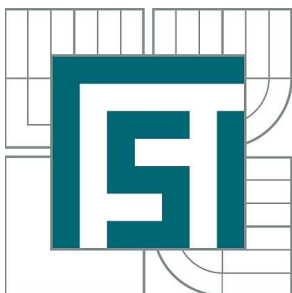


VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ  
ÚSTAV MATEMATIKY

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING  
INSTITUTE OF MATHEMATICS

## APLIKACE METODY HRANIČNÍCH PRVKŮ NA NĚKTERÉ PROBLÉMY MECHANIKY

AN APLICATION OF THE BOUNDARY ELEMENT METHOD TO SOME MECHANICAL PROBLEMS

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

STANISLAV SEDLÁČEK

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Ing. TOMÁŠ PROFANT, Ph.D.

BRNO 2010

Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství

Ústav matematiky

Akademický rok: 2009/2010

## **ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE**

student(ka): Stanislav Sedláček

který/která studuje v **bakalářském studijním programu**

obor: **Matematické inženýrství (3901R021)**

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

### **Aplikace metody hraničních prvků na některé problémy mechaniky**

v anglickém jazyce:

### **An application of the boundary element method to some mechanical problems**

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Metoda hraničních prvků je jeden z mnoha numerických nástrojů nabízející řešení některých úloh mechaniky. Nejdůležitější přednost metody hraničních prvků tkví v její schopnosti interpretace výsledků bez nutnosti diskretizace celé řešené oblasti, ale pouze její hranice. Tato vlastnost je výhodou zejména u singulárních úloh, kde ostatní metody (např. metoda konečných prvků) jsou schopny dosáhnout adekvátních výsledků jen za cenu vysokého stupně diskretizace dané oblasti. Cílem uchazeče bude aplikovat metodu hraničních prvků na Laplaceovu, příp. Poissonovu rovnici, které mají široké uplatnění v problémech mechaniky, testování přesnosti dosažených výsledků v závislosti na typu a stupni diskretizace hranice zkoumané oblasti a srovnání dosažených výsledků s výsledky získaných metodou konečných prvků.

Cíle bakalářské práce:

1. Seznámení se s teoretickými základy MHP.
2. Aplikace MHP na Laplaceovu, příp. Poissonovu, rovnici na pravoúhlé oblasti.
3. Analýza vlivu stupně diskretizace hranice oblasti, příp. volby typu prvků na přesnost metody.
4. Srovnání výsledků dosažených pomocí MHP s výsledky konečnoprvkového systému ANSYS.

Seznam odborné literatury:

Valášek, M., Bauma, V., Šika, Z., Mechanika B (skripta), Praha, ČVUT, 2004

Katsikadelis, J. T., Boundary Elements: Theory and Applications, Elsevier Science, 2002

Gaul L., Kogl M., Wagner M., Boundary elemnt methods for Engineers and Scientists, Springer, 2002

Vedoucí bakalářské práce: Ing. Tomáš Profant, Ph.D.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2009/2010.

V Brně, dne 22.10.2009

L.S.

---

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc.  
Ředitel ústavu

---

prof. RNDr. Miroslav Doupovec, CSc.  
Děkan fakulty

## **ABSTRAKT**

Tato bakalářská práce se zabývá metodou hraničních prvků (MHP). Tato numerická metoda se používá k řešení některých fyzikálních problémů, které jsou popsány eliptickými parciálními diferenciálními rovnicemi. Cílem práce je popsat metodu hraničních prvků a aplikovat ji na konkrétní příklad.

## **KLÍČOVÁ SLOVA**

Poissonova rovnice, Laplaceova rovnice, Fundamentální řešení, Diskretizace hranice

## **ABSTRACT**

This bachelor's thesis deals with the Boundary Element Method (BEM). This numerical method is used for solving of physical problems, which are described by elliptical partial differential equations. The aim of this thesis is to describe Boundary Element Method and apply on concrete problem.

## **KEYWORDS**

Poisson equation, Laplace equation, Fundamental solution, Boundary discretization

SEDLÁČEK, S. *Aplikace metody hraničních prvků na některé problémy mechaniky*: bakalářská práce. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav matematiky, 2010. 31 s. Vedoucí práce byl Ing. Tomáš Profant, Ph.D.

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci *Aplikace metody hraničních prvků na některé problémy mechaniky* vypracoval samostatně pod vedením Ing. Tomáše Profanta, Ph.D. s použitím materiálů uvedených v seznamu literatury.

Stanislav Sedláček

Děkuji svému školiteli Ing. Tomáši Profantovi, Ph.D. za vedení mé bakalářské práce, mnohé rady a připomínky, které pomohly ke zlepšení obsahové stránky této práce.

Stanislav Sedláček

# OBSAH

<b>1 Úvod</b>	<b>5</b>
<b>2 Metoda hraničních prvků</b>	<b>6</b>
2.1 Poissonova a Laplaceova rovnice . . . . .	6
2.2 Fundamentální řešení Poissonovy (Laplaceovy) rovnice . . . . .	7
2.3 Hraniční integrální rovnice pro Poissonovu a Laplaceovu rovnici . . .	10
<b>3 Numerická implementace</b>	<b>14</b>
3.1 Diskretizace hranice . . . . .	14
3.2 Numerický výpočet . . . . .	14
<b>4 Aplikace metody hraničních prvků</b>	<b>18</b>
<b>5 Závěr</b>	<b>26</b>
<b>Literatura</b>	<b>27</b>
<b>A Použitý matematický aparát</b>	<b>28</b>

# 1 ÚVOD

Metoda hraničních prvků (MHP) je jednou z numerických metod používaných k řešení fyzikálních problémů, které lze popsat parciálními diferenciálními rovnicemi. Základním principem metody je transformace zadaného okrajového problému na hraniční integrální rovnice. Řešení 2D problému se tedy redukuje na řešení integrální rovnice na jednodimenzionální hranici oblasti, 3D úloha se převede na 2D hranici. Výsledkem řešení hraničních integrálních rovnic je nalezení neznámých hraničních hodnot funkcí resp. hodnot derivací těchto funkcí, které vystupují v původní diferenciální rovnici. Pomocí MHP jsme však schopni určit i hodnoty neznámých funkcí uvnitř zkoumané oblasti. Redukce dimenze úlohy je největší přednost MHP, neboť významně snižuje počet rovnic potřebných k určení neznámých.

Bakalářská práce se zabývá pouze dvěma typy parciálních diferenciálních rovnic, Poissonovou a Laplaceovou. Cílem práce je seznámit čtenáře s teorií metody hraničních prvků a aplikovat ji na konkrétní příklad.

Druhá kapitola se zabývá transformací Poissonovy resp. Laplaceovy úlohy na hraniční integrální rovnice tzv. přímou metodou, jejímž výsledkem je sestavení hraničních integrálních rovnic, ve kterých vystupují jako neznámé ty funkce, které vystupují v původní diferenciální rovnici. K formulaci hraničních integrálních rovnic se používá tzv. fundamentální řešení a Greenovy identity.

Ve třetí kapitole je popsána diskretizace hranice oblasti a způsob řešení Laplaceovy rovnice při diskretizaci hranice konstantními prvky.

Ve čtvrté kapitole je MHP aplikována na konkrétní příklad. Příklad ilustruje vliv stupně diskretizace hranice oblasti na přesnost metody.



## 2 METODA HRANIČNÍCH PRVKŮ

V této kapitole definujeme typy úloh, kterými se v předkládané práci budeme zabývat. Ukážeme odvození řešení *Poissonovy*, příp. *Laplaceovy* rovnice pomocí hraničních integrálních rovnic, které mohou být efektivně řešeny např. *metodou hraničních prvků*. Hraniční integrální rovnice budou odvozeny cestou tzv. *přímé metody* pomocí *Greenových identit* a tzv. *fundamentálního řešení* Poissonovy rovnice. Řešení Laplaceovy a Poissonovy rovnice pomocí hraničních integrálních rovnic je možné sestavit jak pro dvourozměrné tak i trojrozměrné oblasti. Nicméně v dalším se budeme zabývat pouze dvourozměrným problémem. Další informace o metodě hraničních prvků lze nalézt např. v [1], [2], [4]. Důkazy Greenových identit a více o parciálních diferenciálních rovnicích, speciálně Poissonově a Laplaceově lze nalézt např. v [3].

### 2.1 Poissonova a Laplaceova rovnice

Nechť  $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^2$  je oblast s dostatečně hladkou hranicí  $\Gamma$  na níž hledáme funkci vyhovující následující parciální diferenciální rovnici (Poissonově)

$$\Delta u = f(x, y), \quad (2.1)$$

kde  $f(x, y)$  je tzv. *zdrojová funkce* definovaná na oblasti  $\Omega$  a pro operátor  $\Delta$  platí

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}. \quad (2.2)$$

V případě  $f(x, y) = 0$  rovnice (2.1) přejde v homogenní rovnici

$$\Delta u = 0, \quad (2.3)$$

kterou nazýváme Laplaceova rovnice. Na hranici  $\Gamma$  mohou být předepsány různé typy podmínek

- Dirichletova podmínka

$$u = \bar{u}, \quad (2.4)$$

- Neumannova podmínka

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \bar{u}_n, \quad (2.5)$$

kde

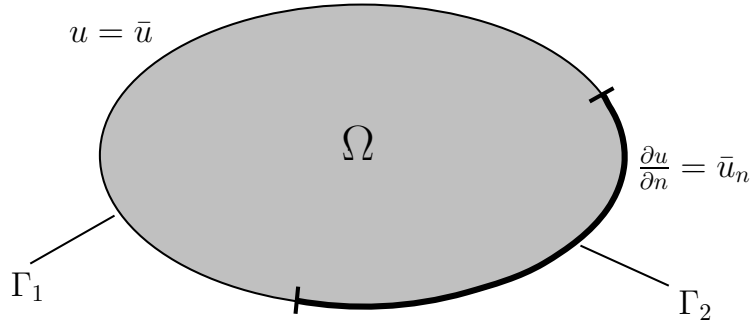
$$\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial x} n_x + \frac{\partial}{\partial y} n_y \quad (2.6)$$

a  $(n_x, n_y)$  je vnější normála ke  $\Gamma$ .

- Smíšená Dirichlet-Neumannova podmínka, viz obr. 2.1.

$$\begin{aligned} u &= \bar{u} \text{ na } \Gamma_1, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= \bar{u}_n \text{ na } \Gamma_2, \end{aligned} \quad (2.7)$$

kde  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma$  a  $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$



Obr. 2.1: Oblast se smíšenými okrajovými podmínkami.

## 2.2 Fundamentální řešení Poissonovy (Laplaceovy) rovnice

Mějme zdrojovou funkci  $f(x, y)$  umístěnou v bodě  $P(x, y)$  roviny  $xy$ . Její účinek v bodě  $Q(\xi, \eta)$  lze vyjádřit pomocí tzv. *Diracovy delta funkce* (viz dodatek A) jako

$$f(Q) = \delta(Q - P) \quad (2.8)$$

Hledejme funkci  $v = v(Q, P)$  tak, aby na oblasti  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  vyhovovala rovnici

$$\Delta v = \delta(Q - P), \quad (2.9)$$

kde  $Q$  a  $P$  jsou body uvnitř oblasti  $\Omega$ . Rovnici (2.9) přepíšeme do polárních souřadnic  $(r, \theta)$  s počátkem v bodě  $P$ . Jelikož je řešení symetrické vzhledem k počátku, je nezávislé na polárním úhlu  $\theta$  a můžeme tedy psát

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v}{\partial r} \right) = \delta(Q - P), \quad (2.10)$$

kde  $r$  je vzdálenost bodů  $Q$  a  $P$  v Euklidově smyslu, tj.

$$r(Q, P) = \left[ (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 \right]^{1/2}. \quad (2.11)$$

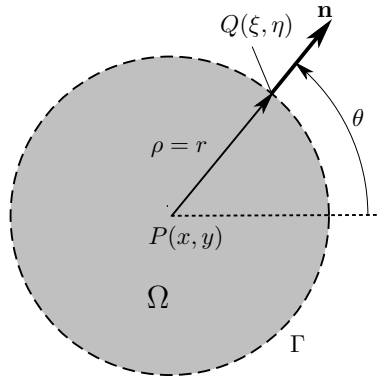
Pravá strana rovnice (2.9) je nulová pro všechny body roviny kromě počátku  $P$ . V tomto bodě hodnota pravé strany roste nade všechny meze. Mimo bod  $P$  tedy můžeme rovnici (2.10) zapsat jako

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v}{\partial r} \right) = 0 \quad (2.12)$$

a po dvojité integraci podle  $r$  získáme

$$v = A \ln r + B \quad (2.13)$$

kde  $A, B$  jsou libovolné konstanty. Položíme  $B = 0$  a určíme konstantu  $A$  za předpokladu, že  $\Omega$  je kruh o poloměru  $\rho = r$  se středem v počátku souřadného systému, resp.  $P$ , a  $\mathbf{n}$  je vnější normála k její hranici  $\Gamma$ , viz obr. 2.2.



Obr. 2.2: Kruhová oblast se středem v bodě  $P$ .

Pak

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial n} &= \frac{\partial v}{\partial r} = A \frac{1}{r}, \\ ds &= \rho d\theta. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Použitím druhé Greenovy identity (A.6)

$$\int_{\Omega} (v \Delta u - u \Delta v) d\Omega = \int_{\Gamma} \left( v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds \quad (2.15)$$

pro  $u = 1$  a  $v = A \ln r$  dostaneme

$$- \int_{\Omega} \Delta v d\Omega = - \int_{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial n} ds. \quad (2.16)$$

Pomocí (2.9) a (2.14) pro bod na hranici  $\Gamma$ , tj. pro  $r = \rho$ , upravíme předchozí rovnici

$$\int_{\Omega} \delta(Q - P) d\Omega = \int_0^{2\pi} A \frac{1}{\rho} \rho d\theta = \int_0^{2\pi} A d\theta = 2\pi A. \quad (2.17)$$

Z definice Diracovy delta funkce plyne

$$\int_{\Omega} \delta(Q - P) d\Omega = 1, \quad (2.18)$$

tedy

$$1 = 2\pi A, \quad (2.19)$$

což upravíme na

$$A = \frac{1}{2\pi}. \quad (2.20)$$

Rovnici (2.9) tedy splňuje funkce

$$v = \frac{1}{2\pi} \ln r, \quad (2.21)$$

nazývaná také jako tzv. *fundamentální řešení* rovnice (2.1) příp. (2.3). Uvedeme ještě derivaci fundamentálního řešení podle normály  $\mathbf{n}$  k hranici  $\Gamma$ , které je společně s fundamentálním řešením nezbytné pro určení hraničních integrálních rovnic

$$\frac{\partial v}{\partial n} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial n} = \frac{1}{2\pi} \frac{\cos \phi}{r}, \quad (2.22)$$

kde  $r = |q - P|$  a  $\phi$  je úhel mezi  $\mathbf{r}$  a  $\mathbf{n}$ , viz obr. 2.3, a  $q$  je označení pro bod  $Q$  nacházející se na hranici  $\Gamma$ . Abychom (2.22) odvodili, úhel mezi osou  $x$  a vektorem  $\mathbf{r}$  označíme  $\alpha$  a úhel mezi osou  $x$  a vektorem  $\mathbf{n}$  kolmým k hranici  $\Gamma$  v bodě  $q$  označíme  $\beta$ . Užitím těchto úhlů definujeme úhel  $\phi$  jako

$$\phi \equiv (\widehat{\mathbf{r}, \mathbf{n}}) \equiv \beta - \alpha. \quad (2.23)$$

Z obr. 2.3 plyne

$$\cos \alpha = \frac{\xi - x}{r}, \quad \sin \alpha = \frac{\eta - y}{r}, \quad (2.24)$$

kde

$$r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}. \quad (2.25)$$

Derivací (2.25) obdržíme

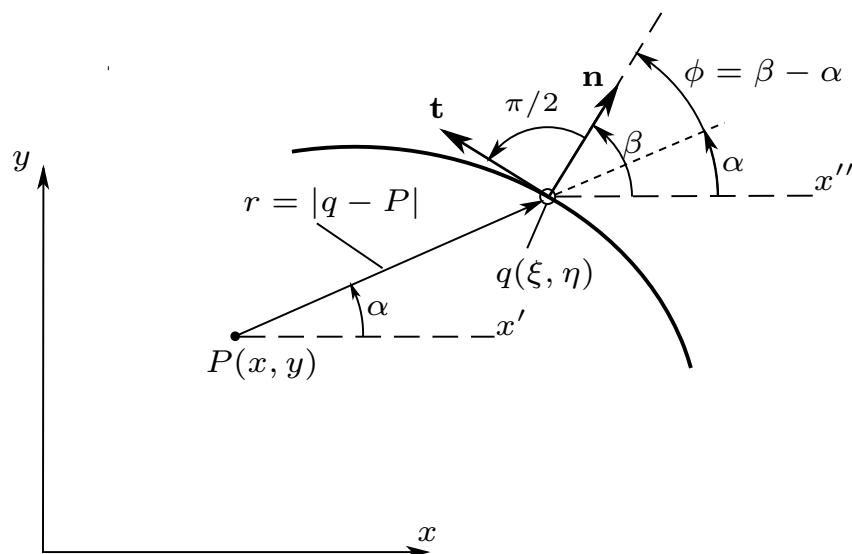
$$\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{\partial r}{\partial \xi} = -\frac{\xi - x}{r} = -\cos \alpha, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = -\frac{\partial r}{\partial \eta} = -\frac{\eta - y}{r} = -\sin \alpha \quad (2.26)$$

kde  $x, y, \xi, \eta$  označují odpovídající nezávislé proměnné, vzhledem ke kterým derivujeme. Zápísem

$$\cos \beta = n_x, \quad \sin \beta = n_y, \quad (2.27)$$

můžeme zapsat derivaci podle normály  $\mathbf{n}$  jako

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial n} &= \frac{\partial r}{\partial \xi} n_x + \frac{\partial r}{\partial \eta} n_y = \\ &= \frac{\partial r}{\partial \xi} \cos \beta + \frac{\partial r}{\partial \eta} \sin \beta = \\ &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \\ &= \cos(\beta - \alpha) = \\ &= \cos \phi \end{aligned} \quad (2.28)$$



Obr. 2.3: Geometrické zobrazení pozice vnitřního bodu  $P$  a hraničního bodu  $q$ .

## 2.3 Hraniční integrální rovnice pro Poissonovu a Laplaceovu rovnici

K určení hraničních integrálních rovnic pro Laplaceovu a Poissonovu rovnici volíme přístup přímé metody, která vychází z druhé Greenovy identity (A.6)

$$\int_{\Omega} (v\Delta u - u\Delta v) \, d\Omega = \int_{\Gamma} \left( v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) \, ds \quad (2.29)$$

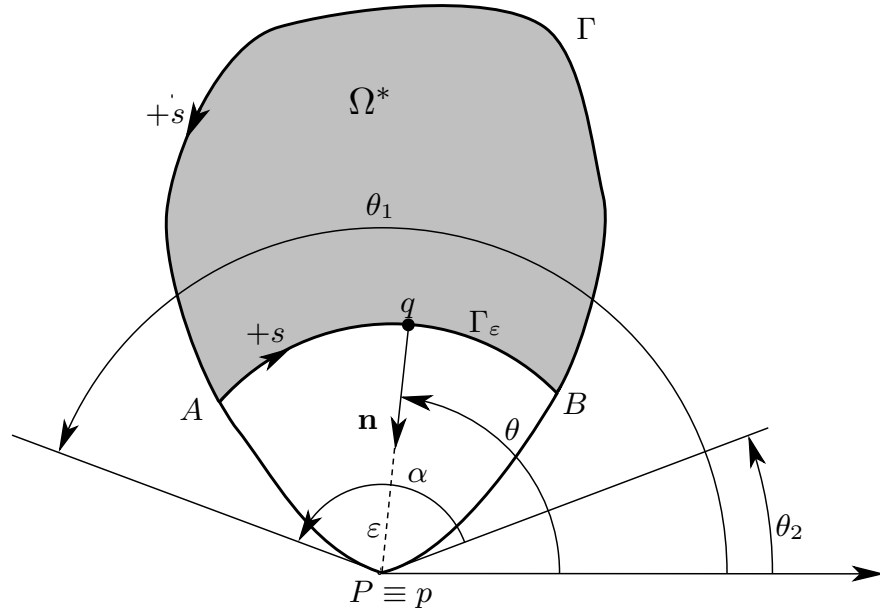
a znalosti fundamentálního řešení (2.21). Toto předpokládá zavedení dvou bodů  $P(x, y)$  a  $Q(\xi, \eta)$ , kde bod  $P$  bude pevně zvolen a bude se nacházet uvnitř oblasti  $\Omega$  a podle bodu  $Q$  budeme integrovat, nalevo přes celou oblast  $\Omega$  a napravo podél hranice  $\Gamma$ . Dosazením funkce  $f(Q)$  za  $\Delta u$  a Diracovy delta funkce  $\delta(Q - P)$  podle (2.9) za  $\Delta v$  dostaneme pro levou stranu předchozího vztahu

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (v\Delta u - u\Delta v) \, d\Omega &= \int_{\Omega} \left( v(Q, P)f(Q) - u\delta(Q - P) \right) \, d\Omega = \\ &= \int_{\Omega} v(Q, P)f(Q) \, d\Omega - u(P) \end{aligned} \quad (2.30)$$

a vztah (2.29) můžeme přepsat do tvaru

$$u(P) = \int_{\Omega} \left( v(Q, P)f(Q) \right) \, d\Omega - \int_{\Gamma} \left( v(q, P) \frac{\partial u(q)}{\partial n} - u(q) \frac{\partial v(q, P)}{\partial n} \right) \, ds, \quad (2.31)$$

kde jsme zavedli značení bodů na hranici  $\Gamma$  malými písmeny a uvnitř oblasti  $\Omega$  velkými písmeny. Rovnice (2.31) je integrální řešení pro Poissonovu rovnici v libovolném bodě  $P$  uvnitř hranice  $\Omega$ . Z tohoto výrazu však není možné určit hodnoty neznámých veličin  $u$  a  $\partial u/\partial n$  na hranici  $\Gamma$ . Aby tomu tak bylo, rovnici (2.31) upravíme pro bod  $P \equiv p$  ležící na hranici  $\Gamma$ . Budeme se zabývat obecným případem, kdy hranice není hladká a  $P$  je rohový bod. Opíšeme okolo bodu  $P$  kruhový oblouk o poloměru  $\varepsilon$  ohraničený navíc oblouky  $PA$  a  $PB$ , čímž vytvoříme oblast  $\Omega^*$ , viz obr. 2.4. Oblouk  $AB$  označme jako  $\Gamma_\varepsilon$  a součet délek oblouků  $PA$  a  $PB$  označíme  $l$ . Úhel mezi tangentami hranice v bodě  $P$  označíme  $\alpha$ .



Obr. 2.4: Rozdělení oblasti  $\Omega$  s počátkem hladkou hranicí  $\Gamma$  na oblast  $\Omega^*$  bez hraničního bodu  $P \equiv p$  a okolí bodu  $P$  tvořeného oblouky  $PA$ ,  $AB$  a  $BP$ .

Platí,

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Gamma_\varepsilon &= 0, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\Gamma - l) &= \Gamma, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Omega^* &= \Omega. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Aplikujeme druhou Greenovu identitu (A.6) na funkce  $u$ , resp.  $v$ , definované na oblasti  $\Omega^*$  a splňující (2.1) resp. (2.9). Jelikož bod  $P$  leží mimo oblast  $\Omega^*$ , kde  $\delta(Q - P) = 0$

$$\int_{\Omega^*} u \delta(Q - P) d\Omega = 0 \quad (2.33)$$

druhou Greenovu identitu (A.6) můžeme psát ve tvaru

$$\int_{\Omega^*} v \Delta u \, d\Omega = \int_{\Gamma_{-l}} \left( v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds + \int_{\Gamma_\varepsilon} \left( v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds. \quad (2.34)$$

Dále budeme zkoumat chování integrálů v předchozí rovnici pro  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Integrál na levé straně předchozí rovnice se podle (2.32)<sub>3</sub> nezmění pro  $\varepsilon \rightarrow 0$  a budeme se proto zabývat pouze pravou stranou rovnice (2.34). Z (2.32)<sub>2</sub> plyne

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{-l}} \left( v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds = \int_{\Gamma} \left( v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds. \quad (2.35)$$

Pro druhý integrál na pravé straně rovnice (2.34) platí

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} \left( v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds = \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{1}{2\pi} \ln r \frac{\partial u}{\partial n} ds - \int_{\Gamma_\varepsilon} u \frac{1}{2\pi} \frac{\cos \phi}{r} ds = I_1 + I_2. \quad (2.36)$$

Pro kruhový oblouk  $\Gamma_\varepsilon$  je  $r = \varepsilon$  a  $\phi = \pi$ . Navíc  $ds = \varepsilon(-d\theta)$ , neboť úhel  $\theta$  je nyní rostoucí v opačném směru než je směr integrace podle  $s$ . Pro integrál  $I_1$  proto platí

$$I_1 = \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{1}{2\pi} \ln r \frac{\partial u}{\partial n} ds = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{2\pi} \ln \varepsilon \frac{\partial u}{\partial n} \varepsilon d(-\theta). \quad (2.37)$$

Jelikož

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\varepsilon \ln \varepsilon) = 0, \quad (2.38)$$

platí

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_1 = 0. \quad (2.39)$$

Pro  $I_2$  platí

$$I_2 = - \int_{\Gamma_\varepsilon} u \frac{1}{2\pi} \frac{\cos \phi}{r} ds = - \int_{\theta_1}^{\theta_2} u \frac{1}{2\pi} \frac{\cos \pi}{\varepsilon} \varepsilon d(-\theta) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} u \frac{1}{2\pi} d(-\theta). \quad (2.40)$$

Podle věty o střední hodnotě integrálního počtu<sup>1</sup> je hodnota integrálu rovna hodnotě integrandu v nějakém bodě  $O$  uvnitř integračního intervalu vynásobené délkou tohoto intervalu. Rovnici (2.40) tedy dále upravíme

$$I_2 = \int_{\theta_1}^{\theta_2} u \frac{1}{2\pi} d(-\theta) = -\frac{1}{2\pi} u(O)(\theta_2 - \theta_1) = u(O) \frac{\theta_1 - \theta_2}{2\pi}. \quad (2.41)$$

Jelikož pro  $\varepsilon \rightarrow 0$  se bod  $O$  na oblouku  $\Gamma_\varepsilon$  blíží k bodu  $P \equiv p$  a  $\theta_1 - \theta_2 = \alpha$ , zjistíme, že

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_2 = \frac{\alpha}{2\pi} u(p). \quad (2.42)$$

---

<sup>1</sup>Je-li na uzavřeném intervalu  $\langle a, b \rangle$  spojitá funkce  $f(x)$ , pak existuje takový bod  $c \in (a, b)$ , že platí  $\int_a^b f(x) dx = (b - a)f(c)$

Dosazením (2.39) a (2.42) do (2.36) dostaneme

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \left( v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds = \frac{\alpha}{2\pi} u(p). \quad (2.43)$$

Zahrnutím poznatků (2.35) a (2.43) do rovnice (2.34) obdržíme pro  $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\frac{\alpha}{2\pi} u(p) = \int_{\Omega} v \Delta u \, d\Omega - \int_{\Gamma} \left( v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds, \quad (2.44)$$

což je integrální řešení Poissonovy rovnice pro bod  $p \in \Gamma$ , kde hranice  $\Gamma$  není hladká.

Pro bod  $p$  na hladké hranici, kde  $\alpha = \pi$ , se rovnice (2.44) změní na

$$\frac{1}{2} u(p) = \int_{\Omega} v \Delta u \, d\Omega - \int_{\Gamma} \left( v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds, \quad (2.45)$$

Obecně lze integrální řešení zapsat ve tvaru

$$\lambda(P)u(P) = \int_{\Omega} v f \, d\Omega - \int_{\Gamma} \left( v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds, \quad (2.46)$$

pro Poissonovu rovnici a

$$\lambda(P)u(P) = - \int_{\Gamma} \left( v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds, \quad (2.47)$$

pro Laplaceovu rovnici, kde  $\lambda(P)$  je koeficient závisící na poloze bodu  $P$  a je definován jako

$$\lambda(P) = \begin{cases} 1, & \text{pro bod } P \text{ uvnitř } \Omega \\ \frac{1}{2}, & \text{pro bod } P \equiv p \text{ na hranici } \Gamma \\ 0, & \text{pro bod } P \text{ vně } \Omega \end{cases}$$



### 3 NUMERICKÁ IMPLEMENTACE

V této kapitole se budeme zabývat implementací metody hraničních prvků na rovnici (2.47), tj. na hraniční integrální rovnici pro Laplaceovu rovnici (2.3). Základem této metody je diskretizace hranice  $\Gamma$  na konečný počet úseček (elementů), přičemž se zaměříme na nejjednodušší diskretizaci pomocí tzv. konstantních prvků. Jednoduchost jejich aplikace spočívá v konstantních funkčních hodnotách příp. derivací hledané funkce na těchto prvcích. Diskretizaci složitějšími prvky lze nalézt např. v [1].

#### 3.1 Diskretizace hranice

Podstatou metody hraničních prvků je diskretizace hranice oblasti na konečný počet, ne nutně stejných elementů, které nazýváme hraniční prvky. Nejčastěji používanými typy jsou *konstantní, lineární a parabolické prvky*. Na každém elementu rozlišujeme extrémní, nebo-li koncové body a tzv. uzlové body, ve kterých je předepsána hodnota hraniční veličiny. V případě konstantních prvků je prvek aproximován úsečkou spojující jeho koncové body a uzel je umístěn do středu úsečky. Předpokládáme, že hodnota hraniční veličiny je na celém prvku konstantní a je rovna hodnotě v uzlovém bodě.

U lineárních prvků je aproximace provedena opět pomocí úsečky spojující koncové body, ale prvek má v tomto případě dva uzlové body. Ty jsou nejčastěji umístěny v koncových bodech a hraniční veličina se lineárně mění mezi hodnotami předepsanými v uzlových bodech.

Parabolické prvky aproximujeme pomocí parabolického oblouku. Prvek má tři uzlové body, z nichž dva jsou umístěny v koncových bodech a třetí mezi nimi, nejčastěji však uprostřed oblouku.

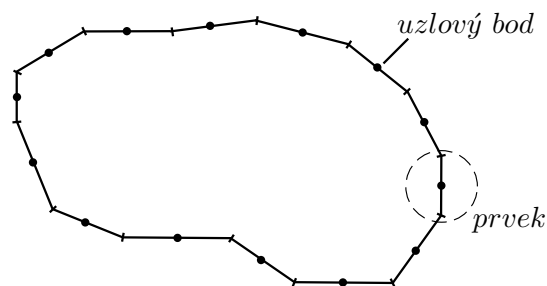
V dalším se budeme zabývat pouze případem diskretizace hranice oblasti pomocí konstantních prvků.

#### 3.2 Numerický výpočet

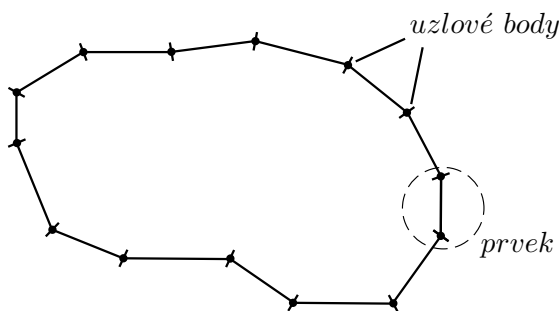
Mějme hranici s  $N$  konstantními prvky. Jelikož je hodnota hraniční veličiny  $u$  na  $i$ -tém prvku konstantní a rovna hodnotě v uzlovém bodě  $p(i)$ , můžeme psát  $u^i = u(p_i)$ . Rovnici (2.47) přepíšeme pro daný hraniční bod  $p_i$  na tvar

$$\frac{1}{2}u^i = \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} v(p_i, q) \frac{\partial u(q)}{\partial n} ds - \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} u(q) \frac{\partial v(p_i, q)}{\partial n} ds, \quad (3.1)$$

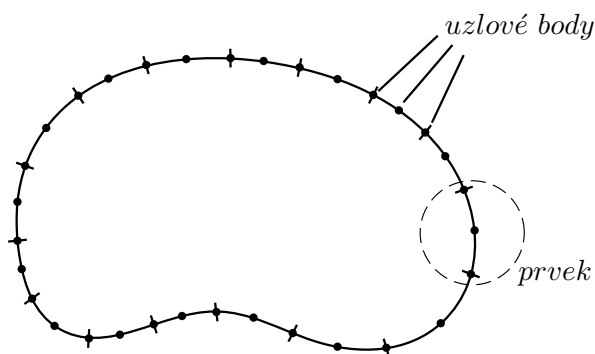
kde integrujeme přes  $q$  podél prvku  $j$  a  $p_i$  je uzlový bod na  $i$ -tém prvku. Pro konstantní prvky je hranice v uzlových bodech hladká, proto  $\lambda(p_i) = \frac{1}{2}$ . Veličiny  $u$  a  $\partial u/\partial n$  jsou konstantní na každém prvku, proto mohou být umístěny před integrál.



(a) Konstantní prvky



(b) Lineární prvky



(c) Parabolické prvky

Obr. 3.1: Typy hraničních prvků.

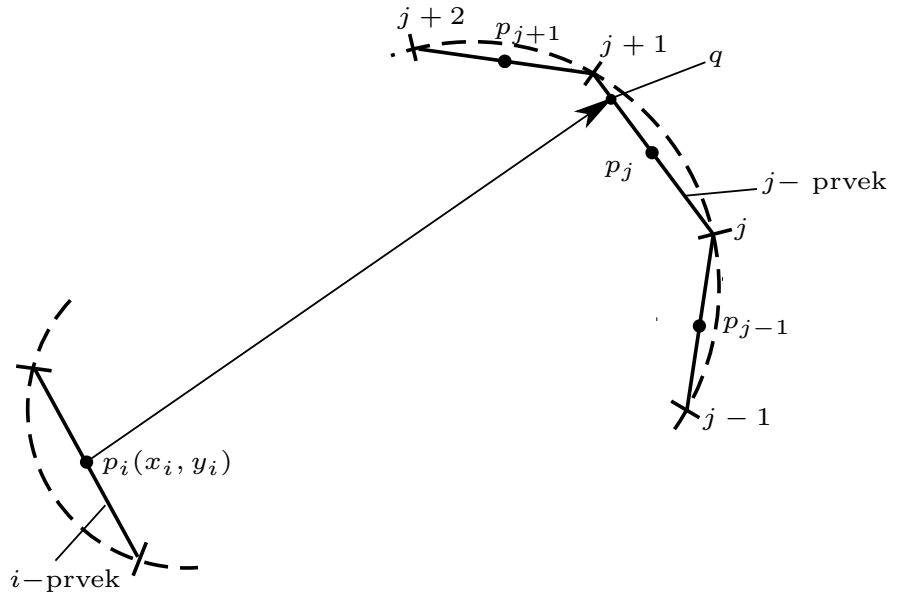
Dále budeme veličiny  $u$  a  $\partial u/\partial n$  na  $j$ -tém prvku značit  $u^j$  a  $u_n^j$ . Rovnice (3.1) pak získá tvar

$$\frac{1}{2}u^i = \sum_{j=1}^N u_n^j \int_{\Gamma_j} v(p_i, q) ds - \sum_{j=1}^N u^j \int_{\Gamma_j} \frac{\partial v(p_i, q)}{\partial n} ds. \quad (3.2)$$

Hodnoty integrálů v rovnici (3.2) vyjadřují příspěvek fundamentálního řešení  $v$  na uzlové hodnoty  $u^j$  a  $u_n^j$  a proto je nazýváme *ovlivňovací koeficienty*. Tyto koeficienty budeme značit  $H'_{ij}$  a  $G_{ij}$  a definujeme je jako

$$\begin{aligned} H'_{ij} &= \int_{\Gamma_j} \frac{\partial v(p_i, q)}{\partial n} ds, \\ G_{ij} &= \int_{\Gamma_j} v(p_i, q) ds, \end{aligned} \quad (3.3)$$

kde bod  $p_i$  zůstává neměnný (referenční bod), zatímco bod  $q$  se mění přes  $j$ -tý prvek (integrační bod), viz obr. 3.2.



Obr. 3.2: Umístění uzlových bodů při diskretizaci hranice konstantními prvky.

Přepsáním rovnice (3.2) pomocí (3.3) dostaneme

$$-\frac{1}{2}u^i + \sum_{j=1}^N H'_{ij}u^j = \sum_{j=1}^N G_{ij}u_n^j. \quad (3.4)$$

Pokud položíme

$$H_{ij} = H'_{ij} - \frac{1}{2}\delta_{ij}, \quad (3.5)$$

kde  $\delta_{ij}$  je *Kroneckerovo delta*, které je definované jako

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j, \end{cases}$$

můžeme rovnici (3.4) přepsat na tvar

$$\sum_{j=1}^N H_{ij}u^j = \sum_{j=1}^N G_{ij}u_n^j. \quad (3.6)$$

Rovnici (3.6) aplikujeme postupně na všechny uzlové body  $p_i$ , čímž získáme systém  $N$  lineárních algebraických rovnic, které lze uspořádat do maticové formy

$$[H] \{u\} = [G] \{u_n\}, \quad (3.7)$$

kde  $[H], [G]$  jsou čtvercové matice typu  $N \times N$  a  $\{u\}, \{u_n\}$  jsou vektory dimenze  $N$ .

Předpokládejme nyní smíšené hraniční podmínky. Mějme část hranice  $\Gamma_1$ , na které je předepsaná hodnota  $u$ , rozdělenou na  $N_1$  konstantních prvků a část hranice  $\Gamma_2$ , na které je předepsaná hodnota  $u_n$ , rozdělenou na  $N_2$  konstantních prvků, přičemž  $N_1 + N_2 = N$ . Systém (3.6) opět obsahuje  $N$  neznámých, a to  $N - N_1$  neznámých hodnot  $u$  na  $\Gamma_2$  a  $N - N_2$  neznámých hodnot  $u_n$  na  $\Gamma_1$ . Tyto neznámé určíme ze systému (3.7). K vyřešení systému rovnic (3.7) je třeba oddělit neznámé veličiny od známých. Rovnici (3.7) můžeme po rozložení přepsat na

$$\begin{bmatrix} [H_{11}] & [H_{12}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\bar{u}\}_1 \\ \{u\}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [G_{11}] & [G_{12}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u_n\}_1 \\ \{\bar{u}_n\}_2 \end{Bmatrix}, \quad (3.8)$$

kde  $\{\bar{u}\}_1$  a  $\{\bar{u}_n\}_2$  jsou předepsané veličiny na  $\Gamma_1$  a  $\Gamma_2$  a  $\{u_n\}_1$  a  $\{u\}_2$  jsou odpovídající neznámé veličiny. Vynásobením a převedením neznámých veličin na levou stranu rovnice obdržíme

$$[A] \{X\} = \{B\}, \quad (3.9)$$

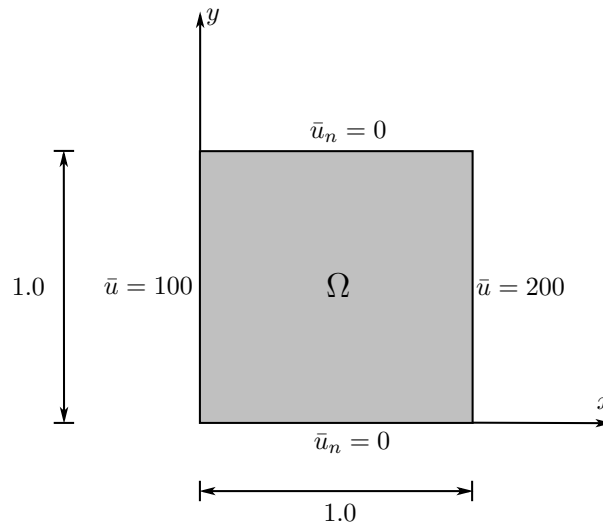
kde

$$\begin{aligned} [A] &= \begin{bmatrix} [H_{12}] & -[G_{11}] \end{bmatrix} \\ \{X\} &= \begin{Bmatrix} \{u\}_2 \\ \{u_n\}_1 \end{Bmatrix} \\ \{B\} &= -[H_{11}] \{\bar{u}\}_1 + [G_{12}] \{\bar{u}_n\}_2 \end{aligned} \quad (3.10)$$

kde  $[A]$  je čtvercová matice  $N \times N$  a  $\{X\}, \{B\}$  vektory dimenze  $N$ .

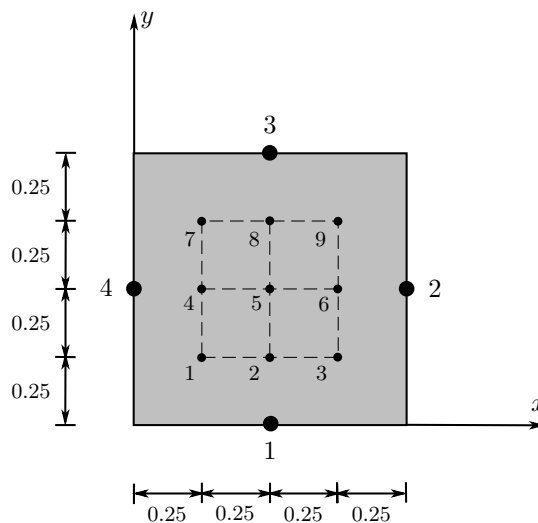
## 4 APLIKACE METODY HRANIČNÍCH PRVKŮ

Předpokládejme oblast  $\Omega$  tvaru čtverce se smíšenými hraničními podmínkami, viz obr. 4.1 a Laplaceovu rovnici (2.3). Určete metodou hraničních prvků hodnoty neznámých veličin  $u$  a  $u_n$  na hranici oblasti  $\Gamma$  a hodnoty veličiny  $u$  ve vybraných bodech uvnitř oblasti  $\Omega$ . Použijte různý počet hraničních prvků a výsledky srovnajte s přesným řešením  $u(x, y) = 100 \cdot (1 + x)$ .



Obr. 4.1: Oblast  $\Omega$  s předepsanými okrajovými podmínkami.

Aplikujeme postup popsany v kapitole 3. Způsob výpočtu uvedeme pro 4 konstantní prvky. Hranici  $\Gamma$  diskretizujeme a určíme body uvnitř oblasti, ve kterých budeme hledat hodnotu veličiny  $u$ , viz obr. 4.2. Hodnoty hraničních veličin  $u$  a  $\frac{\partial u}{\partial n} \equiv u_n$  jsou tedy na celém prvku konstantní a jsou rovny hodnotě ve středovém bodě prvku.



Obr. 4.2: Diskretizace hranice pomocí konstantních prvků.

Řešíme Laplaceovu úlohu, tedy hledáme řešení rovnice (2.47)

$$\lambda(P)u(P) = - \int_{\Gamma} \left( v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds, \quad (4.1)$$

která po zdiskretizování přejde na tvar

$$\frac{1}{2}u^i = - \sum_{j=1}^4 \int_{\Gamma_j} v(p_i, q) \frac{\partial u(q)}{\partial n} ds + \sum_{j=1}^4 \int_{\Gamma_j} u(q) \frac{\partial v(p_i, q)}{\partial n} ds, \quad (4.2)$$

kde  $u^i \equiv u(p_i)$  a po vytknutí konstantních hodnot  $u$  resp.  $u_n$  získáme

$$\frac{1}{2}u^i = - \sum_{j=1}^4 u_n^j \int_{\Gamma_j} v(p_i, q) ds + \sum_{j=1}^4 u^j \int_{\Gamma_j} \frac{\partial v(p_i, q)}{\partial n} ds, \quad (4.3)$$

kde bod  $p_i(x_i, y_i)$  je referenční bod a bod  $q(\xi, \eta)$  integrační bod. Dále upravíme ovlivňovací koeficienty

$$G_{ij} = \int_{\Gamma_j} v(p_i, q) ds = \int_{\Gamma_j} \frac{1}{2\pi} \ln r(p_i, q) ds, \quad (4.4)$$

kde  $r(p_i, q) = \sqrt{(\xi - x_i)^2 + (\eta - y_i)^2}$  a

$$H'_{ij} = \int_{\Gamma_j} \frac{\partial v(p_i, q)}{\partial n} ds = \int_{\Gamma_j} \frac{1}{2\pi} \frac{1}{r(p_i, q)} \frac{\partial r(p_i, q)}{\partial n} ds, \quad (4.5)$$

kde podle (2.26) a (2.28)

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial n} &= \frac{\partial r}{\partial \xi} n_x + \frac{\partial r}{\partial \eta} n_y = \\ &= \frac{\xi - x}{r} n_x + \frac{\eta - y}{r} n_y = \\ &= \frac{(\xi - x)n_x + (\eta - y)n_y}{r}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Proto

$$\int_{\Gamma_j} \frac{\partial v(p_i, q)}{\partial n} ds = \int_{\Gamma_j} \frac{1}{2\pi} \frac{(\xi - x_i)n_x + (\eta - y_i)n_y}{r(p_i, q)^2} ds, \quad (4.7)$$

kde  $n_x, n_y$  jsou složky normálového vektoru k prvku  $\Gamma_j$  v bodě  $q(\xi, \eta)$ . Na nediagonálním prvku  $i \neq j$  jsou integrandy spojité funkce a k výpočtu lze použít vhodnou kvadraturní metodu<sup>1</sup>. Na diagonálním prvku  $i = j$  však mají integrandy v bodě  $q = p_i$  singularitu. Podívejme se na chování ovlivňovacích koeficientů na diagonálních prvcích. Integrál  $H'_{ii}$  můžeme zapsat jako

$$H'_{ii} = \int_{\Gamma_i} \frac{\partial v(p_i, q)}{\partial n} ds = \int_{\Gamma_i} \frac{1}{2\pi} \frac{(q - p_i)\mathbf{n}}{|q - p_i|^2} ds. \quad (4.8)$$

<sup>1</sup>Více o kvadraturních metodách lze nalézt např. v [5]

Vektory  $(q - p_i)$  a  $\mathbf{n}$  jsou na sebe kolmé, tedy  $(q - p_i) \cdot \mathbf{n} = 0$  a proto

$$H'_{ii} = 0. \quad (4.9)$$

Pro  $G_{ii}$  platí

$$G_{ii} = \int_{\Gamma_i} v(p_i, q) \, ds = \int_{\Gamma_i} \frac{1}{2\pi} \ln r(p_i, q) \, ds = \int_{\Gamma_i} \frac{1}{2\pi} \ln |r(p_i, q)| \, ds. \quad (4.10)$$

Rovnici (4.3) tedy upravíme na

$$-\frac{1}{2}u^i + \sum_{j=1}^4 u^j \int_{\Gamma_j} \frac{1}{2\pi} \frac{(\xi - x_i)n_x + (\eta - y_i)n_y}{r(p_i, q)^2} \, ds = \sum_{j=1}^4 u_n^j \int_{\Gamma_j} \frac{1}{2\pi} \ln r(p_i, q) \, ds. \quad (4.11)$$

Pro zjednodušení zápisu vynásobíme (4.11) hodnotou  $2\pi$ , čímž obdržíme výslednou hraniční integrální rovnici

$$-\pi u^i + \sum_{j=1}^4 u^j \int_{\Gamma_j} \frac{(\xi - x_i)n_x + (\eta - y_i)n_y}{r(p_i, q)^2} \, ds = \sum_{j=1}^4 u_n^j \int_{\Gamma_j} \ln r(p_i, q) \, ds. \quad (4.12)$$

nebo-li

$$-\pi u^i + \sum_{j=1}^4 H'_{ij} u^j = \sum_{j=1}^4 G_{ij} u_n^j. \quad (4.13)$$

Položením

$$H_{ij} = H'_{ij} - \pi \delta_{ij}, \quad (4.14)$$

kde  $\delta_{ij}$  je Kroneckerovo delta můžeme psát

$$\sum_{j=1}^4 H_{ij} u^j = \sum_{j=1}^4 G_{ij} u_n^j. \quad (4.15)$$

Pro ilustraci rovnici (4.15) rozepíšeme pro  $i$ -tý prvek a následně uvedeme hraniční integrální rovnice pro všechny 4 prvky. Známé hodnoty hraničních veličin budeme značit  $\bar{u}$  resp.  $\bar{u}_n$ .

$$\begin{aligned} & -\pi u^i + u^1 \underbrace{\int_0^1 \frac{(\xi - x_i)n_x + (\eta - y_i)n_y}{r(p_i, q)^2} \, dx}_{H'_{i1}} + \bar{u}^2 \underbrace{\int_0^1 \frac{(\xi - x_i)n_x + (\eta - y_i)n_y}{r(p_i, q)^2} \, dy}_{H'_{i2}} + \\ & + u^3 \underbrace{\int_0^1 \frac{(\xi - x_i)n_x + (\eta - y_i)n_y}{r(p_i, q)^2} \, dx}_{H'_{i3}} + \bar{u}^4 \underbrace{\int_0^1 \frac{(\xi - x_i)n_x + (\eta - y_i)n_y}{r(p_i, q)^2} \, dy}_{H'_{i4}} = \\ & = \bar{u}_n^1 \underbrace{\int_0^1 \ln r(p_i, q) \, dx}_{G_{i1}} + u_n^2 \underbrace{\int_0^1 \ln r(p_i, q) \, dy}_{G_{i2}} + \bar{u}_n^3 \underbrace{\int_0^1 \ln r(p_i, q) \, dx}_{G_{i3}} + \\ & + u_n^4 \underbrace{\int_0^1 \ln r(p_i, q) \, dy}_{G_{i4}}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned}
& -u^1 \underbrace{\pi + 0}_{H_{11}} + 200 \underbrace{\int_0^1 \frac{(1 - 0,5)1 + (y - 0)0}{(1 - 0,5)^2 + (y - 0)^2} dy}_{H_{12}} + u^3 \underbrace{\int_0^1 \frac{(x - 0,5)0 + (1 - 0)1}{(x - 0,5)^2 + (1 - 0)^2} dx}_{H_{13}} + \\
& + 100 \underbrace{\int_0^1 \frac{(0 - 0,5)(-1) + (y - 0)0}{(0 - 0,5)^2 + (y - 0)^2} dy}_{H_{14}} = 0 \underbrace{\int_0^1 \ln |x - 0,5| dx}_{G_{11}} + \\
& + u_n^2 \underbrace{\int_0^1 \ln(\sqrt{(1 - 0,5)^2 + (y - 0)^2}) dy}_{G_{12}} + 0 \underbrace{\int_0^1 \ln(\sqrt{(x - 0,5)^2 + (1 - 0)^2}) dx}_{G_{13}} + \\
& + u_n^4 \underbrace{\int_0^1 \ln(\sqrt{(0 - 0,5)^2 + (y - 0)^2}) dy}_{G_{14}}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\pi u^1 + 200 \int_0^1 \frac{0,5}{0,5^2 + y^2} dy + u^3 \int_0^1 \frac{1}{(x - 0,5)^2 + 1^2} dx + 100 \int_0^1 \frac{0,5}{0,5^2 + y^2} dy = \\
& = u_n^2 \int_0^1 \ln(\sqrt{0,5^2 + y^2}) dy + u_n^4 \int_0^1 \ln(\sqrt{0,5^2 + y^2}) dy.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\pi u^2 + u^1 \int_0^1 \frac{0,5}{(x - 1)^2 + 0,5^2} dx + u^3 \int_0^1 \frac{0,5}{(x - 1)^2 + 0,5^2} dx + \\
& + 100 \int_0^1 \frac{1}{1^2 + (y - 0,5)^2} dy = u_n^2 \int_0^1 \ln |y - 0,5| dy + u_n^4 \int_0^1 (\ln \sqrt{1^2 + (y - 0,5)^2}) dy.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\pi u^3 + u^1 \int_0^1 \frac{1}{(x - 0,5)^2 + 1^2} dx + 200 \int_0^1 \frac{0,5}{0,5^2 + (y - 1)^2} dy + \\
& + 100 \int_0^1 \frac{0,5}{0,5^2 + (y - 1)^2} dy = u_n^2 \int_0^1 \ln(\sqrt{0,5^2 + (y - 1)^2}) dy + \\
& + u_n^4 \int_0^1 \ln(\sqrt{0,5^2 + (y - 1)^2}) dy.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\pi u^4 + u^1 \int_0^1 \frac{0,5}{x^2 + 0,5^2} dx + 200 \int_0^1 \frac{1}{1^2 + (y - 0,5)^2} dy + \\
& + u^3 \int_0^1 \frac{0,5}{x^2 + 0,5^2} dx = u_n^2 \int_0^1 \ln(\sqrt{1^2 + (y - 0,5)^2}) dy + u_n^4 \int_0^1 \ln |y - 0,5| dy.
\end{aligned}$$

Rozepsáním rovnice (4.15) pro jednotlivé prvky jsme získali systém 4 lineárních algebraických rovnic, který převedeme do maticového tvaru

$$[H] \{u\} = [G] \{u_n\}, \quad (4.17)$$



kde

$$H = \begin{bmatrix} -\pi & \int_0^1 \frac{0,5}{0,5^2+y^2} dy & \int_0^1 \frac{1}{(x-0,5)^2+1^2} dx & \int_0^1 \frac{0,5}{0,5^2+y^2} dy \\ \int_0^1 \frac{0,5}{(x-1)^2+0,5^2} dx & -\pi & \int_0^1 \frac{0,5}{(x-1)^2+0,5^2} dx & \int_0^1 \frac{1}{1^2+(y-0,5)^2} dy \\ \int_0^1 \frac{1}{(x-0,5)^2+1^2} dx & \int_0^1 \frac{0,5}{0,5^2+(y-1)^2} dy & -\pi & \int_0^1 \frac{0,5}{0,5^2+(y-1)^2} dy \\ \int_0^1 \frac{0,5}{x^2+0,5^2} dx & \int_0^1 \frac{1}{1^2+(y-0,5)^2} dy & \int_0^1 \frac{0,5}{x^2+0,5^2} dx & -\pi \end{bmatrix},$$

$$G = [G_1, G_2],$$

$$G_1 = \begin{bmatrix} \int_0^1 \ln|x-0,5| dx & \int_0^1 \ln(\sqrt{0,5^2+y^2}) dy \\ \int_0^1 \ln(\sqrt{(x-1)^2+0,5^2}) dx & \int_0^1 \ln|y-0,5| dy \\ \int_0^1 \ln(\sqrt{(x-0,5)^2+1^2}) dx & \int_0^1 \ln(\sqrt{0,5^2+(y-1)^2}) dy \\ \int_0^1 \ln(\sqrt{x^2+0,5^2}) dx & \int_0^1 \ln(\sqrt{1^2+(y-0,5)^2}) dy \end{bmatrix},$$

$$G_2 = \begin{bmatrix} \int_0^1 \ln(\sqrt{(x-0,5)^2+1^2}) dx & \int_0^1 \ln(\sqrt{0,5^2+y^2}) dy \\ \int_0^1 \ln(\sqrt{(x-1)^2+0,5^2}) dx & \int_0^1 (\ln \sqrt{1^2+(y-0,5)^2}) dy \\ \int_0^1 \ln|x-0,5| dx & \int_0^1 \ln(\sqrt{0,5^2+(y-1)^2}) dy \\ \int_0^1 \ln(\sqrt{x^2+0,5^2}) dx & \int_0^1 \ln|y-0,5| dy \end{bmatrix},$$

$$u = \begin{bmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \\ u^4 \end{bmatrix}, \quad u_n = \begin{bmatrix} u_n^1 \\ u_n^2 \\ u_n^3 \\ u_n^4 \end{bmatrix}.$$

Jelikož jsou zadány smíšené okrajové podmínky, musíme systém rovnic (4.17) upravit a oddělit neznámé veličiny od veličin známých. Neznámé veličiny  $u^1, u_n^2, u^3, u_n^4$  a jim odpovídající ovlivňovací koeficienty převedeme na levou stranu rovnice a systém (4.17) převedeme na soustavu rovnic

$$[A]\{X\} = \{B\}, \quad (4.18)$$

kde

$$A = [A_1, A_2],$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} -\pi & -\int_0^1 \ln(\sqrt{0,5^2+y^2}) dy \\ \int_0^1 \frac{0,5}{(x-1)^2+0,5^2} dx & -\int_0^1 \ln|y-0,5| dy \\ \int_0^1 \frac{1}{(x-0,5)^2+1^2} dx & -\int_0^1 \ln(\sqrt{0,5^2+(y-1)^2}) dy \\ \int_0^1 \frac{0,5}{x^2+0,5^2} dx & -\int_0^1 \ln(\sqrt{1^2+(y-0,5)^2}) dy \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} \int_0^1 \frac{1}{(x-0,5)^2+1^2} dx & - \int_0^1 \ln(\sqrt{0,5^2+y^2}) dy \\ \int_0^1 \frac{0,5}{(x-1)^2+0,5^2} dx & - \int_0^1 (\ln \sqrt{1^2+(y-0,5)^2}) dy \\ -\pi & - \int_0^1 \ln(\sqrt{0,5^2+(y-1)^2}) dy \\ \int_0^1 \frac{0,5}{x^2+0,5^2} dx & - \int_0^1 \ln|y-0,5| dy \end{bmatrix},$$

$$X = \begin{bmatrix} u^1 \\ u_n^2 \\ u^3 \\ u_n^4 \end{bmatrix},$$

$$B = [B_1, B_2]\{U\},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} \int_0^1 \ln|x-0,5| dx & - \int_0^1 \frac{0,5}{0,5^2+y^2} dy \\ \int_0^1 \ln(\sqrt{(x-1)^2+0,5^2}) dx & -(-\pi) \\ \int_0^1 \ln(\sqrt{(x-0,5)^2+1^2}) dx & - \int_0^1 \frac{0,5}{0,5^2+(y-1)^2} dy \\ \int_0^1 \ln(\sqrt{x^2+0,5^2}) dx & - \int_0^1 \frac{1}{1^2+(y-0,5)^2} dy \end{bmatrix},$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} \int_0^1 \ln(\sqrt{(x-0,5)^2+1^2}) dx & - \int_0^1 \frac{0,5}{0,5^2+y^2} dy \\ \int_0^1 \ln(\sqrt{(x-1)^2+0,5^2}) dx & - \int_0^1 \frac{1}{1^2+(y-0,5)^2} dy \\ \int_0^1 \ln|x-0,5| dx & - \int_0^1 \frac{0,5}{0,5^2+(y-1)^2} dy \\ \int_0^1 \ln(\sqrt{x^2+0,5^2}) dx & -(-\pi) \end{bmatrix},$$

$$U = \begin{bmatrix} u_n^1 \\ u^2 \\ u_n^3 \\ u^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 200 \\ 0 \\ 100 \end{bmatrix}.$$

Po dosazení konkrétních hodnot do (4.18) obdržíme pro jednotlivé matice

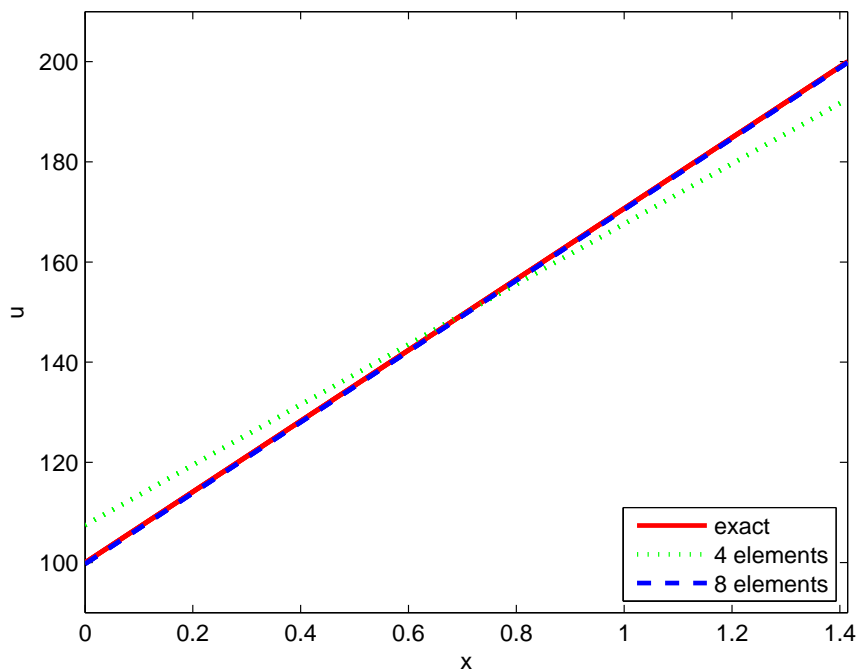
$$A = \begin{bmatrix} -3,141592654 & 0,3348538654 & 0,927295218 & 0,3348538654 \\ 1,107148718 & 1,693147181 & 1,107148718 & -0,03886699366 \\ 0,927295218 & 0,3348538654 & -3,141592654 & 0,3348538654 \\ 1,107148718 & -0,03886699366 & 1,107148718 & 1,693147181 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} -332,1446154 \\ 535,5890090 \\ -332,1446154 \\ 128,7002218 \end{bmatrix}.$$

Vyřešením tohoto systému zjistíme hledané neznámé hraniční veličiny

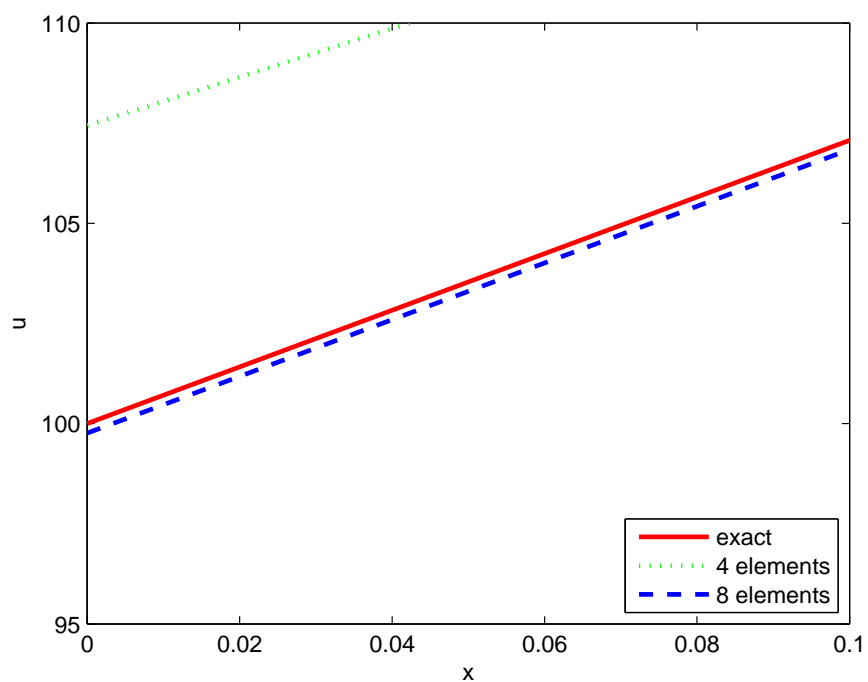
$$X = \begin{bmatrix} u^1 \\ u_n^2 \\ u^3 \\ u_n^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 150,000000000000 \\ 117,461159715934 \\ 150,000000000000 \\ -117,461159715934 \end{bmatrix}.$$

Vektor  $X$  obsahuje hraniční hodnoty veličiny  $u$  resp. hodnoty derivace veličiny  $u$ . Pomocí těchto hraničních hodnot můžeme vypočítat hodnoty  $u$  uvnitř oblasti  $\Omega$ . Hledejme hodnoty  $u$  na diagonále čtverce ve směru vnitřních bodů 1-5-9. Pro výpočet použijeme rovnici (2.47), ve které položíme  $\lambda = 1$ , neboť hledaný bod  $P$  leží uvnitř oblasti  $\Omega$ . Graf na obr. 4.3 vyjadřuje závislost veličiny  $u$  na vzdálenosti prvků diagonály ve směru bodů 1-9 od počátku souřadného systému.



Obr. 4.3: Graf závislosti veličiny  $u$  na vzdálenosti prvků diagonály ve směru bodů 1-9 od počátku souřadného systému.

Z grafu je patrná vysoká nepřesnost řešení pomocí čtyř konstantních prvků vzhledem k přesnému řešení. Ačkoli se může diskretizace pomocí osmi konstantních prvků jevit jako vyhovující, detail grafu, viz obr. 4.4 na následující straně ilustruje nepřesnost této diskretizace v blízkosti rohového bodu. Následující tabulka obsahuje hodnoty veličiny  $u$  ve všech vybraných bodech uvnitř oblasti  $\Omega$ . Přesná řešení v bodech 2, 5 a 8 jsou zapříčiněna linearitou úlohy a také symetričností oblasti  $\Omega$ .



Obr. 4.4: Detail grafu závislosti veličiny  $u$  na směru diagonály 1-9 v blízkosti rohového bodu  $[0,0]$ .

Bod	Počet hraničních prvků			Přesné řešení
	4	8	16	
1	128.72	124.78	124,89	125,00
2	150.00	150.00	150.00	150,00
3	171.28	175.13	175.11	175,00
4	126.67	124.56	124.95	125,00
5	150.00	150,00	150,00	150,00
6	173.33	174.94	175.05	175,00
7	128.72	123.76	124.89	125,00
8	150.00	150.00	150.00	150,00
9	171.28	175.56	175,11	175,00

## 5 ZÁVĚR

Cílem bakalářské bylo seznámení se s teoretickými základy metody hraničních prvků (MHP) a aplikace této metody na konkrétní příklad. V práci jsme se zabývali pouze dvěma typy úloh, a to Poissonovou a Laplaceovou rovnicí.

V prvním kroku jsme definovali Poissonovu a Laplaceovu rovnici, odvodili pro tyto rovnice fundamentální řešení a uvedli typy okrajových podmínek. Dále jsme přímou metodou pomocí Greenových identit formulovali hraniční integrální rovnice, tedy popsali transformaci okrajového problému z dané oblasti na hranici oblasti. Výsledkem bylo získání obecného integrálního řešení pro Poissonovu, resp. Laplaceovu rovnici

$$\lambda(P)u(P) = \int_{\Omega} v f \, d\Omega - \int_{\Gamma} \left( v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds,$$

resp.

$$\lambda(P)u(P) = - \int_{\Gamma} \left( v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds.$$

V dalším kroku jsme se soustředili na diskretizaci hranice oblasti, seznámili jsme se s nejčastějšími typy hraničních prvků a popsali způsob řešení Laplaceovy rovnice při diskretizaci hranice konstantními prvky.

Nakonec jsme teoretické poznatky z předcházejících dvou kroků využili k vyřešení Laplaceovy úlohy na oblasti tvaru čtverce. Ze zadaných smíšených okrajových podmínek jsme nejdříve vypočítali zbývající neznámé hraniční hodnoty hledané funkce  $u$ , popř. hodnoty derivace funkce  $u$  a následně ze získaných výsledků vypočítali hodnoty funkce  $u$  ve vybraných bodech uvnitř oblasti. K výpočtu jsme použili diskretizaci hranice konstantními prvky a použitím různého počtu hraničních prvků jsme ilustrovali vliv stupně diskretizace hranice na přesnost řešení.

Výsledky bakalářské práce mohou být využity v navazující diplomové práci, ve které by se mohla detailněji prostudovat diskretizace hranice oblasti lineárními nebo kvadratickými prvky, popř. aplikovat MHP na jiné typy rovnic či propojit a porovnat MHP s podobnými numerickými metodami, např. metodou konečných prvků.

## LITERATURA

- [1] KATSIKADELIS, J.T. *Boundary Elements: Theory and applications/1st ed.*. Oxford : Elsevier, 2002. 336 s.
- [2] BROŽ, P., PROCHÁZKA P., *Metoda okrajových prvků v inženýrské praxi.* Praha, 1987. 192 s.
- [3] FRANČŮ, J. *Parciální diferenciální rovnice/3. vyd.* Brno : CERM, 2003. 155 s.
- [4] ODEN, J.T. *Mechanics of elastic structure.* New York : McGraw-Hill, 1967. 381 s.
- [5] RALSTON, A. *Základy numerické matematiky/3.vyd.* Praha : Academia, 1978. 635 s.

# A POUŽITÝ MATEMATICKÝ APARÁT

## Greenovy identity

Důležitým nástrojem pro řešení eliptických parciálních diferenciálních rovnic jsou Greenovy identity. Uvedeme si vyjádření Greenových identit pro dvourozměrnou oblast. Vyjdeme z Gauss-Ostrogradského vzorce

$$\int_{\Omega} \frac{\mathbf{F}}{\partial x_i} d\Omega = \int_{\partial\Omega} \mathbf{F} n_i ds. \quad (\text{A.1})$$

Pokud za  $\mathbf{F}$  dosadíme součin  $f, g$  po derivování a převedení jednoho členu na druhou stranu dostaneme vzorec pro integraci po částech v prostoru

$$\int_{\Omega} \frac{f}{\partial x_i} g d\Omega = \int_{\partial\Omega} f g n_i ds - \int_{\Omega} (\nabla u \nabla v) d\Omega. \quad (\text{A.2})$$

Dále dosadíme  $f := \partial u / \partial x_i, g := v$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} v d\Omega = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v n_i ds - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} d\Omega \quad (\text{A.3})$$

a sečtením  $\sum_i$  dostáváme *první Greenovu identitu* s Laplaceovým operátorem  $\Delta$ , derivací podle normály  $u_n = \sum_i u_{x_i} n_i$  a skalárním součinem gradientů  $(\nabla u, \nabla v)$

$$\int_{\Omega} \Delta u v d\Omega = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v ds - \int_{\Omega} (\nabla u, \nabla v) dx. \quad (\text{A.4})$$

Zaměníme v této identitě funkce  $u$  a  $v$  a získáme

$$\int_{\Omega} u \Delta v d\Omega = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial n} ds - \int_{\Omega} (\nabla v \nabla u) d\Omega \quad (\text{A.5})$$

a poslední rovnost odečteme od (A.4). Součin gradientů se navzájem odečte a dostáváme *druhou Greenovu identitu*

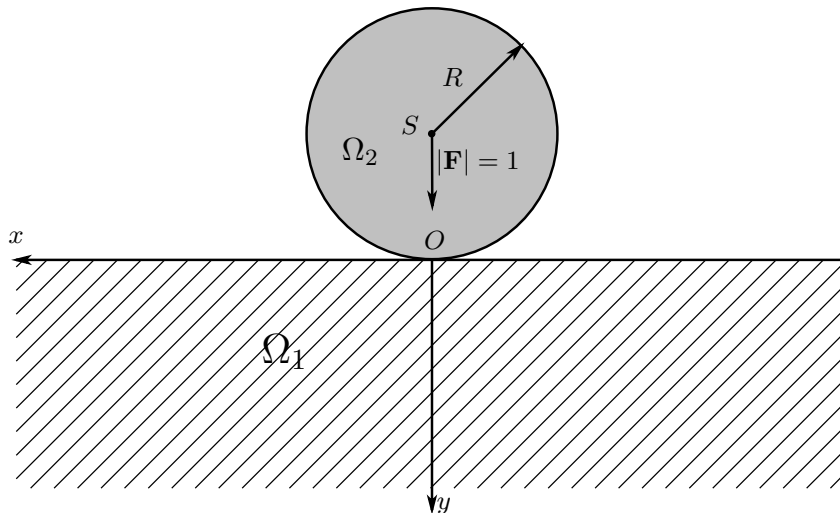
$$\int_{\Omega} (v \Delta u - u \Delta v) d\Omega = \int_{\partial\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial n} v - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds. \quad (\text{A.6})$$

Identity platí pro funkce  $u, v \in C^2(\bar{\Omega})$ , na omezené oblasti  $\Omega$  s „rozumnou“ (např. po částech hladkou) hranicí.

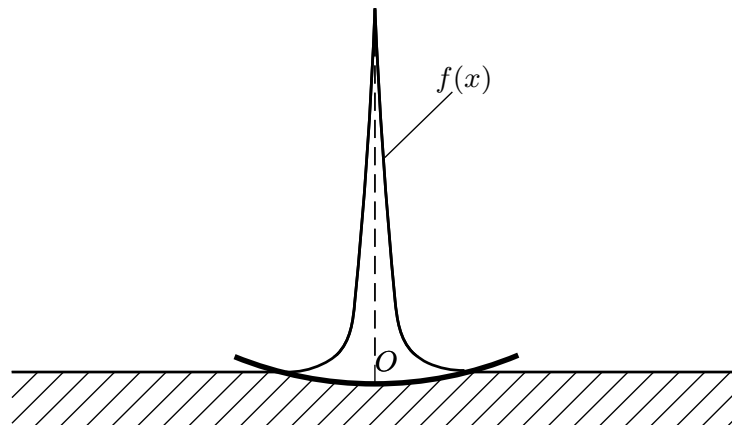
## Diracova delta funkce

V problémech mechaniky těles, mechaniky kontinua a mnoha dalších fyzikálních disciplín se často setkáváme s pojmem *koncentrované zatížení*, což je síla působící na velmi malé oblasti, teoreticky v bodě. Mějme elastické těleso  $\Omega_1$  mající konstantní

tloušťku  $h$  a zabírající polorovinu  $-\infty < x < +\infty, y \geq 0$  a kruhový disk  $\Omega_2$  o stejné tloušťce a poloměru  $R$ . Tělesa se stýkají v bodě  $(x, 0) \equiv (0, 0)$ . Kruhový disk je zatížen vertikální jednotkovou silou  $\mathbf{F}$ , viz obr. A.1. Kvůli deformaci elastického tělesa se kontakt rozšíří z bodu  $O$  na malou oblast v okolí bodu  $O$ . Zaveďme funkci  $f(x)$  vyjadřující rozložení síly  $\mathbf{F}$  působící na hranici tělesa  $\Omega_1/\Omega_2$ , viz obr. A.2.



Obr. A.1: Kruhový disk zatížen vertikální koncentrovanou jednotkovou silou  $\mathbf{F}$ .



Obr. A.2: Rozložení síly  $\mathbf{F}$  na hranici tělesa.

Funkce  $f(x)$  není *a priori* známá, ale víme, že je dostatečně koncentrovaná a splňuje vztah

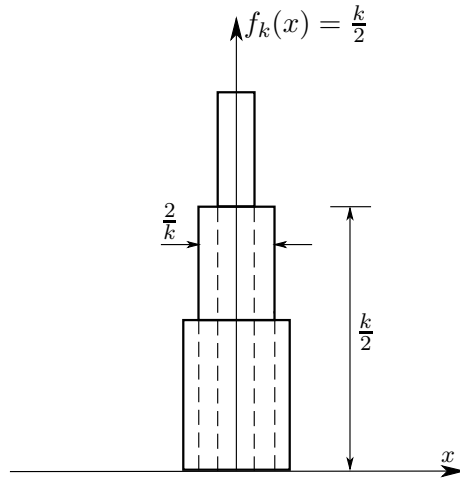
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1, \quad (\text{A.7})$$



Pokud se nebudeme zabývat analytickým řešením funkce  $f(x)$ , můžeme její tvar předepsat pomocí funkce  $f_k(x)$  např. následovně

$$f_k(x) = \begin{cases} k/2, & |x| < \frac{1}{k} \\ 0, & |x| \geq \frac{1}{k} \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

kde  $k$  je kladné číslo. Obrázek (A.3) ukazuje, že funkce  $f_k(x)$  se stává dostatečně koncentrovanou pro velké hodnoty  $k$ . Navíc splňuje rovnici (A.7), což znamená, že je ekvivalentní funkci  $f(x)$ .



Obr. A.3: Průběh funkce  $f_k(x)$ ,  $k = 1, 2, \dots$  aproximující bodový styk oblastí  $\Omega_1$  a  $\Omega_2$ .

Rozložení funkce  $f(x)$  se stává koncentrovanější, čím méně je těleso deformovatelné. Tuto skutečnost vyjadřuje zvyšování hodnoty  $k$ . Limitní případ, kdy je těleso absolutně tuhé, vyjadřuje  $f_k(x)$  pro  $k \rightarrow \infty$ . Tento případ vytváří fiktivní rozložení jednotkové síly a lze jej popsat pomocí tzv. *Diracovy delta funkce*  $\delta(x)$  jako

$$\delta(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x). \quad (\text{A.9})$$

Diracova delta funkce má tedy následující vlastnosti

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1, \quad (\text{A.10})$$

a

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - \xi) h(x) dx = h(\xi), \quad (\text{A.11})$$

pro libovolnou zdrojovou funkci  $h(x)$  působící v bodě  $x = \xi$ .

## Greenova funkce

Mějme rovnici

$$Lu = f, \quad (\text{A.12})$$

kde  $L$  je lineární diferenciální operátor. Funkci  $G(x, \xi)$  nazveme *Greenovou funkcí*, jestliže vyhovuje rovnici

$$LG(x, \xi) = \delta(x - \xi), \quad (\text{A.13})$$

kde  $\delta(x - \xi)$  je Diracova delta funkce. Řešení rovnice (A.12) lze vyjádřit pomocí Greenovy funkce následovně

$$Lu(x) = f(x), \quad (\text{A.14})$$

$$Lu(x) = \int \delta(x - \xi)f(\xi) \, d\xi, \quad (\text{A.15})$$

$$Lu(x) = \int LG(x, \xi)f(\xi) \, d\xi, \quad (\text{A.16})$$

$$Lu(x) = L \int G(x, \xi)f(\xi) \, d\xi, \quad (\text{A.17})$$

$$u(x) = \int G(x, \xi)f(\xi) \, d\xi. \quad (\text{A.18})$$

Greenovu funkci splňující Laplaceovu rovnici (2.3) nazýváme fundamentální řešení Laplaceovy rovnice.