

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

Fakulta elektrotechniky
a komunikačních technologií

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Brno, 2021

Michaela Mesárošová



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A KOMUNIKAČNÍCH TECHNOLOGIÍ

FACULTY OF ELECTRICAL ENGINEERING AND COMMUNICATION

ÚSTAV AUTOMATIZACE A MĚŘICÍ TECHNIKY

DEPARTMENT OF CONTROL AND INSTRUMENTATION

LEGENDREOVA ORTOGONÁLNÍ BÁZE A JEJÍ VYUŽITÍ PRO ZÍSKÁNÍ SPEKTRA SIGNÁLŮ

APPLICATION OF LEGENDRE BASIS FOR SPECTRAL ANALYSIS

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Michaela Mesárošová

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Ing. Ondrej Mihálik

BRNO 2021



Bakalářská práce

bakalářský studijní program **Automatizační a měřicí technika**

Ústav automatizace a měřicí techniky

Studentka: Michaela Mesárošová

ID: 211162

Ročník: 3

Akademický rok: 2020/21

NÁZEV TÉMATU:

Legendreova ortogonální báze a její využití pro získání spektra signálů

POKYNY PRO VYPRACOVÁNÍ:

Cílem bakalářské práce je nastudovat vlastnosti Legendreovy ortogonální báze a aplikovat je při tvorbě souboru funkcí a skriptů, které umožní spektrální analýzu vybraných typů signálů. Předpokládá se implementace v prostředí MATLAB.

1. Generujte ortonormální Legendreovu bázi v časové i frekvenční doméně. Zaměřte se na stabilní algoritmy generování pro dosažení nejvyššího možného řádu generovaných bázevých funkcí.
2. Prostudujte základní časové a frekvenční vlastnosti Legendreovy ortogonální báze a na zvolených příkladech tyto vlastnosti demonstруйте.
3. Seznamte se s pojmem „signály s omezeným spektrem“ a možnostmi modelování jejich spektra pomocí Legendreových polynomů. Implementujte Legendreovu transformaci pro aproximaci spektra signálů.
4. Předpokládejte, že časový průběh frekvenčně omezeného signálu je vzorkován nerovnoměrně. Proveďte možnost využití Legendreovy báze pro získání spektra původního spojitého signálu.
5. Výsledky doplňte grafickými ukázkami.

DOPORUČENÁ LITERATURA:

1. HARDY, G. H.; ROGOSINSKI, W. Fourierovy řady. Přeložil KUFNER, A. Praha: Nakladatelství technické literatury, 1971.
2. IGNJATOVIC, A. Chromatic derivatives, chromatic expansions and associated spaces. arXiv, 2009. arXiv:0907.2040.

Termín zadání: 8.2.2021

Termín odevzdání: 24.5.2021

Vedoucí práce: Ing. Ondrej Mihálik

doc. Ing. Václav Jirsík, CSc.
předseda rady studijního programu

UPOZORNĚNÍ:

Autor bakalářské práce nesmí při vytváření bakalářské práce porušit autorská práva třetích osob, zejména nesmí zasahovat nedovoleným způsobem do cizích autorských práv osobnostních a musí si být plně vědom následků porušení ustanovení § 11 a následujících autorského zákona č. 121/2000 Sb., včetně možných trestněprávních důsledků vyplývajících z ustanovení části druhé, hlavy VI. díl 4 Trestního zákoníku č.40/2009 Sb.

ABSTRAKT

Práca sa zameriava na možnosti využitia Legendreových polynómov za účelom získania spektra signálov. Skúma ich vlastnosti v časovej a frekvenčnej doméne, akými sú napríklad spôsoby generovania, poloha koreňov a ortogonalita. Ďalším cieľom bolo implementovať Legendreovu transformáciu a overiť kvalitu získaných spektier a aproximácií signálov v porovnaní s rôznymi metódami. V závere sa zaoberá výberom vhodného aproximačného rádu ako aj analytickými možnosťami výpočtu spektra.

KĽÚČOVÉ SLOVÁ

Hilbertov priestor, Legendreove polynómy, Fourierova transformácia, spektrum, Besselove funkcie prvého druhu, nepravidelné vzorkovanie, frekvenčne obmedzený signál

ABSTRACT

The thesis focuses on the possibilities of using Legendre polynomials in order to obtain a spectrum of signals. It examines their properties in the time and frequency domain such as generating methods, root position, and orthogonality. Another goal was to implement the Legendre transform and to verify the quality of the obtained spectra and signal approximations in comparison with various methods. Finally, it deals with the choice of a suitable approximation order as well as the analytical possibilities of spectrum calculation.

KEYWORDS

Hilbert space, Legendre polynomials, Fourier transform, spectrum, Bessel function of the first kind, irregular sampling, band-limited signal

MESÁROŠOVÁ, Michaela. *Legendreova ortogonální báze a její využití pro získání spektra signálů*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií, Ústav automatizace a měřicí techniky, 2021, 48 s. Bakalárska práca. Vedúci práce: Ing. Ondrej Mihálik

Vyhlásenie autora o pôvodnosti diela

Meno a priezvisko autora: Michaela Mesárošová
VUT ID autora: 211162
Typ práce: Bakalárska práca
Akademický rok: 2020/21
Téma záverečnej práce: Legendreova ortogonální báze a její využití pro získání spektra signálů

Vyhlasujem, že svoju záverečnú prácu som vypracovala samostatne pod vedením vedúcej/cého záverečnej práce, s využitím odbornej literatúry a ďalších informačných zdrojov, ktoré sú všetky citované v práci a uvedené v zozname literatúry na konci práce.

Ako autorka uvedenej záverečnej práce ďalej vyhlasujem, že v súvislosti s vytvorením tejto záverečnej práce som neporušila autorské práva tretích osôb, najmä som nezasiahla nedovoleným spôsobom do cudzích autorských práv osobnostných a/alebo majetkových a som si plne vedomá následkov porušenia ustanovenia § 11 a nasledujúcich autorského zákona Českej republiky č. 121/2000 Sb., o práve autorskom, o právach súvisiacich s právom autorským a o zmene niektorých zákonov (autorský zákon), v znení neskorších predpisov, vrátane možných trestnoprávných dôsledkov vyplývajúcich z ustanovenia časti druhej, hlavy VI. diel 4 Trestného zákonníka Českej republiky č. 40/2009 Sb.

Brno

.....

podpis autorky*

*Autor podpisuje iba v tlačenej verzii.

POĎAKOVANIE

Rada by som poďakovala vedúcemu bakalárskej práce pánovi Ing. Ondrejovi Mihálikovi za odborné vedenie, trpezlivosť, ochotu a podnetné návrhy k práci a Michalovi Hečkovi za neustálu podporu.

Obsah

Úvod	11
1 Definície základných pojmov	12
1.1 Priestor L_2	12
1.2 Skalárny súčin	12
1.3 Ortogonalita, ortonormalita	13
2 Legendreove polynómy	14
2.1 Vlastnosti	15
2.2 Realizácia v MATLABe	16
2.2.1 Generovanie bázy	16
2.2.2 Preverenie ortonormality	17
3 Legendreova transformácia	21
3.1 Vhodnosť využitia	21
3.1.1 Spektrum signálu	22
3.1.2 Spätná rekonštrukcia signálu	24
3.2 Aplikácia na $g(x)$	26
3.3 Zhodnotenie	31
4 Legendreove polynómy vo frekvenčnej doméne	32
4.1 Frekvenčne omedzený signál	32
4.2 Besselove funkcie prvého druhu	32
4.2.1 Vzťah s Legendreovými polynómami	33
4.2.2 Ortogonalita	33
4.2.3 Vizualizácia vlastností	34
5 Nepravidelné diskkrétne vzorkovanie	36
5.1 Časová doména	36
5.2 Frekvenčná doména	39
6 Analytický výpočet spektra	42
Záver	44
Literatúra	45
Zoznam symbolov a skratiek	47

Zoznam obrázkov

2.1	Priebeh Legendreových polynómy	14
2.2	Rozloženie koreňov $P_n(x)$	15
2.3	Legendreov polynóm 50. rádu	18
2.4	Chyba Simpsnovej a Booleovej integračnej metódy	19
2.5	Chyba lichobežníkovej metódy integrovania	19
3.1	Exponenciálny a Sinc signál	22
3.2	Amplitúdové spektrum Legendreovej transformácie pre $f(x)$	22
3.3	Amplitúdové spektrum Fourierovej transformácie pre $f(x)$	23
3.4	Amplitúdové spektrum Diskrétnej kosínusovej transformácie pre $f(x)$	23
3.5	Aproximácia funkcie $f(x)$	24
3.6	Postupná aproximácia exponenciálnej funkcie harmonickou bázou	25
3.7	Postupná aproximácia exponenciálnej funkcie polynomicou bázou	25
3.8	Amplitúdové spektrum Legendreovej transformácie pre $g(x)$	27
3.9	Amplitúdové spektrum Fourierovej transformácie pre $g(x)$	27
3.10	Amplitúdové spektrum Diskrétnej kosínusovej trans. pre $g(x)$	28
3.11	Aproximácia funkcie $g(x)$	29
3.12	Postupná aproximácia kmitavej funkcie harmonickou bázou	30
3.13	Postupná aproximácia kmitavej funkcie polynomicou bázou	30
4.1	Besselove funkcie	35
4.2	Nulová oblasť Besselových funkcií	35
5.1	Gaussova modulovaná krivka	36
5.2	Rekonštrukcia Gaussovej modulovanej ktivky	37
5.3	Chyba interpolácie Gaussovej modulovanej krivky	38
5.4	Frekvenčné spektrá interpolačných funkcií	39
5.5	Frekvenčné spektrá výpočtových metód	41
6.1	Aproximácia funkcie $\sin(\omega_0 t)$	43

Zoznam tabuliek

2.1	Efektívnosť funkcie legendreP a L_polynom	17
2.2	Prehľad diskretizačnej chyby po metódach	20
3.1	Velkosti chyby aproximácie $f(x)$ pre jednotlivé transformácie	24
3.2	Velkosti chyby aproximácie $g(x)$ pre jednotlivé transformácie	28
5.1	Porovnanie odchýlky rekonštrukcie Gaussovej modulovanej krivky	38

Úvod

Fourierova transformácia je široko rozšírenou a používanou metódou pri práci so signálmi a ich skúmaní. V práci sa budem zaoberať alternatívnymi možnosťami analýzy signálov, konkrétne s využitím Legendreových polynómov z hľadiska časovej i frekvenčnej oblasti.

Prvá kapitola je zameraná na popis Hilbertovho priestoru $L_2(a, b)$, v ktorom budú polynómy definované, a definície jeho základných vlastností.

V druhej kapitole sa venujem Legendreovým polynómom a možnostiam ich generovania. Taktiež uvediem ich dôležité vlastnosti ako sú polohy koreňov a ortogonalita. Následne budú tieto vlastnosti overené pomocou MATLABu.

Samotná implementácia Legendreovej transformácie bude predmetom tretej kapitoly, kde sa zameriam na presnosť a náročnosť transformácie aplikovanej na dvoch typoch signálu. Výsledky taktiež porovnam s najbežnejšie používanými transformáciami: Fourierovou a Diskrétnou kosínusovou transformáciou.

Kapitola štvrtá a piata ukazujú možnosť analýzy signálov s umiestnením Legendreových polynómov do frekvenčnej oblasti a ich vzťah s Besselovými funkciami prvého druhu. Opisujú základné vlastnosti Besselových funkcií a ich schopnosť rekonštrukcie signálov z nepravidelne navzorkovaných časových priebehov. Výsledky budú porovnané s metódami lineárneho preloženia a splajnu.

Záverečná kapitola bude venovaná spôsobom analytického výpočtu spektra signálov pomocou Fourierovej transformácie a radu Besselových funkcií.

1 Definície základných pojmov

Na začiatok je potrebné uviesť definície pojmov a vzťahov, ktoré budem v práci používať ako základy pre ďalšie zistenia a tvrdenia.

1.1 Priestor L_2

Majme spojitú alebo po častiach spojitú reálnu funkciu $f(x)$ na intervale (a, b) .

Definícia 1.0 Funkcia $f(x)$ je integrovateľná s kvadrátom na intervale $\langle a, b \rangle$ ak existuje (má konečnú hodnotu) integrál

$$\int_a^b f^2(x) dx. \quad (1.1)$$

Potom funkcia f patrí priestoru L_2 , píšeme $f \in L_2(a, b)$ [1].

1.2 Skalárny súčin

Nasledujúce vzťahy a tvrdenia sú čerpané zo zdrojov [1] a [2].

Definícia 1.0 Nech existujú dve reálne funkcie také, že $f \in L_2(a, b)$, $g \in L_2(a, b)$. Potom ich skalárnym súčinom rozumieme číslo

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x) dx. \quad (1.2)$$

Normu funkcie $f \in L_2(a, b)$ získame vzťahom

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b f^2(x) dx} = \sqrt{\int_a^b (f, f)}. \quad (1.3)$$

Definícia 1.0 Vzdialenosť funkcií $\varrho(f, g)$ v priestore L_2 definujeme

$$\varrho(a, b) = \|f - g\|. \quad (1.4)$$

Vzdialenosť $\|f - g\|$ nazývame tiež stredná kvadratická odchýlka a má tieto základné vlastnosti

$$\begin{aligned} \varrho(f, g) &\geq 0, \quad \varrho(f, g) = 0 \Leftrightarrow f = g, \\ \varrho(f, g) &\leq \varrho(f, h) + \varrho(g, h), \\ \varrho(f, g) &= \varrho(g, f). \end{aligned} \quad (1.5)$$

1.3 Ortogonalita, ortonormalita

Definícia 1.0 Funkcie f, g nazývame kolmé (ortogonálne) v priestore $L_2(a,b)$, ak platí

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = 0. \quad (1.6)$$

Definícia 1.0 Funkciu nazývame normovanou, ak veľkosť jej normy je rovná jednej, t. j.

$$\|f\| = 1. \quad (1.7)$$

Definícia 1.0 Systém funkcií $\varphi_n \in L_2(a,b)$ je ortogonálny na $\langle a,b \rangle$, ak pre každé dve funkcie platí

$$\begin{aligned} (\varphi_i, \varphi_k) &= 0, & i \neq k, \\ (\varphi_i, \varphi_k) &\neq 0, & i = k. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Ak je každá funkcia φ_n aj normovaná, systém nazývame ortonormálnym, platí

$$(\varphi_i, \varphi_k) = \begin{cases} 0, & i \neq k \\ 1, & i = k \end{cases} \quad (1.9)$$

Ďalej budeme o systéme $\varphi_n \in L_n(a,b)$ uvažovať ako o ortonormálnom systéme

Definícia 1.0 Rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n \quad (1.10)$$

nazývame zovšeobecneným Fourierovým radom, kde

$$c_n = (f, \varphi_n) \quad (1.11)$$

sú, vzhľadom k ortonormálnemu systému, Fourierove koeficienty funkcie $f(x)$. [1]

2 Legendreove polynómy

Legendreove polynómy môžeme vyjadriť viacerými vzťahmi. Prvý, s ktorým sa môžeme stretnúť, je generujúca funkcia

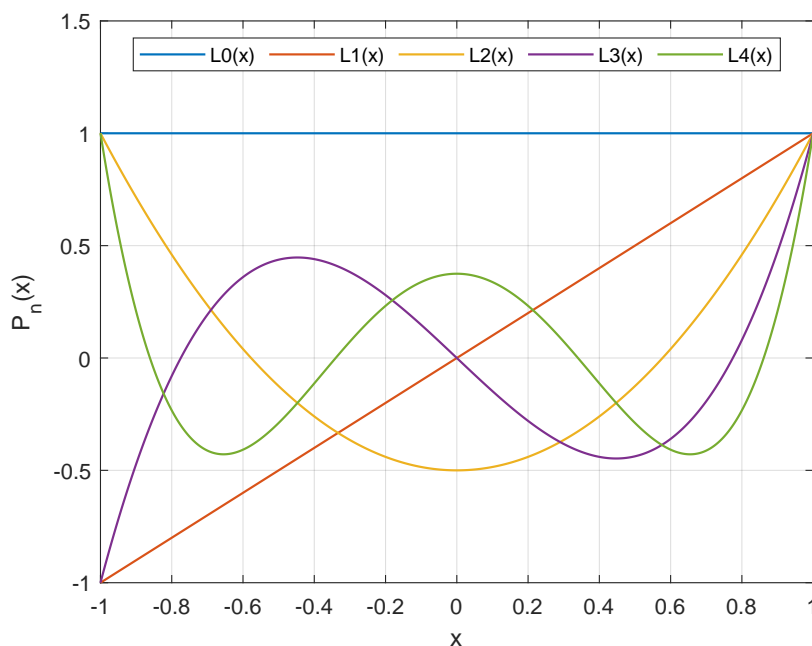
$$(1 - 2xt + t^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(x)t^n, \quad |t| \leq 1. \quad (2.1)$$

Po použití binomickej vety a matematických úpravách dostávame vzorec v tvare

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, \quad (2.2)$$

ktorý nazývame Rodriguesova formula. Po dosadení za $n = 0, 1, \dots, 4$ tak nachádzame predpisy prvých piatich Legendreových polynómov [3].

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1, \\ P_1(x) &= x, \\ P_2(x) &= \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}, \\ P_3(x) &= \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x, \\ P_4(x) &= \frac{35}{8}x^4 - \frac{15}{4}x^2 + \frac{3}{8} \end{aligned} \quad (2.3)$$



Obr. 2.1: Prvých päť Legendreových polynómov.

Časové priebehy sú zobrazené na obrázku 2.1 len na intervale $\langle -1, 1 \rangle$, keďže ich ďalší priebeh nie je pre túto prácu podstatný.

2.1 Vlastnosti

Veta 2.1 Polynómy $P_n(x)$ tvoria funkcie párne pre všetky párne n a funkcie nepárne pre všetky nepárne n

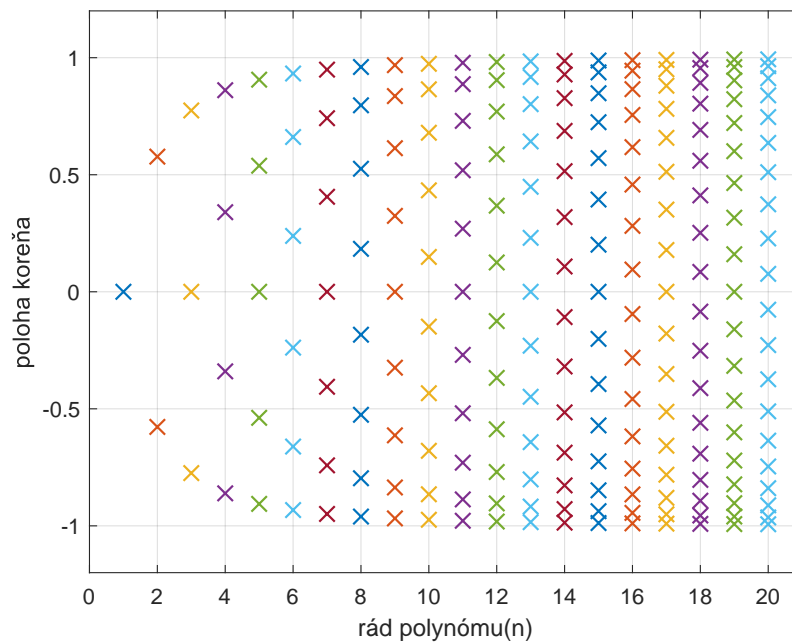
$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x). \quad (2.4)$$

Definícia 2.1 Všetky Legendreove polynómy nadobúdajú hodnotu 1 v $x = 1$

$$P_n(1) = 1. \quad (2.5)$$

Veta 2.2 Rovnica $P_n(x) = 0$ pre $n=0,1,\dots$ má práve n rôznych koreňov, ktoré ležia v intervale $(-1,1)$ tak, že všetky korene funkcie $P_n(x)$ sú oddelené koreňmi funkcie $P_{n-1}(x)$.

Grafické znázornenie javu je ukázané na obrázku 2.2.



Obr. 2.2: Polohy koreňov Legendreových polynómov

Veta 2.3 Pre Legendreove polynómy platí rekurentný vzťah [1]

$$P_n(x) = \frac{2n-1}{n} x P_{n-1}(x) - \frac{n-1}{n} P_{n-2}(x) \quad (n \geq 2). \quad (2.6)$$

Vzťah (2.6) bol s výhodou použitý na generovanie Legendreových polynómov oproti vzťahu (2.2), ktorý vyžaduje časovo a výpočtovo náročné vyčíslenie faktoriálov pri zvyšovaní rádu n .

Veta 2.4 Pre deriváciu Legendreovho polynómu $P_n(x)$ platí rekurentný vzťah

$$(1 - x^2)P'_n(x) = nP_{n-1}(x) - nxP_n. \quad (2.7)$$

Veta 2.5 Funkcia $y = P_n(x)$ vyhovuje diferenciálnej rovnici, nazývanej tiež Legendreova diferenciálna rovnica

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n + 1)y = 0. \quad (2.8)$$

Každá funkcia $f(x)$, ktorá by bola riešením tejto rovnice, by taktiež vyhovovala všetkým rekurentným vzťahom uvedeným vyššie za predpokladu, že by bola správne normalizovaná.[3]

Veta 2.6 Dva Legendreove polynómy rozdielneho rádu sú na seba navzájom ortogonálne na intervale $(-1,1)$.

$$\int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x) = 0 \quad (2.9)$$

ak $m \neq n$. Ak $m = n$, potom platí

$$\int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x) = \frac{2}{2n + 1}. \quad (2.10)$$

Keďže pre túto prácu je nutné mať sústavu ortonormálnu, zavedieme tiež vzťah, ktorý zabezpečuje normalizáciu ortogonálnej bázy Legendreových polynómov.

Definícia 2.6 Funkcie

$$p_n(x) = \sqrt{n + \frac{1}{2}}P_n(x) \quad (2.11)$$

tvorí úplný ortonormálny systém v $L_2(-1,1)$. [4]

2.2 Realizácia v MATLABe

2.2.1 Generovanie bázy

Na generovanie polynómov, ktoré budú použité ako báza pre Legendreovu transformáciu, bolo kľúčové vybrať vhodnú metódu. Najdôležitešie kritériá, na ktoré bol braný zreteľ, sú presnosť a výpočtová náročnosť. Pre otestovanie som generovanie pomocou Rodriguesovej formule (2.2) a rekurentného vzťahu (2.6) porovnala v prostredí MATLABu. Overením som zistila, že vzťah (2.6) je možné implementovať ako metódu o niekoľko rádov rýchlejšiu. Taktiež nastáva problém pri vyčíslení faktoriálu. MATLAB pracuje primárne s typom double, pričom dochádza k nepresnostiam výpočtu už od 19. rádu polynómu. Pri výpočte faktoriálu sa prekročí rozlíšenie dátového typu, a teda cifry presahujúce túto presnosť nadobudnú efektívne hodnotu

Výpis 2.1: Výňatok implementácie generovania bázy zo skriptu `L_polynom`.

```

22 L0 = ones(size(x)); %Legendreov polynom-rad 0
23 L1 = x;           %Legendreov polynom-rad 1
24 if n == 0
25     polynom = L0;
26 elseif n == 1
27     polynom = L1;
28 else
29     for i = 2:n
30         polynom = ((2*i-1)*x.*L1-(i-1)*L0)/i;
31         L0 = L1;
32         L1 = polynom;

```

nula. Tieto fakty vylúčili možnosť použitia Rodriguesovej formule. Vo výpise 2.1 je uvedené finálne riešenie pomocou rekurentnej rovnice.

Takto napísaný kód je schopný presne vykresľovať polynómy do rádu 1200 s časovou podmienkou výpočtu do jednej sekundy. Je možné používať polynómy aj vyšších rádo, je však nutnosťou zjemnenie vzorkovania času. Následkom tejto úpravy je aj doba vykonávania kódu, ktorá sa pohybuje v jednotkách sekúnd.

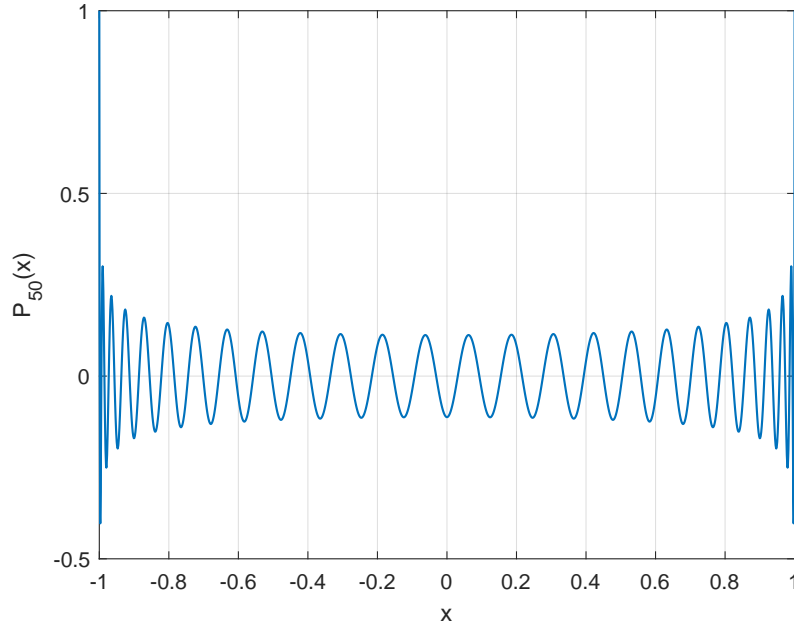
Implementáciu 2.1 som taktiež porovnala so vstavanou funkciou MATLABu `legendreP()`. Na tieto účely som použila polynóm 50. rádu, zobrazeného na obrázku 2.3. Na zmeranie času boli využité funkcie `tic` a `toc`. Porovnanie je zhrnuté v tabuľke 2.1.

Funkcia	Rád polynómu	Krok vzorkovania [s]	Čas výpočtu [s]
<code>legendreP</code>	50	10^{-4}	≈ 11.00
<code>L_polynom</code>	50	10^{-4}	≈ 0.001

Tab. 2.1: Efektívnosť funkcie `legendreP` a `L_polynom`

2.2.2 Preverenie ortonormality

Na overenie ortonormality som vychádzala zo vzťahu (1.9), na čo bolo potrebné najskôr vygenerované polynómy previesť do normovaného tvaru. Z ich skalárneho súčiny som vytvorila maticu \mathbf{S} , ktorej výsledok by mala, za ideálnych podmienok,



Obr. 2.3: Legendreov polynóm 50. rádu.

byť jednotková matica \mathbf{I} .

$$\mathbf{S} = \mathbf{I}$$

$$\begin{bmatrix} (p_0, p_0) & (p_0, p_1) & \dots & (p_0, p_n) \\ (p_1, p_0) & (p_1, p_1) & \dots & (p_1, p_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (p_n, p_0) & (p_n, p_1) & \dots & (p_n, p_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Výpočet matice som realizovala tromi rôznymi spôsobmi numerického integrovania: lichobežníkovú metódu (2.13), Simpsonovu metódu (2.14) a Booleho metódu (2.15). [5] [6]

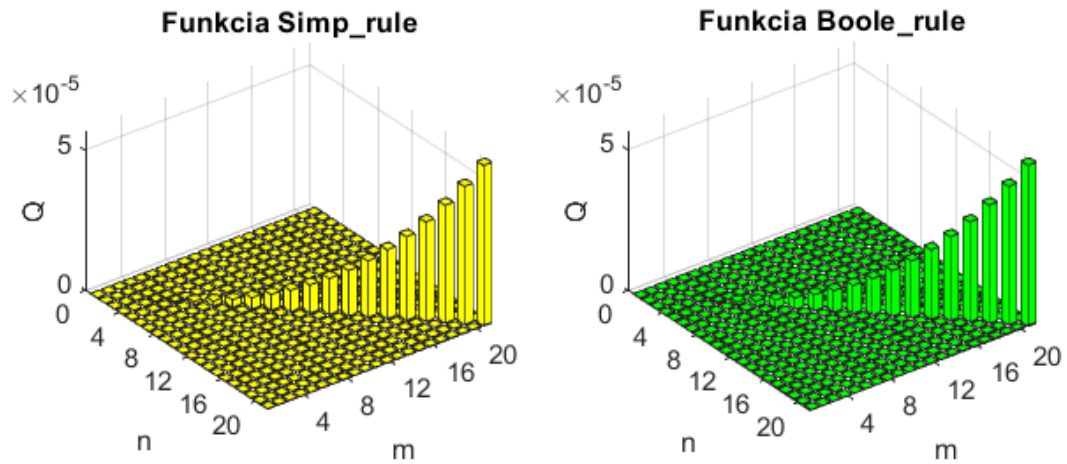
$$\int_a^b y dx \approx h \left(\frac{y_0}{2} + y_1 + \dots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2} \right) \quad (2.13)$$

$$\int_a^b y dx \approx \frac{h}{3} (y_0 + y_n + 4(y_1 + y_3 \dots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots y_{n-2})) \quad (2.14)$$

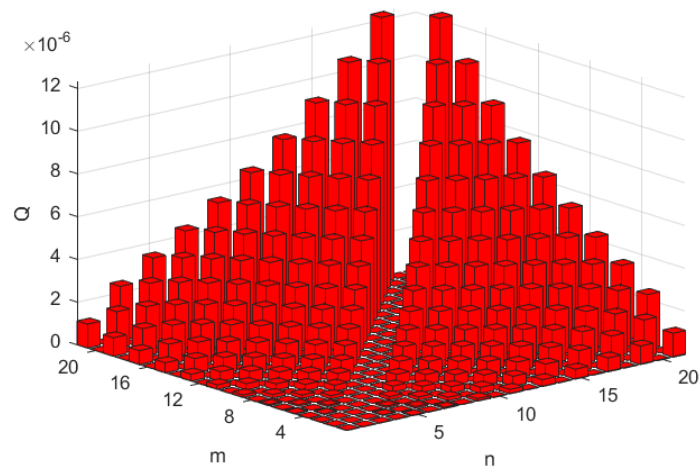
$$\int_a^b y dx \approx \frac{2h}{45} (7(y_0 + y_n) + 32(y_1 + y_3 \dots + y_{n-1}) + 12(y_2 + y_6 + \dots y_{n-2}) + 14(y_4 + y_8 + \dots y_{n-4})) \quad (2.15)$$

Diskretizačnú chybu metódy, nazvem \mathbf{R} , získam ako rozdiel matíc $\mathbf{S} - \mathbf{I}$. Po vynesení chyby do grafu je zjavný rozdiel narastajúcej odchýlky vo funkciách `Simp_rule()` a `Boole_rule()` a funkcie MATLABu `trapz()`. Zatiaľ čo vo vstavanej funkcii sa

chyba zväčšuje mimo diagonály (obrázok 2.5), funkcie `Simp_rule()` a `Boole_rule()` spôsobujú tento nárast na hlavnej diagonále (obrázok 2.4). Hodnoty sú zhrnuté v tabuľke 2.2.



Obr. 2.4: Chyba Simpsnovej (`Simp_rule`) a Booleovej (`Boole_rule`) integračnej metódy



Obr. 2.5: Chyba lichobežníkovej metódy integrovania (trapez)

Funkcia	Chyba diagonály	Chyba pod diagonálou	Celková chyba
trapez()	2.8×10^{-15}	2.8×10^{-4}	$\approx 2.8 \times 10^{-4}$
Simp_rule	8.1×10^{-5}	4.0×10^{-9}	$\approx 8.1 \times 10^{-5}$
Boole_rule	8.1×10^{-5}	1.8×10^{-13}	$\approx 8.1 \times 10^{-5}$

Tab. 2.2: Prehľad diskretizačnej chyby po metódach

Použitá perióda vzorkovania bola $T_s = 0,1$ ms a s jej znižovaním sa hodnoty odchýlok znižujú po rádoch, čím sa približujeme ideálnym hodnotám. V konečnom dôsledku, po prepočítaní celkovej chyby, sú si metódy približne rovnocenné.

3 Legendreova transformácia

V nasledujúcej kapitole sa budem zaoberať využitím Legendreových polynómov ako bázou na rozklad signálov do ich zložiek. Keďže polynómy $P_n(x)$ sú ortogonálne na intervale $\langle -1, 1 \rangle$, je potrebné voliť funkciu s konečným počtom bodov nespojitosti na tomto intervale.

Definícia 3.0 V Hilbertovom priestore definujeme Legendreovu transformáciu ako

$$\mathfrak{L}f(x) = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 P_n(x)f(x)dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.1)$$

Definícia 3.0 Nech $f(x)$ je po častiach spojitá na intervale $\langle -1, 1 \rangle$ a c_n označíme ako koeficienty

$$c_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 P_n(x)f(x)dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.2)$$

Potom v každom bode x na intervale kde $f(x)$ je spojitá a má deriváciu sprava a zľava, Legendreov rad

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x) \quad (3.3)$$

konverguje k funkcii $f(x)$. [7]

Po spätnej transformácii je možné pomocou strednej kvadratickej odchýlky (1.4) porovnať pôvodný signál s jeho aproximáciou, čím získavame hodnotu veľkosti rozdielu energií týchto dvoch funkcií.

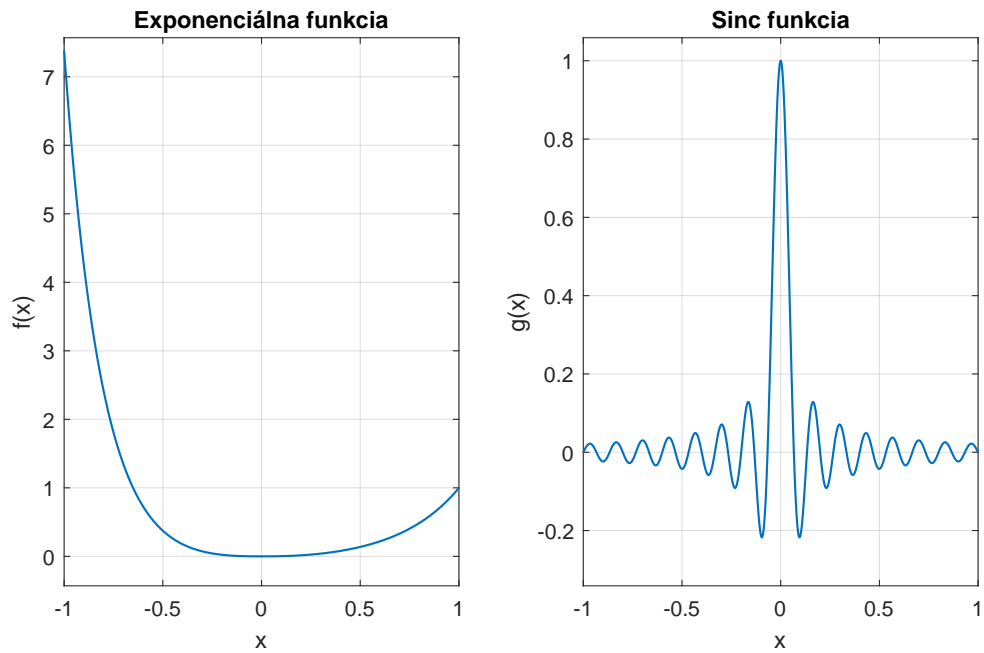
3.1 Vhodnosť využitia

O vhodnosti aplikovania Legendreovej transformácie na konkrétny signál vieme rozhodnúť na základe množstva potrebných koeficientov c_n , čo znamená, koľko rádov polynómov musíme použiť na požadovanú presnosť, a taktiež schopnosti zrekonštruovania signálu z týchto koeficientov. Výsledky budem porovnávať s Fourierovou transformáciou a Diskrétnou kosínusovou transformáciou. Predpokladom je, že vzhľadom na rozdiel medzi bázou Legendreovej a Fourierovej alebo diskrétnej kosínusovej transformácie sú na rôzne typy signálov vhodné odlišné bázy. Z tohoto dôvodu demonštráciu vykonávam na funkciách s výrazne odlišnými priebehmi. Na tento účel použijem signály z obrázku 3.1,

$$f(x) = \frac{e^{x^2} x^2 \sqrt{|x|}}{e^x} \quad (3.4)$$

$$g(x) = \text{sinc}(20x). \quad (3.5)$$

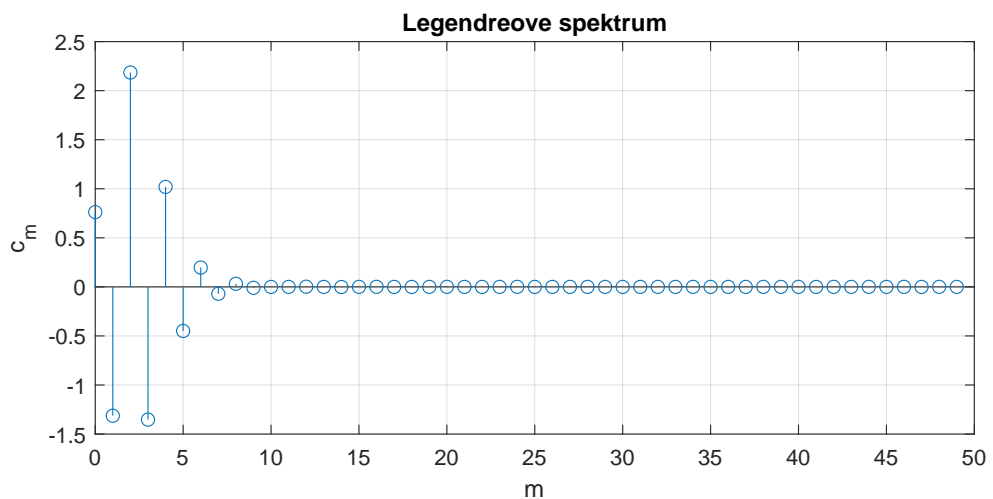
Ako prvej sa budem venovať exponenciálnej funkcii (3.4).



Obr. 3.1: Časové priebehy funkcií použitých na Legendreovu transformáciu.

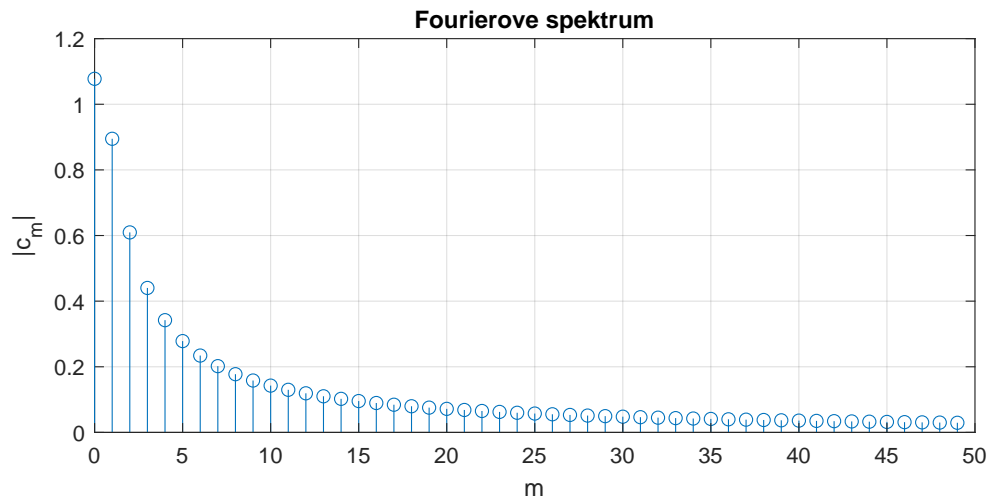
3.1.1 Spektrum signálu

Na výpočet Legendreovho spektra bol použitý vzťah (3.2), ktorého implementácia je v prílohe `Spectrum.m`. Je použité vzorkovanie času $T_s = 0,1$ ms a maximálny povolený koeficient je $m = 50$. Integráciu som realizovala pomocou funkcie `trapz`.

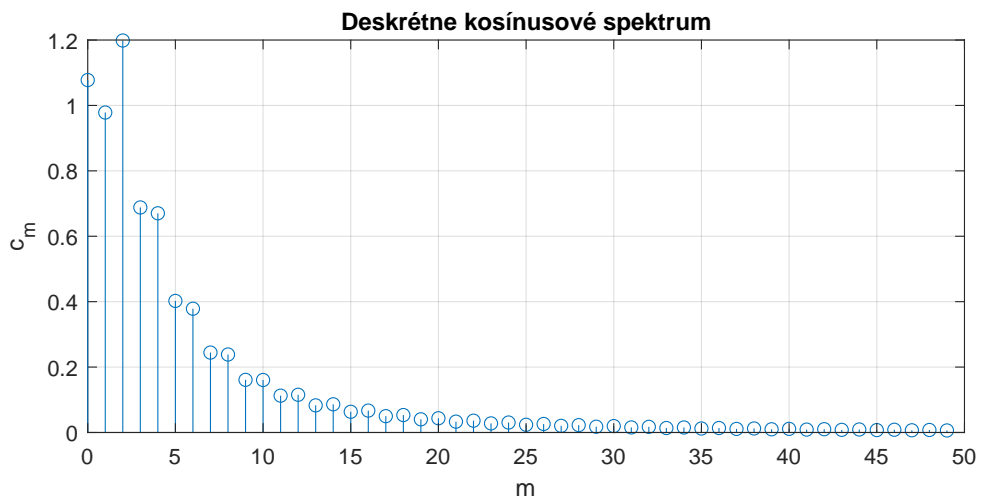


Obr. 3.2: Prvých 50 Spektrálnych koeficientov Legendreovej transformácie z exponenciálneho priebehu.

Zo spektra je zjavné, že v signále sú výrazne zastúpené len polynómy po 10. rád. Všetky nasledujúce hodnoty sú blížiac sa nule. Porovnajme následne výsledky amplitúdových spektier Diskrétnej kosínusovej a Fourierovej transformácie.



Obr. 3.3: Prvých 50 prvkov Fourierovho amplitúdového spektra funkcie $f(x)$.

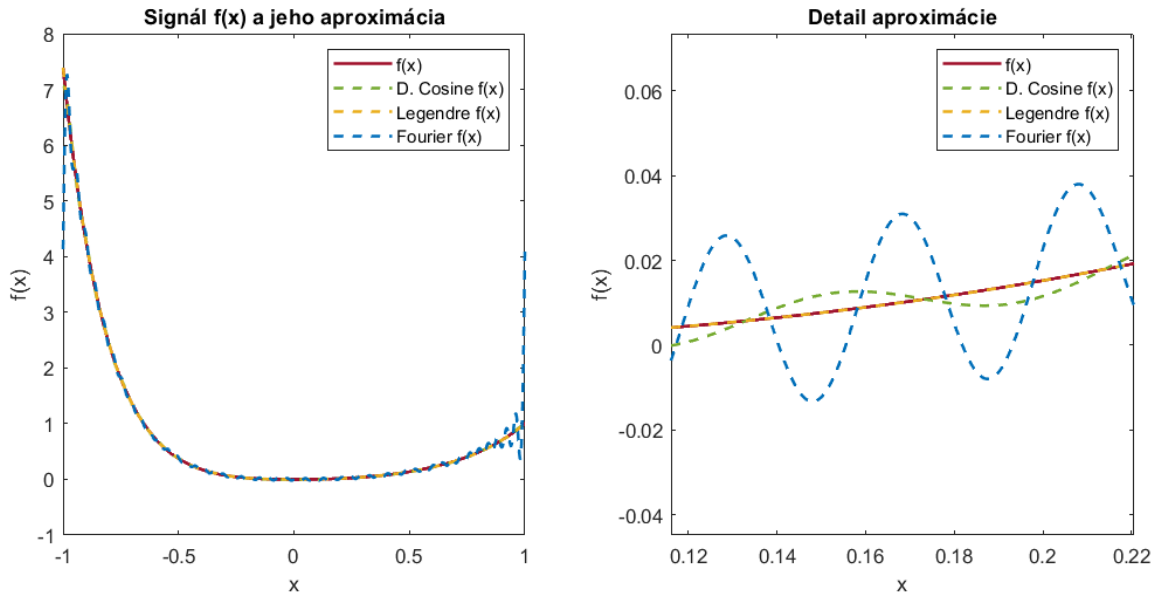


Obr. 3.4: Prvých 50 členov Kosínusového spektra exponenciálnej funkcie.

Prvú odlišnosť, ktorú si možno všimnúť, je množstvo prvkov c_m s významne veľkou hodnotou oproti Legendreovmu amplitúdovému spektru. V prípade Fourierovho rozkladu sa aj posledný 50. prvok pohybuje v nezanedbateľných hodnotách, čo naznačuje, že aproximácia signálu bude obsahovať väčšie odchýlky od pôvodného signálu a $m = 50$ nie je dostačujúce. Spektrum Diskrétnej kosínusovej transformácie síce potrebovalo väčší počet prvkov c_m , no koncové hodnoty sa už pohybujú v okolí nuly.

3.1.2 Spätná rekonštrukcia signálu

Na spätnú kompozíciu signálu som použila vzťah (3.3). Jeho implementácia sa tak tiež nachádza v `Spectrum.m` so zmenou od ideálneho vzťahu, kde suma sa počíta s hornou limitou m . Na obrázku 3.5 je znázornená pôvodná funkcia a jej aproximácie po spätných transformáciách.



Obr. 3.5: Aproximácia exponenciálnej funkcie

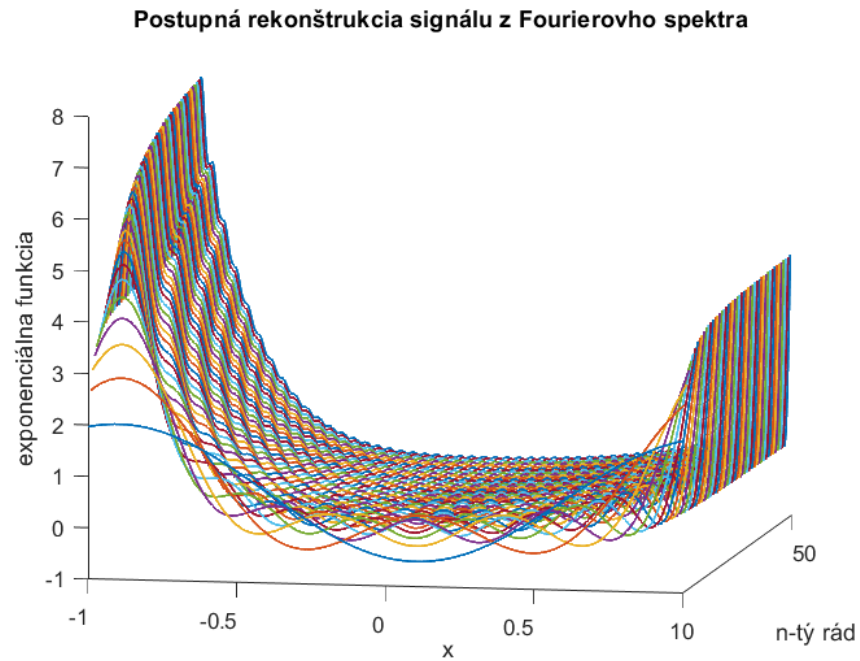
Z grafov je patrné, že Legendreova spätná transformácia signál preložila takmer optimálne, zatiaľ čo preloženie Fourierovou spätnou transformáciou je výrazne kmitavé. Aproximácia z Diskrétneho kosínusového spektra je tiež mierne kmitavá, no dosahuje menšie odchýlenie od pôvodnej funkcie.

Transformácia	m	Chyba aproximácie
Legendreova		1.586×10^{-4}
Fourierova	50	0.2845
Diskrétna kosínusová		0.0273

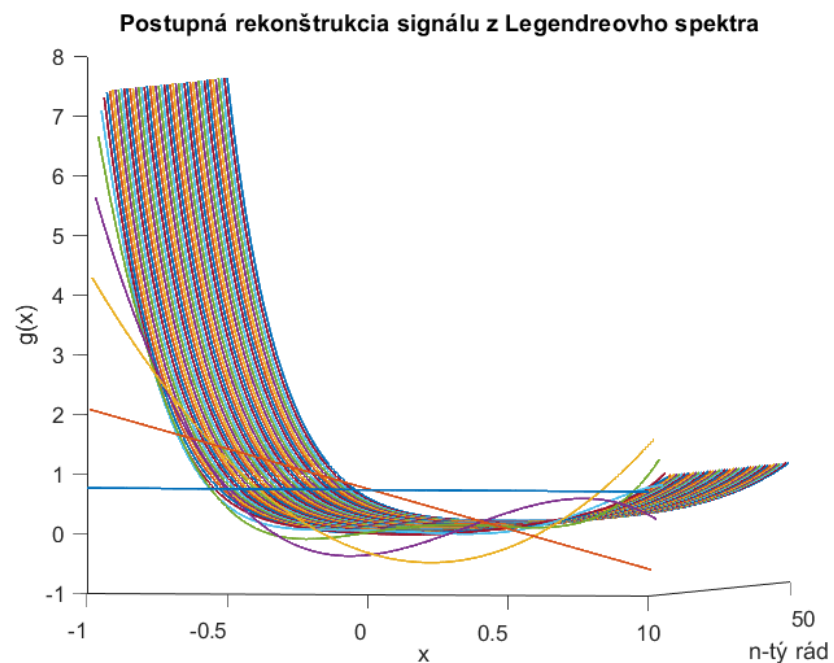
Tab. 3.1: Veľkosti chyby aproximácie $f(x)$ pre jednotlivé transformácie

Tieto chyby je možné zmenšiť zvyšovaním m pri spätnej rekonštrukcii vo všetkých troch prípadoch transformovania. V prípade Legendreovej transformácie je však nutné aj zjemniť krok vzorkovania T_s , keďže treba brať do úvahy používanie implementácie generovania polynómov pri tvorbe spektra. Vysoké rády polynómov kmitajú pri krajoch intervalu čoraz rýchlejšie, a teda na správnu dekompozíciu je

vhodné zvýšiť aj presnosť vygenerovaného polynómu jeho hustejším navzorkovaním. Postupná aproximácia, kde porovnávam transformáciu s najväčšou a najmenšou chybou, je na nasledujúcom obrázku.



Obr. 3.6: Aproximácia exponenciálnej funkcie pomocou harmonickej bázy



Obr. 3.7: Aproximácia exponenciálnej funkcie pomocou polynomickej bázy

Graf z obrázka 3.6 by mohol mylne vzbudzovať dojem, že od určitého rádu sa chyba aproximácie začne zväčšovať. Definujem preto vzťah Parsevalovej rovnosti, ktorý vedie k dôkazu, že odchýlka od pôvodného signálu sa nemôže pridávaním spektrálnych zložiek zvyšovať.

Veta 3.1 (Parsevalova rovnosť) *Pre funkciu $f(x) \in L_2(a, b)$ platí*

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2. \quad [2] \quad (3.6)$$

Odvodenie pre veľkosť chyby bude potom nasledovné,

$$\begin{aligned} E_N &= \int_{-1}^1 |f(x) - f_N(x)|^2 dx = \int_{-1}^1 \left| \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x) - \sum_{n=0}^N c_n P_n(x) \right|^2 dx \\ &= \int_{-1}^1 \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} c_n P_n(x) \right|^2 dx. \end{aligned}$$

Umocnením sumy a využitím princípu superpozície dostávam výraz, v ktorom je možné uplatniť vetu o ortogonalite Legendreových polynómov 2.6.

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \sum_{m=N+1}^{\infty} c_n c_m \int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = \sum_{n=N+1}^{\infty} \sum_{m=N+1}^{\infty} \frac{2}{2n+1} c_n c_m \delta_{nm},$$

kde δ_{nm} predstavuje Kroneckerovo delta, pre ktoré platí

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1, & m = n \\ 0, & \text{inak.} \end{cases} \quad (3.7)$$

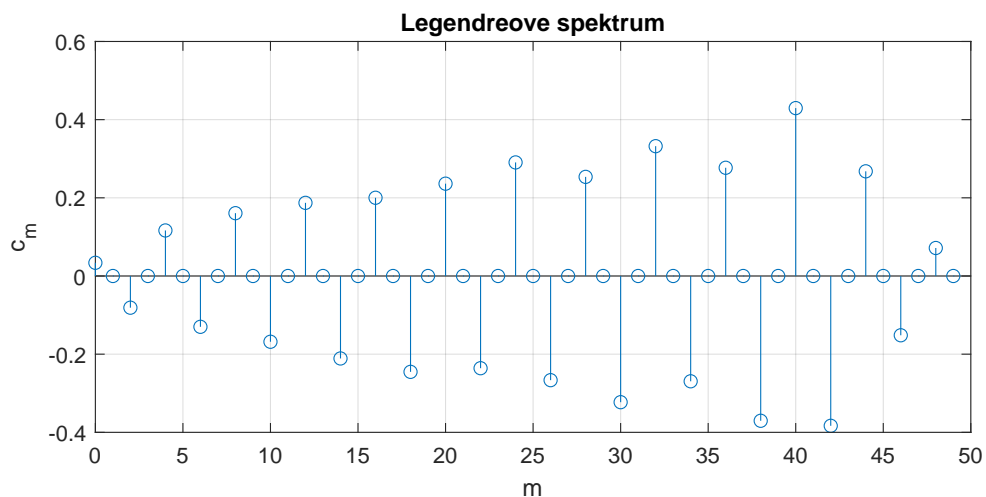
Po uvedomení si, že všetky prvky pre $m \neq n$ sú nulové sa dostávam k výslednému vzťahu v tvare

$$E_N = \sum_{m=N+1}^{\infty} \frac{2}{2m+1} c_m c_m = \sum_{m=N+1}^{\infty} \frac{2}{2m+1} c_m^2 \quad (3.8)$$

Výraz 3.8 jasne ukazuje, že každým zvyšovaním rádu sa znižuje počet prvkov, ktoré sú zahrnuté do sumy pri výpočte výslednej chyby.

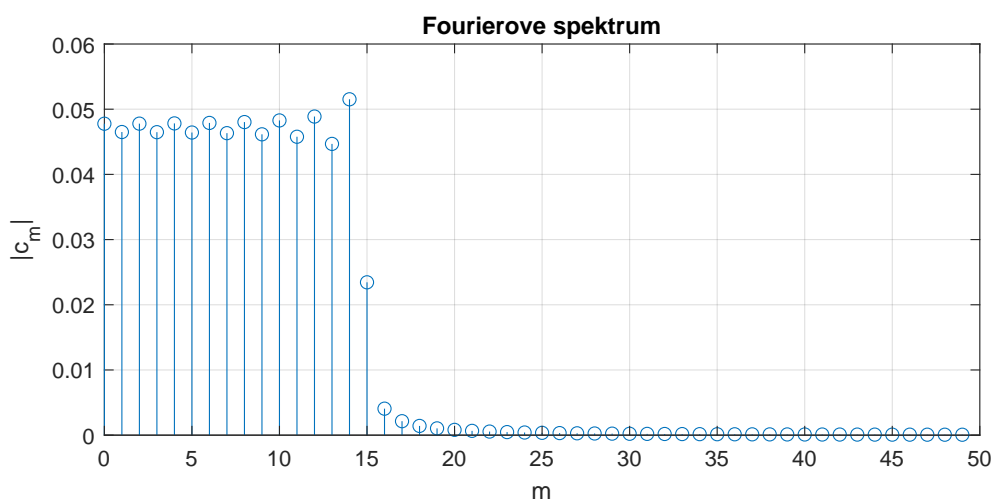
3.2 Aplikácia na $g(x)$

Postupujem rovnako, ako v prípade prvej funkcie $f(x)$. Použité parametre zostávajú tiež rovnaké: $m = 50$, $T_s = 0,1$ ms.

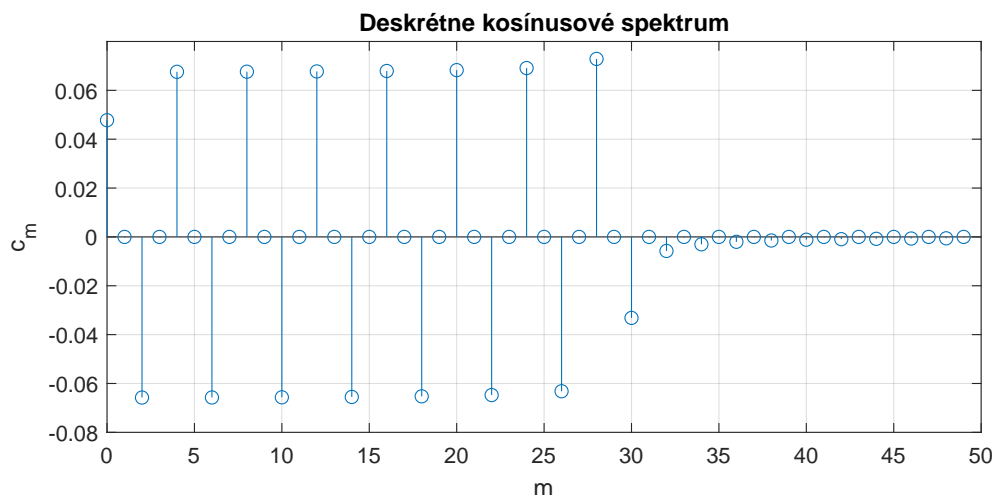


Obr. 3.8: Prvých 50 Spektrálnych koeficientov Legendreovej transformácie z kmitavého priebehu.

Na porovnanie s funkciou $f(x)$ je možné si všimnúť viacero rozdielov. Prvým je využitie značne väčšieho množstva polynómov, ktoré sú súčasťou dekompozície funkcie $g(x)$. Je vidieť, že rekonštrukcia signálu už nebude taká presná ako v prvom prípade, keďže posledné prvky spektra nie sú ešte v okolí nuly. Druhým rozdielom je nulová hodnota každého nepárneho m , čiže každého nepárneho polynómu. Keďže funkcia $\text{sinc}(20x)$ je párnou funkciou, na jej amplitúdovom spektre sa podieľajú len párne polynómy.



Obr. 3.9: Prvých 50 prvkov amplitúdových spektier kmitavej funkcie.



Obr. 3.10: Prvých 50 prvkov amplitúdových spektier kmitavej funkcie.

V tomto prípade spektrum Fourierovej transformácie už v okolí $m = 20$ nadobúda hodnoty blízke nule. Funkcia $g(x)$ má priebeh podobný sínusoide, preto je Fourierova transformácia schopná presnejšieho aproximovania s využitím nižšieho počtu prvkov c_m oproti Legendreovej transformácii, ktorej bázové funkcie sa harmonickým priebehom blížia až od vyšších rádov polynómov. Diskrétné kosínusové spektrum je podobné Legendreovmu spektru s tým rozdielom, že sa opäť jeho hodnoty na konci zvoleného spektra približujú nule. To naznačuje, že napriek podobnosti spektier bude využitie kosínusovej bázy presnejšie ako kompozícia z bázy polynomickej.

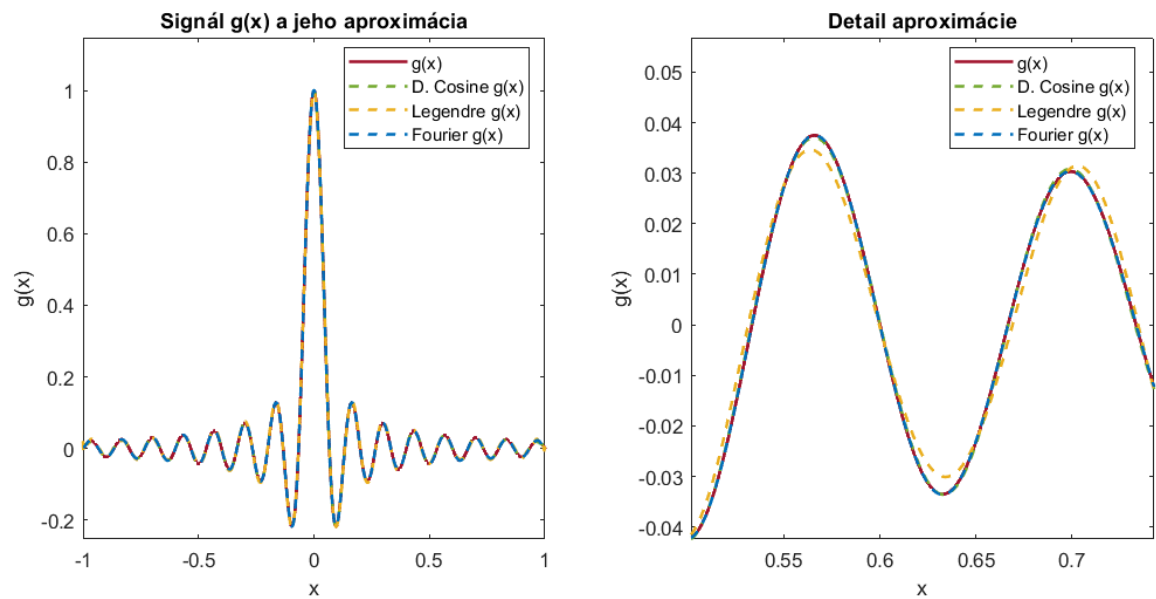
Spätná rekonštrukcia z obrázka 6.1 a tabuľka 3.2 odráža predpoklady o presnosti aproximácie pomocou rôznych transformácií.

Transformácia	m	Chyba aproximácie
Legendreova		0.0043
Fourierova	50	3.42×10^{-4}
Diskrétna kosínusová		0.0013

Tab. 3.2: Veľkosti chyby aproximácie $g(x)$ pre jednotlivé transformácie

Najpresnejšia je Fourierova transformácia a najmenej presné preloženie je po Legendreovej transformácii. Využitie Diskrétnej kosínusovej transformácie sa javí opäť ako kompromis medzi týmito dvoma metódami. Na detaile aproximácie je vidieť, že polynomická báza, napriek jej najväčšej odchýlke, kopíruje tvar signálu $g(x)$. Pridaním pár rádov polynómov (do 10) je chyba kompozície dokonca menšia ako chyba

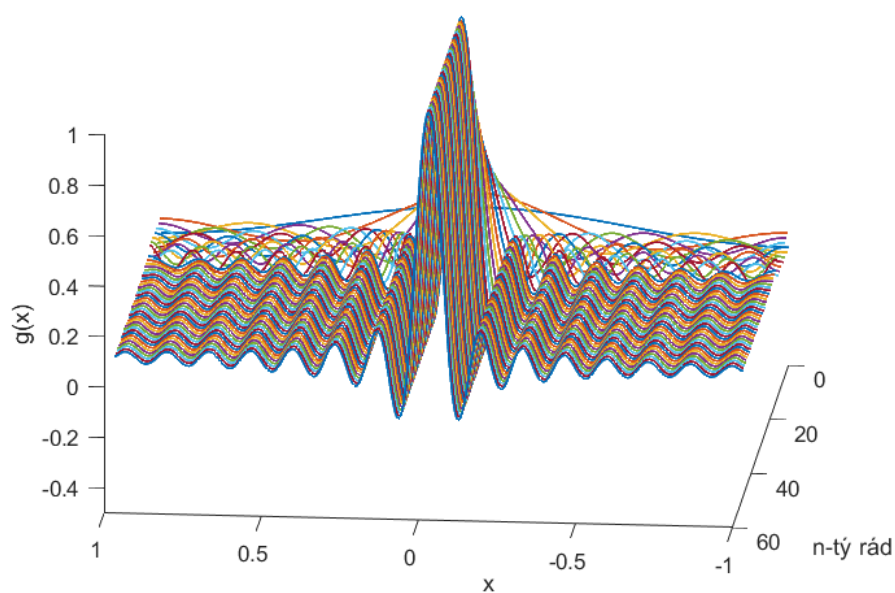
Fourierovej transformácie. V porovnaní s najhoršou aproximáciou signálu $f(x)$ (obrázok 3.5), ktorá výrazne kmitala okolo pôvodnej funkcie, by znížovanie tohoto rozdielu vyžadovalo ešte pomerne veľké doplnenie amplitúdového spektra.



Obr. 3.11: Aproximácia kmitavej funkcie.

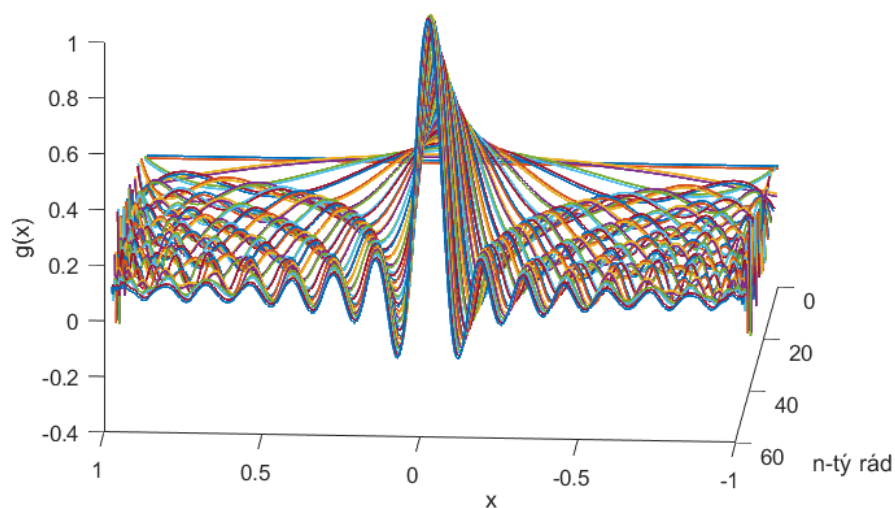
Porovnanie postupnej aproximácie pomocou najchybovejšej a najpresnejšej transformácie sa nachádza na nasledujúcej strane na obrázkoch 3.12 a 3.13.

Postupná rekonštrukcia signálu z Fourierovho spektra



Obr. 3.12: Aproximácia kmitavej funkcie pomocou harmonickej bázy

Postupná rekonštrukcia signálu z Legendreovho spektra



Obr. 3.13: Aproximácia kmitavej funkcie pomocou polynomickej bázy

Ako som spomenula vyššie, na obrázku 3.13 je viditeľné, že každá druhá aproximácia je zhodná s predchádzajúcou. Na každom párnym m sa neudeje žiadna zmena, keďže sa polynóm nepárneho rádu na kompozícii signálu nezúčastňuje.

3.3 Zhodnotenie

V predchádzajúcej kapitole som vzniesla predpoklad o vhodnosti rôznych báz dva odlišné typy signálov. Po rozbere a demonštrácii na signáloch s exponenciálnym a kmitavým priebehom môžem povedať, že predpoklad bol čiastočne správny. V prípade funkcie $f(x)$ je jednoznačne lepšou voľbou polynomická báza. Fourierovej transformácii $f(x)$ sa ani po zdvojnásobení počtu c_m nezmenšil rozdiel energií pod hodnotu 0,2. Pri rozklade signálu $g(x)$ sa na prvý pohľad javí vhodnejšia Fourierova transformácia, ktorá však so zvyšovaním m svoju chybu znižuje len o veľmi malé rozdiely. Ak sa rovnako zvýši aj m pre Legendreovu transformáciu, tak výsledná aproximácia sa zlepši o niekoľko rádov aj v porovnaní s Fourierovou transformáciou. Diskrétne kosínusová transformácia je v oboch prípadoch „zlatá stredná cesta“. Nevytvárala veľké rozdiely medzi pôvodnými a zrekonštruovanými signálmi, no nebola ani tak presná ako Fourierova či Legendreova transformácia.

4 Legendreove polynómy vo frekvenčnej doméne

V tejto kapitole sa pozrieme na Legendreove polynómy z iného uhla pohľadu – vložíme ich do frekvenčnej oblasti. Takto sa z nich stanú obrazy funkcií, ktorých časový priebeh bude odvodený ďalej. Najskôr je však potrebné zdefinovať ďalšie pojmy, ktoré sú kľúčovými predpokladmi pre nasledujúcu prácu.

4.1 Frekvenčne omedzený signál

Šírka pásma frekvenčne obmedzeného signálu je dôležitý údaj, čo sa týka rekonštrukcie signálov. Podľa Nyquistovho-Shannonovho teorému musí byť signál vzorkovaný minimálne dvojnásobkom maximálnej frekvencie v jeho spektre, aby bolo možné signál dokonale zrekonštruovať [8]. Preto zavediem konštantu σ , ktorá bude označovať maximálnu frekvenciu spektra signálu $f(t)$.

Definícia 4.0 Funkciu nazývame frekvenčne obmedzenou ak Fourierova transformácia nadobúda nulové hodnoty mimo konečný interval

$$F(\omega) = 0 \quad \text{pre} \quad |\omega| > \sigma. \quad [9] \quad (4.1)$$

4.2 Besselove funkcie prvého druhu

Rovnako ako Legendreove polynómy, aj Besselove funkcie prvého druhu (ďalej len Besselove funkcie) je možné vyjadriť viacerými spôsobmi. Ako prvú uvediem generujúcu funkciu, z ktorej sa následne budú odvíjať ďalšie metódy výpočtu predpisov týchto funkcií,

$$g(x, t) = e^{(x/2)(t-1/t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)t^n. \quad (4.2)$$

Po použití Maclaurinovho radu a úpravou vzťahu (4.2) je výsledkom vzorec pre $J_n(x)$,

$$J_{-n}(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^{s+n}}{(n+s)!s!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2s} = (-1)^n J_n(x). \quad (4.3)$$

Naposledným, no posledným uvedeným spôsobom, je rekurentný spôsob generovania. Vzorec sa opäť vzťahuje rovnako ako na $J_n(x)$,

$$\frac{2n}{x} J_n(x) = J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) \quad (4.4)$$

tak aj pre deriváciu $J'_n(x)$,

$$2J'_n(x) = J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x). \quad (4.5)$$

Besselove funkcie sú taktiež jedným z riešení Besselovej rovnice

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0. \quad (4.6)$$

Je nutné poznamenať, že vyššie uvedené vzorce pracujú s celočíselným koeficientom n . Ak n nahradíme neceločíselným koeficientom ν , tak J_ν a $J_{-\nu}$ sa stávajú lineárne nezávislými riešeniami Besselovej rovnice a rovnosť $J_{-\nu} = (-1)^\nu J_\nu$ podľa vzťahu (4.3) prestáva platiť. Avšak je dokázateľné, že rekurentné vzťahy sú stále platné aj v tomto prípade. [10]

4.2.1 Vzťah s Legendreovými polynómami

Následne ukážem prepojenie medzi Legendreovými polynómami a Besselovými funkciami. Uvažujme Legendreove polynómy tak ako boli predstavené v 2. kapitole s tým rozdeielom, že ich vložíme do frekvenčnej domény, čím začnú tvoriť frekvenčné spektrum $P(\omega)$. Dilatáciou polynómov na interval $-\pi; \pi$ a aplikovaním spätnej Fourierovej transformácie vzniká nasledovný predpis,

$$\mathcal{F}^{-1} \left\{ P_n \left(\frac{\omega}{\pi} \right) \right\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_n \left(\frac{\omega}{\pi} \right) e^{i\omega t} d\omega.$$

Zvolením vhodnej substitúcie dostávame výraz

$$\left| \begin{array}{l} \omega = \pi x \\ d\omega = \pi dx \\ \omega = \pm\pi \Leftrightarrow x = \pm 1 \end{array} \right| = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 P_n(x) e^{ix\pi t} \pi dx,$$

v ktorom zavedieme ďalšiu substitúciu $\pi t = \alpha$ od Zwillingera [11], čo v tomto prípade vedie na konečné riešenie v tvare

$$\int_{-1}^1 P_n(x) e^{ix\alpha} dx = i^n \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}} J_{n+\frac{1}{2}}(\alpha). \quad (4.7)$$

Ďalej budem v práci podľa Abramowitza [5] Besselove funkcie zapisovať v tvare

$$j_n(\pi t) = \sqrt{\frac{1}{2t}} J_{n+\frac{1}{2}}(\pi t), \quad (4.8)$$

kde $j_n(\pi t)$ nazývame sférickou Besselovou funkciou. V predpise je už zahrnutá aj zmena mierky uvádzaná vyššie.

4.2.2 Ortogonalita

Na dokázanie ortogonality Besselových funkcií využijem Parsevalovu identitu (3.6), vďaka ktorej sa táto vlastnosť Legendreových polynómov prejaví aj pri sférických

Besselových funkciách. Platí

$$\int_{-\infty}^{\infty} j_m(\pi t) j_n(\pi t) dt = \begin{cases} \frac{1}{2n+1}, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases} \quad (4.9)$$

Keďže polynómy sú vo frekvenčnej oblasti použité na inej mierke ako $\langle -1, 1 \rangle$, je potrebné tomu prispôbiť aj ich normalizáciu. Vyjadrím ju najskôr pre Legendreove polynómy. Aby bolo možné aplikovať vetu 2.6 je potrebné zaviesť substitúciu, po ktorej dostaneme normalizáciu v nasledovnom tvare,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_m\left(\frac{\omega}{\pi}\right) P_n\left(\frac{\omega}{\pi}\right) d\omega &= \left| \begin{array}{l} \frac{\omega}{\pi} = u \\ d\omega = \pi du \end{array} \right| = \frac{\pi}{2\pi} \int_{-1}^1 P_m(u) P_n(u) du \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2n+1}, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases} \end{aligned} \quad (4.10)$$

Po získaní upraveného tvaru už môžeme aplikovať Parsevalovu identitu, ktorá hovorí, že Besselove funkcie budú ortogonálne za rovnakých podmienok ako Legendreove polynómy.

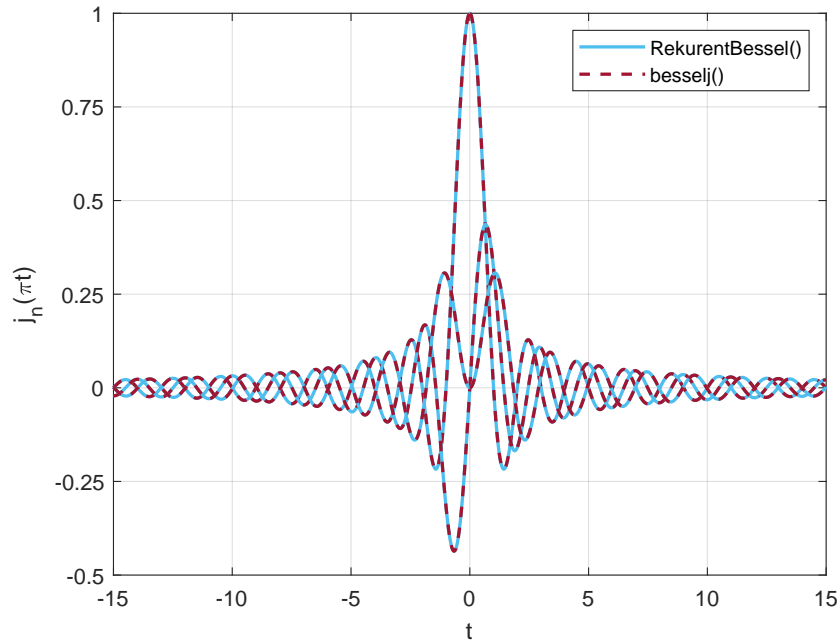
4.2.3 Vizualizácia vlastností

Aby sme lepšie porozumeli, je vhodné si funkcie taktiež graficky znázorniť. To som realizovala pomocou MATLAB-u, kde som otestovala rekurentný spôsob generovania Besselových funkcií (4.4) a porovнала ho so softwareovou funkciou `besselj()`.

Ako je možné vidieť na obrázku 4.1, prvý rád Besselovej funkcie odpovedá funkcii `sinc`, v tomto prípade

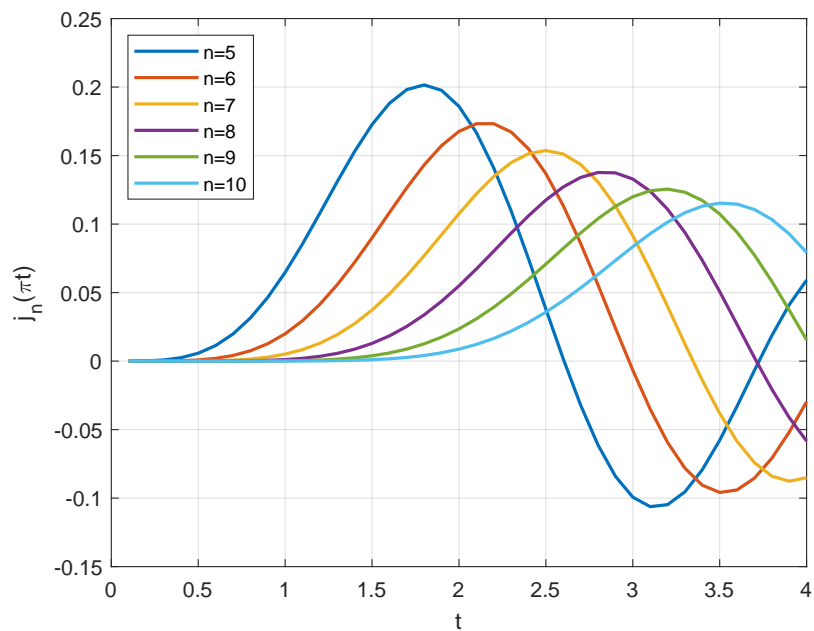
$$j_n(\pi t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t},$$

a zvyšné rády funkcií sa od nej odvíjajú. Je zrejmé, že po dosadení $t = 0$ nastáva problém delenia nulou, čo vedie k výsledku NaN (Not a Number). Tento fakt sa od rádu $n = 6$ výrazne prejavuje vo funkcii `RekurentBessel()`, čo spôsobilo, že výpočet nie je vyhovujúci na ďalšiu prácu pre svoju nestabilitu. Funkcia `besselj()` tento problém rieši bodom nespojivosti v nule. Z týchto dôvodov budú šetky nasledujúce výpočty realizované pomocou vstavanej funkcie MATLABu.



Obr. 4.1: Prvé tri priebehy Besselových funkcií

Ďalšou vlastnosťou, ktorú z výhodou využijem v nasledujúcej kapitole, je rozširujúca sa oblasť nulových hodnôt v okolí počiatku. Tento jav umožňuje pri interpolácii signálov zakomponovať len tie, ktoré majú v intervale pozorovania nenulovú energiu.



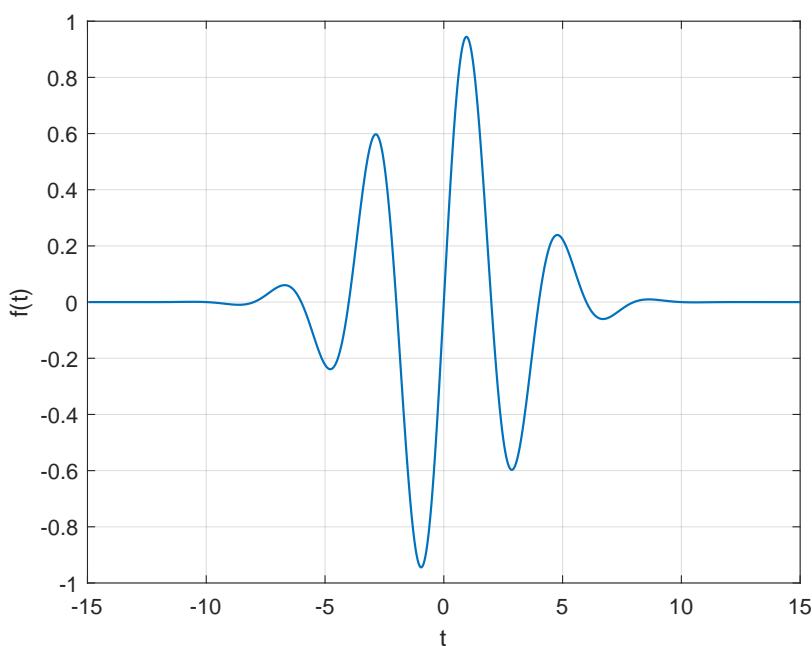
Obr. 4.2: Rozširovanie nulovej oblasti Besselových funkcií

5 Nepravidelné diskkrétne vzorkovanie

Rekonštrukcie signálov z rovnomerne vytvorených vzoriek je bežne využívaným nástrojom pri spracovávaní signálov. V praxi sa však bežne stretávame aj s javom, kedy vzorky nevznikajú v presne stanovené okamihy. Ak dôjde k takýmto odchýlkam od vzorkovacej frekvencie vznikajú body, ktoré sú na vodorovnej osi navzájom oddelené o nesúmerne veľké vzdialenosti. Preto sa v tejto kapitole zameriam na aproximáciu práve z nepravidelných vzoriek za pomoci Besselových funkcií, ktoré porovnam s bežne používanými metódami, ako je lineárne preloženie bodov a splajn. Ako testovacia funkcia bola zvolená Gaussova krivka modulovaná pomocou sínusu s predpisom

$$f(t) = e^{-0,06t^2} \sin(0,5\pi t). \quad (5.1)$$

Oblasť záujmu rekonštrukcie bude signál v intervale $\langle -10,10 \rangle$, keďže ďalšie hodnoty už možno považovať za zanedbateľné.



Obr. 5.1: Gaussova krivka modulovaná sínusovou funkciou

5.1 Časová doména

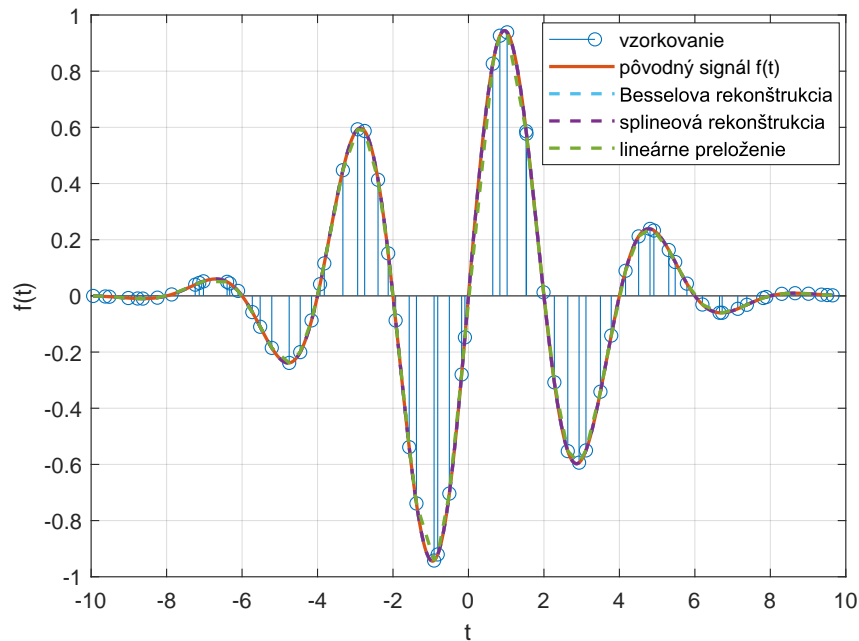
Ďalším krokom je vygenerovanie náhodných časových vzoriek pomocou MATLABu v intervale, ktorý chceme skúmať. V tomto momente sú známe všetky prvky k tomu,

aby bolo možné určiť koeficienty spektra c_n . Na tento výpočet využijem vygenerovanú bázu Besselových funkcií s rovnakým nepravidelným vzorkovaním ako pre signál $f(t)$. Následne som pomocou metódy najmenších štvorcov získala koeficienty c_n , ktoré som mohla využiť na spätné zrekonštruovanie signálu pomocou nasledovného vzťahu:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n j_n(\pi t), \quad (5.2)$$

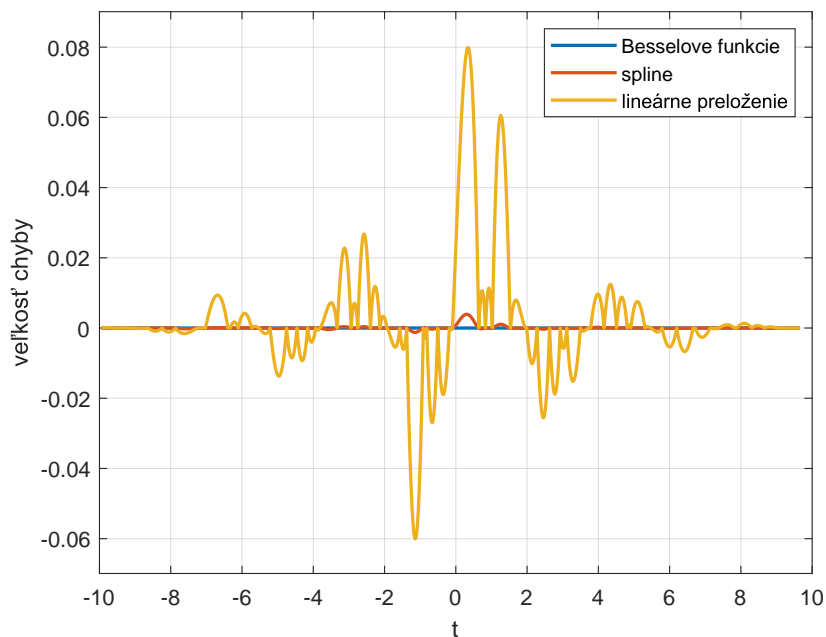
už však pomocou bázy vygenerovanej s jemným a pravidelným vzorkovaním.

V tomto bode sa taktiež dostávam k vhodnému výberu maximálneho rádu Besselovej funkcie zahrnutej do rekonštrukcie. Ako už bolo spomenuté, budem sa orientovať práve podľa šírky nulovej oblasti Besselových funkcií v intervale $\langle -10, 10 \rangle$. Kritériom pre zvolenie funkcií bolo dosiahnuť najvyššiu možnú výpočtovú stabilitu a zároveň zahrnúť funkcie, ktoré majú na medziach intervalu funkčnú hodnotu väčšiu ako $1/2$ globálneho maxima. nezanedbateľnú energiu v oblasti skúmania. V tomto prípade je maximálny rád Besselovej funkcie zahrnutý do interpolácie $n = 32$. Výslednú rekonštrukciu na nasledujúcom obrázku 5.2 porovnávam s interpoláciou splajnom a lineárnym preložením.



Obr. 5.2: Modulovaná Gaussova krivka a jej rekonštrukcia z nepravidelných vzoriek

Z grafu vidieť, že každá z metód splnila svoju úlohu. Čo však zjavné nie je, sú odlišnosti v kvalite rekonštrukcie. Preto to objasním grafom a tabuľkou rozdielov jednotlivých interpolácií od pôvodného signálu.



Obr. 5.3: Porovnanie chyby interpolácie jednotlivých metód

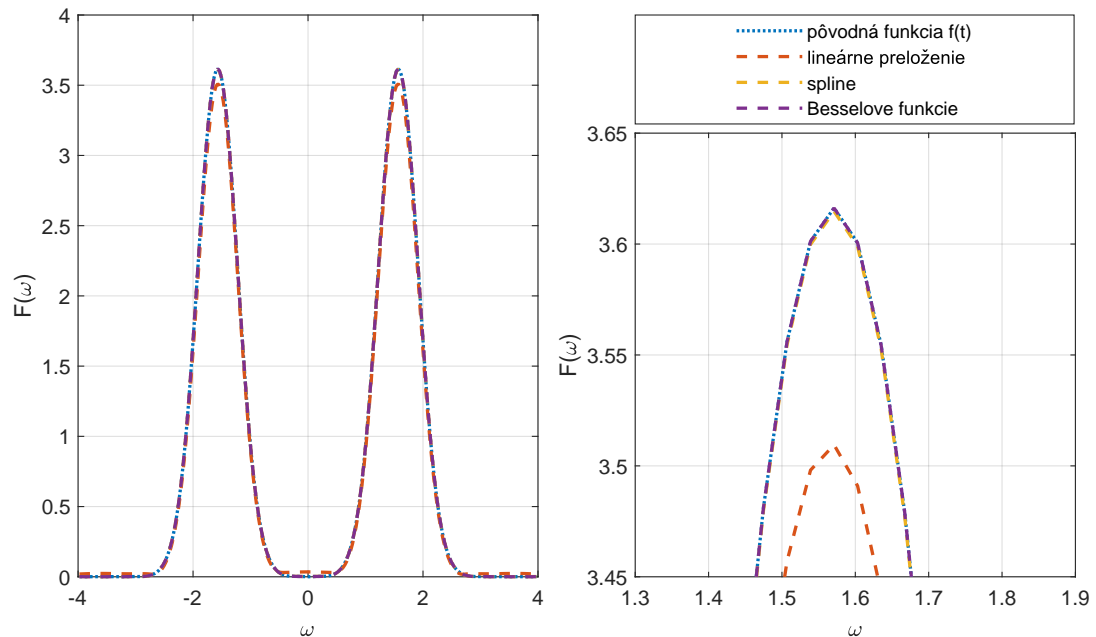
Aproximácia	Chyba	Časová náročnosť
Lineárne preloženie	7.19	1.51×10^{-2}
Splajn	0.24	3.29×10^{-3}
Besselove funkcie	7.66×10^{-8}	3.75×10^{-3}

Tab. 5.1: Číselné porovnanie odchýlky rekonštrukcie Gaussovej modulovanej krivky

Lineárne preloženie je len „hrubou“ podobou pôvodného signálu a jeho kvalita významne závisí na rozložení vzoriek. Pri použití tejto metódy sa stráca veľké množstvo informácií o signále a na tento typ použitia je najmenej vyhovujúca. Keďže splajn každý úsek medzi dvoma bodmi spája polynómom, je vhodnejšou formou aproximácie signálu $f(t)$. Z porovnania však vyplýva jasný záver, že Besselove funkcie sú rádovo najpresnejšou rekonštrukciou oproti bežne používaným metódam. Dôvodom, prečo je rozdiel takto výrazný sú spôsoby, ako jednotlivé metódy pracujú. V prípade lineárneho preloženia a splajnu je priebeh medzi dvoma bodmi daný len najbližšími vzorkami, zatiaľ čo Besselova rekonštrukcia je ovplyvňovaná všetkými známymi vzorkami.

5.2 Frekvenčná doména

Na získanie frekvenčného spektra je zvyčajne používaná Fourierova transformácia. Dostačujúci nástroj, zvládnuteľný taktiež pre počítačovú techniku. Avšak v tejto podkapitole sa zameriam na to, ako pomocou Legendreových polynómov možno dosiahnuť výpočet spektra bez použitia algoritmu FFT. Prvé znázorním porovnanie spektier zrekonštruovaných signálov z predchádzajúcej časti práce.



Obr. 5.4: Porovnanie frekvenčných spektier podľa použitej metódy interpolácie

Pre porovnateľné ohodnotenie presnosti vytvoreného frekvenčného spektra boli všetky priebehy vypočítané pomocou funkcie `fft()`. Graf spektra analyzovaného signálu je tvorený dvoma Gaussovými krivkami nachádzajúcimi sa na základných frekvenciách, čo v tomto prípade prislúcha hodnote $\omega_0 = 0, 5\pi$. Rovnako ako v časovej doméne, tak aj obrázku 5.4 sa odrážajú nepresnosti súvisiace s rekonštrukciou pôvodného signálu. S lineárnym preložením opäť vznikajú najväčšie odchýlky od správneho priebehu, čo bolo očakávateľné po zhodnotení kvality aproximácie z časového priebehu. Splajnová metóda sa javí ako takmer splývajúca s pôvodnou funkciou, no stále sú zjavné malé odchýlky. Keďže Besselove funkcie zrekonštruovali signál s veľmi malou hodnotou chyby, ich vytvorené spektrum takmer dokonale splýva s priebehom interpolovaného signálu. Avšak ani tento prípad nie je úplne presný. Naskytujú sa dve možnosti, ako dosiahnuť vyššiu precíznosť vytvorenia frekvenčného spektra:

- Prevod Fourierovej transformácie podľa tabuliek

- Legendreove polynómy

Na exaktné určenie využijem známe vzťahy z tabuliek

$$\mathcal{F} \{e^{-at^2}\} = F(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \cdot e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}} \quad (5.3)$$

$$\mathcal{F} \{f(t) \sin at\} = \frac{F(\omega - a) - F(\omega + a)}{2i} \quad (5.4)$$

ktorých skombinovaním a dosadením konkrétnych hodnôt získam vzorec

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \{f(t) \sin at\} &= \frac{1}{2i} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \left(e^{-\frac{(\omega-a)^2}{4\alpha}} - e^{-\frac{(\omega+a)^2}{4\alpha}} \right) \\ &= \frac{1}{2i} \sqrt{\frac{\pi}{0.06}} \left(e^{-\frac{(\omega-0.5\pi)^2}{0.24}} - e^{-\frac{(\omega+0.5\pi)^2}{0.24}} \right). \end{aligned} \quad (5.5)$$

Avšak aj rad Besselových funkcií možno previesť na spektrum analyticky. Presnosťou sa výrazne približuje vzťahu (5.5), oproti použitiu funkcie `fft()`. Prvým krokom je uvedenie si, že bázu tvoria Besselove funkcie a teda vo Fourierovej transformácii využijem vzorec (5.2).

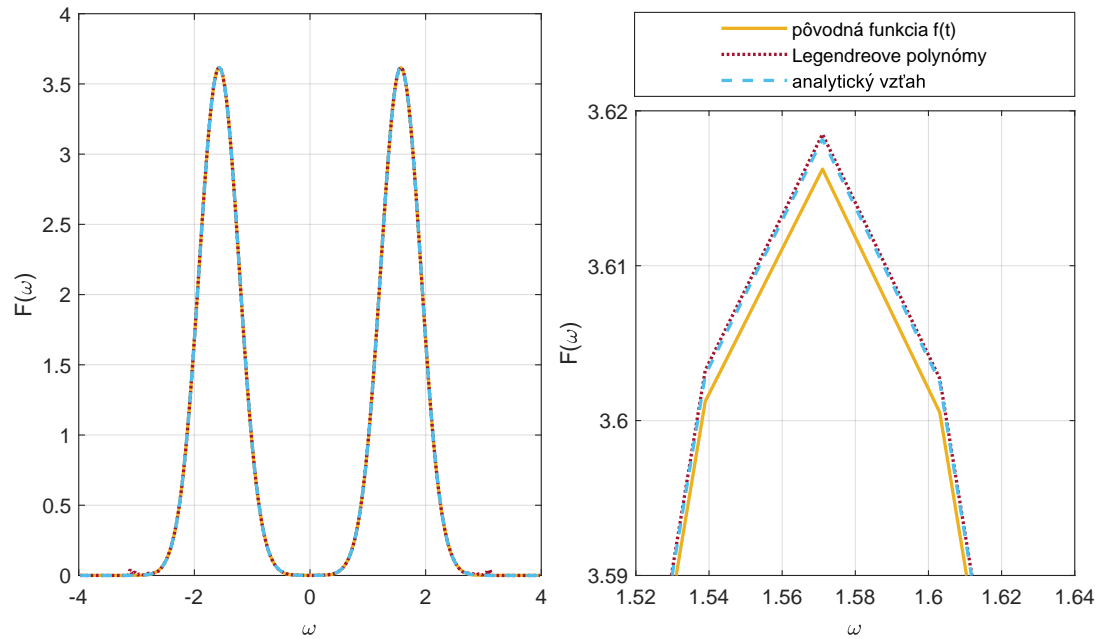
$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{n=0}^{N-1} c_n j_n(\pi t) \right] e^{-i\omega t} dt$$

V tomto bode sa naskytuje možnosť vyňať sumu a konštanty pred integrál, ktorý sa ďalej dá upraviť pomocou vzťahu (4.7) do podoby

$$F(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} c_n \int_{-\infty}^{\infty} j_n(\pi t) e^{-i\omega t} dt = \sum_{n=0}^{N-1} c_n i^{-n} P_n \left(\frac{\omega}{\pi} \right). \quad (5.6)$$

Z takto upravenej rovnice už vieme jednoducho vypočítať frekvenčné spektrum.

Z predpisu (5.6) jasne vyplýva, že počet zahrnutých polynómov ovplyvňuje presnosť vytvoreného spektra. Avšak, ako už bolo spomenuté vyššie, v tomto prípade treba brať ohľad na mieru prejavenej numerickej nestability pri výpočtoch inverzných matíc. Prejavuje sa najmä v okolí počiatkov stúpaní grafu zvlnením a prekmitmi. Uvážením tejto skutočnosti bolo najvhodnejšie vybrať maximálny rád polynómov v rozmedzí 30 až 34. Zatiaľ čo rád 30 prejavuje najnižšiu výpočtovú nestabilitu a s analyticky vypočítaným spektrom sa takmer dokonale prekrýva, stupeň 32 splňuje aj podmienku stanovenú pre Besselove funkcie.



Obr. 5.5: Porovnanie výpočtových metód frekvenčného spektra Gaussovej modulovanej krivky

Záverom možno zhodnotiť, že analytický tabulkový vzťah je exaktným tvarom frekvenčného spektra a jeho presnosť je omedzená len zaokrúhľovaním výpočtového softwaru. Legendreove polynómy sú, pri správnom zvolení ich rádu, ekvivalentnou náhradou a taktiež sa dá povedať, že sú menej náročné na prácu oproti nutnosti vyhľadávania v tabulkách. Funkcia `fft()` spočíta spektrum s najnižšou precíznosťou, ale jej použitie je najjednoduchšie, čo sa týka prostredia MATLABu.

6 Analytický výpočet spektra

V predchádzajúcich kapitolách sme sa zoznámili s vlastnosťami Besselových funkcií a ich prepojením s Legendreovými polynómami. Preto v tejto kapitole ukážem, ako pomocou sf. Besselových funkcií vypočítať spektrum jednoduchého sínusového signálu $\sin(\omega_0 t)$ s využitím týchto vlastností, najmä ortogonalít sf. Besselových funkcií.

$$c_n = (2n + 1) \int_{-\infty}^{\infty} \sin(\omega_0 t) \cdot j_n(\pi t) dt \quad (6.1)$$

V prvom kroku výpočtu je vhodné upraviť funkciu sínus podľa Eulerovej identity nasledovne,

$$\sin(\omega_0 t) = \frac{e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}}{2i}, \quad (6.2)$$

ktorú v tomto tvare dosadím do integrálu z (6.1), kde ho taktiež rozdelím na dve časti pre lepšiu zrozumiteľnosť a čitateľnosť.

$$\begin{aligned} c_n &= (2n + 1) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}}{2i} j_n(\pi t) dt \\ &= \frac{2n + 1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_0 t} j_n(\pi t) dt - \frac{2n + 1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega_0 t} j_n(\pi t) dt \\ &= a_n + b_n \end{aligned}$$

Najskôr upravím sčítanec a_n podrobnejším postupom pre jasnosť zavedených krokov. V prvom rade si všimneme, že sa dá využiť vzťah (4.8) a následne po doplnení imaginárnej zložky aj (4.7)

$$a_n = i^{-n} \frac{2n + 1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(-\omega_0)t} \cdot i^n \sqrt{\frac{1}{2t}} J_{n+\frac{1}{2}}(\pi t) dt = i^{-n} \frac{2n + 1}{2i} P_n \left(\frac{-\omega_0}{\pi} \right)$$

Aby sme si zjednodušili výpočet a nepracovali s časovo prevrátenými polynómami, uplatním vetu o parite (2.4) Legendreových polynómov. Tým sa dostávam k finálnemu kroku, kde sa naskytuje $(-1)^n$ upraviť vyjadrením pomocou imaginárnej zložky.

$$a_n = (-1)^n i^{-n} \frac{2n + 1}{2i} P_n \left(\frac{\omega_0}{\pi} \right) = i^{n-1} \frac{2n + 1}{2} P_n \left(\frac{\omega_0}{\pi} \right)$$

Člen a_n je týmto vo konečnej podobe. Analogicky budem postupovať aj pre b_n , preto nebudem uvádzať všetky medzikroky.

$$b_n = -\frac{2n + 1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega_0 t} j_n(\pi t) dt = -i^{-n-1} \frac{2n + 1}{2} P_n \left(\frac{\omega_0}{\pi} \right)$$

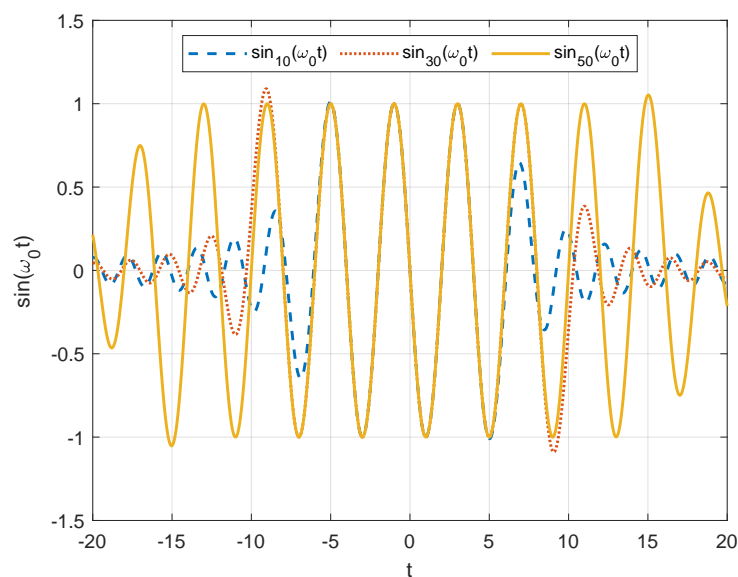
V tomto bode zostáva dosadiť výsledok k rovnici (6.1), čím získavame výsledné spektrum signálu $\sin(\omega_0 t)$ v tvare

$$c_n = (i^{n-1} - i^{-n-1}) \frac{2n + 1}{2} P_n \left(\frac{\omega_0}{\pi} \right), \quad (6.3)$$

a pre spätné získanie signálu bude platiť

$$\sin(\omega_0 t) \approx \sum_0^N c_n j_n(\pi t) = \sum_0^N (i^{n-1} - i^{-n-1}) \frac{2n+1}{2} P_n\left(\frac{\omega_0}{\pi}\right) j_n(\pi t) \quad (6.4)$$

Môže sa zdať zvláštne, že sínusový signál skladáme z imaginárnou zložkou. V tomto prípade sa ale stanú dve veci. Keďže sínus je funkcia nepárna, všetky prvky spektra pre nepárne n budú reálne čísla, pretože imaginárna zložka bude mať páry exponent. Keď za n dosadíme párne čísla imaginárna časť bude nulová a teda aj celý výsledok. Párne stupne tak znova nebudú súčasťou konečného spektra, ako to bolo aj v prípade Legendrovej transformácie pre signál sinc a bude tvorené len funkciami nepárnymi.



Obr. 6.1: Aproximácia funkcie $\sin(\omega_0 t)$, $\omega_0 = 0,5\pi$ vytvorená analytickým vzťahom 6.4

Záver

V práci som sa zoznámila s pojmom Legendreových polynómov a preštudovala ich vlastnosti, ako aj možnosť ich využitia pre Legendreovu transformáciu. Následne som v prostredí MATLAB R2020b nadobudnuté poznatky pretransformovala do algoritmu, ktorý polynomicke bazu generuje. Po optimalizácii a úpravách kódu je možné generovať polynómy. Ďalšou úlohou bolo využiť Legendreove polynómy v časovej doméne na transformáciu signálov do tejto bázy ako aj realizácia spätnej aproximácie. Výsledky aplikácie na signáloch odlišných priebehov ukázali, že polynomicke bazu je vhodným prostriedkom ako na nekaitavé, tak aj na kaitavé signály. Taktiež má potenciál vyššej presnosti oproti Fourierovej a Diskrétnej kosínusovej transformácie.

Ďalším predmetom skúmania bolo umiestniť Legendreove polynómy do frekvenčnej domény a v časovej oblasti vytvoriť bazu sférických Besselových funkcií. Vygenerovaný signál (Gaussova modulovaná krivka), ktorý bol navzorkovaný nepravidelne, sa podarilo zrekonštruovať s vysokou presnosťou, ďaleko presahujúcou presnosť ďalších porovnávaných metód. Spektrum signálu bolo taktiež vytvorené ako používanými algoritmi Fourierovej transformácie, tak špeciálnou naimplementovanou metódou s nasledovným postupom:

- vygenerovanie Legendreovej bázy vo frekvenčnej doméne,
- spočítanie koeficientov Besselových funkcií c_n ,
- získanie spektra analytickým vzťahom.

Takto vytvorený algoritmus preukázal výsledok blížiaci sa exaktnému tvaru spektra, čím v presnosti prekonal tradičný spôsob výpočtu spektra signálu.

Keďže niektoré výpočty prejavujú numerickú nestabilitu, je vhodné tieto problémy ďalej skúmať s cieľom eliminovať prejavované nežiaduce efekty niektorých operácií.

Literatúra

- [1] REKTORYS, Karel. *Přehled užité matematiky*. 2. opr. vyd. Praha: Nakladatelství technické literatury, 1968. Česká matice technická. ISBN 03-003-81.
- [2] KUFNER, Alois a KADLEC Jan. *Fourierovy řady*. Praha: Academia, 1969. Cesta k vědění. ISBN 21-062-69.
- [3] ANDREWS, Larry C. *Special functions of mathematics for engineers*. 2. vyd. New York: McGraw-Hill, 1992. ISBN 0-8194-2616-4.
- [4] JACKSON, Dunham. *Fourier Series And Orthogonal Polynomial*. The Mathematical Association of America, 1941. The Carus Mathematical Monographs, sv.6. 249 s. Dostupné z URL: <<https://archive.org/details/in.ernet.dli.2015.205606/page/n1/mode/2up>>.
- [5] ABRAMOWITZ, Milton a STEGUN, Irene A. *Handbook of mathematical functions: with formulas, graphs, and mathematical tables*. New York: Dover Publications, 1972. xiv, 1046 s. ISBN 0-486-61272-4.
- [6] DĚMIDOVIČ, B.P., MARON, I.A. *Základy numerické matematiky*. Praha: SNTL, 1966, 721 s. ISBN 04-009-66.
- [7] MÉNDEZ-PÉREZ, J.M.R., MORALES, Miquel G. *The Finite Legendre Transformation of Generalized Functions*. Rocky Mountain Journal Of Mathematics, 1998. vol. 28, no. 4, s. 1371–1389 [3.10.2020]. DOI 10.1216/rmjm/1181071722. Dostupné z URL: <<https://projecteuclid.org/euclid.rmjm/1181071722>>.
- [8] BOCHE, Holger. a MÖNICH, Ullrich J. *Algorithmic Computability of the Signal Bandwidth*. IEEE Transactions on Information Theory, 2021. vol. 67, no. 4, s. 2450-2471 [30.4.2021]. ISSN 0018-9448. Dostupné z URL: <<https://ieeexplore.ieee.org/document/9349516>>.
- [9] TSENG, Chien-Cheng, LEE, Su-Ling. *On the reconstruction of derivative sampling method of band-limited signal*. Signal Processing, 2016. vol. 129, s. 166-182 [30.4.2021], ISSN 0165-1684. Dostupné z URL: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0165168416301062>>.
- [10] LAMBERS, Jim. *Bessel Functions of the First Kind*. University of Southern Mindanao, 2013. Lecture 12 and 13, 5 s. [20.4.2021] Dostupné z URL: <<https://www.math.usm.edu/lambers/mat415/lecture12.pdf>>. Matematické skriptum

- [11] GRADSHTEYN, I.S., RYZHIK, I.M., JEFFREY, A., ZWILLINGER, D. *Table of integrals, series, and products*. 7. vyd. Burlington:Academic Press,2007.ISBN 978-0-12-373637-6.
- [12] IGNJATOVIĆ, A., WIJENAYAKE, C., KELLER, G. *Chromatic Derivatives and Approximations in Practice—Part I: A General Framework*. IEEE Transactions on Signal Processing, 2018. vol. 66, no. 6, s. 1498-1512, DOI:10.1109/TSP.2017.2787127.
- [13] IGNJATOVIĆ, A., WIJENAYAKE, C., KELLER, G. *Chromatic Derivatives and Approximations in Practice—Part II: Nonuniform Sampling, Zero-Crossings Reconstruction, and Denoising*. IEEE Transactions on Signal Processing, 2018. vol. 66, no. 6, s. 1513-1525, DOI: 10.1109/TSP.2017.2787149.

Zoznam symbolov a skratiek

c_n	n -tý prvok spektra signálu
$F(\omega)$	Fourierov obraz signálu $f(t)$
\mathcal{F}	Fourierova transformácia
\mathcal{F}^{-1}	inverzná Fourierova transformácia
i	imaginárna jednotka
J_n	Besselova funkcia prvého druhu rádu n
j_n	sférická Besselova funkcia prvého druhu rádu n
\mathcal{L}	Legendreova transformácia
$L_2(a, b)$	Hilbertov priestor
ω	uhlová frekvencia
P_n	Legendreov polynóm rádu n
p_n	normovaný Legendreov polynóm rádu n
σ	maximálna frekvencia spektra signálu
T_s	perióda vzorkov

A Obsah elektronickej prílohy

1. Text práce
2. Skripty:
 - Analytic_sinus.m
 - Bessel.m
 - J_graf.m
 - L_spectrum.m
 - Ortogonalita.m
 - P_graf.m
 - Roots.m
3. Funkcie:
 - Bessel_basis.m
 - Boole_rule.m
 - Deriv_polynom.m
 - L_polynom.m
 - Newton_rule.m
 - Norm_p.m
 - Simp_rule.m
 - Spectrum.m

Všetky skripty a funkcie boli vytvorené v prostredí MATLAB R2020b.