



# VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

## FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

## ÚSTAV MATEMATIKY

INSTITUTE OF MATHEMATICS

## STABILITA NELINEÁRNÍCH MECHANICKÝCH SOUSTAV

STABILITY OF NON-LINEAR MECHANICAL SYSTEMS

### DIPLOMOVÁ PRÁCE

MASTER'S THESIS

### AUTOR PRÁCE

AUTHOR

**Bc. Martin Hrabec**

### VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

**doc. Mgr. Zdeněk Opluštíl, Ph.D.**

**BRNO 2024**



# Zadání diplomové práce

Ústav: Ústav matematiky  
Student: **Bc. Martin Hrabec**  
Studijní program: Matematické inženýrství  
Studijní obor: bez specializace  
Vedoucí práce: **doc. Mgr. Zdeněk Opluštil, Ph.D.**  
Akademický rok: 2023/24

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma diplomové práce:

## Stabilita nelineárních mechanických soustav

### Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Inženýrské procesy mohou být modelovány pomocí soustav nelineárních diferenciálních rovnic (dynamických systémů). Z hlediska kvalitativní analýzy se u těchto soustav často zkoumá stabilita řešení v závislosti na parametrech uvažovaného modelu. Ovšem z praktického hlediska se ukazuje, že v některých případech je žádoucí, aby se systém choval nestabilně až chaoticky. Například pokud uvažujeme mechanickou resp. mechanicko–elektrickou soustavu.

### Cíle diplomové práce:

Kvalitativní analýza řešení vybraných inženýrských modelů zejména z hlediska stability řešení. Hledání parametrů systémů tak, aby jejich řešení vykazovalo stabilní, nestabilní resp. chaotické chování. Ověření teoretických poznatků pomocí numerických simulací ve vhodném matematickém software.

### Seznam doporučené literatury:

KALAS, J. a M. RÁB. Obyčejné diferenciální rovnice. Brno: Masarykova universita Brno, 1995.

SMITH, H. An introduction to delay differential equations with applications to the life sciences. New York: Springer, 2011.

STROGATZ, S. H. Nonlinear Dynamics and Chaos, 2nd ed. Westview Press, 2015.

Termín odevzdání diplomové práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2023/24

V Brně, dne

L. S.

---

doc. Mgr. Petr Vašík, Ph.D.  
ředitel ústavu

---

doc. Ing. Jiří Hlinka, Ph.D.  
děkan fakulty

## **Abstrakt**

Tato práce se zabývá analýzou stability nelineárních mechanických soustav. Nejprve je uvedeno několik poznatků týkajících se nelineárních dynamických systémů a stability jejich řešení. Dále je popsán deterministický chaos a Ljapunovovy exponenty. Kromě teorie jsou také prezentovány numerické výpočty, které jsou zaměřeny na indikaci chaotického chování.

## **Abstract**

This thesis deals with stability analysis of non-linear mechanical systems. Firstly there are introduced basic concepts of non-linear dynamical systems and stability. The theory of deterministic chaos and Lypunov exponents is described next. Numerical calculations focused on indication of chaotic behaviour are presented as well.

## **Klíčová slova**

nelineární dynamické systémy, stabilita, deterministický chaos, atraktory, Duffingův oscilátor, bifurkace

## **Keywords**

non-linear dynamical systems, stability, deterministic chaos, attractors, Duffing oscillator, bifurcation



Prohlašuji, že jsem diplomovou práci *Stabilita nelineárních mechanických soustav* vypracoval samostatně pod vedením doc. Mgr. Zdeňka Opluštily, Ph.D. s použitím materiálů uvedených v seznamu literatury.

Martin Hrabec



Chtěl bych poděkovat vedoucímu své diplomové práce doc. Mgr. Zdeňku Opluštilovi, Ph.D. za ochotu, konzultace a cenné rady při psaní této práce.

Martin Hrabec



# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>12</b>
<b>2</b>	<b>Nelineární dynamické systémy</b>	<b>13</b>
2.1	Soustavy obyčejných diferenciálních rovnic . . . . .	13
2.2	Stabilita řešení . . . . .	15
2.3	Nelineární soustavy . . . . .	15
2.4	Limitní cyklus . . . . .	17
2.5	Bifurkace . . . . .	19
2.6	Poincarého mapa . . . . .	19
2.7	Atraktor . . . . .	20
<b>3</b>	<b>Deterministický chaos</b>	<b>21</b>
3.1	Algoritmus výpočtu největšího Ljapunovova exponentu $\lambda_1$ . . . . .	22
<b>4</b>	<b>Vyšetřované modely</b>	<b>23</b>
4.1	Nelineární oscilátor . . . . .	23
4.2	Piezoelektrický vibrační mikrosběrač energie . . . . .	24
<b>5</b>	<b>Stabilita nelineárních mechanických soustav</b>	<b>25</b>
5.1	Nebuzený Duffingův oscilátor . . . . .	25
5.2	Buzený Duffingův oscilátor . . . . .	31
5.3	Detekce chaosu . . . . .	42
<b>6</b>	<b>Stabilita nelineárních mechanicko-elektrických soustav</b>	<b>46</b>
6.1	Detekce chaosu . . . . .	50
<b>7</b>	<b>Závěr</b>	<b>51</b>

# 1 Úvod

Dynamické systémy jsou matematické modely používané k popisu a analýze časově závislých procesů. Nacházejí uplatnění v mnoha odvětvích, jako je například robotika, biologie, medicína nebo inženýrství. V práci se budeme zabývat analýzou stability nelineárních mechanických systémů, které lze reprezentovat pomocí soustav obyčejných diferenciálních rovnic. Skutečnost, že se v námi zkoumaných modelech vyskytují nelineární členy, znamená, že jsou dynamické nelineární systémy schopné věrněji modelovat reálné problémy a také přinášejí jevy, ke kterým nedochází v lineárních systémech. Jedním z nich je například deterministický chaos. Chaotické systémy jsou známé svou citlivostí na počátečních podmínkách, kdy se dvě blízké trajektorie chovají po uplynutí krátkého časového okamžiku naprosto rozdílně.

Práce je členěna následovně. Druhá kapitola obsahuje základy teorie o soustavách obyčejných diferenciálních rovnic a stabilitě jejich řešení. Dále je zaveden pojem dynamického systému. Následuje část věnovaná limitním cyklům, což jsou speciální trajektorie, které se vyskytují pouze v nelineárních systémech. Na závěr této kapitoly je představena bifurkační teorie, Poincarého mapa a také je zaveden pojem atraktoru dynamického systému. Kapitola třetí se věnuje teorii deterministického chaosu a Ljapunovových exponentů. V další části jsou představeny modely nelineárního oscilátoru a piezoelektrického vibračního mikrosběrače. První zmíněný model zastupuje mechanické soustavy, zatímco model piezoelektrického vibračního mikrosběrače je soustavou mechanicko-elektrickou. Pátá kapitola se zabývá analýzou stability nelineárního oscilátoru, který je modelován rovnicí Duffingova oscilátoru. Další sekce obsahuje numerické simulace zaměřené na hledání takových parametrů systému, pro které dochází k chaotickému chování. Kapitola šestá se pak zabývá otázkou stability nelineárních mechanicko-elektrických soustav.

## 2 Nelineární dynamické systémy

V této kapitole budou zavedeny základní pojmy týkající se stability dynamických systémů. Uvedené definice, věty a jejich důkazy lze nalézt například v publikacích [1], [2] a [3].

### 2.1 Soustavy obyčejných diferenciálních rovnic

Soustavu (systém)  $n$  diferenciálních rovnic prvního řádu uvažujme ve tvaru

$$\begin{aligned}x'_1 &= f_1(t, x_1, \dots, x_n), \\x'_2 &= f_2(t, x_1, \dots, x_n), \\&\vdots \\x'_n &= f_n(t, x_1, \dots, x_n),\end{aligned}$$

kde  $' = \frac{d}{dt}$  a  $f_1, f_2, \dots, f_n$  jsou funkce definované na nějaké oblasti  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ . Popsaný systém lze zapsat v kratším vektorovém tvaru

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \quad (2.1)$$

kde  $\mathbf{x} = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ ,  $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = (f_1(t, x_1(t), \dots, x_n(t)), \dots, f_n(t, x_1(t), \dots, x_n(t)))$ .

**Definice 2.1.** Řešením systému (2.1) se rozumí  $n$ -vektorová funkce  $\mathbf{x}$  diferencovatelná na nějakém intervalu  $I$  taková, že pro  $t \in I$  je  $[t, x_1(t), \dots, x_n(t)] \in \Omega$  a je současně splněna rovnost  $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t))$ . Řešení se nazývá úplné, jestliže nejde prodloužit na větší interval.

V případě, že vektorová funkce  $\mathbf{f}$  soustavy (2.1) neobsahuje nezávisle proměnnou  $t$ , se systémem

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (2.2)$$

kde  $\mathbf{f}$  je definována na nějaké oblasti  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ , nazývá autonomní. Jelikož je možné libovolný neautonomní systém (2.1) pro  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  přepsat na autonomní systém (2.2) s  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1}$ , když položíme  $x_{n+1} = t$  a  $x'_{n+1} = 1$ , budeme se již dále zabývat pouze systémy autonomními.

Doplníme-li autonomní systém (2.2) počátečními podmínkami, získáváme počáteční (Cauchyovu) úlohu

$$\begin{aligned}\mathbf{x}' &= \mathbf{f}(\mathbf{x}), \\ \mathbf{x}(t_0) &= \xi,\end{aligned} \quad (2.3)$$

kde  $\xi \in \mathbb{R}^n$ ,  $[t_0, \xi] \in I \times \Omega$ .

Dále připomeňme větu, která zaručí existenci a jednoznačnost řešení počáteční úlohy (2.3).

**Věta 2.2** (Důsledek Picardovy-Lindelöfovy věty). *Předpokládejme, že  $\mathbf{f} \in C^1(\Omega)$ , pak existuje  $a > 0$  takové, že počáteční úloha (2.3) má jediné řešení na intervalu  $\langle -a, a \rangle$ .*

*Poznámka.* Zápis  $C^1(\Omega)$  označuje množinu spojitě diferencovatelných funkcí na množině  $\Omega$ .

**Definice 2.3.** Nechť  $\Omega$  je oblast v  $\mathbb{R}^n$ . Dynamickým systémem nazveme spojitě diferencovatelné zobrazení  $\phi : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \Omega$  na  $\Omega$ , které splňuje

1.  $\phi_0(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega$ ,
2.  $\phi_s(\phi_t(\mathbf{x})) = \phi_{s+t}(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega$  a  $\forall s, t \in \mathbb{R}$ .

Je použito značení  $\phi_t(\mathbf{x}) := \phi(t, \mathbf{x})$  a  $\Omega$  se nazývá stavový prostor.

*Poznámka.* Proměnná  $t$  v dynamických systémech běžně značí čas.

Věta (2.2) zaručuje pouze lokální řešitelnost počáteční úlohy (2.3). Následující věta ovšem zaručí, že libovolná autonomní soustava (2.2) s  $C^1$ -vektorovým polem  $f$  definovaným na  $\mathbb{R}^n$  vede na dynamický systém. Nejprve zavedme potřebný pojem topologicky ekvivalentních systémů.

**Definice 2.4.** Předpokládejme, že  $f \in C^1(\Omega_1)$  a  $g \in C^1(\Omega_2)$ , kde  $\Omega_1, \Omega_2$  jsou oblasti v  $\mathbb{R}^n$ . Potom autonomní systémy  $x' = f(x)$  a  $x' = g(x)$  nazveme topologicky ekvivalentní, jestliže existuje homeomorfismus  $H : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ , který zobrazuje trajektorie prvního systému na trajektorie druhého systému, přičemž zachovává orientaci v čase.

*Poznámka.* Zobrazení  $f : X \rightarrow Y$  se nazývá homeomorfismus, jestliže je spojitý a bijektivní, přičemž inverzní zobrazení je taktéž spojitý.

**Věta 2.5.** Předpokládejme, že  $\Omega$  je oblast v  $\mathbb{R}^n$  a  $f \in C^1(\Omega)$ . Potom existuje funkce  $F \in C^1(\Omega)$  taková, že

$$x' = F(x) \quad (2.4)$$

definuje dynamický systém na  $\Omega$  a (2.4) je topologicky ekvivalentní s (2.2) na  $\Omega$ .

Důležitou součástí kvalitativní analýzy autonomních systémů je grafické znázornění získaných řešení. Jednou možností je interpretovat řešení  $x(t)$  jeho grafem v prostoru  $I \times \Omega$ . Druhým způsobem spočívá v znázornění řešení pomocí křivky zvaný trajektorie řešení, která představuje kolmý průmět grafu funkce  $x(t)$  z  $I \times \Omega$  do  $\Omega$ , přičemž oblast  $\Omega$  se nazývá fázový prostor. Orientace křivky je dána pomocí šipky, která určuje pohyb hodnoty řešení po trajektorii pro rostoucí hodnotu  $t$ . Obrázek znázorňující trajektorie pro různé počáteční podmínky se označuje jako fázový portrét.

**Definice 2.6.** Bod  $x^*$  se nazývá singulární bod autonomního systému (2.2), jestliže  $f(x^*) = 0$ .

**Věta 2.7.** Autonomní systém (2.2) může mít trajektorie tří typů:

1. Singulární body. Odpovídají konstantním řešením.
2. Uzavřené trajektorie (tzv. cykly). Odpovídají periodickým řešením.
3. Trajektorie, které samy sebe neprotínají.

Uvažujme dále autonomní systém (2.2) dvou rovnic a předpokládejme existenci a jednoznačnost řešení každého počátečního problému. Singulární bod  $x^*$  se nazývá

- střed, když existuje ryzí okolí  $U$  bodu  $x^*$  takové, že každým bodem  $a \in U$  prochází jediná trajektorie, která je uzavřená a obsahuje ve svém vnitřku bod  $x^*$ ;
- ohnisko, když existuje ryzí okolí  $U$  bodu  $x^*$  takové, že bod  $x(t)$  trajektorie  $x$  vycházející z libovolného bodu  $a \in U$  má tu vlastnost, že konverguje pro  $t \rightarrow \infty$  nebo  $t \rightarrow -\infty$  k  $x^*$ , a to tak, že velikost orientovaného úhlu vektoru  $\overrightarrow{x^*x(t)}$  od některého pevného vektoru  $\overrightarrow{x^*x}$  má nevlastní limitu;
- uzel, když existuje ryzí okolí  $U$  bodu  $x^*$  takové, že pro bod  $x(t)$  trajektorie  $x$  vycházející z libovolného bodu  $a \in U$  platí

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x^* \text{ nebo } \lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = x^*,$$

přičemž velikost orientovaného úhlu vektoru  $\overrightarrow{x^*x(t)}$  od některého pevného vektoru  $\overrightarrow{x^*x}$  má konečnou limitu;

- sedlo, když existuje jen konečný počet trajektorií  $x = x(t)$  takových, že

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x^* \text{ nebo } \lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = x^*.$$

## 2.2 Stabilita řešení

**Definice 2.8.** Řešení  $\mathbf{x}_0(t)$  počáteční úlohy (2.3) nazveme stabilní na  $I = \langle t_0, \infty \rangle$  vzhledem k počáteční podmínce, jestliže ke každému  $\epsilon > 0$  existuje  $\delta > 0$  takové, že pro každé řešení  $\mathbf{x}(t)$  úlohy 2.3 platí následující implikace:

$$\|\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{x}_0(t_0)\| < \delta \implies \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0(t)\| < \epsilon \quad \forall t \in I.$$

*Poznámka.* Řešení, které není stabilní, se nazývá nestabilní.

**Definice 2.9.** Řešení  $\mathbf{x}_0(t)$  počáteční úlohy 2.3 nazveme atraktivní v počáteční podmínce v  $t_0$  pro  $t \rightarrow \infty$ , jestliže existuje  $\delta > 0$  tak, že pro každé řešení  $\mathbf{x}(t)$  splňující  $\|\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{x}_0(t_0)\| < \delta$  platí

$$\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0(t)\| \rightarrow 0 \quad \text{pro } t \rightarrow \infty.$$

*Poznámka.* Řešení, které je stabilní i atraktivní, se nazývá asymptoticky stabilní.

Jedním z kroků kvalitativních analýzy nelineárních systémů je vyšetření stability singulárních bodů. Abychom byli schopni určit typy singulárních bodů nelineárních systémů, je potřeba nejprve zmínit, jakým způsobem se postupuje u soustav lineárních. Provedeme nyní klasifikaci singulárních bodů ve fázovém prostoru  $\mathbb{R}^2$ .

Buď dán lineární autonomní systém

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}, \tag{2.5}$$

kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad a_{ij} \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Počátek je jediným singulárním bodem soustavy (2.5) právě tehdy, když  $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ , tedy právě když 0 není kořenem charakteristické rovnice matice  $\mathbf{A}$  tvaru  $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$ . Kořeny charakteristické rovnice odpovídají vlastním číslům matice  $\mathbf{A}$ .

*Poznámka.* Matice  $\mathbf{I}$  je jednotkovou maticí stejného rozměru jako matice  $\mathbf{A}$ .

**Věta 2.10.** Uvažujme soustavu 2.5 a předpokládejme, že 0 není vlastním číslem matice  $\mathbf{A}$ , potom singulární bod  $[0, 0]$  je:

- asymptoticky stabilní uzel, jestliže jsou obě vlastní čísla matice  $\mathbf{A}$  reálná záporná,
- nestabilní uzel, jestliže jsou obě vlastní čísla matice  $\mathbf{A}$  reálná kladná,
- sedlo, jestliže jsou obě vlastní čísla matice  $\mathbf{A}$  reálná, přičemž jedno je kladné a druhé záporné,
- asymptoticky stabilní ohnisko, jestliže jsou obě vlastní čísla matice  $\mathbf{A}$  komplexně sdružená se zápornou reálnou částí,
- nestabilní ohnisko, jestliže jsou obě vlastní čísla matice  $\mathbf{A}$  komplexně sdružená s kladnou reálnou částí,
- střed, jestliže jsou obě vlastní čísla matice  $\mathbf{A}$  komplexně sdružená s nulovou reálnou částí.

## 2.3 Nelineární soustavy

Prvním krokem v rámci kvalitativní analýzy nelineárních systémů je vyšetření singulárních bodů. Ukážeme dvě věty, které popíší, jakým způsobem se klasifikují singulární body nelineárních systémů pomocí systémů lineárních. Následující tvrzení jsou platná pro soustavy dvou rovnic.

Uvažujme nelineární systém

$$\begin{aligned}x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + P(x_1, x_2), \\x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + Q(x_1, x_2),\end{aligned}\tag{2.6}$$

a lineární systém

$$\begin{aligned}x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2.\end{aligned}\tag{2.7}$$

**Věta 2.11.** *Buďte  $P, Q$  funkce spojité v okolí počátku. Nechť  $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$  a nechť existuje  $\epsilon > 0$  takové, že*

$$\lim_{[x_1, x_2] \rightarrow [0, 0]} \frac{|P(x_1, x_2)| + |Q(x_1, x_2)|}{(|x_1| + |x_2|)^{1+\epsilon}} = 0.$$

*Pak je počátek uzem nebo ohnisko pro systém 2.6, je-li stejného typu pro systém (2.7). Jestliže je počátek střed pro systém (2.7), je buď ohniskem nebo bodem rotace pro systém (2.6). Mají-li navíc funkce  $P, Q$  spojité parciální derivace podle  $x_1$  a  $x_2$  v okolí počátku a je-li počátek sedlem pro (2.7), je stejného typu i pro (2.6).*

V uvedené větě se vyskytuje typ singulárního bodu – bod rotace, se kterým jsme se dosud nesetkali.

**Definice 2.12.** Singulární bod  $\mathbf{x}^*$  se nazývá bod rotace, jestliže v libovolném okolí bodu  $\mathbf{x}^*$  existuje alespoň jeden cykl, který obsahuje ve svém vnitřku bod  $\mathbf{x}^*$ .

*Poznámka.* Každý střed je současně bodem rotace, ale bod rotace nemusí být středem.

Zavedme dále označení

$$\begin{aligned}l_1 &= \frac{\partial f_1(\hat{x}_1, \hat{x}_2)}{\partial x_1}, & l_2 &= \frac{\partial f_1(\hat{x}_1, \hat{x}_2)}{\partial x_2}, \\m_1 &= \frac{\partial f_2(\hat{x}_1, \hat{x}_2)}{\partial x_1}, & m_2 &= \frac{\partial f_2(\hat{x}_1, \hat{x}_2)}{\partial x_2}.\end{aligned}$$

**Věta 2.13.** *Předpokládejme, že funkce  $f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2)$  jsou spojité a mají spojité parciální derivace druhého řádu v okolí bodu  $[\hat{x}_1, \hat{x}_2]$  a že  $f_1(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = f_2(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = 0$ . Nechť*

$$\det \begin{pmatrix} l_1 & l_2 \\ m_1 & m_2 \end{pmatrix} \neq 0.$$

*Potom je bod  $[\hat{x}_1, \hat{x}_2]$  izolovaným singulárním bodem systému*

$$\begin{aligned}x_1' &= f_1(x_1, x_2), \\x_2' &= f_2(x_1, x_2).\end{aligned}\tag{2.8}$$

*Přitom je bod  $[\hat{x}_1, \hat{x}_2]$  uzem, ohnisko nebo sedlo pro systém (2.8), je-li počátek singulárním bodem stejného typu pro lineární systém*

$$\begin{aligned}x_1' &= l_1x_1 + l_2x_2, \\x_2' &= m_1x_1 + m_2x_2.\end{aligned}\tag{2.9}$$

*Je-li však počátek střed pro systém (2.9), je bod  $[\hat{x}_1, \hat{x}_2]$  buď bodem rotace nebo ohniskem pro systém (2.8).*

Maticice  $\begin{pmatrix} l_1 & l_2 \\ m_1 & m_2 \end{pmatrix}$  vyskytující se v předchozí větě je tzv. Jacobiho maticí. Obecně uvažujeme Jacobiho matici vyčíslenou v bode  $\mathbf{x}^*$  jako matici obsahující parciální derivace pravé strany soustavy (2.2) podle všech proměnných  $x_i$ , tj.

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}^*) = D\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}^*) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}^*) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\mathbf{x}^*) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\mathbf{x}^*) \end{pmatrix}.$$

V následujícím příkladu zavedeme pojmy, které jsou nutné pro formulaci věty zaručující, že střed linearizovaného systému (2.9) je skutečně středem i pro původní nelineární systém (2.8).

**Příklad 2.14.** Vyjdeme z Newtonova zákona  $F = ma$  a uvažujeme částici o hmotnosti  $m$ , která se pohybuje podél osy  $x$  díky působení nelineární síly  $F(x)$ , což lze vyjádřit pomocí rovnice

$$mx'' = F(x).$$

Ukážeme, že bude zachována energie tohoto systému. Nechť  $V(x)$  označuje potenciální energii definovanou vztahem  $F(x) = -\frac{dV}{dx}$ . Pak

$$mx'' + \frac{dV}{dx} = 0.$$

Rovnici vynásobíme členem  $x'$  a následně využijeme toho, že levá strana rovnice je výsledkem derivování podle nezávisle proměnné  $t$  – času, získáme tedy

$$mx'x'' + \frac{dV}{dx}x' = 0 \implies \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2}mx'^2 + V(x) \right) = 0,$$

kde jsme využili vztahu pro derivování složené funkce

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) = \frac{dV}{dx} \frac{dx}{dt}.$$

Pro dané řešení  $x(t)$  je proto celková energie

$$E = \frac{1}{2}mx'^2 + V(x)$$

konstantní jako funkce času. Energie se často nazývá *conserved quantity*. Systémy, pro které *conserved quantity* existuje, se označují jako konzervativní systémy.

**Věta 2.15.** Uvažujme autonomní systém (2.2), kde  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ , a necht'  $\mathbf{f}$  je spojitě diferencovatelná. Předpokládejme, že existuje *conserved quantity*  $E(\mathbf{x})$  a že  $\mathbf{x}^*$  je izolovaný singulární bod. Jestliže je  $\mathbf{x}^*$  lokálním minimem  $E$ , pak všechny trajektorie dostatečně blízko  $\mathbf{x}^*$  jsou uzavřené.

## 2.4 Limitní cyklus

V této sekci zavedeme pojem limitního cyklu, což je typ trajektorie, která se může vyskytovat pouze v nelineárních systémech. Víme, že autonomní systém (2.2) určuje dynamický systém  $\phi(t, \mathbf{x})$  na  $\Omega$ . Pro  $\mathbf{x} \in \Omega$  definuje funkce  $\phi(\cdot, \mathbf{x}) : \mathbb{R} \rightarrow \Omega$  trajektorii procházející počáteční podmínkou  $\xi$ .

**Definice 2.16.** Bod  $\mathbf{p} \in \Omega$  je  $\omega$ -limitním bodem trajektorie  $\phi(\cdot, \mathbf{x})$  systému (2.2), jestliže existuje posloupnost  $t_n \rightarrow \infty$  taková, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(t_n, \mathbf{x}) = \mathbf{p}. \quad (2.10)$$

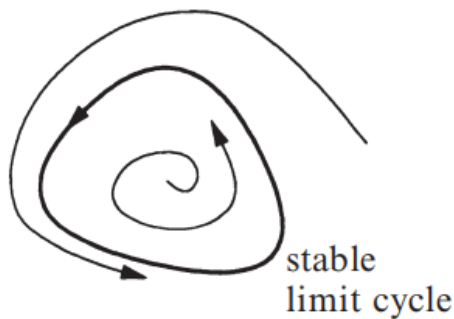
Obdobně, jestliže existuje posloupnost  $t_n \rightarrow -\infty$  taková, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(t_n, \mathbf{x}) = \mathbf{q}, \quad (2.11)$$

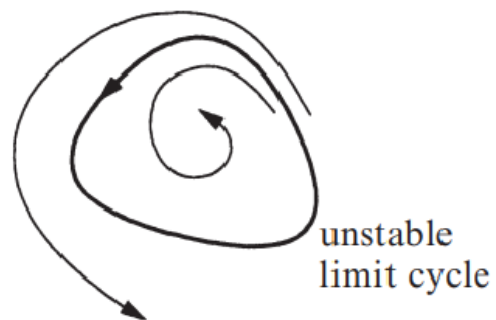
kde  $\mathbf{q} \in \Omega$ , pak se tento bod nazývá  $\alpha$ -limitním bodem trajektorie  $\phi(\cdot, \mathbf{x})$  systému (2.2). Množina všech  $\omega$ -limitních bodů se nazývá  $\omega$ -limitní množina, analogicky získáme  $\alpha$ -limitní množinu.

**Definice 2.17.** Limitním cyklem  $\Gamma$  systému (2.2) je periodická trajektorie řešení, která je  $\alpha$ -nebo  $\omega$ -limitní množina nějaké trajektorie systému (2.2) různé od  $\Gamma$ . Jestliže je  $\Gamma$   $\omega$ -limitní množina každé trajektorie v nějakém okolí  $\Gamma$ , nazveme ji stabilním limitním cyklem. Jestliže je  $\Gamma$   $\alpha$ -limitní množina každé trajektorie v nějakém okolí  $\Gamma$ , jedná se o nestabilní limitní cyklus. Pokud je  $\Gamma$   $\alpha$ -limitní množinou pro jednu trajektorii a  $\omega$ -limitní množinou pro jinou trajektorii, pak se  $\Gamma$  nazývá polo-stabilní limitní cyklus.

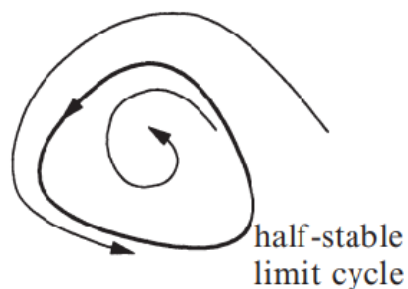
Následující obrázky jsou převzaty z knihy [2].



Obr. 1: Stabilní limitní cyklus



Obr. 2: Nestabilní limitní cyklus



Obr. 3: Polo-stabilní limitní cyklus

## 2.5 Bifurkace

Teorie bifurkací se zabývá kvalitativními změnami dynamických systémů v závislosti na parametru  $\alpha \in \mathbb{R}$ , případně na množině parametrů  $\alpha \in \mathbb{R}^m$ . Uvažujme dynamický systém

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha), \quad (2.12)$$

kde  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  a  $\alpha \in \mathbb{R}^m$ . Hladkou změnou parametrů  $\alpha$  vznikají nové dynamické systémy, které nemusejí být topologicky ekvivalentní s původním systémem.

**Definice 2.18.** Řekneme, že vektorové pole  $\mathbf{f} \in C^1(\Omega)$ , kde  $\omega \subset \mathbb{R}^n$ , je strukturálně stabilní, jestliže existuje  $\epsilon > 0$  takové, že pro každé  $\mathbf{g} \in C^1(\Omega)$ , pro které platí

$$\|\mathbf{f} - \mathbf{g}\| < \epsilon,$$

jsou  $\mathbf{f}$  a  $\mathbf{g}$  topologicky ekvivalentní na  $\Omega$ .

Jestliže vektorové pole není strukturálně stabilní, pak ani dynamický systém není strukturálně stabilní a dochází k bifurkaci.

Mezi příklady bifurkací patří změna stability singulárních bodů nebo vznik či zánik singulárních bodů.

## 2.6 Poincarého mapa

Poincarého mapa je pravděpodobně jedním z nejdůležitějších nástrojů pro studování stability a bifurkací periodických řešení.

**Definice 2.19.** Jestliže je  $\Gamma$  periodická trajektorie systému (2.2) procházející bodem  $\mathbf{x}_0$  a  $\Sigma$  je nadrovina kolmá k trajektorii  $\Gamma$  v bodě  $\mathbf{x}_0$ , potom pro libovolný bod  $\mathbf{x} \in \Sigma$ , který je dostatečně blízko bodu  $\mathbf{x}_0$ , řešení systému (2.2) procházející bodem  $\mathbf{x}$  v čase  $t = 0$ ,  $\phi_t(\mathbf{x})$  protne nadrovinu  $\Sigma$  opět v bodě  $\mathbf{P}(\mathbf{x})$  blízko  $\mathbf{x}_0$ . Zobrazení

$$\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{P}(\mathbf{x})$$

se nazývá Poincarého mapa.

*Poznámka.* Nadrovina  $\Sigma$  se nazývá Poincarého řez.

Následující věta zaručí existenci a spojitost Poincarého mapy  $\mathbf{P}(\mathbf{x})$  a její první derivace  $D\mathbf{P}(\mathbf{x})$ .

**Věta 2.20.** *Nechť  $\Omega$  je otevřená podmnožina  $\mathbb{R}^n$ , dále necht'  $\mathbf{f} \in C^1(\Omega)$ . Předpokládejme, že  $\phi_t(\mathbf{x}_0)$  je periodické řešení systému (2.2) s periodou  $T$  a že cyklus*

$$\Gamma = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} = \phi_t(\mathbf{x}_0), \quad 0 \leq t \leq T\}$$

*leží v  $\Omega$ . Necht'  $\Sigma$  je ortogonální nadrovina ke  $\Gamma$  v bodě  $\mathbf{x}_0$ . Tedy*

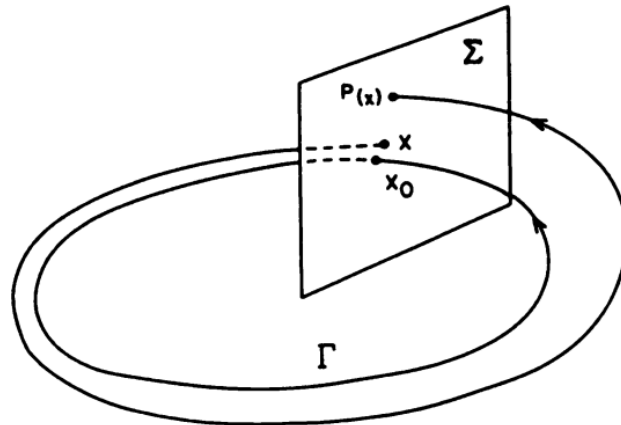
$$\text{Sigma} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = 0\}.$$

*Potom existuje  $\delta > 0$  a jediná funkce  $\tau$  definovaná a spojitě diferencovatelná na  $O_\delta(\mathbf{x}_0)$  tak, že  $\tau(\mathbf{x}_0) = T$  a*

$$\phi_{\tau(\mathbf{x})} \in \Sigma$$

*pro všechna  $\mathbf{x} \in O_\delta(\mathbf{x}_0)$ .*

Obr. 4 je převzat z [3].



Obr. 4: Poincarého mapa

## 2.7 Atraktor

Pojem atraktor představuje podmnožinu stavového prostoru, ke které dynamický systém směřuje, jinými slovy jsou k atraktoru přitahovány trajektorie z jeho okolí. Příklady atraktorů jsou singulární body, stabilní limitní cykly, ale mohou jimi být i komplikovanější množiny jako chaotické atraktory.

**Definice 2.21.** Atraktorem myslíme uzavřenou množinu  $A \in \mathbb{R}^n$ , která splňuje následující podmínky:

1.  $A$  je invariantní množina (libovolná trajektorie  $x(t)$ , která začíná v  $A$ , zde zůstává pro všechna  $t$ ).
2. Existuje otevřená množina  $L$  obsahující  $A$  taková, že jestliže  $x(0) \in L$ , pak vzdálenost  $x(t)$  od množiny  $A$  se blíží k nule pro  $t \rightarrow \infty$ . Největší množina  $L$ , která tuto vlastnost splňuje, se nazývá oblast přitažlivosti množiny  $A$ .
3. Množina  $A$  je minimální, tj. neexistuje žádná její vlastní podmnožina, která by splňovala první dvě podmínky.

### 3 Deterministický chaos

Definice a základní pojmy týkající se deterministického chaosu lze nalézt například v článku [4].

Přestože definice pojmu chaos ještě nebyla univerzálně přijata, většinou se tímto termínem rozumí neperiodické dlouhodobé chování deterministického dynamického systému, které vykazuje vysokou citlivost na počátečních podmínkách.

1. Neperiodické dlouhodobé chování znamená, že existují trajektorie, které se nepřibližují k singulárním bodům nebo periodickým trajektoriím pro  $t \rightarrow \infty$ .
2. Deterministickým systémem je myšleno, že systém nemá žádné náhodné parametry nebo vstupy. Nepravidelnost vyplývá pouze z nelinearity systému.
3. Vysoká citlivost na počátečních podmínkách znamená, že blízké trajektorie se vzdalují exponenciálně rychle.

Chaotické chování je možné pouze v nelineárních systémech alespoň třetího řádu. Tato podmínka plyne z Poincaré-Bendixsonovy věty, jejíž znění je možné nalézt například v publikaci [2].

Nástrojem, který bude sloužit k indikaci chaotického chování, budou tzv. Ljapunovy exponenty. Ljapunovy exponenty měří míru divergence dvou ze začátku blízkých trajektorií.

Nechť  $\mathbf{x}$  je řešením počáteční úlohy (2.3) a  $\hat{\mathbf{x}}$  je řešení autonomní soustavy (2.2), jehož vzdálenost v čase  $t_0$  od  $\mathbf{x}$  je velmi malá hodnota  $d_0$ . Předpokládejme, že trajektorie těchto řešení budou vzdáleny exponenciálně v nějakém čase  $t$ . Vzdálenost těchto trajektorií v čase  $t$  je určena jako

$$d \approx d_0 e^{\lambda(t-t_0)}.$$

Jestliže je  $\lambda > 0$ , pak se trajektorie exponenciálně vzdalují. Pokud je  $\lambda < 0$ , pak se trajektorie přibližují. Ljapunovův exponent definujeme jako

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{d_0 \rightarrow 0} \frac{1}{t - t_0} \ln \frac{d}{d_0}.$$

Takto definovaný Ljapunovův exponent umožňuje spočítat  $\lambda$  pouze pro dvě konkrétní trajektorie na určitém časovém intervalu. Lze tedy zavést následující definici Ljapunova exponentu.

**Definice 3.1.** Jestliže vzdálenost mezi  $i$ -tým bodem a jeho sousedním bodem v čase  $t_i$  je  $d_i$  a počáteční vzdálenost mezi dvěma body je  $d_{0i}$  v čase  $t_{0i}$ , pak definujeme Ljapunovův exponent vztahem

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{(t_i - t_{0i})} \ln \frac{d_i}{d_{0i}}.$$

Jestliže je dynamický systém  $n$ -dimenzionální, pak má tento systém  $n$  Ljapunovových exponentů.

**Definice 3.2.** Jsou-li  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$  Ljapunovy exponenty  $n$ -dimenzionálního dynamického systému, pak Ljapunovým spektrem rozumíme množinu

$$\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$$

a  $\lambda_1$  představuje největší Ljapunovův exponent.

Indikace chaotického chování je určena pomocí největšího Ljapunova exponentu. Jestliže je  $\lambda_1 > 0$ , pak se dynamický systém chová chaoticky.

### 3.1 Algoritmus výpočtu největšího Ljapunovova exponentu $\lambda_1$

1. Výběrem libovolné počáteční podmínky získáme referenční trajektorie.
2. Vybereme blízkou počáteční podmínku, jejíž vzdálenost od referenční počáteční podmínky je konstanta  $d$ . Nová počáteční podmínka udává pomocnou trajektorii.
3. Vhodnou numerickou metodou spočítáme jednu iterace přibližných řešení a určíme jejich novou vzdálenost  $d_1$ .
4. Spočítáme lokální Ljapunovův exponent podle vzorce  $\lambda = \frac{1}{t-t_0} \ln \frac{d}{d_0}$ .
5. Spočítaná iterace referenční trajektorie určuje novou počáteční podmínku. Počáteční podmínku pro pomocnou trajektorii upravíme tak, aby ležela na úsečce spojující obě iterace ve vzdálenosti  $d$  od referenční trajektorie.
6. Opakujeme kroky 3.–5. do konečného času  $T$ , přičemž zaznamenáváme průměrnou hodnotu jednotlivých lokálních Ljapunovových exponentů. Takto dostaneme odhad  $\lambda_1$ .
7. Vybereme náhodně novou počáteční podmínku pro referenční trajektorii, kterou vezmeme tak, že k počáteční podmínce z předešlé iterace je přičten náhodný vektor z intervalu  $(-1, 1)$ . Pak opakujeme kroky 2.–6.
8. Krok 7. opakujeme dostatečně krát a zaznamenáváme průměrnou hodnotu  $\lambda_1$  přes jednotlivé počáteční podmínky.

## 4 Vyšetřované modely

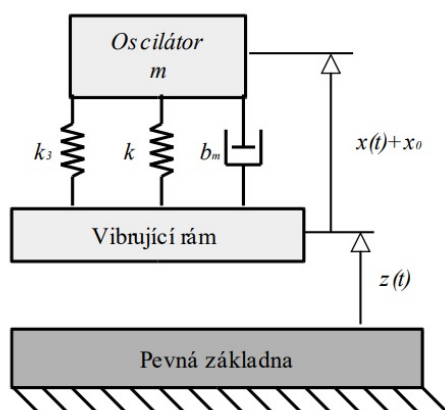
V této kapitole budou zavedeny modely nelineárního oscilátoru a piezoelektrického vibračního mikrosběrače, jejichž kvalitativní analýza bude předmětem následujících částí. Uvedené pojmy, rovnice a obrázky jsou čerpány z práce [5].

### 4.1 Nelineární oscilátor

Nelineární tlumený oscilátor s kinematickým buzením je určen rovnicí

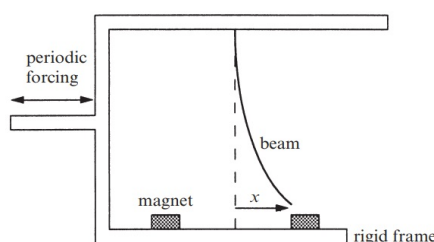
$$mx'' + b_mx' + kx + k_3x^3 = -mz'', \quad (4.1)$$

kde  $m$  je hmotnost oscilující hmoty,  $b_m$  je mechanické tlumení,  $k$  je tuhost pružiny,  $x$  je souřadnice oscilující hmoty vůči rámu,  $k_3$  je nelineární tuhost a  $z$  je absolutní výchylka vibrujícího rámu. Oscilátor je schématicky zobrazen na Obr. 1.



Obr. 5: Schéma nelineárního oscilátoru s kinematickým buzením

Nyní uvedeme jeden z možných způsobů, jakým lze u mechanických soustav docílit nelinearity. Nejprve poznamenejme, že pro malé výchylky je uvedený model kmitání s jedním stupněm volnosti možné převést na problém kmitání jednostranně vetknutého nosníku. Uvažujeme-li například ocelový jednostranně vetknutý nosník, podél jehož stran jsou umístěny magnety, pak se jedná o nelineární systém. Popsaná situace je zachycena na následujícím obrázku, který je převzat z publikace [2].



Obr. 6: Nelineární kmity jednostranně vetknutého nosníku

## 4.2 Piezoelektrický vibrační mikrosběrač energie

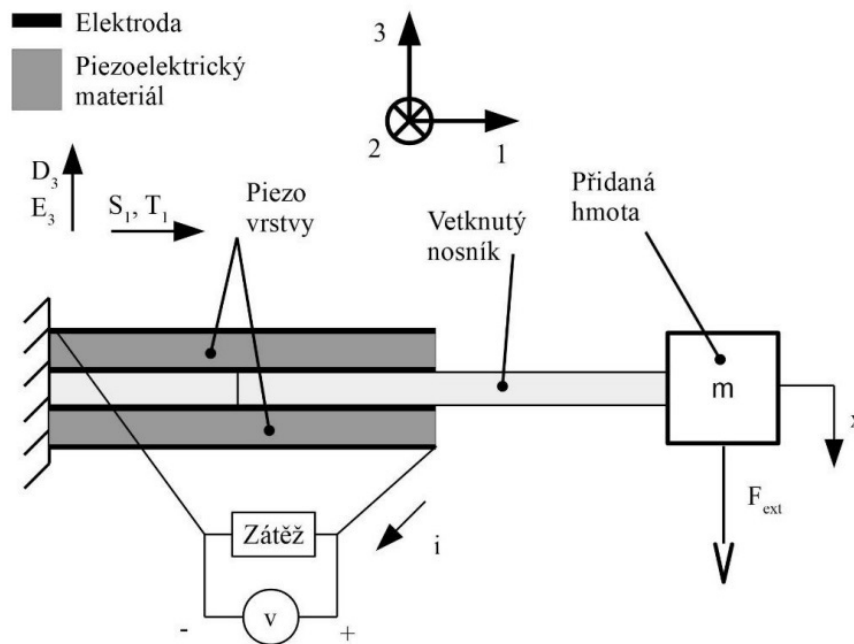
Piezoelektrický vibrační mikrosběrač energie využívá principu piezoelektrické přeměny energie, kdy deformací piezoelektrického materiálu vzniká elektrický proud, který lze využít k napájení elektronických zařízení.

Nejčastější konfigurace piezoelektrického vibračního mikrosběrače je jednostranně vetknutý nosník s přidanou hmotou na konci, na který je nanášena vrstva piezoelektrického materiálu. Nelineární chování popsaného sběrače je zaručeno přidáním magnetů po stranách nosníku. Model nelineárního piezoelektrického vibračního mikrosběrače popíšeme rovnicemi

$$mx'' + b_mx' + kx + k_3x^3 + \Theta u = F_{ext}, \quad (4.2)$$

$$u' = \frac{1}{C}(\Theta x' - \frac{u}{R}), \quad (4.3)$$

kde  $u$  je elektrické napětí,  $C$  elektrická kapacita vrstvy piezoelektrického materiálu,  $\Theta$  elektro-mechanický koeficient,  $R$  elektrický odpor připojené zátěže a  $F_{ext}$  vnější budící síla. Rovnice (4.2) odpovídá rovnici mechanických kmitů s přidaným členem  $\Theta u$ , který představuje tlumící sílu vzniklou piezoelektrickou přeměnou energie. Rovnice (4.3) popisuje nabíjení a současné vybíjení kapacity piezoelektrické vrstvy.



Obr. 7: Schéma piezoelektrického vibračního mikrosběrače

## 5 Stabilita nelineárních mechanických soustav

Nelineární oscilátor, který byl představen v předchozí kapitole, budeme pro účel kvalitativní analýzy modelovat pomocí tzv. Duffingova oscilátoru, který je určen nelineární diferenciální rovnicí druhého řádu

$$x'' + \delta x' + \alpha x + \beta x^3 = \gamma \cos(\omega t), \quad (5.1)$$

kde funkce  $x = x(t)$  představuje výchylku v čase  $t$ ,  $x'$  je rychlost a  $x''$  zrychlení. Parametr  $\alpha$  představuje lineární tuhost,  $\beta$  nelineární tuhost,  $\delta$  tlumení,  $\gamma$  amplitudu periodické budící síly a  $\omega$  úhlovou frekvenci periodické budící síly. Uvažujeme, že  $\delta$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  a  $\omega$  jsou reálné konstanty, přičemž  $\delta > 0$ . Rovnice Duffingova oscilátoru (5.1) odpovídá rovnici obecného nelineárního oscilátoru (4.1), kde jako vnější budící sílu uvažujeme periodicky působící sílu vyjádřenou pomocí členu  $\gamma \cos \omega t$ .

Analýzu stability Duffingova oscilátoru rozdělíme do dvou kroků. Nejprve se budeme zabývat situací, kdy je budící síla  $\gamma \cos \omega t$  rovna nule, půjde tedy o nebuzený Duffingův oscilátor. Následně bude provedena analýza buzeného Duffingova oscilátoru (5.1). Poslední sekce se bude zabývat hledáním parametrů Duffingova oscilátoru (5.1), kdy dochází k chaotickému chování.

### 5.1 Nebuzený Duffingův oscilátor

Uvažujme nebuzený Duffingův oscilátor

$$x'' + \delta x' + \alpha x + \beta x^3 = 0. \quad (5.2)$$

Rovnici (5.2) nejprve přepíšeme do tzv. normálního tvaru

$$x'' = -\delta x' - \alpha x - \beta x^3.$$

Dále se získaná diferenciální rovnice 2. řádu převede známým způsobem na soustavu dvou diferenciálních rovnic prvního řádu

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2, \\ x_2' &= -\delta x_2 - \alpha x_1 - \beta x_1^3, \end{aligned} \quad (5.3)$$

kde  $x_1 = x$  a  $x_2 = x'$ .

Získaný systém je autonomní. A naším cílem bude nyní nalézt singulární body tohoto systému, rozhodnout o jejich stabilitě a určit jejich typ. Charakterizace singulárních bodů bude provedena s využitím věty 2.10 a také věty 2.13. Výsledky budou podpořeny fázovými portréty, které byly vytvořeny v programu MATLAB. K řešení soustav diferenciálních rovnic byla použita rutina ode45, která je založena na numerické Rungově-Kuttově metodě čtvrtého řádu.

Nejprve uvažujme pro jednoduchost případ, kdy je parametr  $\delta$  nulový, pracujeme tedy se systémem

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2, \\ x_2' &= -\alpha x_1 - \beta x_1^3, \end{aligned} \quad (5.4)$$

K určení singulárních bodů systému je nejprve nutné vyřešit soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x_2 &= 0, \\ -\alpha x_1 - \beta x_1^3 &= 0. \end{aligned}$$

Získáváme řešení  $x_2 = 0$  a  $x_1 = 0$  nebo  $x_1 = \pm\sqrt{-\alpha/\beta}$ . Abychom zaručili, že řešení  $x_1 = \pm\sqrt{-\alpha/\beta}$  bude nabývat reálné hodnoty, budeme dále uvažovat, že parametry  $\alpha$  a  $\beta$  mají opačná znaménka. Řešení odpovídají třem singulárním bodům  $[\sqrt{-\alpha/\beta}, 0]$ ,  $[-\sqrt{-\alpha/\beta}, 0]$  a  $[0, 0]$ .

Vzhledem k tomu, že pracujeme se soustavou nelineárních diferenciálních rovnic, je potřeba rozhodnout o typu jednotlivých singulárních bodů pomocí příslušného linearizovaného systému. Nejprve je potřeba sestavit Jacobiho matici soustavy, která má tvar

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha - 3\beta x_1^2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.5)$$

Matici (5.5) dále vyčíslíme v jednotlivých singulárních bodech

$$J_{[\sqrt{-\alpha/\beta}, 0]} = J_{[-\sqrt{-\alpha/\beta}, 0]} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2\alpha & 0 \end{pmatrix},$$

$$J_{[0, 0]} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix}.$$

Sestavíme odpovídající charakteristické rovnice a určíme jejich kořeny, které rozhodnou o stabilitě a typu jednotlivých singulárních bodů.

Začněme se singulárním bodem  $[0, 0]$ . Charakteristická rovnice má tvar

$$\lambda^2 + \alpha = 0,$$

z čehož plyne, že

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{-\alpha}.$$

Obdobně pro singulární body  $[\sqrt{-\alpha/\beta}, 0]$ ,  $[-\sqrt{-\alpha/\beta}, 0]$  získáme

$$\lambda^2 - 2\alpha = 0,$$

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{2\alpha}.$$

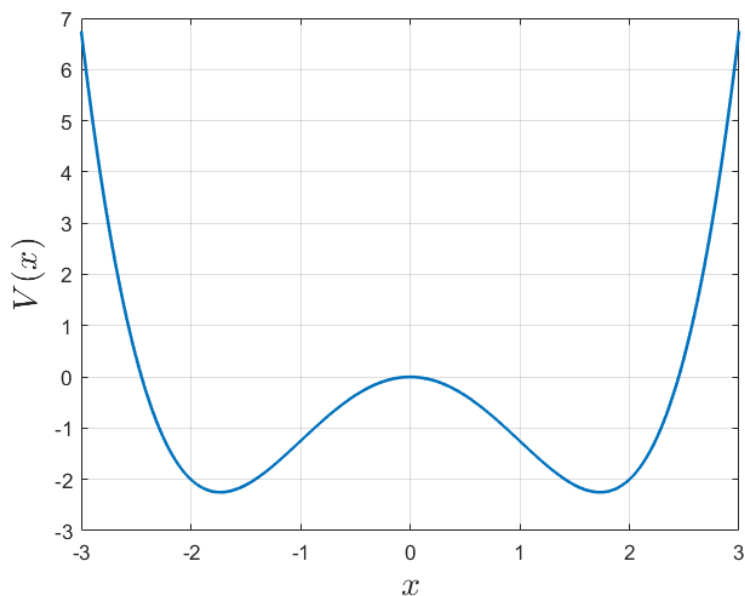
Uvažujeme-li  $\alpha < 0$ , pak singulární bod  $[0, 0]$  je typu sedlo a zbývající dva singulární body jsou typu střed. Nyní je třeba ukázat, že středy linearizovaného systému jsou středy i v původním nelineárním systému. Vyjdeme z rovnice uvažovaného nebuzeného netlumeného Duffingova oscilátoru

$$x'' + \alpha x + \beta x^3 = 0.$$

Tuto rovnici dále vynásobíme členem  $x'$  a přepíšeme ji do ekvivalentního tvaru, který vyjadřuje časovou derivaci

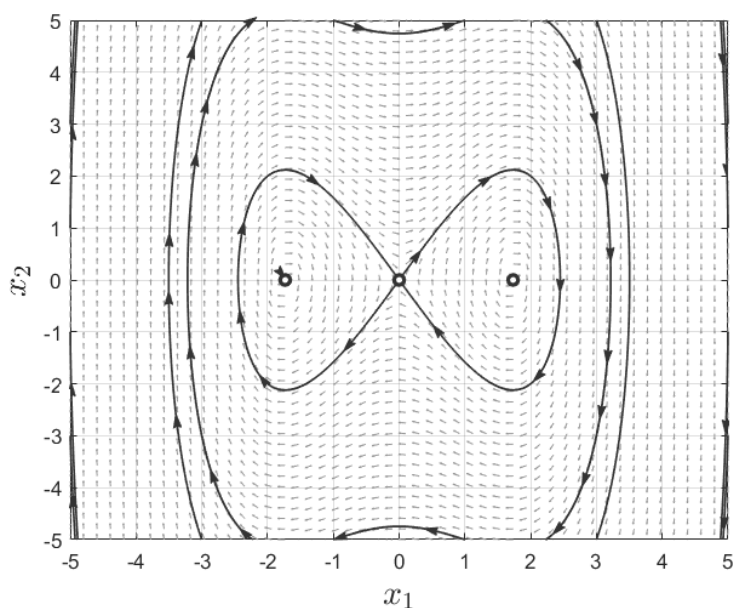
$$0 = x'(x'' + \alpha x + \beta x^3) = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2}x'^2 + \frac{1}{2}\alpha x^2 + \frac{1}{4}\beta x^4 \right).$$

celkové energie  $E = \frac{1}{2}x'^2 + \frac{1}{2}\alpha x^2 + \frac{1}{4}\beta x^4$  systému. Z předchozí rovnosti lze vidět, že lokální minima funkce  $E$  odpovídají vyšetřovaným singulárním bodům  $[\sqrt{-\alpha/\beta}, 0]$ ,  $[-\sqrt{-\alpha/\beta}, 0]$ , a díky větě 2.15 je zaručeno, že tyto singulární body jsou skutečně středy systému (5.4). Tato situace odpovídá z hlediska potenciální energie tzv. úloze dvojité jámy potenciálu (anglicky *double-well potencial*). Potenciální energie je částí celkové energie systému  $E = \frac{1}{2}x'^2 + \frac{1}{2}\alpha x^2 + \frac{1}{4}\beta x^4$ , zapíšeme ji jako  $V(x) = \frac{1}{2}\alpha x^2 + \frac{1}{4}\beta x^4$ .



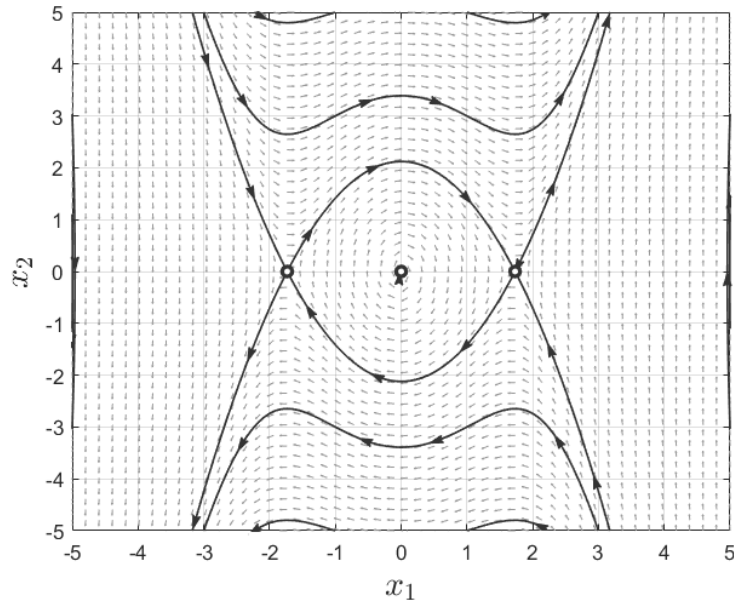
Obr. 8: Potenciální energie systému (5.4) pro  $\alpha = -3$  a  $\beta = 1$

Na Obr. 5 pozorujeme dva stabilní singulární body typu střed, v jejichž okolí se nacházejí stabilní periodická řešení, která odpovídají řešením s nízkou potenciální energií. Tyto trajektorie jsou uzavřeny speciálním typem trajektorií, které začínají a končí ve stejném bodě. Jedná se o tzv. homoklinické trajektorie. Samotné středy potom představují lokální minima potenciální energie. V počátku se nachází nestabilní sedlo představující hranici mezi dvěma stabilními atraktory. Z hlediska potenciální energie se jedná o lokální maximum. Posledním zastoupeným typem trajektorií jsou periodická řešení, která jsou reprezentována uzavřenými křivkami ležícími vně homoklinických trajektorií. Jde o řešení, jejichž počáteční podmínky nabývají vyšších hodnot. Tato řešení mají dostatek energie, aby byla schopna překonat vrchol mezi potenciálovými jámami.



Obr. 9: Fázový portrét systému (5.4) s parametry  $\alpha = -3$ ,  $\beta = 1$ ,  $\omega = 1$

V případě, kdy je  $\alpha > 0$ , je počátek singulárním bodem typu střed, zatímco zbývající dva singulární body jsou sedla. Na Obr. 6 lze vidět pouze malou oblast stabilních řešení v okolí počátku, který je středem. Trajektorie, které tuto oblast ohraničují a které vycházejí z jednoho singulárního bodu a končí v jiném, se nazývají heteroklinické. Zbývající řešení tohoto systému jsou nestabilní.



Obr. 10: Fázový portrét systému (5.4) s parametry  $\alpha = 3$ ,  $\beta = -1$ ,  $\omega = 1$

Uvažujme nyní nenulový tlumicí člen  $\delta > 0$ , což odpovídá systému (5.3). Tento systém má stejné souřadnice singulárních bodů jako netlumený systém (5.4), ale liší se Jacobiho maticí. Ta má následující tvar

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha - 3\beta x_1^2 & -\delta \end{pmatrix}. \quad (5.6)$$

Jacobiho matici (5.6) v singulárních bodech pak lze zapsat jako

$$\mathbf{J}_{[\sqrt{-\alpha/\beta}, 0]} = \mathbf{J}_{[-\sqrt{-\alpha/\beta}, 0]} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2\alpha & -\delta \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{J}_{[0,0]} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha & -\delta \end{pmatrix}.$$

Stejně jako v případě netlumeného oscilátoru nalezneme kořeny charakteristických rovnic. Charakteristická rovnice a její řešení pro singulární bod  $[0, 0]$  jsou tvaru

$$\lambda^2 + \delta\lambda + \alpha = 0, \quad (5.7)$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\delta \pm \sqrt{\delta^2 - 4\alpha}}{2}.$$

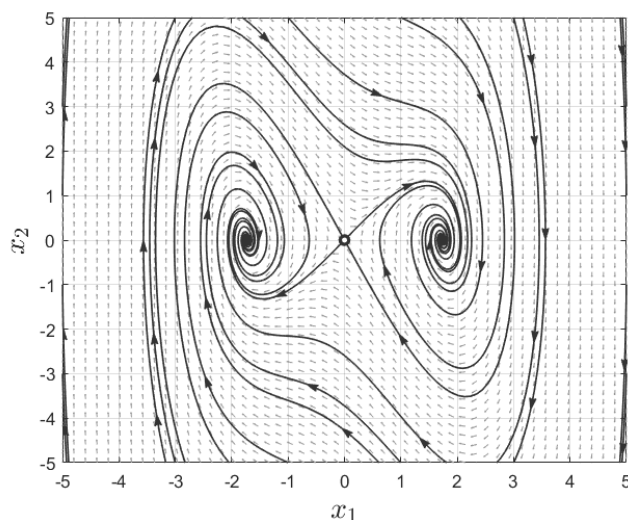
Pro singulární body  $[\sqrt{-\alpha/\beta}, 0]$ ,  $[-\sqrt{-\alpha/\beta}, 0]$  dostaneme

$$\lambda^2 + \delta\lambda - 2\alpha = 0,$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\delta \pm \sqrt{\delta^2 + 8\alpha}}{2}. \quad (5.8)$$

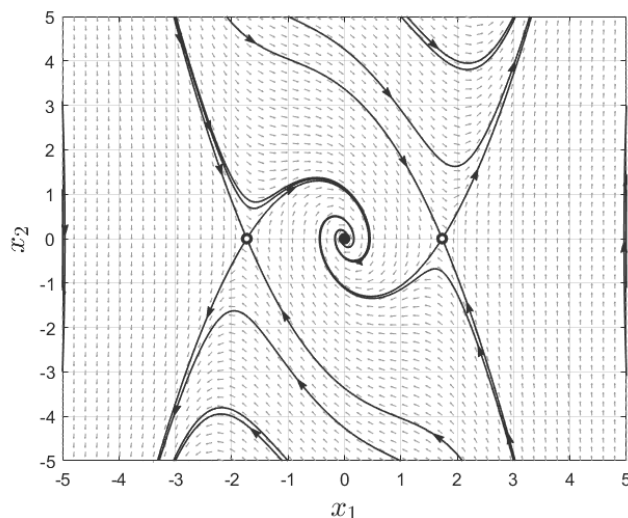
Nejprve uvažujme případ, kdy je parametr  $\alpha$  záporný. V této situaci je výraz  $\sqrt{\delta^2 - 4\alpha}$  reálný a platí nerovnost  $\sqrt{\delta^2 - 4\alpha} > |\delta|$ , což znamená, že jeden kořen charakteristické rovnice (5.7) je kladný, druhý záporný, a singulární bod  $[0, 0]$  je tedy typu sedlo. U zbývajících dvou singulárních bodů dojde ke změně oproti případu netlumeného oscilátoru (5.4). Reálná část kořenů (5.8) bude vždy záporná, a singulární body tedy budou asymptoticky stabilní. Jestliže bude splněna nerovnost  $\sqrt{\delta^2 + 8\alpha} < 0$ , pak budou singulární body ohnisky, jinak uzly.

Na Obr. 7 vidíme fázový portrét systému (5.3), kdy dva krajní singulární body budou asymptoticky stabilní ohniska. Stejně jako u netlumeného systému (5.4) zde nastává situace dvojité jámy potenciálu. Rozdílem však je, že nyní díky členu  $\delta$  dochází k postupnému snižování potenciální energie řešení a tato řešení jsou přitahována k jednomu ze dvou ohnisek. Výjimku představují dvě trajektorie směřující do sedlového bodu.



Obr. 11: Fázový portrét systému (5.3) s parametry  $\alpha = -3$ ,  $\beta = 1$ ,  $\omega = 1$ ,  $\delta = 1$

Uvažujme-li parametr  $\alpha$  kladný, pak se dá ověřit, že počátek souřadného systému bude asymptoticky stabilním ohniskem, případně uzlem. Krajní singulární body budou sedla.



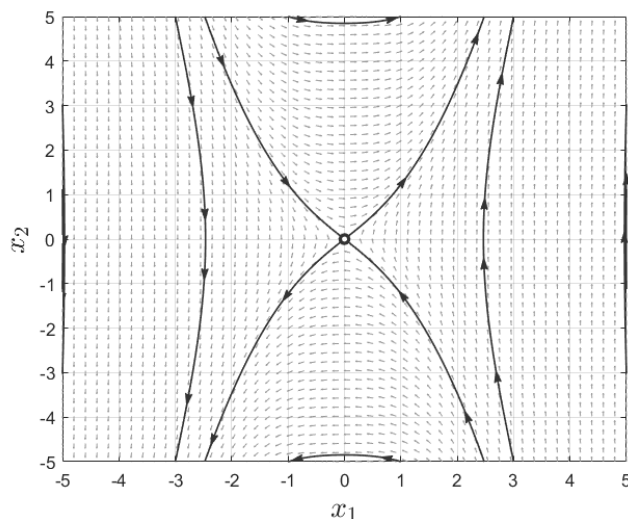
Obr. 12: Fázový portrét systému (5.3) s parametry  $\alpha = 3$ ,  $\beta = -1$ ,  $\omega = 1$ ,  $\delta = 1$

Tato situace je podobná té, ke které dochází v netlumeném systému (5.4). Rozdílem je, že

se zde již nevyskytují heteroklinické trajektorie. Oblast stabilních řešení se mění na oblast asymptoticky stabilních řešení přitahovaných ohniskem, které se nachází v počátku. Fázový portrét je zobrazen na Obr. 8.

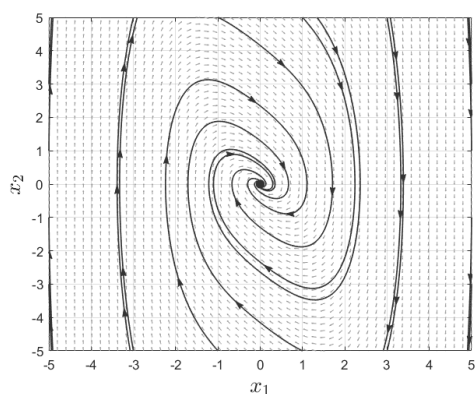
Do této chvíle jsme předpokládali, že parametry  $\alpha$  a  $\beta$  jsou opačných znamének. Díky tomu byla zaručena existence tří singulárních bodů. Nyní budeme uvažovat, že parametry  $\alpha$  a  $\beta$  mají stejné znaménko. To způsobí, že výraz  $\sqrt{-\alpha/\beta}$  bude vždy komplexním číslem a jediným singulárním bodem systémů (5.4), (5.3) bude bod  $[0, 0]$ .

Uvažujeme-li  $\alpha$  i  $\beta$  záporné, pak v případě tlumeného systému (5.3) i netlumeného systému bude počátek sedlem.

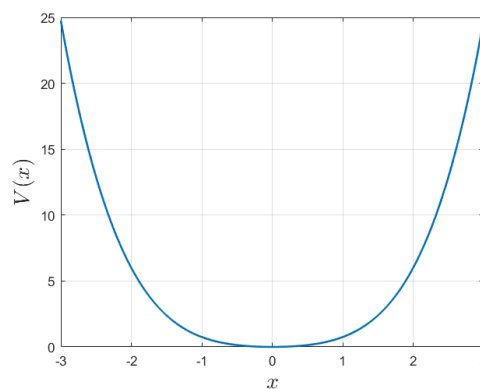


Obr. 13: Fázový portrét systému (5.4) s parametry  $\alpha = -1$ ,  $\beta = -1$ ,  $\omega = 1$

Pro parametry  $\alpha$ ,  $\beta$  kladné je počátek středem pro systém (5.4) a asymptoticky stabilním ohniskem pro systém (5.3). Tyto dvě konfigurace z hlediska potenciální energie tvoří systém potenciálu s jednou jámou (*single-well potential*).



Obr. 14: Fázový portrét systému (5.3) s parametry  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 1$ ,  $\omega = 1$ ,  $\delta = 1$



Obr. 15: Potenciální energie systému (5.3) pro  $\alpha = 1$  a  $\beta = 1$

Uvažujeme-li tlumený systém (5.3), pak budou všechna řešení přitahována k počátku, v případě netlumeného systému (5.4) budou všechna řešení stabilní a budou stále na stejné energetické hladině.

## 5.2 Buzený Duffingův oscilátor

V následující části se zaměříme na analýzu buzeného Duffingova oscilátoru, který je určen diferenciální rovnicí druhého řádu (5.1). Převědeme ji na systém

$$\begin{aligned}x_1' &= x_2, \\x_2' &= -\delta x_2 - \alpha x_1 - \beta x_1^3 + \gamma \cos(\omega t),\end{aligned}\tag{5.9}$$

kde  $x_1 = x$  a  $x_2 = x'$ . Budicí člen  $\gamma \cos(\omega t)$ , který se nyní v systému objevuje, obsahuje nezávisle proměnnou  $t$ , což způsobí, že se již nejedná o autonomní systém. Jak jsme ale dříve uvedli, jsme schopni jej na autonomní systém převést. Získáváme tedy autonomní systém třetího řádu ve tvaru

$$\begin{aligned}x_1' &= x_2, \\x_2' &= -\delta x_2 - \alpha x_1 - \beta x_1^3 + \gamma \cos(\omega x_3) \\x_3' &= 1.\end{aligned}\tag{5.10}$$

Pro zobrazení řešení a pozorování kvalitativních vlastností v novém třídimenziálním prostoru se dosud používané fázové portréty ukáží jako velice nepřehledné. Budeme proto v následujícím textu využívat jejich projekci do prostoru proměnných  $(x_1, x_2)$ . Tímto jsme se ale stále nezbavili všech problémů, které se pojí s nově se vyskytující budicí členem. Jelikož je původní systém neautonomní, bude docházet k průnikům jednotlivých trajektorií při vykreslování zmíněných projekcí fázových portrétů. Pro větší přehlednost budeme proto raději místo vykreslování projekcí fázových portrétů spíše zobrazovat jednotlivé trajektorie.

Další skutečností, kterou je třeba se v případě buzeného Duffingova oscilátoru zabývat a která bude tvořit podstatnou část dalšího textu, je otázka chaotických řešení a jejich atraktorů. Oproti nebuzenému oscilátoru umožňuje nově se vyskytující třetí dimenze přítomnost chaotických řešení. Ke znázornění chaotických atraktorů budou kromě trajektorií použity i Poincarého řezy.

V rámci kvalitativní analýzy systému (5.10) se dále omezíme pouze na takové systémy, kde je  $\alpha < 0$  a  $\beta > 0$ . Jde tedy o systémy odpovídající úloze dvojité jámy potenciálu, která byla představena v předchozí kapitole.

Prvním rozdílem oproti nebuzenému systému (5.3) je skutečnost, že soustava rovnic

$$\begin{aligned}x_2 &= 0, \\-\alpha x_1 - \beta x_1^3 - \delta x_2 &= 0, \\1 &= 0,\end{aligned}$$

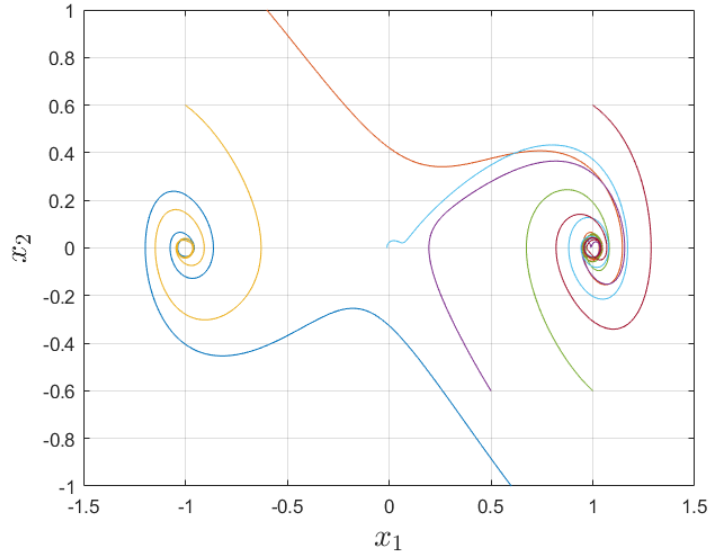
nemá řešení, a systém (5.10) proto nemá žádné singulární body a tedy neexistují konstantní řešení. Atraktory proto budou buď limitní cykly nebo chaotické atraktory.

Nejprve se budeme zabývat systémem (5.10), pro který budeme postupně volit různé hodnoty amplitudy budicí síly  $\gamma$  a budeme sledovat, jakým způsobem se mění trajektorie řešení systému (5.10). Ostatní parametry systému budou fixní. Systém (5.10) byl řešen numericky pomocí rutiny ode45. V prováděných numerických výpočtech byly parametry zafixovány na následujících hodnotách  $\alpha = -1$ ,  $\beta = 1$ ,  $\omega = 1$  a  $\delta = 0,7$ . Parametr  $\gamma$  se v cyklu postupně měnil od hodnoty 0,01 po jedné setině až na hodnotu 3. V každém kroku se vypočítaly hodnoty Ljapunovových exponentů. V případě, že byl některý z nich kladný, byla příslušná hodnota  $\gamma$  zapsána do pole hodnot, pro které systém vykazoval chaotické chování.

Počáteční podmínky byly voleny v čase  $t = 0$  a simulace byly ukončeny v čase  $t = 500$ . Postupně zde budou předvedeny obrázky zachycující průběhy sedmi trajektorií řešení systému (5.10) pro zvyšující se parametr  $\gamma$ . Obrázky obsahují sedm trajektorií řešení pro následující počáteční podmínky  $\mathbf{x}'(0) = (-0,6; 1)^T$ ,  $\mathbf{x}'(0) = (-1; 0,6)^T$ ,  $\mathbf{x}'(0) = (0,6; -1)^T$ ,  $\mathbf{x}'(0) =$

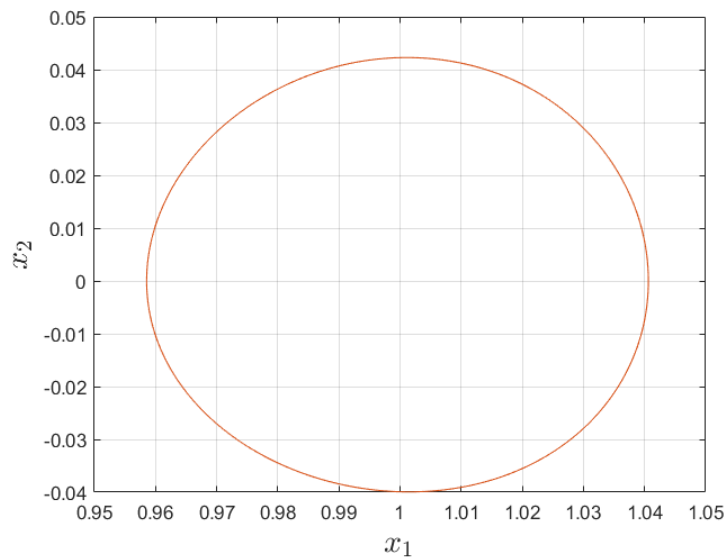
$(0, 5; -0, 6)^T$ ,  $\mathbf{x}'(0) = (1; -0, 6)^T$ ,  $\mathbf{x}'(0) = (-0, 01; 0)^T$  a  $\mathbf{x}'(0) = (1; 0, 6)^T$ . Pokud budeme vykreslovat pouze jednu trajektorii, půjde o řešení s počáteční podmínkou  $\mathbf{x}'(0) = (0, 5; -0, 6)^T$ .

Nejprve předvedme trajektorie řešení systému (5.10) pro volbu  $\gamma = 0, 05$ . Tato situace je ukázána na následujícím obrázku.



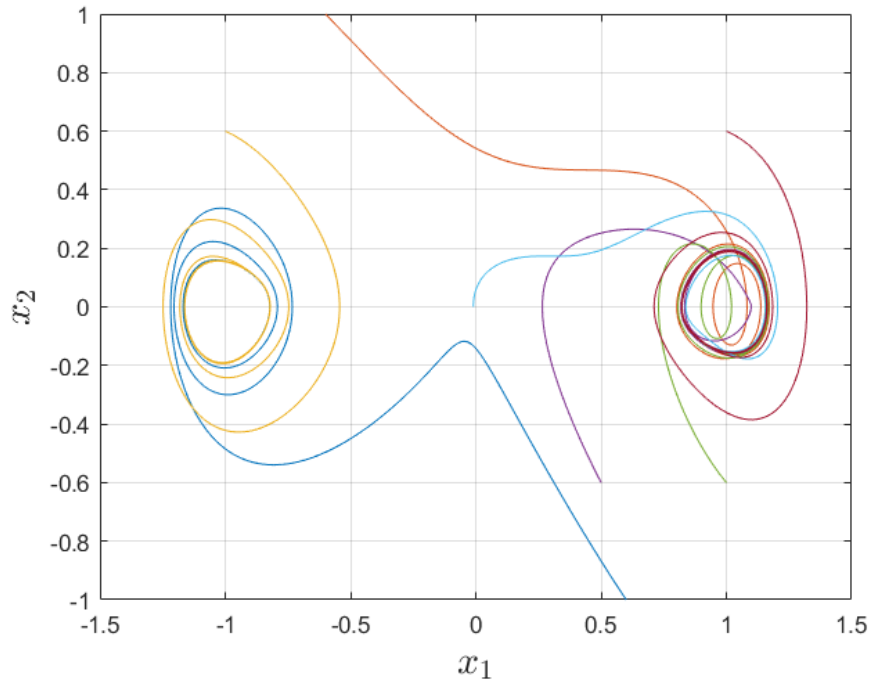
Obr. 16: Trajektorie řešení systému (5.10) s parametrem  $\gamma = 0, 05$

Struktura zachycená na Obr. 12 je velmi podobná fázovému portrétu pro nebuzený oscilátor (5.3), který je zobrazen na Obr. 7. Jednotlivá řešení jsou přitahována do jedné ze dvou potenciálových jam. Nyní je ovšem periodická budicí síla  $\gamma \cos(\omega t)$  nenulová a atraktory odpovídající potenciálovým jámám nejsou singulární body, nýbrž stabilní limitní cykly. Následující obrázek obsahuje detail pravého limitního cyklu, jde o jednotlivé trajektorie řešení, ovšem vykreslené až od času  $t = 300$ .

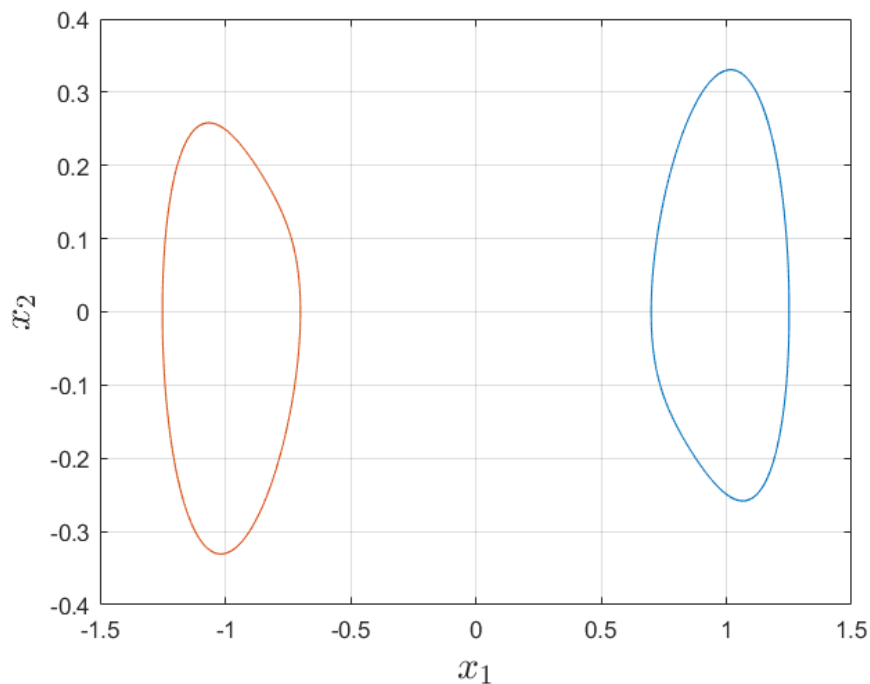


Obr. 17: Pravý limitní cyklus pro  $\gamma = 0, 05$

Dále uvažujeme  $\gamma = 0, 3$ . Dle očekávání se zvětšily limitní cykly, jelikož na systém působila větší síla. Rovněž můžeme pozorovat častější křížení jednotlivých trajektorií.

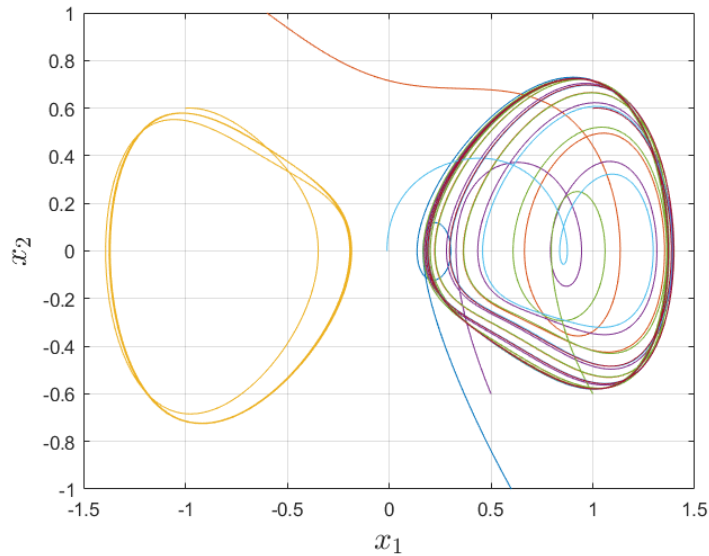


Obr. 18: Trajektorie řešení systému (5.10) s parametrem  $\gamma = 0,3$

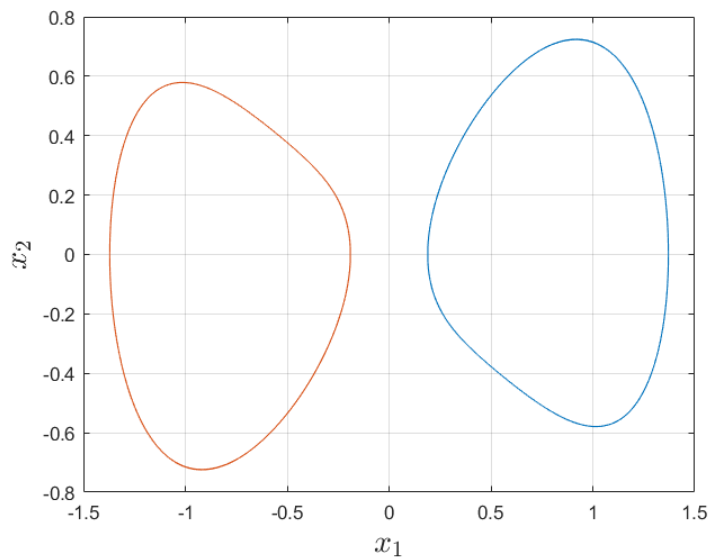


Obr. 19: Limitní cykly pro  $\gamma = 0,3$

Pokračujeme se zvyšováním hodnoty  $\gamma$  a začínáme se blížit hodnotám, o který bylo na základě výpočtu Ljapunovových exponentů rozhodnuto, že pro ně se systém chová chaoticky. Nejnižší hodnota amplitudy budící síly, pro kterou systém (5.10) vykazuje chaotické chování, byla určena jako  $\gamma = 0,51$ . Podívejme se dále, jakým způsobem se bude měnit chování systému pro parametr  $\gamma$  blížíící se hodnotě 0,51. Následující obrázky zachycují situaci pro  $\gamma = 0,46$ .

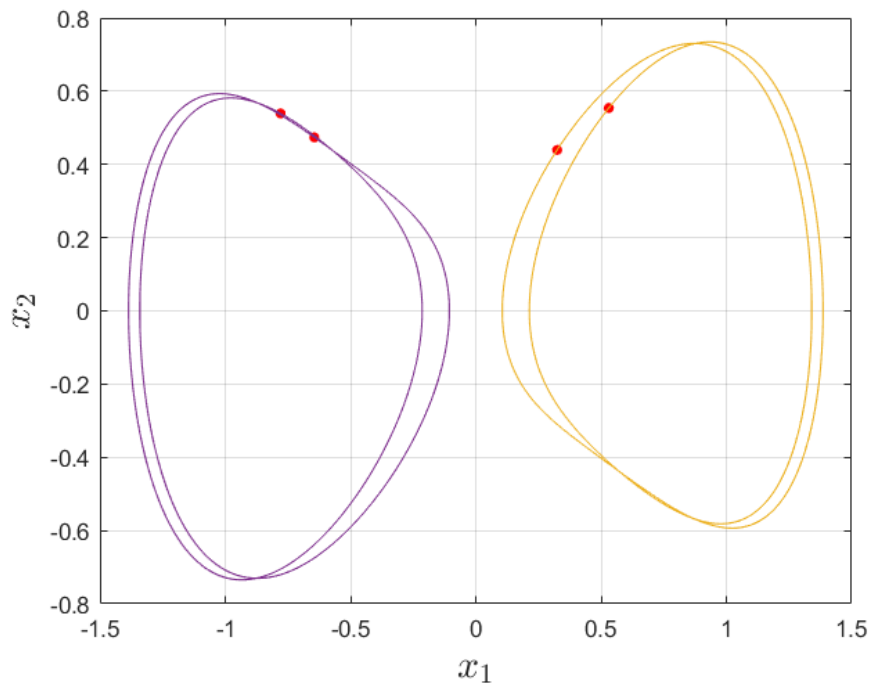


Obr. 20: Trajektorie řešení systému (5.10) s parametrem  $\gamma = 0,46$

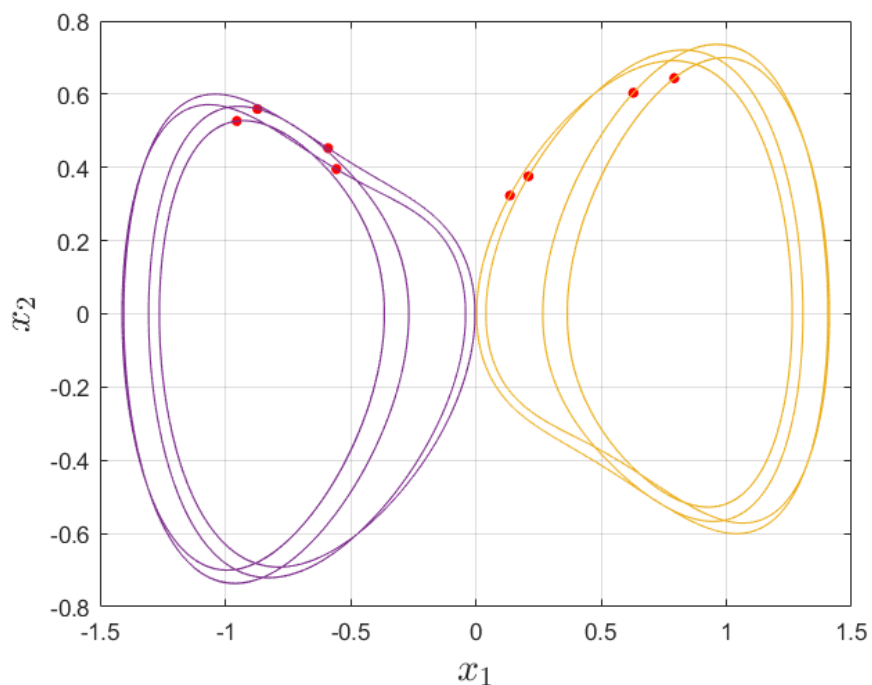


Obr. 21: Limitní cykly pro  $\gamma = 0,46$

Jelikož začínají být křížící se trajektorie nepřehledné, budou dále užívány pouze obrázky obsahující jednu či dvě trajektorie, případně obrázky limitních cyklů. Pro hodnotu  $\gamma = 0,48$  se projevuje bifurkace. Jde o tzv. bifurkaci zdvojení periody (*period-doubling bifurcation*). Princip této bifurkace spočívá v tom, že pro malou změnu parametru systému vznikne ze stávající trajektorie nová s dvojnásobně dlouhou periodou. Jednou z možností, jak může v dynamických systémech vzniknout chaos, je kaskáda zdvojení periody, tedy nekonečná posloupnost navazujících bifurkací zdvojení periody. Více informací o tomto typu bifurkace lze nalézt například v publikaci [3]. Obrázky limitních cyklů doplníme o červené body, které představují řešení v časových okamžicích  $t = kT$ , kde  $k$  je celé číslo a  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  je perioda budící síly. Jde tedy o body Poincarého řezu. Jestliže pozorujeme dva takové body, došlo skutečně ke zdvojení periody a limitní cyklus nazveme  $2T$ -periodickým.

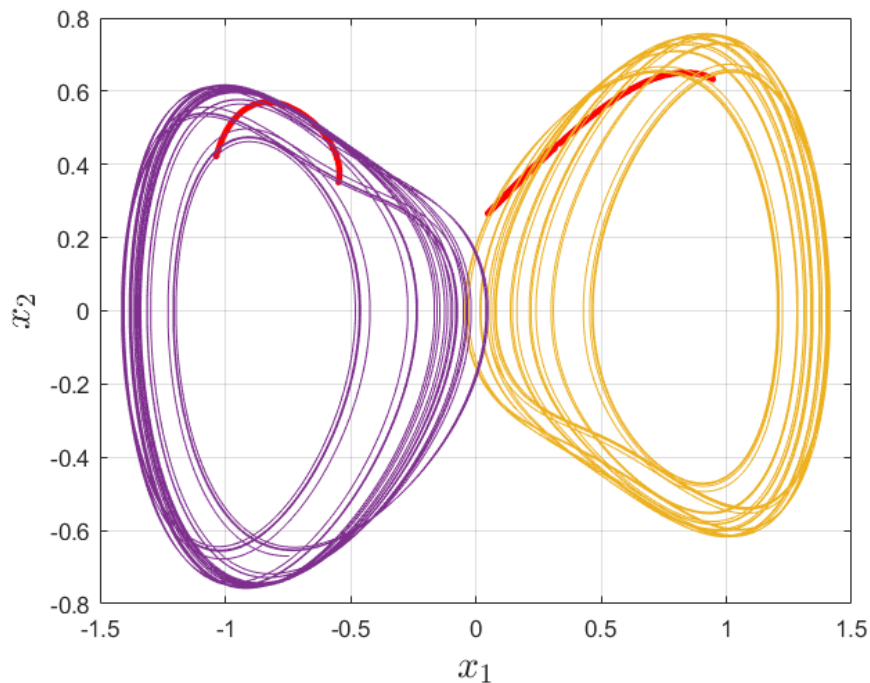


Obr. 22:  $2T$ -periodické limitní cykly pro  $\gamma = 0,48$

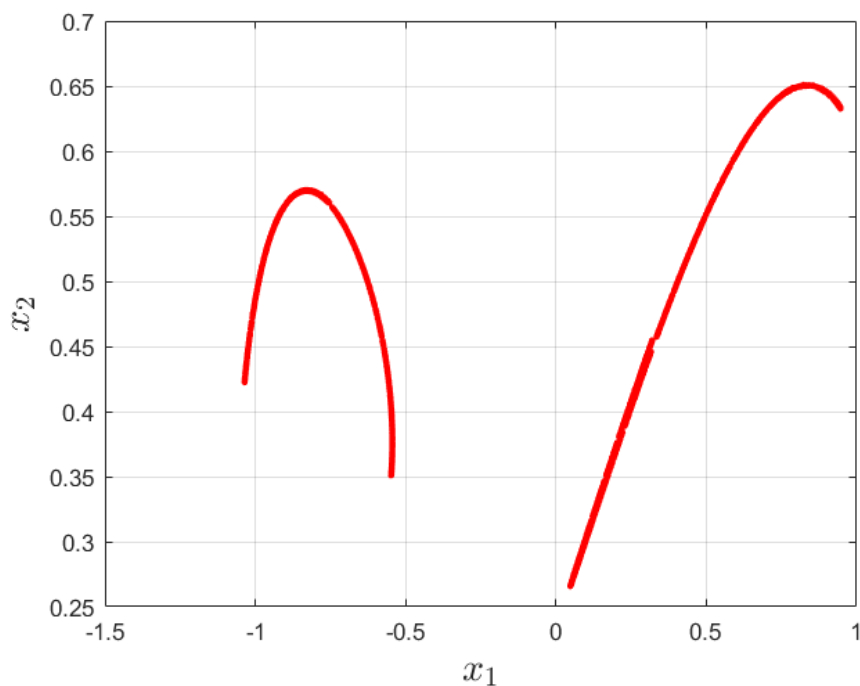


Obr. 23:  $4T$ -periodické limitní cykly pro  $\gamma = 0,5$

Vidíme, že dochází k opakované bifurkaci zdvojení periody, což vede k situaci, kdy existuje cyklus s nekonečně velkou periodou. Skutečně, zvýšíme-li amplitudu budící síly na hodnotu  $\gamma = 0,51$ , můžeme pozorovat dva chaotické atraktory.



Obr. 24: Limitní cykly pro  $\gamma = 0,51$

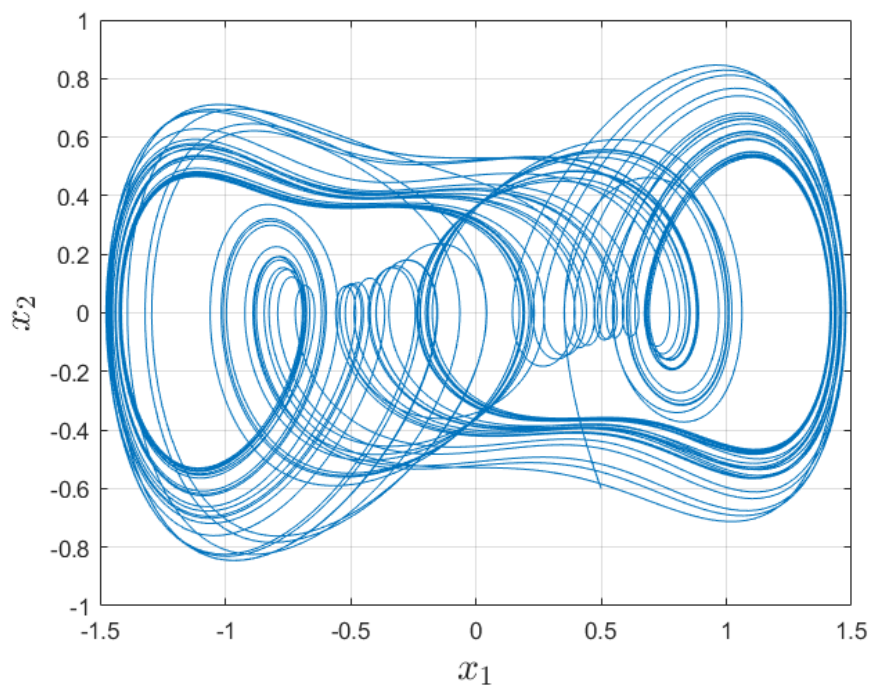


Obr. 25: Poincarého řez chaotických atraktorů pro  $\gamma = 0,51$

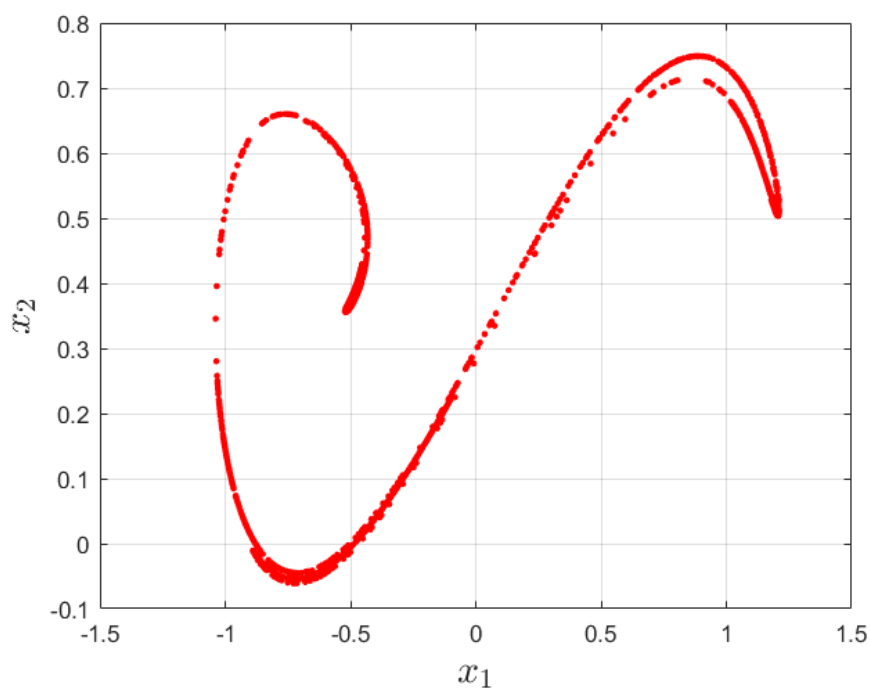
Dva malé chaotické atraktory existují pouze chvíli, jelikož dochází k bifurkaci anglicky nazývané *symmetry breaking*, která se projevuje tím, že se začnou překrývat oblasti atraktivity chaotických atraktorů. To vyústí ve vznik jednoho velkého chaotického atraktoru.

Pro rozmezí hodnot  $\gamma = 0,55-0,67$  již existuje pouze jeden chaotický atraktor. Amplituda budící síly je již natolik velká, že jednotlivá řešení mohou překmitávat mezi oběma potenciá-

lovými jámami.

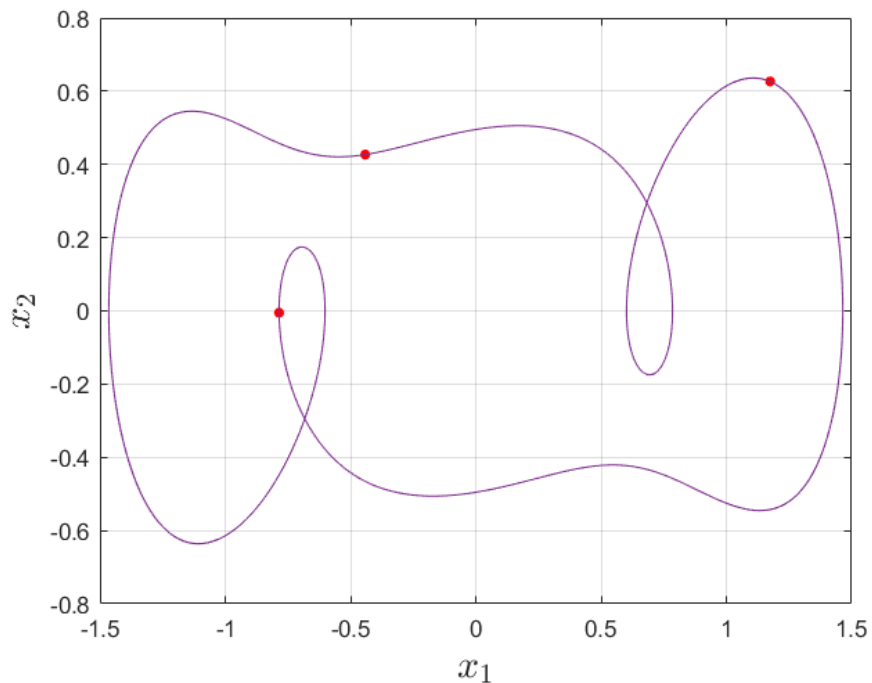


Obr. 26: Trajektorie řešení systému (5.10) s parametrem  $\gamma = 0,63$



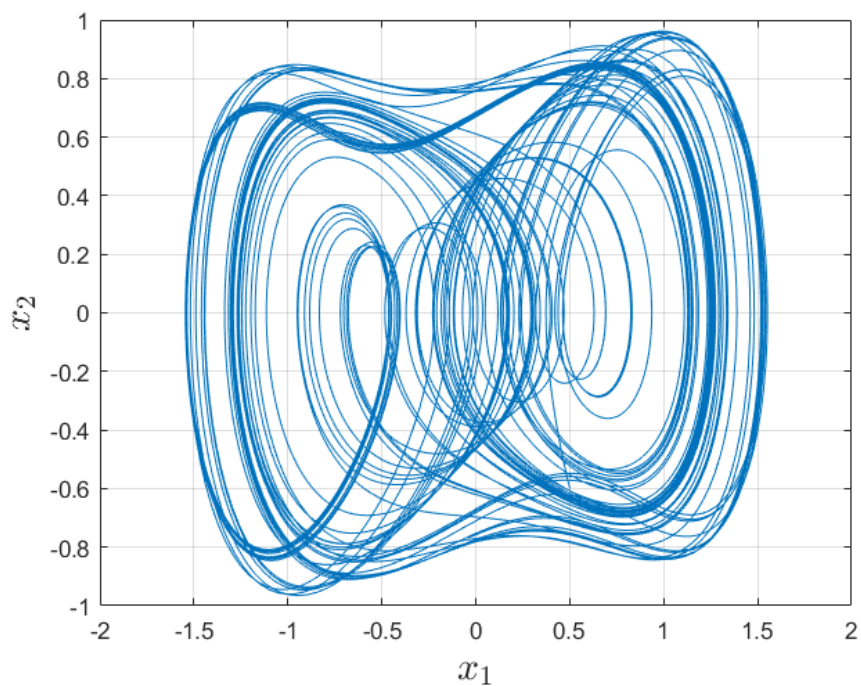
Obr. 27: Poincarého řez chaotického atraktoru pro  $\gamma = 0,63$

Zvětšíme-li dále parametr  $\gamma$ , systém (5.10) přestane být v rozmezí hodnot  $\gamma = 0,68-0,76$  chaotický a řešení budou přitahována stabilním limitním cyklem, který je  $3T$ -periodický.

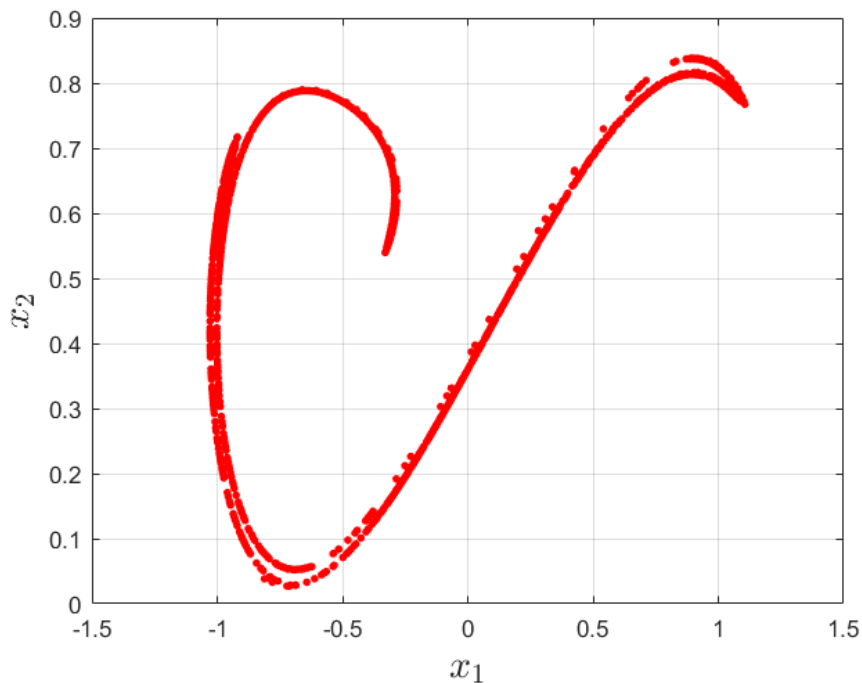


Obr. 28: Trajektorie řešení systému (5.10) s parametrem  $\gamma = 0,7$

Další kvalitativní změna se projeví opětovným vznikem chaotického atraktoru v rozmezí hodnot  $0,77-0,92$  parametru  $\gamma$ .

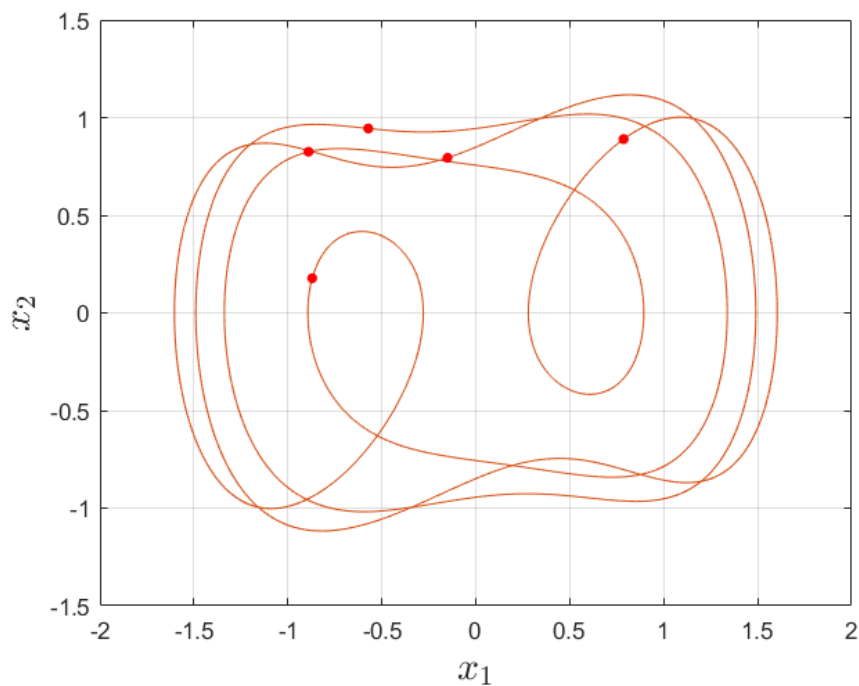


Obr. 29: Trajektorie řešení systému (5.10) s parametrem  $\gamma = 0,8$



Obr. 30: Poincarého řez chaotického atraktoru pro  $\gamma = 0,8$

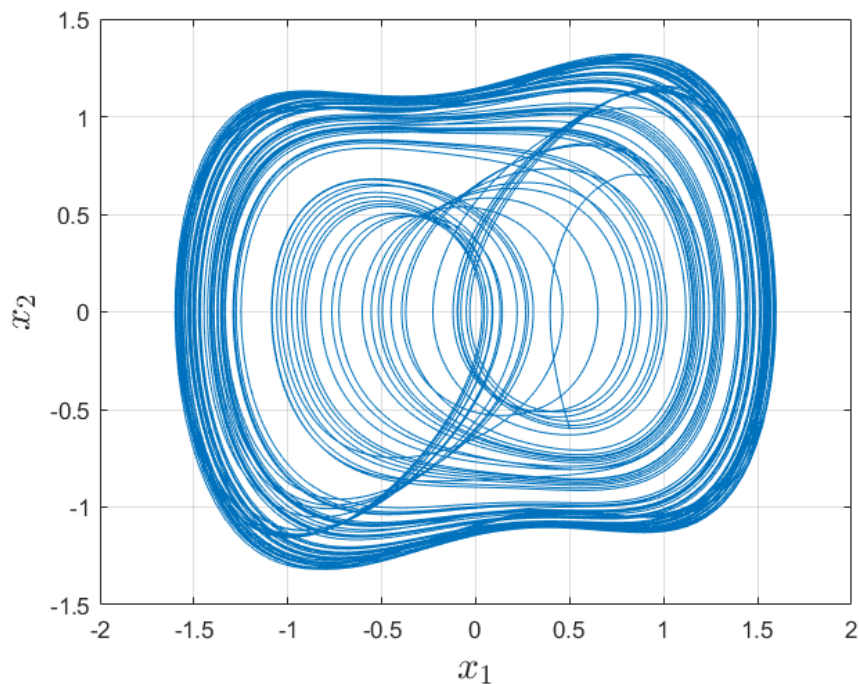
Typickým znakem chování buzeného Duffingova oscilátoru je úzké pásmo hodnot parametru  $\gamma$ , pro které jsou všechna řešení systému (5.10) ustálena na  $5T$ -periodickém atraktoru, který je zobrazen na následujícím obrázku. Ke vzniku tohoto atraktoru dochází okolo hodnoty  $\gamma = 0,95$ .



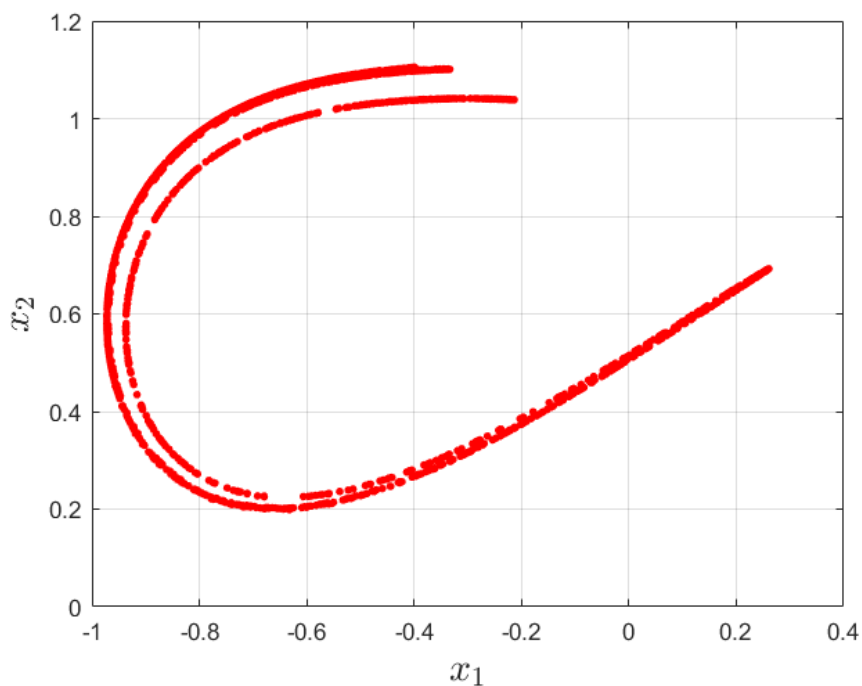
Obr. 31: Trajektorie řešení systému (5.10) s parametrem  $\gamma = 0,95$

Následující rozmezí hodnot amplitudy budící síly  $\gamma = 0,96-1,14$  je poslední oblastí, pro

kterou se systém (5.10) chová chaoticky.

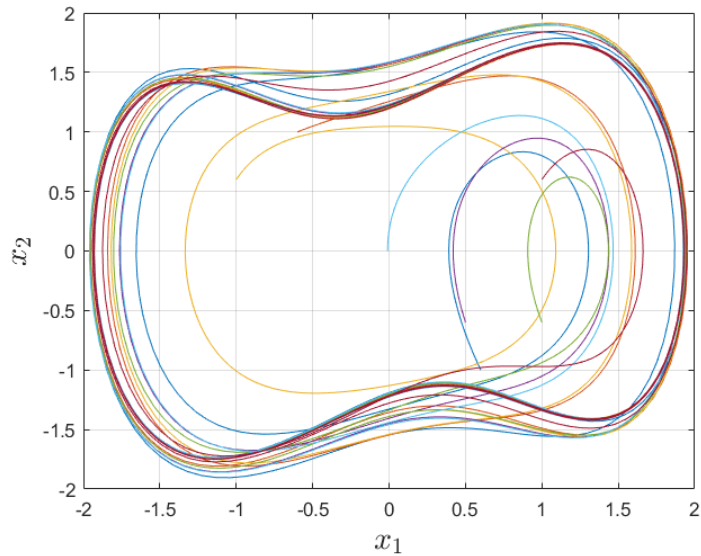


Obr. 32: Trajektorie řešení systému (5.10) s parametrem  $\gamma = 1, 1$

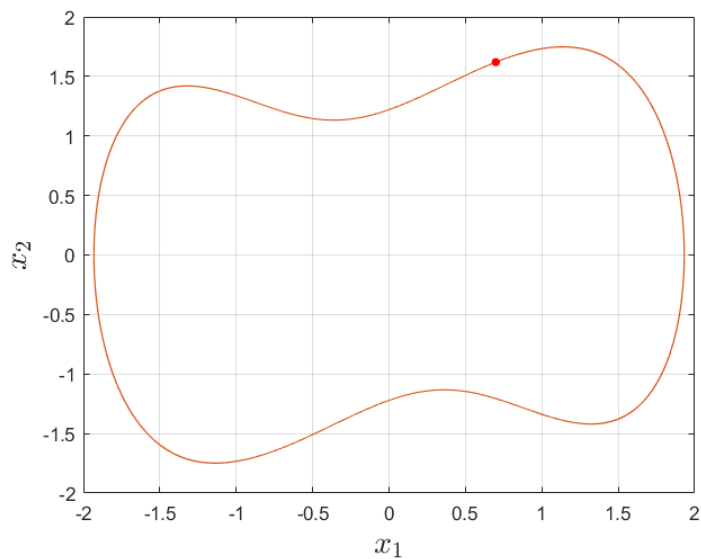


Obr. 33: Poincarého řez chaotického atraktoru pro  $\gamma = 1, 1$

Přesáhne-li  $\gamma$  hodnotu 1,15, systém se dále (5.10) nebude chovat chaoticky. Místo toho předvedeme nový typ atraktoru, ke kterému všechna řešení směřují. Amplituda budící síly je již natolik velká, že se objeví stabilní limitní cyklus, který odpovídá periodickým kmitům přes obě potenciálové jámy. Tato situace je zachycena na následujících dvou obrázcích.



Obr. 34: Trajektorie řešení systému (5.10) s parametrem  $\gamma = 1,6$



Obr. 35: Limitní cyklus pro  $\gamma = 1,6$

Shrňme nyní pozorované výsledky. Bylo předvedeno, že pro malé hodnoty  $\gamma$  se systém (5.10) chová podobně jako systém nebuzeného Duffingova oscilátoru (5.3). Se zvyšující se hodnotou parametru  $\gamma$  systém pomocí bifurkací zdvojení periody začíná vykazovat chaotické chování. Poté je situace velice složitá a pro různá rozmezí hodnot  $\gamma$  existují buď různé chaotické atraktory nebo stabilní limitní cykly různé periody. Když dosáhne  $\gamma$  dostatečně velké hodnoty, řešení systému se (5.10) ustálí na velkém atraktoru a periodicky překmitávají mezi oběma potenciálovými jámami.

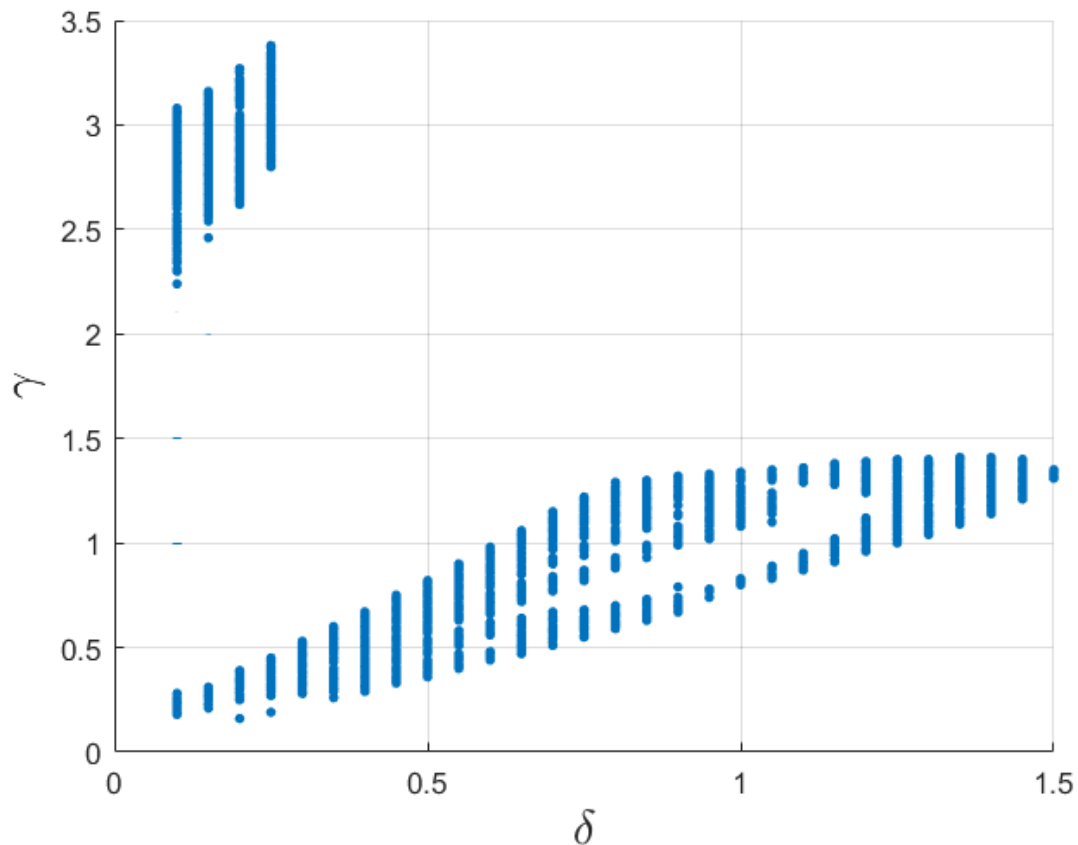
Výpočtem Ljapunovových exponentů bylo ověřeno, že trajektorie, případně Poincarého řezy, které vypadaly chaoticky, skutečně chaotické chování vykazovaly.

Poznamenejme rovněž, že základní rysy kvalitativních vlastností systému (5.10), jako jsou zavedení chaosu do systému nebo například existence  $5T$ -periodického atraktoru, odpovídají pozorováním provedeným v publikacích [6], [7], [8], [9], [10].

### 5.3 Detekce chaosu

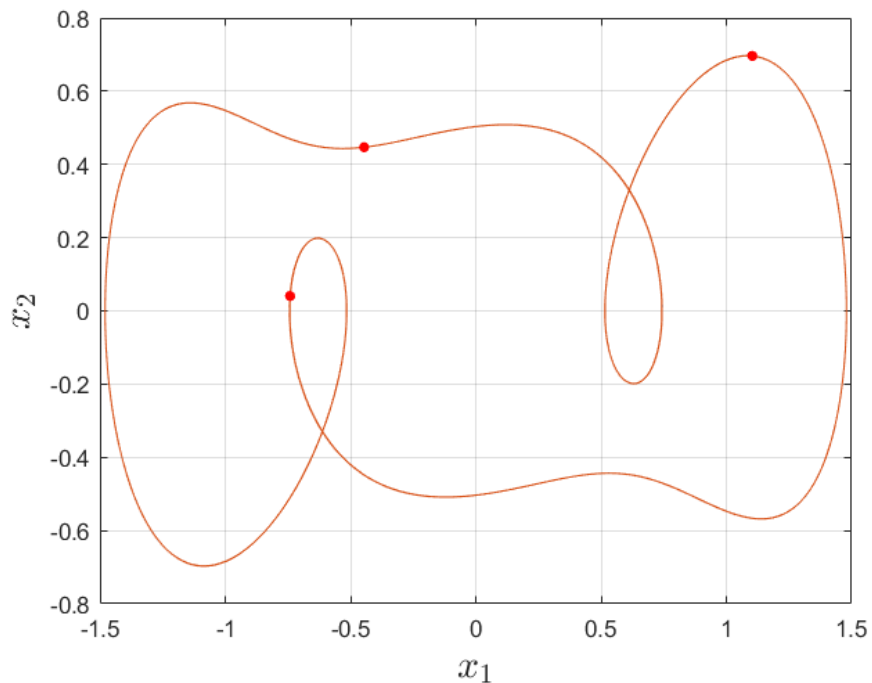
V této sekci budeme hledat parametry systému (5.10), pro které bude daný systém vykazovat chaotické chování. O tom, zda daný systém bude chaotický či nikoliv, bude rozhodovat, stejně jako v minulé kapitole, program, který vypočítá hodnotu největšího Ljapunovova exponentu. Jestliže je kladný, pak budeme vyšetřovaný systém považovat za chaotický.

Nejprve se zaměříme na souvislost parametrů  $\gamma$  a  $\delta$ . Uvažujme systém (5.10) se zafixovanými parametry  $\alpha = -1$ ,  $\beta = 1$ ,  $\omega = 1$ . Parametry  $\delta$  a  $\gamma$  se postupně měnily ve dvou cyklech. Parametr  $\delta$  procházel hodnoty od 0,1 krokem 0,05 po hodnotu 1,8. Parametr  $\gamma$  náleží do rozmezí 0,1–5, přičemž se postupovalo krokem 0,01. Výsledkem je množina bodů v rovině parametrů  $(\delta, \gamma)$ , pro které systém (5.10) vykazuje chaotické chování.



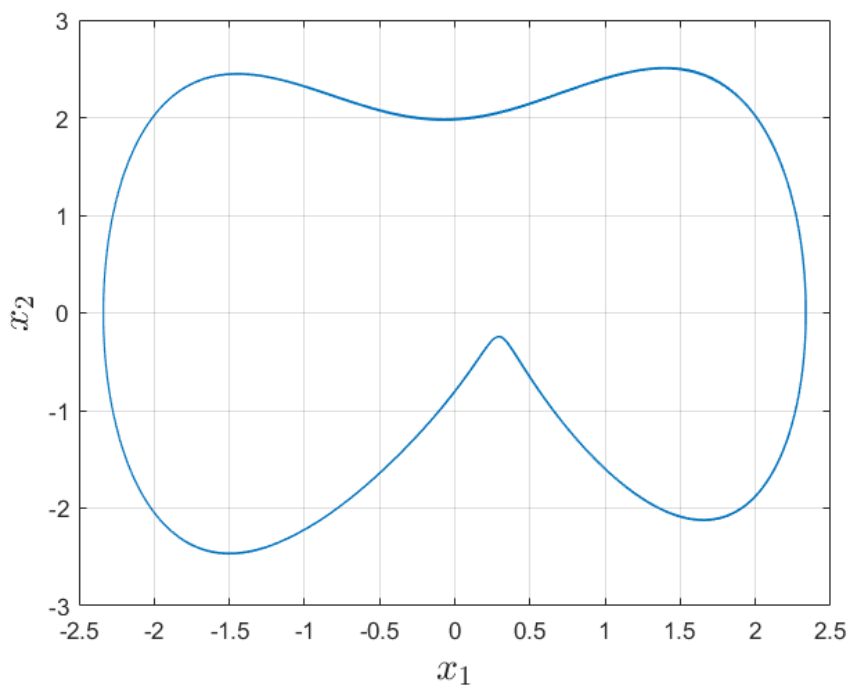
Obr. 36: Oblast chaosu pro parametry  $\delta$  a  $\gamma$

Ve spodní části obrázku pozorujeme očekávaný trend. S rostoucí hodnotou tlumicího členu  $\delta$  se zvyšuje hodnota amplitudy budicí síly  $\gamma$  nutná k tomu, aby se projevilo chaotické chování. Zároveň zde můžeme pozorovat jistou oblast parametrů  $(\delta, \gamma)$  v okolí bodu  $[1, 1]$ , pro kterou není systém (5.10) chaotický. Tato skutečnost ale odpovídá výsledkům analýzy stability provedené v předešlé kapitole. Se zvyšující se hodnotou parametru  $\gamma$  docházelo k situacím, kdy chaotický atraktor vznikl a opět zanikl. Posléze se vytvořil nový. Následující obrázek zachycuje jeden typ atraktoru, který existuje pro parametry  $\delta = 1$ ,  $\gamma = 1$ .

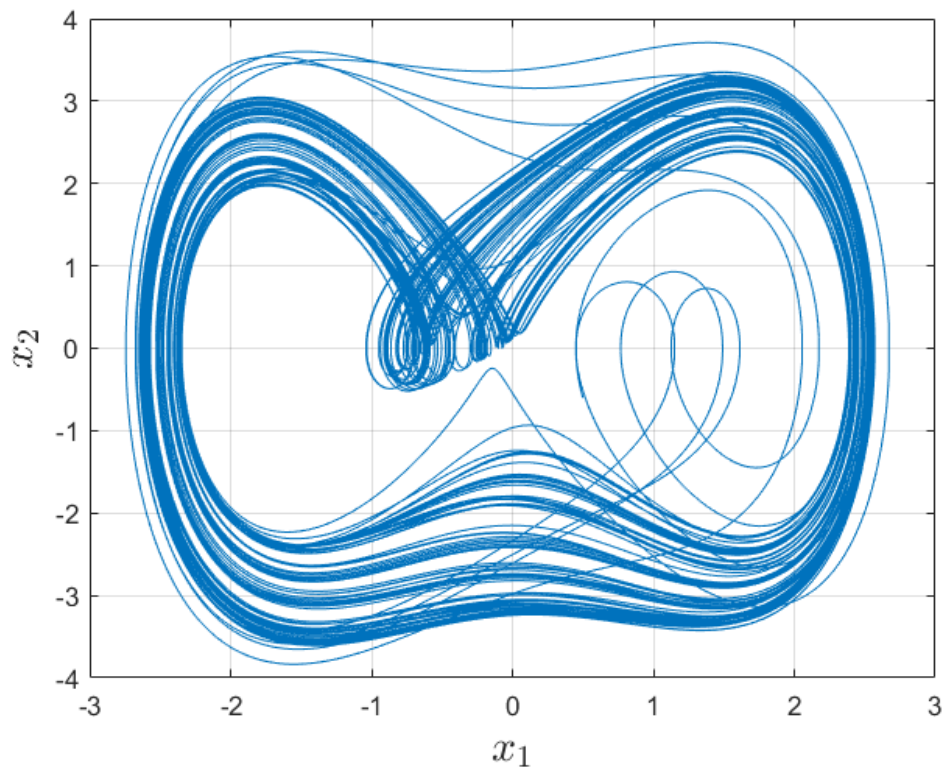


Obr. 37:  $3T$ -periodický limitní cyklus pro  $\delta = 1$ ,  $\gamma = 1$

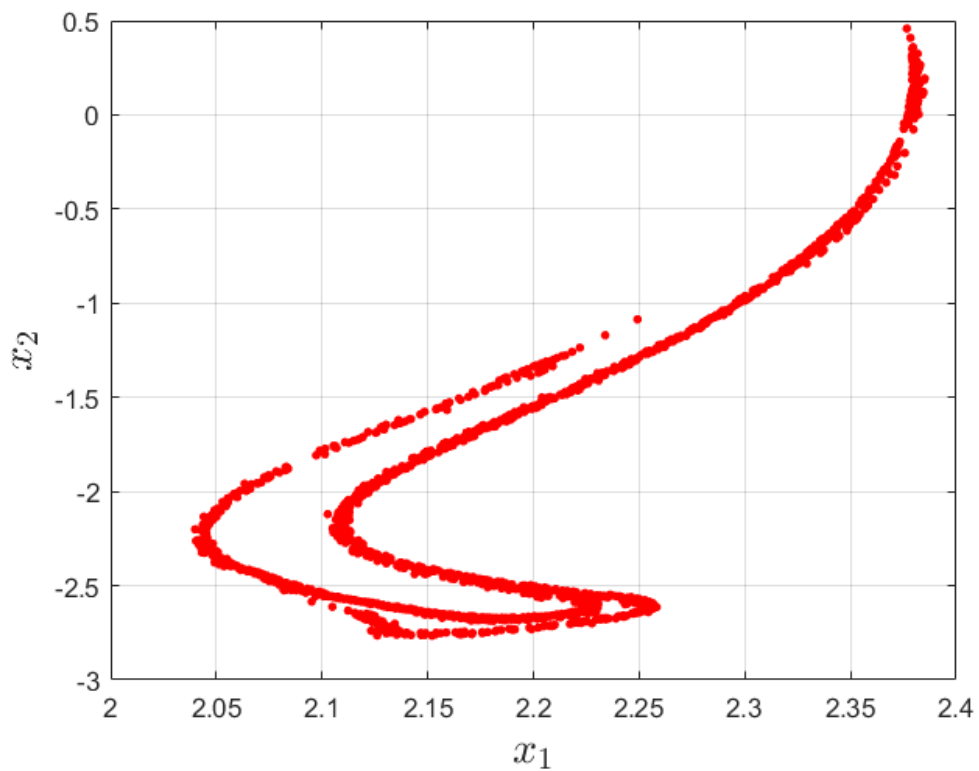
Na Obr. 32 lze dále vidět, že existuje i druhá oblast chaosu pro malé hodnoty  $\delta$  a vysoké hodnoty  $\gamma$ . Na následujících obrázcích budou zachyceny limitní cykly pro  $\gamma = 2, 6$  a  $\gamma = 4$  a také chaotický atraktor pro  $\gamma = 3$ . Parametr  $\delta$  je ve všech případech roven 0,25.



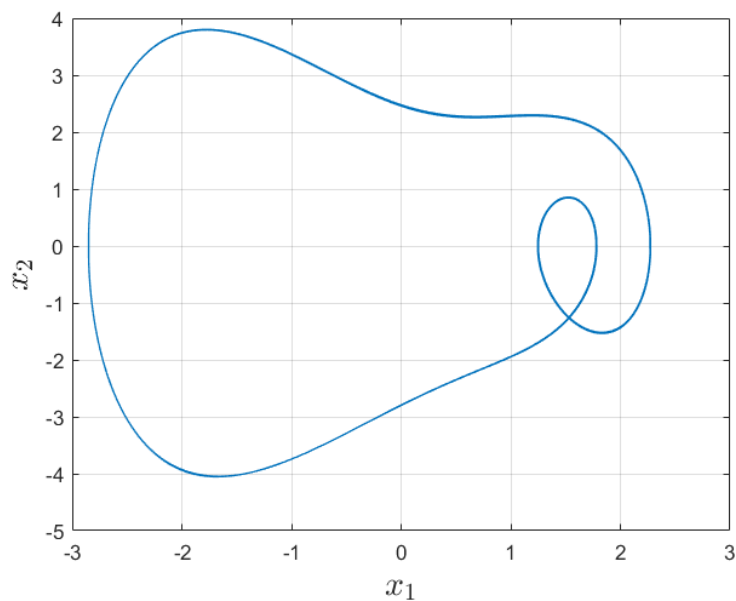
Obr. 38: Limitní cyklus pro  $\delta = 0,25$ ;  $\gamma = 2,6$



Obr. 39: Trajektorie chaotického řešení pro  $\delta = 0,25$ ;  $\gamma = 3$

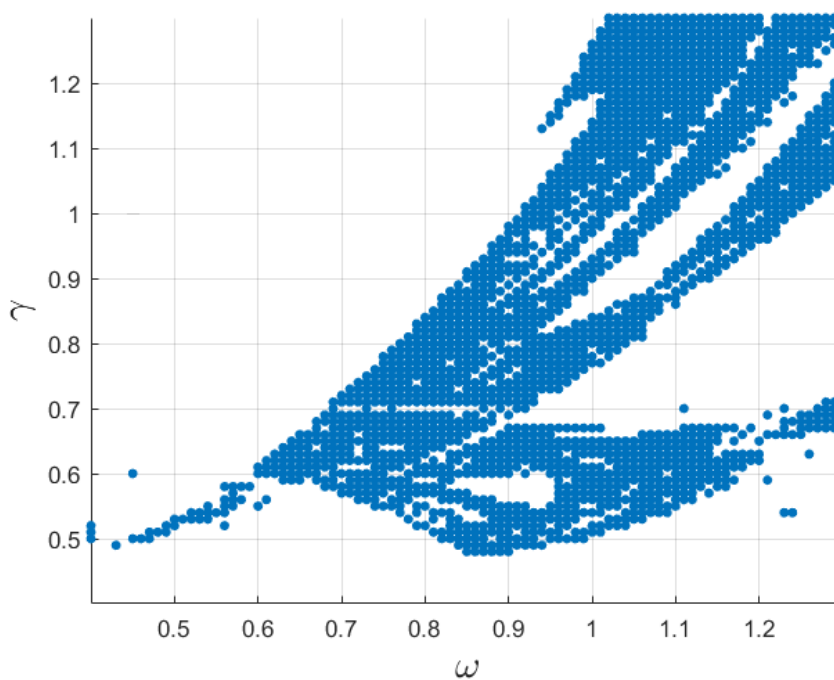


Obr. 40: Poincarého řez chaotického atraktoru pro  $\delta = 0,25$ ;  $\gamma = 3$



Obr. 41: Limitní cyklus pro  $\delta = 0,25$ ;  $\gamma = 4$

Nyní se podíváme na závislost mezi parametry  $\omega$  a  $\gamma$ . Ostatní parametry jsou zafixovány následovně  $\alpha = -3$ ,  $\beta = 1$ ,  $\delta = 0,7$ .



Obr. 42: Oblast chaosu pro parametry  $\omega$  a  $\gamma$

V pravém horním rohu Obr. 38 lze opět vidět pás parametrů, pro které nenastává chaos.

## 6 Stabilita nelineárních mechanicko-elektrických soustav

V této kapitole bude provedena analýza stability modelu piezoelektrického vibračního mikro-rosběrače, který je popsán rovnicemi (4.2) a (4.3). Rovnici (4.2) nejprve upravíme podobně jako v případě nelineárního oscilátoru, získáme tedy rovnici

$$x'' + \delta x' + \alpha x + \beta x^3 + \Theta u = \gamma \cos(\omega t), \quad (6.1)$$

ke které přidáme elektrickou rovnici

$$u' = \frac{1}{C}(\Theta x' - \frac{u}{R}). \quad (6.2)$$

*Poznámka.* Pro získání rovnice (6.2) jsme rovnici (4.3) vydělili členem  $m$  obdobně jako u rovnice (4.2), ale zachovali jsme původní značení.

Dále rovnice (6.1) a (6.2) převedeme na autonomní systém rovnic

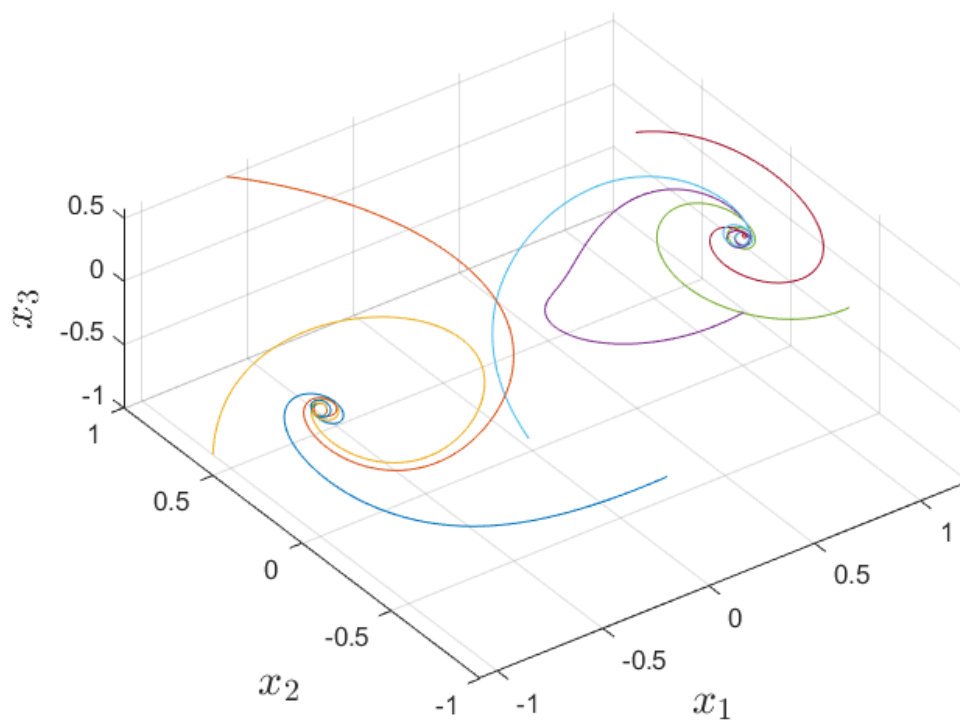
$$\begin{aligned} x_1' &= x_2, \\ x_2' &= -\delta x_2 - \alpha x_1 - \beta x_1^3 + \gamma \cos(\omega x_4), \\ x_3' &= \frac{1}{C}(\Theta x_2 - \frac{x_3}{R}), \\ x_4' &= 1, \end{aligned} \quad (6.3)$$

kde  $x_1 = x$ ,  $x_2 = x'$ ,  $u = x_3$  a  $x_4 = t$ .

Nejprve poznamenejme, že v případě, kdy uvažujeme člen  $\gamma \cos(\omega x_4)$  nulový, singulární body systému (6.3) mají stejné souřadnice v proměnných  $x_1$  a  $x_2$  jako u Duffingova oscilátoru (5.3). Proměnná  $x_3$  je pro všechny singulární body nulová, všechny singulární body tedy leží v rovině  $x_3 = 0$ .

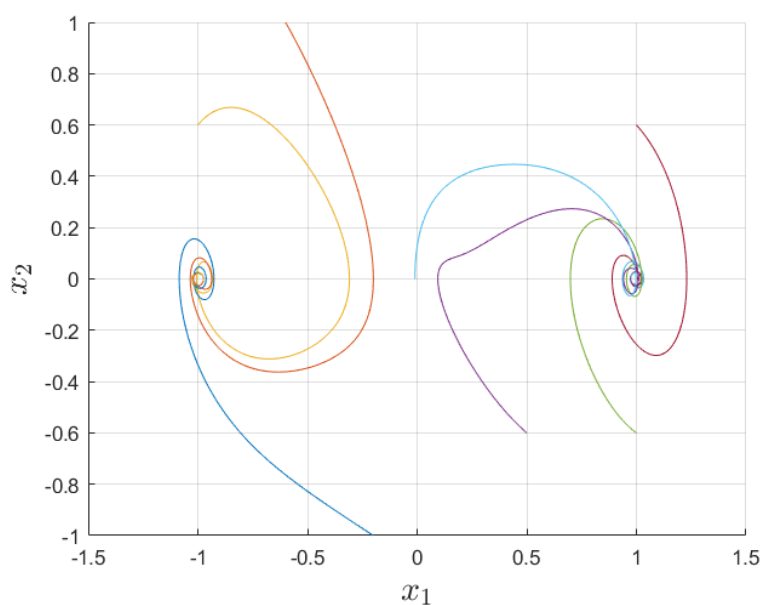
Přistupme rovnou k samotné analýze stability kompletního systému (6.3). Budeme vykreslovat trajektorie řešení systému (6.3) do prostoru  $(x_1, x_2, x_3)$ , případně do prostoru  $(x_1, x_2)$ , pro porovnání s trajektoriemi řešení buzeného Duffingova oscilátoru (5.3).

Postupovat budeme analogicky jako v případě buzeného Duffingova oscilátoru (5.3) a omezíme se na úlohy dvojité jámy potenciálu, tedy budeme uvažovat  $\alpha < 0$  a  $\beta > 0$ . Ostatní parametry zafixujeme následujícím způsobem  $\delta = 0,7$ ,  $\omega = 1$ ,  $\theta = 1$ ,  $R = 1$ ,  $C = 1$ . Nyní budeme postupně vykreslovat trajektorie řešení pro rostoucí hodnotu  $\gamma$ , konkrétně 7 trajektorií řešení s počátečními podmínkami  $\mathbf{x}'(0) = (-0,6; 1; 0,5)^T$ ,  $\mathbf{x}'(0) = (-1; 0,6; -1)^T$ ,  $\mathbf{x}'(0) = (-0,2; -1; 0)^T$ ,  $\mathbf{x}'(0) = (0,5; -0,6; 0,4)^T$ ,  $\mathbf{x}'(0) = (1; -0,6; 0,1)^T$ ,  $\mathbf{x}'(0) = (-0,01; 0; -0,9)^T$  a  $\mathbf{x}'(0) = (1; 0,6; 0,2)^T$ .

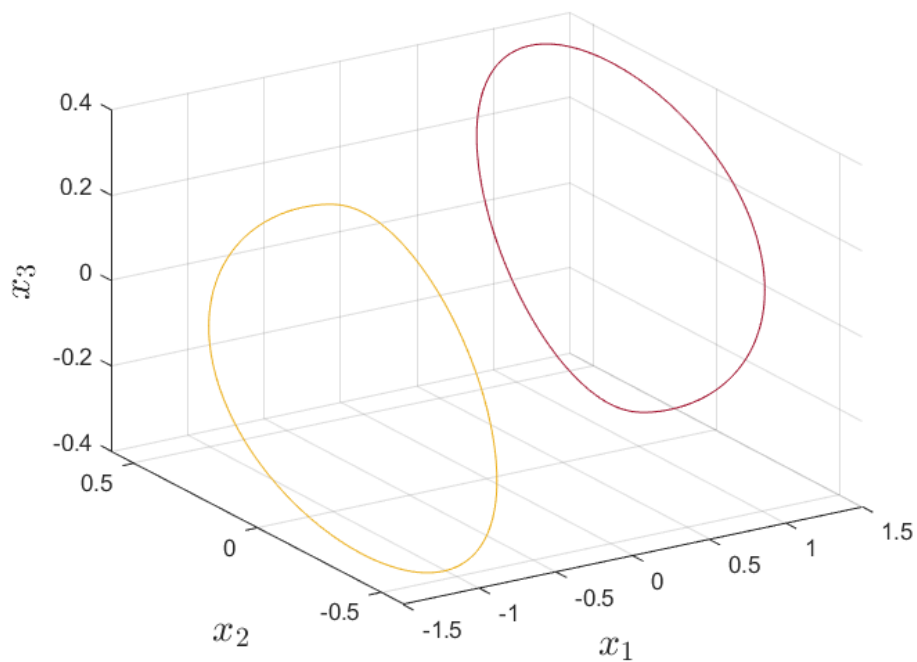


Obr. 43: Trajektorie řešení systému (6.3) pro  $\gamma = 0,05$

Trajektorie jsou přitahovány k jedné ze dvou potenciálových jam podobně jako v případě Duffingova oscilátoru (5.10).

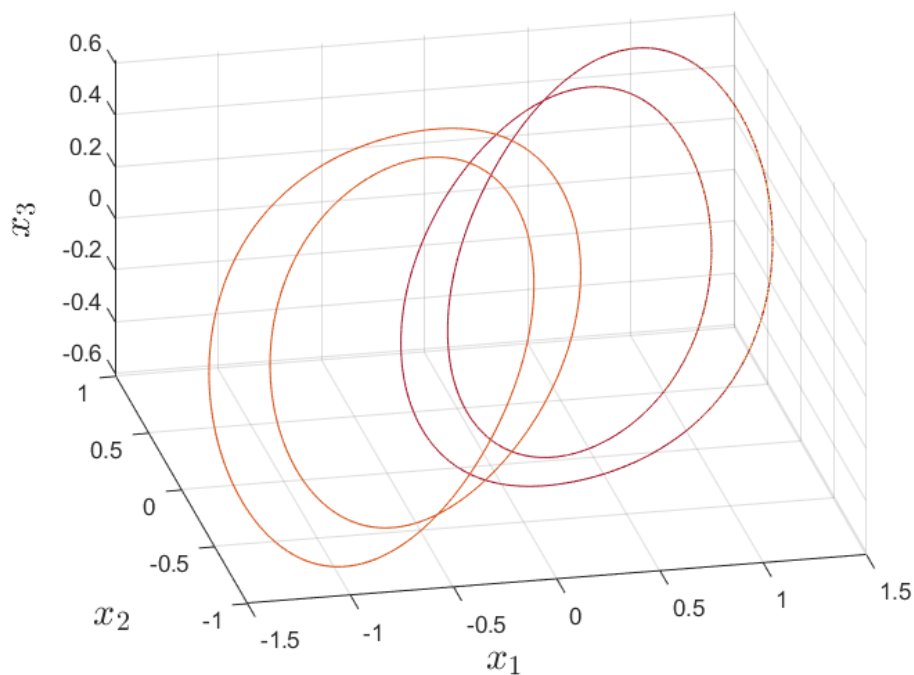


Obr. 44: Trajektorie řešení systému (6.3) pro  $\gamma = 0,05$

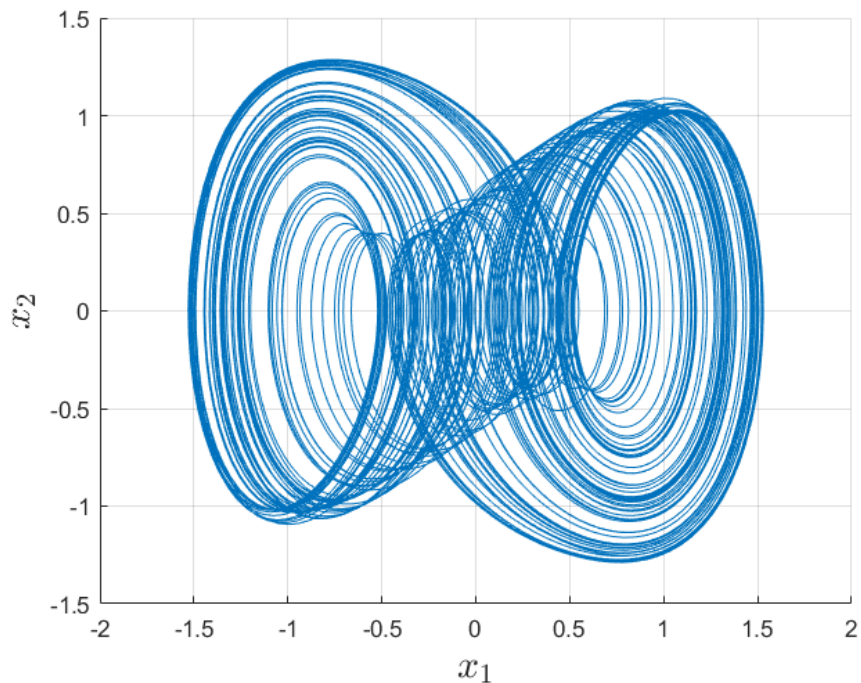


Obr. 45: Trajektorie řešení systému (6.3) pro  $\gamma = 0, 4$

Obr. 42 zachycuje dva  $2T$ -periodické limitní cykly. Po proběhnutí kaskády bifurkací zdvojení periody a po následné *symmetry breaking* bifurkaci jsou trajektorie přitahovány jedním chaotickým atraktorem.

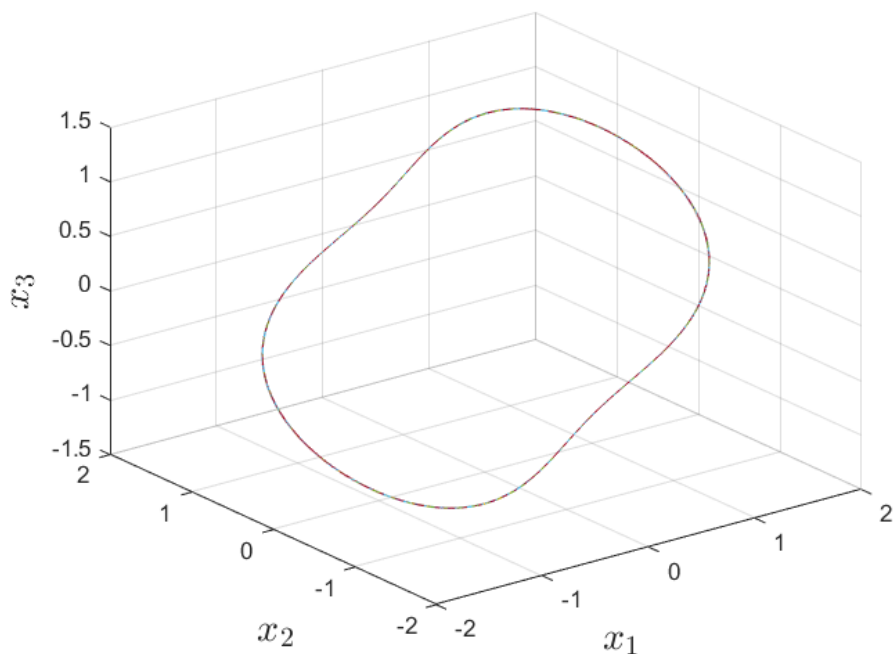


Obr. 46: Trajektorie řešení systému (6.3) pro  $\gamma = 0, 49$



Obr. 47: Trajektorie řešení systému (6.3) pro  $\gamma = 0,76$

Pro dostatečně velkou hodnotu parametru  $\gamma$  všechna řešení směřují k velkému atraktoru.

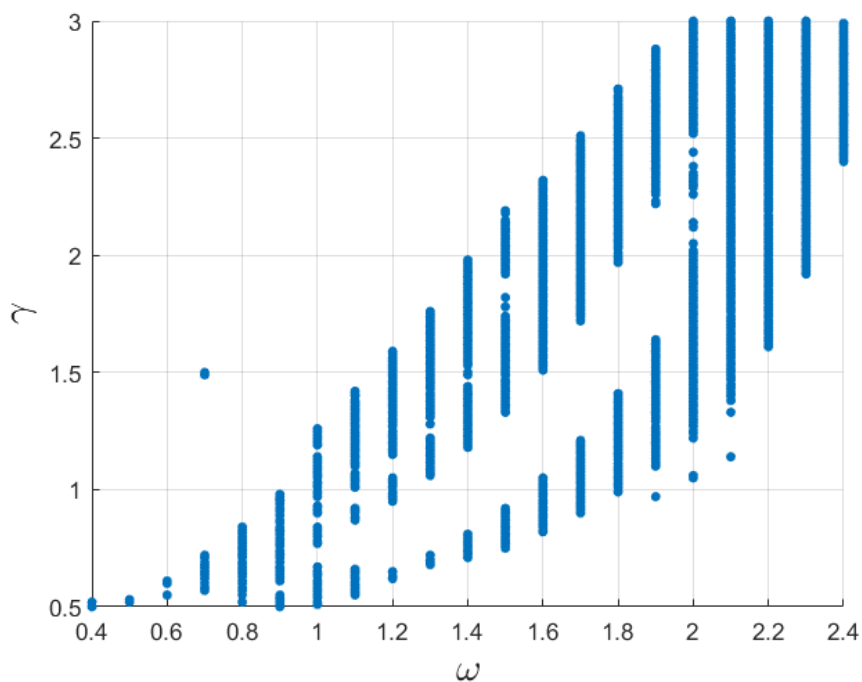


Obr. 48: Trajektorie řešení systému (6.3) pro  $\gamma = 1,1$

Na základě předchozích pozorování se jeví, že autonomní systém (6.3) je z kvalitativní hlediska ekvivalentní s Duffingovým oscilátorem (5.10).

## 6.1 Detekce chaosu

Parametr  $\omega$  procházel cyklem od hodnoty 0,4 po hodnotu 3 s krokem 0,1. Parametr  $\gamma$  nabýval hodnot v rozmezí 0,3 až 3. Obr. 45 zachycuje oblast parametrů  $(\omega, \gamma)$ , pro kterou byla hodnota největšího Ljapunovova exponentu určena jako kladná, což indikuje chaotické chování. Zobrazená oblast má obdobnou podobu jako v případě systému (5.10).



Obr. 49: Oblast chaosu pro parametry  $\omega$  a  $\gamma$

## 7 Závěr

V této diplomové práci jsme se zabývali kvalitativní analýzou nelineárních mechanických soustav. Druhá kapitola obsahovala základní poznatky z teorie dynamických systémů, přičemž velkou část představovaly pojmy, které se vyskytují pouze v nelineárních soustavách.

Třetí kapitola se věnovala teorii deterministického chaosu a Ljapunovových exponentů. Dále zde byl popsán algoritmus výpočtu největšího Ljapunovova exponentu, který představuje kritérium toho, zda uvažujeme o systému jako o chaotickém.

Čtvrtá kapitola pojednala o obecném modelu nelineárního oscilátoru společně s modelem piezoelektrického vibračního mikrosběrače energie.

V první části páté kapitoly jsme provedli analýzu nebuzeného Duffingova oscilátoru. Samotná analýza byla založena na vyšetřování singulárních bodů linearizovaného systému, rovněž byla využita teorie konzervativních systémů. Získané výsledky byly podpořeny fázovými portréty.

Následovala analýza buzeného Duffingova oscilátoru, kde byl využit algoritmus výpočtu největšího Ljapunovova exponentu společně s aplikací bifurkační teorie. Byly pozorovány kvalitativní změny zkoumaného systému pro měnící se parametr amplitudy budící síly. Chaotické atraktory byly zobrazeny pomocí Poincarého řezů.

Hlavním cílem šesté kapitoly bylo hledání oblastí parametrů Duffingova oscilátoru, pro které systém vykazoval chaotické chování. Taktéž se využily poznatky z předchozí kapitoly.

Poslední část se věnovala analýze stability nelineárních mechanicko-elektrických soustav, přičemž se ukázalo, že z kvalitativního hlediska jsou tyto systémy blízké mechanickým soustavám.

Pro tuto práci byly všechny numerické výpočty prováděny v prostředí MATLAB, stejně jako v něm vznikly použité obrázky fázových portrétů, trajektorií řešení a chaotických atraktorů.

## Reference

- [1] KALAS, Josef a Miloš RÁB. Obyčejné diferenciální rovnice. Brno: Vydavatelství Masarykovy univerzity, 1995. ISBN 80-210-1130-0.
- [2] STROGATZ, Steven H. Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering. Second edition. Boca Raton, 2018. ISBN 978-0-8133-4910-7.
- [3] PERKO, Lawrence. Differential equations and dynamical systems. 3rd ed. Texts in applied mathematics. New York: Springer, 2001. ISBN 03-879-5116-4.
- [4] TAYLOR, Robert. Attractors: Nonstrange to Chaotic. Online. SIAM Undergraduate Research Online. 2011, č. 4, s. 72-80. Dostupné z: <http://www.siam.org/students/siuro/vol4/S01079.pdf>. [cit. 2024-05-24].
- [5] RUBEŠ, Ondřej. Nelineární alternativní zdroje energie. Brno, 2022. Dostupné také z: <https://www.vutbr.cz/studenti/zav-prace/detail/137874>. Dizertační práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky. Vedoucí práce Zdeněk Hadaš.
- [6] GUCKENHEIMER, John a Philip HOLMES. Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields. Corrected seventh printing. New York: Springer, 2002. ISBN 0-387-90819-6
- [7] HOLMES, P. A Nonlinear Oscillator with a Strange Attractor. Online. Philosophical transactions of the Royal Society of London. Series A: Mathematical and physical sciences. 1979, roč. 292, č. 1394, s. 419-448. ISSN 1364-503X. Dostupné z: <https://doi.org/10.1098/rsta.1979.0068>. [cit. 2024-04-17].
- [8] EZE, E. O.; OBASI, U. E. a AGWU, E. U. Stability Analysis of Periodic Solutions of Some Duffing's Equations. Online. Open journal of applied sciences (Irvine, CA). 2019, roč. 9, č. 4, s. 198-214. ISSN 2165-3917. Dostupné z: <https://doi.org/10.4236/ojapps.2019.94017>. [cit. 2024-04-17].
- [9] WAWRZYNSKI, Wojciech. The origin point of the unstable solution area of a forced softening Duffing oscillator. Online. Scientific reports. 2022, roč. 12, č. 1, s. 4518-4518. ISSN 2045-2322. Dostupné z: <https://doi.org/10.1038/s41598-022-07932-8>. [cit. 2024-04-17].
- [10] YANG, Zhiyang a Tao JIANG. Bifurcations and Chaos in the Duffing Equation with One Degenerate Saddle Point and Single External Forcing. Online. Journal of applied mathematics and physics. 2017, roč. 5, č. 9, s. 1908-1916. ISSN 2327-4352. Dostupné z: <https://doi.org/10.4236/jamp.2017.59161>. [cit. 2024-04-17].