2 Prut na pružném (Winklerově) podkladě

Tato podkapitola se týká prutů libovolného uložení. Odvodíme vzorec, kde na prut působí zatížení po celé délce a síla působící od podloží. Podle typu uložení doplníme okrajové podmínky. Jelikož se jedná o prut namáhaný pouze na ohyb (a ne na vzpěr), nelze pomocí diferenciálních rovnic vypočítat kritickou sílu, ale pouze určit průhybovou čáru. Výpočet kritické síly je v tomto případě problém pružnosti a pevnosti.

Uvažujme pružný prut délky  $l$  umístěný tak, že jeho střednice je totožná s osou  $x$ . Předpokládejme, že platí Hookův zákon pro deformaci v ohybu

$$M_o = EJ_z c, \quad (4.12)$$

kde  $c$  je (malá) *deformace v ohybu*. Deformaci v tahu ve směru  $x$  a ve zkrutu neuvažujeme.<sup>3</sup> Označíme-li  $y$  *průhybovou čáru* prutu, potom její křivost je rovna deformaci v ohybu, tj.

$$\frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{3/2}} = c.$$

Pro malé průhyby zanedbáváme člen  $y'^2$  (klademe  $c = |y''|$ ) a dostáváme z rovnice (4.12) *diferenciální rovnici průhybové čáry*

$$-EJ_z y'' = M_o, \quad (4.13)$$

(vycházíme ze situace znázorněné na obr. 4.2; při zvolené orientaci osy  $y$  je  $y'' < 0$ , a proto je  $|y''| = -y''$ ).

V některých jednoduchých případech určíme snadno funkci  $M_o$ . Potom k určení průhybové čáry stačí řešit rovnici (4.13). Pokud však zanedbáváme namáhání prutu ve smyku, musíme brát v úvahu tzv. *Schwedlerovu větu*, podle níž

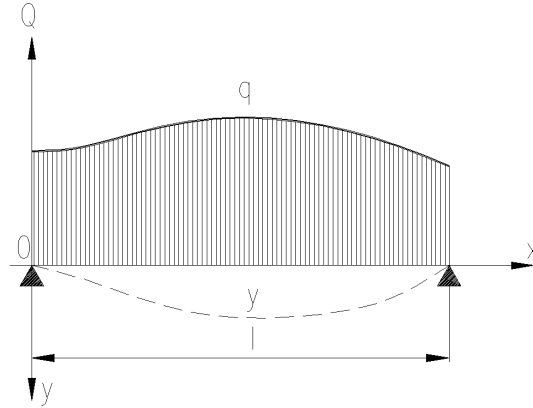
$$M_o'' = -q,$$

kde  $q$  vyjadřuje příčné zatížení (sílu) působící na prut, viz obr. 4.2. Potom dostáváme pro průhybovou čáru diferenciální rovnici čtvrtého řádu

$$(EJ_z y'')'' = q.$$

<sup>3</sup>Předpokládáme, že příčné řezy prutu zachovávají rovinný charakter při deformaci (stlačení, ohyb).

## 4.2 PRUT NA PRUŽNÉM (WINKLEROVĚ) PODKLADĚ



Obrázek 4.2: Prut zatížený příčnou silou  $q$ .

Je-li prut uložen na nějakém podloží, působí proti zatížení  $q$  síla  $Qy$ , kde  $Q$  je tzv. *koefficient poddajnosti podloží*. Rovnice průhybové čáry pak bude mít tvar

$$(EJ_z y'')'' + Qy = q. \quad (4.14)$$

K jednoznačnému určení průhybové čáry musíme rovnici (4.14) doplnit okrajovými podmínkami charakterizujícími způsob uchycení prutu na krajích. Uvedme tři základní typy:

**Prostě podepřený prut** (prut na dvou podporách) charakterizujeme podmínkami

$$y(0) = 0, \quad y(l) = 0. \quad (4.15)$$

Tyto podmínky postačují, popisujeme-li průhyb rovnicí (4.13). Vycházíme-li z rovnice (4.14), která je *čtvrtého řádu*, musíme v případě prostě podepřeného prutu podmínky (4.15) doplnit ještě podmínkami

$$y''(0) = 0, \quad y''(l) = 0,$$

které udávají nulové ohybové momenty na koncích prutu.

**Prut vetknutý** na konci  $x = 0$  pak charakterizujeme podmínkami

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

Podmínky *volného konce*  $x = l$  mají tvar

$$y''(l) = 0, \quad y'''(l) = 0. \quad (4.16)$$

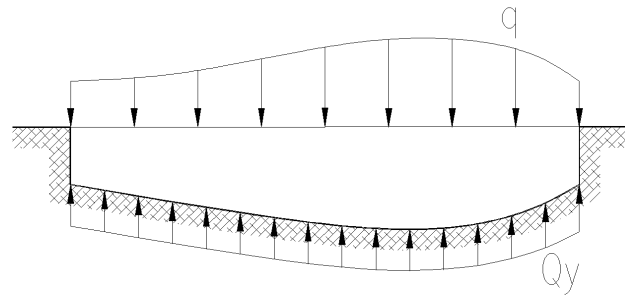
První podmínka v (4.16) vyjadřuje nulovost ohybového momentu a druhá reprezentuje nulovost smykové síly na volném konci.

**Prut oboustranně vetknutý** charakterizujeme podmínkami

$$\begin{aligned} y(0) &= 0, & y(l) &= 0, \\ y'(0) &= 0, & y'(l) &= 0. \end{aligned}$$

■ **Příklad 1.** Vyšetřovaný prut spočívá po celé své délce i šířce na pružném podkladě; vlivem vnějšího zatížení se prut přetvořuje a je zatlačován do podkladu obr. 4.3. Přitom

## 4.2 PRUT NA PRUŽNÉM (WINKLEROVĚ) PODKLADĚ



Obrázek 4.3: Prut na pružném podkladě.

působí mezi prutem a podloží síla, jejíž poměrnou velikost označíme  $p$ . Ta je - podle Winklerova předpokladu - v každém průřezu úměrná zatlačení  $y$ , tedy

$$p = Qy, \quad Q = uH. \quad (4.17)$$

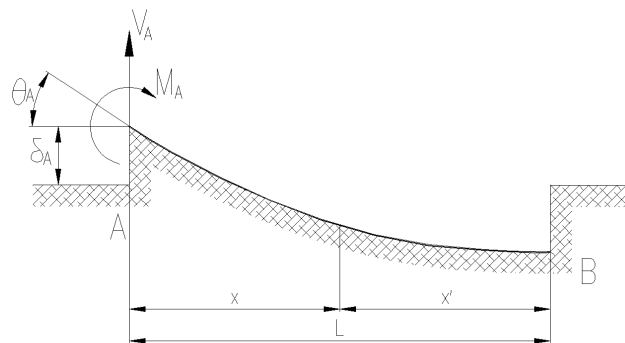
Ve výraze (4.17) je  $u$  šířka prutu, v níž dosedá na pružný podklad,  $H$  je tzv. modul stlačitelnosti pružného podkladu.

Ze součtové podmínky rovnováhy sil, působících na element, s použitím Schwedlerovy věty a diferenciální rovnice průhybové čáry obdržíme diferenciální rovnici průhybové čáry uvažovaného případu

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( EJ_z \frac{d^2 y}{dx^2} \right) + Qy = q.$$

Je-li prut konstantního průřezu, nabývá rovnice tvaru

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + \frac{Q}{EJ_z} y = \frac{q}{EJ_z}. \quad (4.18)$$



Obrázek 4.4: Prut na pružném podkladě - konkrétní případ.

Pro konkrétní případ (viz obr. 4.4) rovnice (4.18) přejde do následujícího tvaru

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + 4\beta^4 y = 0, \quad (4.19)$$

kde

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{Q}{4EJ_z}}.$$

## 4.2 PRUT NA PRUŽNÉM (WINKLEROVĚ) PODKLADĚ

Charakteristická rovnice odpovídající (4.19) je

$$\lambda^4 + 4\beta^4 = 0,$$

kteřá má čtyři kořeny

$$\lambda_{1,2,3,4} = \pm\beta(1 \pm i).$$

Tedy řešení je

$$y = e^{\beta x}(A \cos \beta x + B \sin \beta x) + e^{-\beta x}(C \cos \beta x + D \sin \beta x). \quad (4.20)$$

Z podmínek

$$\begin{aligned} y(0) &= \delta_A & y'(0) &= \theta_A \\ -EJ_z y''(0) &= M_A & -EJ_z y'''(0) &= V_A \end{aligned}$$

( $\delta_A, \theta_A, M_A, V_A$  jsou daná reálná čísla) dostáváme čtyři rovnice pro výpočet konstant  $A, B, C$  a  $D$ :

$$\begin{aligned} \delta_A &= A + C & -\frac{M_A}{EJ_z} &= 2\beta^2(B - D) \\ \theta_A &= \beta(A + B + D - C) & -\frac{V_A}{EJ_z} &= 2\beta^3(-A + B + D + C). \end{aligned}$$

Řešením těchto rovnic obdržíme

$$\begin{aligned} A &= \frac{\delta_A}{2} + \frac{\theta_A}{4\beta} + \frac{V_A}{8\beta^3 EJ_z} & B &= \frac{\theta_A}{4\beta} - \frac{M_A}{4\beta^2 EJ_z} - \frac{V_A}{8\beta^3 EJ_z} \\ C &= \frac{\delta_A}{2} - \frac{\theta_A}{4\beta} - \frac{V_A}{8\beta^3 EJ_z} & D &= \frac{\theta_A}{4\beta} + \frac{M_A}{4\beta^2 EJ_z} - \frac{V_A}{8\beta^3 EJ_z}. \end{aligned}$$

Dosazením těchto hodnot do rovnice (4.20) a současně nahrazením  $e^{\beta x} = \cosh \beta x + \sinh \beta x$  a  $e^{-\beta x} = \cosh \beta x - \sinh \beta x$  získáváme rovnici průhybové čáry

$$y = \delta_A \psi_1(\beta x) + \frac{\theta_A}{\beta} \psi_2(\beta x) - \frac{M_A}{\beta^2 EJ_z} \psi_3(\beta x) - \frac{V_A}{\beta^3 EJ_z} \psi_4(\beta x),$$

kde

$$\begin{aligned} \psi_1(\beta x) &= \cosh \beta x \cos \beta x \\ \psi_2(\beta x) &= \frac{1}{2}(\sinh \beta x \cos \beta x + \cosh \beta x \sin \beta x) \\ \psi_3(\beta x) &= \frac{1}{2} \sinh \beta x \sin \beta x \\ \psi_4(\beta x) &= \frac{1}{4}(\cosh \beta x \sin \beta x - \sinh \beta x \cos \beta x). \end{aligned}$$

# 5 Teplotní pole v tenké tyči

Jinou významnou aplikací obyčejných diferenciálních rovnic s okrajovými podmínkami je popis teplotního pole v tenké tyči. Více podrobností k této problematice lze nalézt v [7].

## 5.1 Odvození rovnice

Uvažujeme tenkou tyč (drát) délky  $l$  proměnného průřezu z obr. 5.1, která je nějakým způsobem zahřívána. Chceme stanovit diferenciální rovnici popisující proces *vedení tepla* v této tyči. Označme  $y = y(x)$  teplotu v příčném řezu  $S(x)$ . Předpokládáme, že teplota  $y$  je v každém bodě řezu stejná a nezávisí na čase (jde o tzv. *stacionární rozložení teploty*). Podle experimentálního Fourierova zákona je *tepelný tok*, tj. množství tepla, které proteče řezem  $S(x)$  za jednotku času, dán výrazem

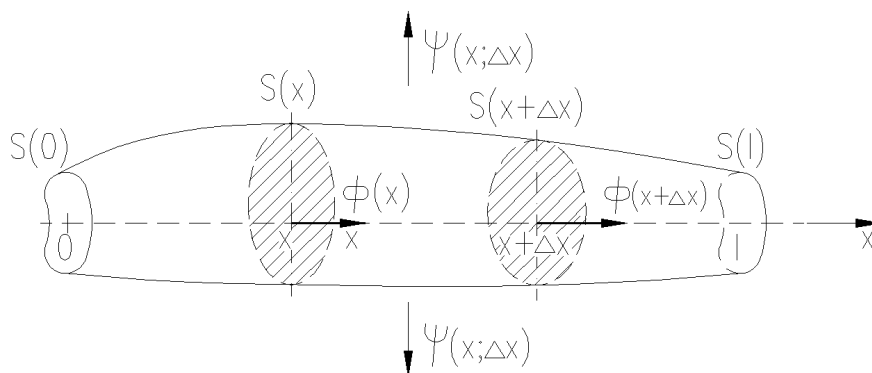
$$\phi(x) = -k(x)S(x)\frac{dy(x)}{dx}. \quad (5.1)$$

Koeficient úměrnosti  $k(x) > 0$  charakterizuje materiál tyče a nazývá se *koeficient tepelné vodivosti*. Znaménko minus vystihuje skutečnost, že teplo proudí ve směru klesající teploty.

Je-li  $\Omega(x)$  obvod řezu  $S(x)$ , potom pro malé  $\Delta x$  bude plášť úseku tyče mezi řezy  $S(x)$  a  $S(x + \Delta x)$  přibližně roven  $\Omega(x)\Delta x$ . Označíme-li  $\tau(x)$  teplotu vně pláště, potom opět z měření vyplývá, že množství tepla, které proteče pláštěm uvažovaného úseku tyče za jednotku času, je dáno výrazem

$$\psi(x, \Delta x) = \alpha(x)\Omega(x)\Delta x[y(x) - \tau(x)]. \quad (5.2)$$

Koeficient úměrnosti  $\alpha(x)$  charakterizuje výměnu tepla s okolním prostředím a nazývá se *koeficient přestupu tepla*.



Obrázek 5.1: Teplotní pole v tenké tyči.

## 5.2 FORMULACE DODATEČNÝCH PODMÍNEK

Označíme-li  $h(x)$  množství tepla vyprodukovaného tepelnými zdroji uvnitř tyče v jednotce délky za jednotku času, potom

$$h(x)\Delta x \tag{5.3}$$

je množství tepla vyprodukovaného zdrojem na délce  $\Delta x$ . Jestliže se například drát zahřívá proudem elektrického proudu  $J$ , potom podle Joulova zákona je

$$h(x) = R(x)J^2(x),$$

kde  $R(x)$  je odpor jednotky délky drátu.

Provedeme-li *bilanci tepla* (na základě zákona zachování tepla) v úseku tyče délky  $\Delta x$ , dostaneme vztah

$$\phi(x) + h(x)\Delta x = \phi(x + \Delta x) + \psi(x, \Delta x),$$

nebo-li po dosazení (5.1), (5.2), (5.3) a následné úpravě platí

$$\frac{k(x + \Delta x)S(x + \Delta x)\frac{dy(x + \Delta x)}{dx} - k(x)S(x)\frac{dy(x)}{dx}}{\Delta x} - \alpha(x)\Omega(x)[y(x) - \tau(x)] = -h(x).$$

Pro  $\Delta x \rightarrow 0$  (lokální bilance v bodě  $x$ ) dostáváme

$$\frac{d}{dx} \left( k(x)S(x)\frac{dy(x)}{dx} \right) - \alpha(x)\Omega(x)y(x) = -h(x) - \alpha(x)\Omega(x)\tau(x). \tag{5.4}$$

Tato rovnice se nazývá *rovnice vedení tepla* (v tenké tyči). Její řešení popisuje rozložení teploty  $y = y(x)$  v každém vnitřním bodě  $x$  tyče. Poznamenejme, že tyto úvahy vystihují fyzikální situaci tehdy, nebudou-li teploty příliš vysoké (jinak by zákony (5.1), (5.2) měly jiný tvar).

## 5.2 Formulace dodatečných podmínek

Rovnicí (5.4) není rozložení teploty určeno jednoznačně, k tomu musíme rovnici (5.4) doplnit ještě podmínkami charakterizujícími tepelný tok na koncích tyče, tj. pro  $x = 0$  a  $x = l$ . Uvažujme opět tyč z obr. 5.1 a předpokládejme pro větší názornost, že uvnitř tyče je teplota vyšší než v okolním prostředí. Podle (5.1) přiteče zevnitř k řezu  $S(l)$  (konec tyče) za jednotku času množství tepla dané (kladným) výrazem  $-k(l)S(l)y'(l)$ . Toto teplo se podle zákona zachování tepla musí rovnat teplu odvedenému, které je (jak vyplývá z experimentů) přímo úměrné ploše řezu a rozdílu teplot na jednotlivých stranách rozhraní, tedy veličině  $\alpha_l[y(l) - \tau_l]S(l)$ . Teplotu na vnitřní straně rozhraní představuje  $y(l)$ ,  $\tau_l$  je teplota na vnější straně. Koeficient úměrnosti  $\alpha_l$  charakterizuje kvantitativně právě popsáný fyzikální jev - přestup tepla - (viz též (5.2)) a je to materiálová konstanta. Bilance tepla v místě  $x = l$  tak dává vztah

$$-k(l)S(l)y'(l) = \alpha_l[y(l) - \tau_l]S(l). \tag{5.5}$$

Analogickou úvahou dojdeme k bilanci tepla v místě  $x = 0$ :

$$-k(0)S(0)y'(0) = -\alpha_0[y(0) - \tau_0]S(0). \tag{5.6}$$

### 5.3 Příklady teplotních polí

■ **Příklad 1.** Vyšetřujeme-li rozložení teploty způsobené průtokem elektrického proudu  $J$  vodivou tyčí délky  $l$ , která má konstantní odpor  $R$ , konstantní průřez  $S$ , konstantní obvod řezu  $\Omega$ , a jsou-li koeficienty  $k$ ,  $\alpha$  také konstantní, potom rovnice (5.4) má tvar

$$y'' - \omega^2 y = G(x), \quad x \in \langle 0, l \rangle,$$

kde

$$\omega^2 = \frac{\alpha \Omega}{kS}, \quad G(x) = \frac{-RJ^2 - \alpha \Omega \tau(x)}{kS}.$$

■ **Příklad 2.** Uvažujeme-li stejný problém jako v předchozím příkladě, avšak pro tyč, u níž se plocha a obvod řezu mění lineárně s délkou, tj.  $S(x) = \sigma x$ ,  $\Omega(x) = \kappa x$  ( $\sigma, \kappa$  jsou konstanty), můžeme rovnici (5.4) napsat ve tvaru

$$\frac{d}{dx} \left( x \frac{dy}{dx} \right) - v^2 xy = F(x), \quad x \in \langle 0, l \rangle, \quad (5.7)$$

kde

$$v^2 = \frac{\alpha \kappa}{k\sigma}, \quad F(x) = \frac{-RJ^2 - \alpha \kappa x \tau(x)}{k\sigma}.$$

Rovnice (5.7) je speciální případ tzv. *Besselovy rovnice*.

■ **Příklad 3.** Jestliže na některém konci tyče nenastává přestup tepla, tj. je-li  $\alpha_0 = 0$  nebo  $\alpha_l = 0$ , má příslušná okrajová podmínka z (5.5), (5.6) tvar

$$k(0)y'(0) = 0 \quad \text{nebo} \quad -k(l)y'(l) = 0.$$

V tomto případě říkáme, že příslušný konec je *tepelně izolován*.

Je-li koeficient tepelné vodivosti  $k$  malý ve srovnání s koeficientem přestupu tepla  $\alpha$  na některém konci tyče, nahrazujeme podmínky (5.5), (5.6) podmínkami

$$y(0) = \tau_0 \quad \text{nebo} \quad y(l) = \tau_l$$

(formálně klademe  $k(0) = 0$  nebo  $k(l) = 0$ ).



# 6 Matematické kyvadlo

Problém matematického kyvadla je obvykle problémem vedoucím na obyčejné diferenciální rovnice s počátečními podmínkami. Ukážeme však, že lze tento problém diskutovat i při zahrnutí okrajových podmínek. Více informací je možné nalézt v [7].

## 6.1 Odvození rovnice

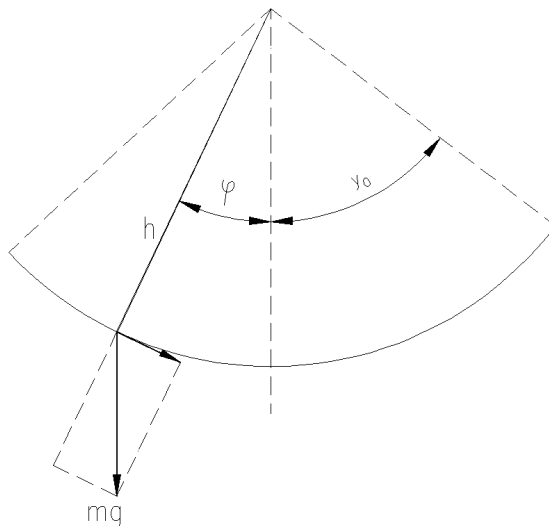
Matematické kyvadlo je hmotný bod (o hmotnosti  $m$ ), zavěšený na nehmotném vlákně (délky  $h$ ). Chceme najít závislost dráhy  $s$  hmotného bodu na čase  $t$ . Označme tedy  $\varphi = \varphi(t)$  okamžitou (úhlovou) výchylku kyvadla od svislé polohy obr. 6.1. Neuvažujeme-li odpor prostředí, potom z Newtonova zákona

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = -mg \sin \varphi, \quad s = h\varphi$$

(příčinou pohybu kyvadla je tíha  $mg$  hmotného bodu, přesněji její tečná složka  $mg \sin \varphi$ ) dostáváme diferenciální rovnici

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \omega^2 \sin \varphi = 0, \quad \omega^2 = g/h. \quad (6.1)$$

Proměnná  $t$  probíhá interval  $\langle 0, \infty \rangle$ .



Obrázek 6.1: Matematické kyvadlo.

Řešit nelineární diferenciální rovnici (6.1) není jednoduchý úkol. Proto provedeme zjednodušení běžné ve fyzice (tzv. *linearizaci*). Omezíme se na malé výchylky kyvadla, pak lze  $\sin \varphi$  nahradit (se zanedbatelnou chybou) hodnotou  $\varphi$  a rovnice pohybu kyvadla má tvar

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \omega^2 \varphi = 0, \quad t \in \langle 0, \infty \rangle, \quad (6.2)$$

což je *lineární homogenní diferenciální rovnice druhého řádu*.

## 6.2 Příklady rovnic kyvadla

Uvažujme rovnici matematického kyvadla (6.2), tentokrát však na intervalu  $\langle 0, 1 \rangle$ ; vyšetřujeme tedy pohyb kyvadla za časovou jednotku.

■ **Příklad 1.** Hledejme takové řešení rovnice (6.2), které splňuje okrajové podmínky

$$\varphi(0) = \varphi_0, \quad \varphi(1) = \varphi_1; \quad (6.3)$$

znamená to, že jsme předepsali výchylku kyvadla jak v čase  $t = 0$ , tak v čase  $t = 1$ .

Protože každé řešení rovnice  $\varphi'' + \omega^2\varphi = 0$  má tvar

$$\varphi(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t, \quad (6.4)$$

použijeme k určení neznámých konstant  $A, B$  podmínek (6.3). Dosazením z (6.3) do (6.4) dostáváme

$$\varphi(0) = B = \varphi_0, \quad \varphi(1) = A \sin \omega + B \cos \omega = \varphi_1, \quad (6.5)$$

což jsou dvě rovnice pro dvě neznámé  $A, B$ . Pak

$$B = \varphi_0, \quad A = \frac{\varphi_1 - \varphi_0 \cos \omega}{\sin \omega}$$

a řešení okrajové úlohy (6.2), (6.3) je tedy funkce

$$\varphi(t) = \frac{\varphi_1 - \varphi_0 \cos \omega}{\sin \omega} \sin \omega t + \varphi_0 \cos \omega t, \quad t \in \langle 0, 1 \rangle, \quad (6.6)$$

ovšem za jedné podmínky: že totiž  $\sin \omega \neq 0$ ; to znamená, že číslo  $\omega$  není rovno celistvému násobku čísla  $\pi$ .

Protože  $\omega = \sqrt{g/h}$  závisí na délce kyvadla, docházíme k zajímavému závěru: funkce  $\varphi(t)$  z (6.6) je řešením okrajové úlohy (6.3), (6.4) jen tehdy, nemá-li kyvadlo délku

$$h = \frac{g}{k^2\pi^2},$$

kde  $k$  je libovolné přirozené číslo. Pro kyvadla těchto délek nemá formule (6.6) smysl a je třeba znovu podrobit analýze soustavu (6.5). Protože je pak  $\omega = k\pi$ , je  $\sin \omega = 0$  a  $\cos \omega = (-1)^k$  a soustava (6.5) má tvar

$$B = \varphi_0, \quad B(-1)^k = \varphi_1. \quad (6.7)$$

Je tedy vidět, že číslo  $A$  může být libovolné a soustava (6.7) má řešení jen tehdy, jsou-li dané hodnoty  $\varphi_0, \varphi_1$  vázány podmínkou

$$\varphi_1 = (-1)^k \varphi_0. \quad (6.8)$$

Shrneme-li naše úvahy, můžeme říci: Pro kyvadla délky  $h = g/(k^2\pi^2)$  má okrajová úloha (6.2), (6.3) řešení jen tehdy, platí-li (6.8); řešením této okrajové úlohy je pak funkce

$$\varphi(t) = A \sin k\pi t + \varphi_0 \cos k\pi t, \quad t \in \langle 0, 1 \rangle,$$

kde  $A$  je libovolná konstanta.

■ **Příklad 2.** Hledejme nyní takové řešení  $\varphi = \varphi(t)$  rovnice (6.2), které splňuje okrajové podmínky

$$\varphi'(0) = \varphi_0, \quad \varphi(1) = \varphi_1; \quad (6.9)$$

znamená to, že jsme předepsali počáteční úhlovou rychlost pohybu kyvadla a výchylku v čase  $t = 1$ .

Okrajovou úlohu (6.2), (6.9) budeme řešit podobně jako v předchozím příkladě. Z (6.9) a z (6.4) dostáváme pro neznámé konstanty  $A, B$  dvě rovnice

$$A\omega = \varphi_0, \quad A \sin \omega + B \cos \omega = \varphi_1, \quad (6.10)$$

takže

$$A = \frac{\varphi_0}{\omega}, \quad B = \frac{\varphi_1 - \frac{\varphi_0}{\omega} \sin \omega}{\cos \omega}.$$

Řešením okrajové úlohy (6.2), (6.9) je pak funkce

$$\varphi(t) = \frac{\varphi_0}{\omega} \sin \omega t + \frac{\varphi_1 \omega - \varphi_0 \sin \omega}{\omega \cos \omega} \cos \omega t, \quad t \in \langle 0, 1 \rangle, \quad (6.11)$$

ovšem za předpokladu, že  $\cos \omega \neq 0$ , tj.  $\omega \neq (2k+1)\pi/2, k \in \mathbb{Z}^+$ . Má-li kyvadlo délku

$$h = \frac{4g}{(2k+1)^2 \pi^2},$$

kde  $k$  je libovolné celé číslo, nemá formule (6.11) smysl, neboť  $\cos(2k+1)\pi/2 = 0$ . Protože v tomto případě je  $\sin \omega = (-1)^k$ , má soustava (6.10) tvar

$$A(2k+1)\frac{\pi}{2} = \varphi_0, \quad A(-1)^k = \varphi_1$$

a má řešení  $A = 2\varphi_0/[(2k+1)\pi]$ ,  $B$  libovolné, ovšem jen tehdy, jsou-li hodnoty  $\varphi_0, \varphi_1$  vázány vztahem

$$(2k+1)\pi\varphi_1 = (-1)^k 2\varphi_0.$$

Řešení okrajové úlohy (6.2), (6.9) má pak tvar

$$\varphi(t) = \frac{2\varphi_0}{(2k+1)\pi} \sin(2k+1)\frac{\pi}{2}t + B \cos(2k+1)\frac{\pi}{2}t, \quad t \in \langle 0, 1 \rangle,$$

kde  $B$  je libovolná konstanta.

## 7 Závěr

Cílem této bakalářské práce bylo vytvořit text nevelkého rozsahu, který čtenáře obeznámí s aplikacemi diferenciálních rovnic s okrajovými podmínkami.

Převážná část této práce je věnována řešení stability prutů. Po úvodní první a druhé kapitole následuje kapitola třetí, ve které jsme se zabývali stabilitou prutů namáhaných na vzpěr. Řešili jsme čtyři základní druhy uložení - prut na jednom konci vetknutý a na druhém volný, prut na obou koncích kloubově uložený, prut na jednom konci vetknutý a na druhém kloubově uložený a prut na obou koncích kloubově uložený. Zjistili jsme, že kritická síla pro uložení prut má tvar

$$F_{kr} = \alpha^2 \frac{EJ_z}{l^2}.$$

Veličina  $\alpha$  je dána uložení prutu. Pro prut na jednom konci vetknutý a na druhém volný má hodnotu  $\pi/2$ , pro prut na obou koncích kloubově uložený má velikost  $\pi$ . Pro prut na jednom konci vetknutý a na druhém kloubově uložený nabývá  $\pi\sqrt{2}$  a pro prut na obou koncích vetknutý jsme obdrželi  $\alpha = 2\pi$ . Odvozené vztahy platí pro ideální a ideálně zatížený prut, pro nějž se bezpečnost  $k_k$  určí vůči meznímu stavu vzpěrné stability ze vztahu

$$k_k = \frac{F_{kr}}{F}$$

Jsou-li odchylky reálného prutu od ideálního nepodstatné, je možné použít kritickou sílu i pro posouzení bezpečnosti reálného prutu. Je třeba ale volit vyšší hodnoty bezpečnosti.

Ve čtvrté kapitole jsme se zabývali prutem namáhaným na ohyb. Jednalo se o prut prostě uložený, namáhaný na vzpěr silou  $F$  a příčně zatížený rovnoměrným liniovým zatížením  $q$ , což je speciální případ prutu na obou koncích kloubově uloženého. Liší se pouze tím, že po celé délce působí liniové zatížení. Toto zatížení bychom mohli aplikovat na každý ze čtyř předchozích případů. Z důvodu jednoduchosti jsme ale výpočet provedli na prutu kloubově uloženém na obou koncích. Dále jsme uvažovali případ, kdy je prut umístěn na pružném (Winklerově) podkladě a nezanedbávali jsme namáhání nosníku ve smyku. Jelikož síla, kterou působí podloží na prut je v každém průřezu úměrná zatlačení, počítali jsme průhybovou čáru pomocí diferenciální rovnice čtvrtého řádu.

Pátá kapitola se týkala teplotního pole v tenké tyči. Odvodili jsme rovnici vedení tepla, která popisuje rozložení teploty v každém bodě tyče. Aby řešení rovnice bylo určeno jednoznačně, doplnili jsme ji okrajovými podmínkami. Dále jsme uvedli několik příkladů.

Poslední šestá kapitola obsahovala odvození rovnice matematického kyvadla, která se většinou řeší zahrnutím počátečních podmínek. Předepsání okrajových podmínek má ale také dobrý smysl. Podobně jako v předcházející kapitole jsme nejprve odvodili rovnici a poté ukázali výpočet na příkladech.

Všechny prezentované výpočty byly provedeny při některých zjednodušeních (například konstantnost veličin  $E$  nebo  $J_z$ , linearizace atd.) Tato zjednodušení nám umožnila provést potřebné výpočty analyticky. V případě obecnějších modelů již často toto analytické řešení není možné a je potřeba přistoupit k řešení numerickému.

# Literatura

- [1] ČERMÁK, Jan, ŽENÍŠEK, Alexander. Matematika III. Brno : AKADEMICKÉ NAKLADATELSTVÍ CERM, 2001. 205 s. ISBN 80-214-2010-3.
- [2] HEŘT, J.: *Applications of Mathematics: Elastic deformations of a cantilever plate loaded by a concentrated force at a general point*. January 1963, vol. 8 , issue 6, p. 411-441.
- [3] CHROBÁK, P.: *Přípravek k demonstraci tlaku a tahu*. [Bakalářská práce.] Brno: Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně, Fakulta Technologická, 2005. 56 s.
- [4] KADLČÁK, Jaroslav, KYTÝR, Jiří. *Statika stavebních konstrukcí II. : Staticky neurčitě prutové konstrukce*. 2. vyd. Brno : VUTIUM, 2004. 431 s. ISBN 80-214-2631-4.
- [5] KONVALINKA, P.: *Analýza konstrukcí* [online]. Vydáno: 2002-7-1. Poslední revize: 2008-9-8 [cit. 21.2.2009]. Dostupné z: [mech.fsv.cvut.cz/conwa/ANKC8P.ppt](http://mech.fsv.cvut.cz/conwa/ANKC8P.ppt)
- [6] KŘIVÝ, V., MAREK, P.: *Posudek spolehlivosti ocelových prutových konstrukcí podle teorie druhého řádu* [online]. Vydáno: 2005 [cit. 21.2.2009]. [http://fast10.vsb.cz/sciencemm2005pdf18\\_krivy.pdf](http://fast10.vsb.cz/sciencemm2005pdf18_krivy.pdf)
- [7] MÍKA, Stanislav, KUFNER, Alois. *Okrajové úlohy pro obyčejné diferenciální rovnice*. Jarmila Novotná, Eva Endlová. 2. upr. vyd. Praha : Nakladatelství technické literatury, 1983. 89 s. ISBN 04-018-83
- [8] NOVOTNÝ, F.: *Nosník na dvou podporách s konstantním spojitým zatížením* [online]. Vydáno: 2005-12-8. Poslední revize: 2008-2-5 [cit. 2009-3-29]. Dostupné z: [http://e-learning.tul.cz/cgi-binelearningelearning.fcgi?ID\\_tema59&ID\\_obsah1486&stranka\\_publ\\_tema&akce=polozka\\_vstup](http://e-learning.tul.cz/cgi-binelearningelearning.fcgi?ID_tema59&ID_obsah1486&stranka_publ_tema&akce=polozka_vstup)
- [9] NOVÁK, Otakar, HOŘEJŠÍ, Jiří. *Statické tabulky pro stavební praxi*. Václav Krůta. 1. vyd. Praha : SNTL - Nakladatelství technické literatury, 1968. 476 s. ISBN 04-711-68.
- [10] NOVÁK, Otakar, HOŘEJŠÍ, Jiří. *Statika stavebních konstrukcí*. Václav Krůta. 1. vyd. Praha : SNTL - Nakladatelství technické literatury, 1972. 768 s. ISBN 04-703-72.
- [11] ODEN, J. Tinsley. *Mechanics of elastic structures*. USA : McGraw-Hill, 1967. ISBN 67-14675. The elastic curve, p. 131-180.
- [12] REKTORYS, Karel. *Matematika 43 : Obyčejné a diferenciální rovnice s okrajovými podmínkami*. 3. vyd. Praha : Vydavatelství ČVUT, 1997. 93 s. ISBN 80-01-01611-0.

# 8 Seznam použitých zkratek a symbolů

$M_o$	ohybový moment
$E$	Youngův modul pružnosti
$J_z$	moment setrvačnosti průřezu
$F$	podélná síla působící na prut
$F_{kr}$	kritická (Eulerova) síla
$l$	délka prutu
$y(x)$	průhyb prutu v bodě $x$ , teplota
$y'(x)$	natočení prutu v bodě $x$
$-EJ_z y''(x)$	moment v bodě $x$
$-EJ_z y'''(x)$	síla v bodě $x$
$F_H$	příčná síla
$q$	příčné zatížení
$R$	reakce podpory
$c$	(malá) deformace v ohybu
$Q$	koeficient poddajnosti podloží
$p$	poměrná velikost síly podloží
$u$	šířka prutu
$H$	modul stlačitelnosti pružného podkladu
$\lambda$	kořen charakteristické rovnice
$\delta_A$	průhyb v bodě $A$
$\theta_A$	natočení v bodě $A$
$M_A$	moment v bodě $A$
$V_A$	smyková síla v bodě $A$
$S(x)$	příčný řez
$k(x)$	koeficient tepelné vodivosti
$\Omega(x)$	obvod příčného řezu

$\tau(x)$	teplota vně pláště
$\alpha(x)$	koeficient přestupu tepla
$h(x)$	množství tepla vyprodukované zdroji uvnitř tyče
$J(x)$	elektrický proud
$R(x)$	odpor jednotky délky drátu
$m$	hmotnost
$t$	čas
$h$	délka nehmotného vlákna
$\varphi(t)$	okamžitá (úhlová) výchylka
$g$	tíhové zrychlení
$k_k$	bezpečnost