VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A KOMUNIKAČNÍCH TECHNOLOGIÍ
ÚSTAV MATEMATIKY

FACULTY OF ELECTRICAL ENGINEERING AND COMMUNICATION
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

STRUKTUROVANÉ MULTISYSTÉMY A MULTIAUTOMATY INDUKOVANÉ ČASOVÝMI PROCESY

STRUCTURED MULTISYSTEMS AND MULTIAUTOMATA INDUCED BY TIMES PROCESSES

DISERTAČNÍ PRÁCE
DOCTORAL THESIS

AUTOR PRÁCE / AUTHOR: Mgr. ŠTĚPÁN KŘEHLÍK

VEDOUCÍ PRÁCE / SUPERVISOR: prof. RNDr. JAN CHVALINA, DrSc.

BRNO 2015

Abstract

In the thesis we discuss binary hyperstructures of linear differential operators of the second order both in general and (inspired by models of specific time processes) in a special case of the Jacobi form. We also study binary hyperstructures constructed from distributive lattices and suggest transfer of this construction to n–ary hyperstructures.

We use these hyperstructures to construct multiautomata and quasi–multiautomata. The input sets of all these automata structures are constructed so that the transfer of information for certain specific modeling time functions is facilitated. For this reason we use smooth positive functions or vectors components of which are real numbers or smooth positive functions. The above hyperstructures are state-sets of these automata structures.

Finally, we investigate various types of compositions of the above multiautomata and quasi–multiautomata. In order to this we have to generalize the classical definitions of Dörfler. While some of the concepts can be transferred to the hyperstructure context rather easily, in the case of Cartesian composition the attempt to generalize it leads to some interesting results.

Keywords

Cartesian composition of quasi–automata, Generalization of quasi–automata, Heterogeneous product of quasi–automata, Homogeneous product of quasi–automata, Hypergroups, Hyperstructure theory and automata, Join space, Linear differential operators, Modelling function Quasi–multiautomata.

Abstrakt

V disertační práci diskutujeme binární hyperstruktury obecných lineárních diferenciálních operátorů druhého rádů a speciálně operátorů Jacobiho tvaru. Tyto operátory jsou motivovány modely specifických časových procesů. Také studujeme binární hyperstruktury konstruované z distributivních svazů a navrhujeme přechod těchto konstrukcí na n-ární hyperstruktury.

Používáme tyto hyperstruktury ke konstrukci multiautomatů a kvazi–multiautomatů. Vstupní množina těchto strukturovaných automatů je konstruována tak, že přenos informací speciálních časových funkcí je nenáročný. Z tohoto důvodu používáme hladké kladné funkce nebo vektory, jejichž složky jsou reálná čísla nebo hladké kladné funkce. Právě výše zmíněné hypergrupy jsou použity jako stavové množiny těchto kvazi–multiautomatů.

Nakonec zkoumáme různé typy součinů takovýchto multi–automatů a kvazi–multiautomatů. V tomto pojetí zobecňujeme klasické definice Dörfelra. U některých typů součinů je transfer na kontext hyperstruktur přirozeny, v případě kartézské kompozice toto zobecnění vede na zajímavé výsledky.

Klíčová slova

Kartézská kompozice kvazi–automatů, Zobecnění kvazi–automatů, Heterogenní produkt kvazi–automatů, Homogenní produkt kvazi–automatů, Hypergrupy, Teorie hyperstruktur a automatů, Lineární diferenciální operátory, Modelovací funkce, Spojnicový prostor, Kvazi–multiautomaty.

Čestné prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou dizertační práci na téma "*Strukturované multisystémy a multiautomaty indukované časovými procesy*" vypracoval samostatně pod vedením vedoucího dizertační práce prof. RNDr. Jana Chvaliny, DrSc. a s použitím odborné literatury a dalších informačních zdrojů, které jsou všechny citovány v práci a uvedeny v seznamu literatury na konci práce.

Jako autor uvedené disertační práce prohlašuji, že v souvislosti s vytvořením této dizertační práce jsem neporušil autorská práva třetích osob, zejména jsem nezasáhl nedovoleným způsobem do cizích autorských práv osobnostních anebo majetkových, a jsem si plně vědom následků porušení ustanovení § 11 a následujících zákona č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon), ve znění pozdějších předpisů, včetně možných trestněprávních důsledků vyplývajících z ustanovení části druhé hlavy VI. díl 4 Trestního zákoníku č. 40/2009 Sb.

Brno . . . .

Mgr. Štěpán Křehlík

Poděkování

Na tomto místě bych rád poděkoval mému školiteli panu prof. RNDr. Janu Chvalinovi, DrSc. za veškerou pomoc, podporu a ochotu, která mi byla věnována po celou dobu mého doktorského studia a během přípravy této dizertační práce.

Obsah

1 Úvod

Strukturované multisystémy a především multiautomaty jsou multistruktury, které jsou vhodným zobecněním klasických algebraických automatů, jenž se v minulosti považovaly za systémy pro přenos informací jistého typu.

Práce je motivovaná ideou profesora Otakara Borůvky, který ve svých publikacích o lineárních diferenciálních rovnicích využíval algebraizace a geometrizace studovaných objektů. Tyto algebraické pojmy mu byly vlastní z jeho dřívější práce. Díky těmto novým postupům objevoval mnohdy překvapivé skutečnosti a nové souvislosti. Ve smyslu této motivace je v tomto spisu použito algebraického přístupu, spočívajícího v použití polohypergrup a hypergrup, případně spojnicového prostoru, neboť tyto multistruktury představují zobecnění pologrup a grup.

Hlavním cílem této práce je zkoumání multistruktur, které jsou vytvářeny lineárními diferenciálními operátory, jenž jsou levými stranami homogenních diferenciálních rovnic uvažovaných především elektrotechnických obvodech. Tím je vytvářen teoretický potenciál k popisu vztahů a souvislostí mezi časovými funkcemi modelujícími různé děje probíhající v elektrotechnických a elektrických přístrojích.

V projektu této práce jsou tvořeny systémy vstup–výstup se strukturovanými vstupními a výstupními prostory opatřené algebraickými i analytickými multistrukturami a příslušnou kompatibilní přechodovou relací vstup-výstup. V souvislosti s multi–automaty uvažovanými jako akce binárních hyperstruktur na vhodných stavových prostorech (např. lineárních diferenciálních operátorech) by měly být konstruované struktury aplikovány na studium konkretních systémů a časových procesů.

Práce je věnována popisu hyperstruktur tvořených lineárními diferenciálními operátory druhého řádu a speciálně operátorům v Jacobiho tvaru, pro konkrétní časové signály. Popis multistruktur, které nejsou tvořeny lineárními diferenciálními operátory v Jacobiho tvaru, je dále zobecněn na řád n (kladné reálné číslo). Dále jsou zde zkoumány binární multistruktury, které jsou vytvářeny distributivními svazy, a je zde představena myšlenka rozšíření na n-ární operace. Tyto multistruktury jsou použity pro konstrukce multiautomatů, kvazi–multiautomatů a jistých součinů mezi těmito kvazi–multiautomaty, ve kterých je jako množina vstupů použit (polo-)okruh hladkých spojitých kladných funkcí, případně (polo-)okruh vektorů, jejichž složky jsou reálná čísla nebo již řečené spojité kladné funkce a stavové množiny jsou tvořeny lineárními diferenciálními operátory n-tého řádu. Tyto kvazi–multiautomaty jsou používány pro přenos informací jistého typu, například pro konkrétní modelující časové funkce. Důležitým bodem práce je zobecnění součinů automatů zavedených Dörflerem [34] na případy kvazi–multiautomatů se vstupní hyperstrukturou lineárních diferenciálních operátorů n-tého řádu, jenž představuje jistý problém. Pro jeho řešení zavádíme dvě modifikace klasické definice kvazi–multiautomatu, a tím se dostáváme k alternaci běžně používaných algebraických pojmů.

2 Základní poznatky

2.1 Signály a modelování

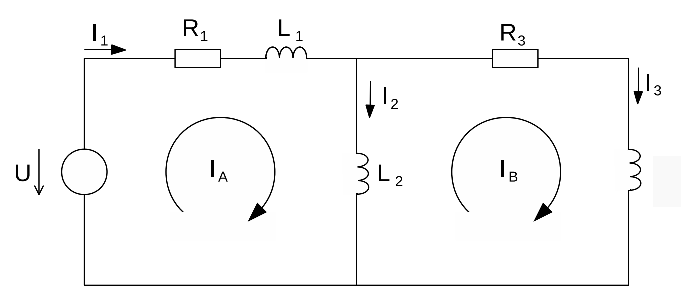
Matematické modelování je schopnost překladu z aplikační oblasti do oblasti matematicky zpracovatelné a vyšetřovatelné formulace umožňující teoretickou a numerickou analýzu problému. Cílem je proniknout do jeho podstaty, klást otázky a hledat odpovědi a získat užitečné a potřebné informace o zkoumaném problému. K tomuto účelu se používají modelující funkce, jako je například funkce Gaussova pulzního signálu nebo třeba tlumených kmitů a jiných funkcí, které jsou uvedeny v kapitole Modelovací časové funkce 3.1. Znalost matematického modelování je zásadní pro přechod teoretických matematických poznatků k aplikačně orientovaným znalostem. Matematické modelování se již řadu let úspěšně používá v mnoha vědách, jako jsou fyzika, chemie, elektrotechnika, strojírenství a další. Díky matematickému modelování se však velice rychle rozvíjejí i jiné vědní obory, jmenujme alespoň některé: antropologie, archeologie, astrologie, ekonomie, farmakologie, kriminologie, meteorologie nebo třeba neurovědy. Jak již bylo řečeno, problematika modelování má hluboký metodologický a gnoseologický význam a zvládnutí jejích základů je nezbytností v oblasti rozvíjení přírodních i společenských věd.

Pivoňka v práci [67] uvádí, že při tvorbě modelu nám jde o to, abychom našli funkci f, která popisuje chování výstupu soustavy $y(t)$ jako funkci vstupních veličin, typicky akční veličiny $u(t)$, případně dalších měřitelných veličin, které mohou ovlivňovat výstup, jako např. měřené poruchové veličiny $v(t)$, tedy předpokládáme

$$y(t) = f(u(t), v(t), t).$$

Uvažujeme matematické modelování v elektrotechnice, kde je běžné používat matematický aparát pro popis lineárních a nelineárních elektronických obvodů. Pro takovéto modelování elektronických obvodů je běžné pracovat se soustavou lineárních algebraických rovnic a manipulovat s těmito soustavami rovnic prostřednictvím maticového počtu. Dále v matematickém modelování můžeme užívat lineární diferenciální rovnice, které jsou formálně převáděny na algebraické prostřednictvím operátorového počtu. Uvedeme dva příklady, kde matematický aparát slouží pro popis elektrických obvodů.

Příklad 2.1 *Vypočítejte proudy I_1, I_2, I_3 metodou smyčkových proudů, kde $U = 10V,\ f = 20kHz,\ R_1 = 5\Omega,\ R_3 = 20\Omega,\ L_1 = 0,1mH,\ L_2 = 0,2mH,\ L_3 = 0,25mH$.*



Obrázek 1: Obvod se dvěma smyčkovými proudy

Výchozí obecná maticová rovnice pro popis obvodu na obrázku 1 je

$$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_A \\ I_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Do rovnice (1) dosadíme hodnoty napětí a vyjádříme impedance $Z_{11}, Z_{12}, Z_{21}, Z_{22}$

$$\begin{pmatrix} R_1 + j2\pi f(L_1+L_2) & -j2\pi f L_2 \\ -j2\pi f L_2 & R_2 + j2\pi f(L_2+L_3) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_A \\ I_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Po vyjádření hodnot impedancí z rovnice (2) dostáváme

$$\begin{pmatrix} 5 + j263,89 & -j251,33 \\ -j251,33 & 20 + j282,74 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_A \\ I_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Vyřešením matice soustavy (3) získáme hodnoty smyčkových proudů

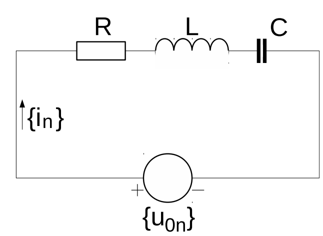
$$I_A = 0,09597 - j0.19261A \ \textit{a} \ I_B = 0,09693 - j0,16435A.$$

Pak

$$\begin{aligned} I_1 = I_A &= 0,09597 - j0.19261A, \\ I_2 = I_A - I_B &= -0,000964 - j0,02826A, \\ I_3 = I_B &= 0,09693 - j0,16435A. \end{aligned}$$

Druhý příklad se zabývá řešením přechodných jevů v obvodech, konkrétně vyšetřením odezvy proudu sériového impulsního RLC obvodu pomocí teorie diferenciálních rovnic. Tento příklad je zařazen, aby demonstroval popis elektrotechnického obvodu pomocí diferenciální rovnice, a je převzat z práce [33]

Příklad 2.2 *Parametry RLC obvodu zadaného obrázkem jsou následující:* $R = 1\Omega; L = 1H; C = 1F; u_c(0) = 0V; i_c = 1A; u_{0n} = 0V$ *pro všechna n. Určete proudovou odezvu.*



Obrázek 2: RLC obvod

Řešení: Pro spojité napětí zdroje $u_0(t)$ *je odezva proudu také spojitá a platí pro ni diferenciální rovnice:*

$$i''(t) + \frac{R}{L}i'(t) + \frac{i(t)}{LC} = \frac{1}{L}u_0(t). \tag{4}$$

Řešením homogenní rovnice

$$i''(t) + \frac{R}{L}i'(t) + \frac{i(t)}{LC} = 0 \tag{5}$$

lze určit podle charakteristické rovnice

$$\lambda^2 + \frac{R}{L}\lambda + \frac{1}{LC} = 0, \tag{6}$$

pro jejíž kořeny platí

$$\lambda_{1,2} \frac{-\frac{R}{L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 - \frac{4}{LC}}}{2} \tag{7}$$

Po numerickém dosazení ($R = 1\Omega; L = 1H; C = 1F$) nabývají kořeny (7) *charakteristické rovnice* (6) *komplexních hodnot*

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}. \tag{8}$$

Obecné řešení rovnice (5) *má tvar*

$$i(t) = \exp(-t/2)\left(C_1 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + C_2 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right), \tag{9}$$

kde C_1, C_2 jsou libovolné konstanty. Pro výpočet konstant C_1, C_2 je nutné zajistit druhou počáteční podmínku, tedy

$$Li'(0) + Ri(0) = 0 \Rightarrow i'(0) = -\frac{R}{L}i(0). \tag{10}$$

Dvě počáteční podmínky po dosazení jsou

$$i(0) = 1, \tag{11}$$
$$i'(0) = -1. \tag{12}$$

Pomocí počátečních podmínek (11) *lze nyní určit konstanty C_1, C_2:*

$$C_1 = 1, \tag{13}$$
$$C_2 = -\frac{\sqrt{3}}{3}. \tag{14}$$

Dosazením vypočtených konstant (13),(14) *do rovnice* (9) *lze získat řešení spojité proudové odezvy*

$$i(t) = \exp(-t/2)\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{\sqrt{3}}{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right). \tag{15}$$

Výše uvedenými příklady jsme demonstrovali matematické modelovaní, které uvažujeme v této práci. Tyto příklady jsou důležité pro naše další úvahy a jsou v jistých obměnách zahrnuty v dalších kapitolách této práce.

2.2 Hyperstruktury

V současné době je předmětem zájmu využítí hyperstruktur jako účinného aparátu pro popis matematických modelů. Jsou zkoumány struktury, případně hyperstruktury, které vytváří vhodný potenciál k popisu vztahů a suvislostí v různých disciplínách.

Multistruktury nazývané také hyperstruktury patří k významné části moderní algebry. Zejména hypergrupy (dříve nazývané také multigrupy) jsou vhodným zobecněním grup. Připomeňme, že pojem hypergrupy byl zaveden v roce 1934, na 8. kongresu skandinávských matematiků, kde Fréderic Marty [52] poprvé představil tuto teorii, a na něho navázali Dresher a Ore [35]. Teorie hyperstruktur a zejména teorie hypergrup je obsažena v několika oblastech matematiky. Uveďme některé z nich: geometrie (deskriptivní, sférická, projektivní) uvedené v [31], grafy a hypergrafy, binární relace, uspořádané množiny a zejména svazy, uspořádané algebraické struktury, automaty, kryptografie, kódy, obecné systémy, umělá inteligence, polygroupy (aplikované v kombinatorice), pravděpodobnost, fuzzy množiny a některé další aplikace a speciální konstrukce. Základní koncept teorie hyperstruktur můžeme nalézt v literatuře [14, 26, 27, 39, 40, 41, 64, 68, 82].

Nechť H je neprázdná množina a "$*$" je zobrazení kartézkého součinu $H \times H$ do systému všech neprázdných podmnožin množiny H (běžně označované $\mathcal{P}^*(H)$). Dvojice $(H, *)$ se nazývá *hypergrupoid*. Pro každé dvě neprázdné podmnožiny A a B množiny H a $x \in H$ definujeme:

$$A * B = \bigcup_{a \in A, b \in B} a * b, \qquad A * x = A * \{x\} \quad \text{a} \quad x * B = \{x\} * B. \tag{16}$$

Definice 2.3 *Hypergrupoid $(H, *)$ se nazývá **polohypergrupa**, když pro všechna $a, b, c \in H$ platí $(a * b) * c = a * (b * c)$, tím rozumíme, že*

$$\bigcup_{u \in a*b} u * c = \bigcup_{v \in b*c} a * v.$$

*Hypergrupoid $(H, *)$ se nazývá **kvazihypergrupa**, když pro každé $a \in H$ platí $a * H = H = H * a$. Tato podmínka se nazývá reprodukční zákon (axiom).*

Definice 2.4 *Hypergrupoid $(H, *)$, který je zároveň polohypergrupou i kvazihypergrupou se nazývá **hypergrupa**.*

Podhypergrupoid hypergrupy $(H, *)$ je dvojice $(S, *)$, kde $S * S \subset S \subset H$. Poznamenejme, že relace incidence neprázdných množin A, B, tedy $A \cap B \neq \emptyset$, se ve studiích o hyperstrukturách obvykle označuje $A \approx B$.

Definice 2.5 *Hypergrupa $(H, *)$ se nazývá **transpoziční hypergrupa** nebo také spojnicový (nekomutativní) prostor, jestliže splňuje axiom transpozice: Pro každou čtveřici $a, b, c, d \in H$ ze vztahu $b \setminus a \approx c/d$ plyne $a * d \approx b * c$, kde možiny*

$$b \setminus a = \{x \in H; a \in b * x\}, c/d = \{x \in H; c \in x * d\}$$

se nazývají levá a pravá extenze (někdy též levý a pravý zlomek).

Spojnicové prostory byly zavedeny Walterem Prenowitzem a Jamesem Jantosciakem [68] při zkoumání jistých geometricky motivovaných nekomutativních struktur. Z velkého počtu publikací, které se věnují spojnicovým prostorům, jmenujme alespoň [11, 18, 40, 68].

Definice 2.6 *[10] Uspořádanou grupou nazýváme trojici $(G, \cdot, \leq)$, kde $(G, \cdot)$ je grupa a binární relace $\leq$ je uspořádání na G takové, že pro libovolnou trojici $x, y, z \in G$ plynou ze vztahu $x \leq y$ také vztahy $x \cdot z \leq y \cdot z, z \cdot x \leq z \cdot y$.*

V uspořádané grupě budeme symbolem $[a)_{\leq}$ označovat hlavní konec generovaný prvkem $a \in G$, definovaným: $[a)_{\leq} = \{x \in G; a \leq x\}$. Nyní uvedeme důležitý příklad hypergrupy determinované uspořádanou grupou $(G, \cdot, \leq)$ (viz např. [10, 11, 16]). Pro každou dvojici prvků $a, b \in G$ definujeme hyperoperaci $*$ na množině G takto: $a * b = [a \cdot b)_{\leq}$. Potom $(G, *)$ je hypergrupa, která je komutativní, právě když grupa $(G, \cdot)$ je komutativní. Toto tvrzení bývá označováno v teorii hyperstruktur jako ”koncové lemma”(např. [10, 11, 62, 63], důkaz viz např. [10]). V jisté implicitní podobě je toto tvrzení již obsaženo v práci [81]. Zobecnění binárních hyperoperací na množiny posloupností prvků, tedy hyperoperace spočetné arity v souladu s mezinárodním výzkumem v této oblasti je obsaženo v článku [7].

Jedním z nejčastěji uváděných příkladů hypergrupy je množina všech reálných kladných čísel $\mathbb{R}^+$ s přirozeným uspořádáním, kde hyperoperaci $* : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathcal{P}^*(\mathbb{R}^+)$ definujeme pro každou dvojici $a, b \in \mathbb{R}^+$ takto:

$$a * b = \{x \in \mathbb{R}^+; x \geq a \cdot b\}.$$

Potom $(\mathbb{R}^+, *)$ je komutativní hypergrupa. Mnoho dalších příkladů hypergrupoidů, polohypergrup, hypergrup a spojnicových prostorů můžeme najít především v [10, 29].

Definice 2.7 ([40],p.80). Podhypergrupa $(S, .)$ hypergrupy $(H, .)$ se nazývá:

- **uzavřená**, když $a/b \subseteq S$ a $b \setminus a \subseteq S$ pro všechna $a, b \in S$,
- **invertibilní**, když $a/b \approx S$ implikuje $b/a \approx S$, a $b \setminus a \approx S$ implikuje $a \setminus b \approx S$ pro všechna $a, b \in H$
- **reflexivní**, když $a \setminus S = S/a$ pro všechna $a \in H$,
- **normální**, když $a \cdot S = S \cdot a$ pro všechna $a \in H$.

Definicí 2.7 jsme ukončili výčet nejdůležitějších a nejznámějších vlastností týkající se hyperstruktur.

2.3 Multiautomaty

V algebraické teorii jsou zkoumány různé koncepce automatů. V minulosti se automaty považovaly za systémy, které mohou být použity pro přenos informací specifického typu. Automaty patří k systémům zahrnujícím modelování různých procesů. Tyto pojmy souvisí s pojmy jako akce pologrup nebo grup na množině. V těchto případech jsou užívané termíny jako kvazi–automaty nebo poloautomaty nebo jen jednoduché automaty bez výstupu, které jsou určitým zobecněním automatu Mealyho typu. Připomeňme, že automat Mealyho typu je systém $\mathbb{A} = (A, X, Y, \delta, \xi)$, kde A, X, Y jsou neprázdné množiny a $\delta : A \times X \longrightarrow A$ a $\xi : A \times X \longrightarrow Y$ jsou zobrazení definované na $A \times X$. Množiny A, X, Y jsou možiny stavů, vstupů, výstupů, v daném pořadí. Funkce δ je tranzitní funce, nebo také přechodová funkce, a funkce ξ je funkcí výstupní.

Funkci automatu můžeme popsat následovně. Na stav $a \in A$ je aplikován vstup $x \in X$ automatu $\mathbb{A}$. Jako následek toho přechází automat $\mathbb{A}$ do stavu $\delta(a, s) \in A$ a během této translace automat $\mathbb{A}$ odešle na výstup hodnotu $\xi(a, y) \in Y$. Tedy tento koncept automatu je matematická interpretace reálného systému, který pracuje v diskrétním čase.

Dále, když definice automatu zahrnuje rozšíření funkcí δ a ξ (na produkt stavové množiny A a volné pologrupy slov nad vstupní abecedou X nebo výstupní abecedou Y, v daném pořadí), pak s přirozeným zobecněním přejdeme k pojmu kvazi–automat. Pro upřesnění: kvazi–automat je systém $\mathbb{A} = (A, S, \delta)$, který se skládá z neprázdné množiny S, libovolné pologrupy A a zobrazení δ: $A \times S \longrightarrow A$ takového, že

$$\delta(\delta(a, r), s) = \delta(a, rs)$$

(je-li A monoid s jedničkou e, tak $\delta(e, a) = a$) pro libovolné $a \in A$ a $r, s \in S$. Toto je zřejmě zobecnění automatu bez výstupu; zejména každý automat bez výstupu $\mathbb{A} = (A, S, \delta)$ je kvazi–automat takový, že jeho vstupní pologrupa je volná. Jestliže vstupní pologrupa A kvazi–automatu $\mathbb{A} = (A, S, \delta)$ je kancelativní ("zkratitelná") pologrupa, tj. pro libovolné $r, s, t \in S$, $rt = st \Rightarrow s = r$, pak $\mathbb{A} = (A, S, \delta)$ nazýváme poloautomat. Poznamenejme, že pojem kvazi–automat byl zaveden S.Ginsburgem pod termínem kvazi–stroj jako zobecnění automatu Mealyho typu.

Definici, kterou nyní uvedeme můžeme najít snad ve všech pracech o automatech, neboli akcích pologrup na neprázdné množině, jako např. [2, 13, 24, 36, 53, 57].

Definice 2.8 *Automat bez výstupu, tedy kvazi–automat, je trojice $\mathbb{A} = (A, S, \delta)$, kde A je pologrupa, S je neprázdná množina a $\delta : A \times S \to S$ je přechodová funkce splňující následující podmínky:*

1) $\delta(e, s) = s$ pro všechna $s \in S$ a jednička $e \in A$, pokud existuje (podmínka identity),

2) $\delta(b, \delta(a, s)) = \delta(a \cdot b, s)$ pro všechna $a, b \in A$, $s \in S$ (podmínka smíšené asociativity -MAC).

Množina S se nazývá stavová množina automatu $\mathbb{A}$, množina A se nazývá pologrupa vstupních symbolů automatu $\mathbb{A}$ a δ je přenosová funkce. Prvky množiny S se nazývají stavy, prvky množiny A se nazývají slova.

Příklad 2.9 *[24] Jako obvykle označíme $\mathbb{Z}$ množinu všech celých čísel. Zkonstruujeme kvazi–automat se vstupní pologrupou $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, s binární operací "$\cdot$", kterou definujeme takto*

$$[a, b] \cdot [c, d] = [ac, ad + b]$$

pro libovolné $[a, b], [c, d] \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Tato operace je asociativní

$$([a, b] \cdot [c, d]) \cdot [p, q] = [ac, ad + b] \cdot [p, q] = [acp, acq + ad + b] = \\ = [a, b] \cdot [cp, cq + d] = [a, b] \cdot ([c, d] \cdot [p, q]).$$

Jelikož, např. $[2, 3] \cdot [3, 1] = [6, 5] \neq [6, 10] = [3, 1] \cdot [2, 3]$, operace není komutativní. Pologrupa A je monoid (s jednotkovým prvkem $[1, 0] \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$), ale struktura není grupou (např. $[2, 3]$ nemá inverzní prvek v A). Dále položíme $S = \mathbb{R}$ (množina všech reálných čísel) a pro všechna reálná čísla $x \in \mathbb{R}$ definujeme

$$\delta(x, [a, b]) = ax + b \in \mathbb{R}$$

pro každé $[a, b] \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Když $[c, d] \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, pak máme

$$\delta(\delta(x, [a, b]), [c, d]) = \delta(ax + b, [c, d]) = c(ax + b) + d = acx + bc + d = \delta(x, [ac, bc + d]) \\ = \delta(x, [a, b] \cdot [c, d])$$

pro všechna $x \in \mathbb{R}$, tedy trojice $\mathbb{A}(\mathbb{R}) = (A, \mathbb{R}, \delta)$ je kvazi–automat se stavovou množinou $\mathbb{R}$ všech reálných čísel.

Zkoumání algebraických struktur zejména v nekomutativní algebře přirozeně vedlo k hyperstrukturám. Jedna z hlavních motivací pro tento zájem přišla z geometrie. Analýza geometrických struktur vedla k rozličným binárním hyperstrukturám, a to hlavně ke spojnicovému prostoru, který, jak jsme již zmiňovali výše, byl vyšetřován Waltrem Prenowitzem. Později společně s Jamesem Jantosciakem rozvinuli některé části geometrie. Více motivace pro zkoumání hyperstruktur můžeme najít v chemii nebo nukleární fyzice. Ve spojení s binárními hyperstrukturami je uveden pojem multiautomat, který je studován např. v práci [8, 9, 18, 38, 43, 69].

Tyto konstrukce tvořené vstupní hypergrupou, která je tvořena různými operátory (transformacemi operátorů reálných nebo komplexních funkcí, diferenciálními nebo integrálními operátory) představují témata o něž je jistý zájem v literatuře. Použijeme jistý transfer od kvazi–automatu se vstupní pologrupou do třídy kvazi–multiautomatů (bez výstupu) tvořenými vstupní hypergrupou. Uvědomme si, že multiautomaty jsou akce pologrup nebo hypergrup na daném fázovém prostoru. Představíme definici Kvazi–multiautomatu, ktrou zavedl Chvalina [9]. Takovéto struktury pak studovali např. s J. Moučkou [19, 20, 21, 23].

Definice 2.10 *Kvazi–multiautomat bez výstupu je trojice $\mathbb{M} = (H, S, \delta)$, kde $(H, \cdot)$ je polohypergrupa, S je neprázdná množina a $\delta : A \times S \to S$ je tranzitní funkce splňující podmínku:*

$$\delta(b, \delta(a, s)) \in \delta(a \cdot b, s) \tag{17}$$

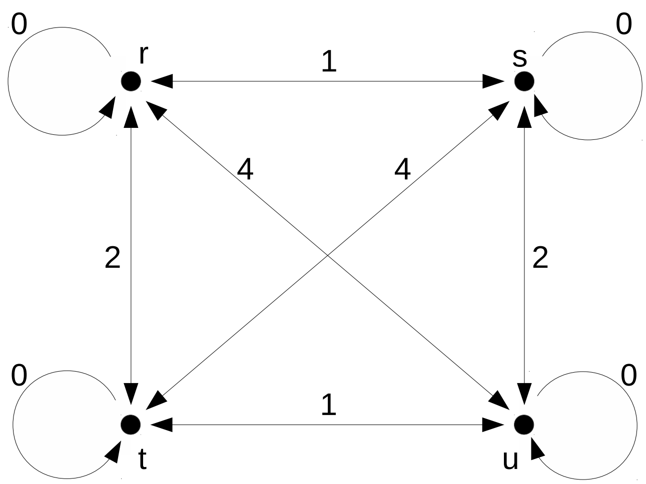
pro všechna $a, b \in A$, $s \in S$ (podmínka zobecněné smíšené asociativity - GMAC (the Generalized Mixed Associativity Condition)). Množina S se nazývá stavová množina kvazi–multiautomatu $\mathbb{M}$, struktura $(H, \cdot)$ se nazývá vstupní (polo)–hypergrupa kvazi–automatu $\mathbb{M}$ a δ je tranzitní funkce. Prvky množiny S se nazývají stavy, prvky množiny A se nazývají vstupní symboly (nebo také slova).

Příklad 2.11 *Uvažujme strukturu* $(T, \bullet)$*, kde* $T = \{0, 1, 2, 4\}$ *a hyperoperce "*$\bullet$*"je daná tabulkou:*

$\bullet$	0	1	2	4
0	0	T	T	T
1	T	$\{0,1\}$	T	$\{1,2,4\}$
2	T	T	T	$\{0,1\}$
4	T	$\{1,2,4\}$	$\{0,1\}$	T

Z tabulky lze ukázat, že axiom asociativity i axiom reprodukce jsou splněny, tedy struktura $(T, \bullet)$ *je hypergrupa.*

Dále uvažujme množinu stavu $S = \{r, s, t, u\}$ *a tranzitní funkci* $\delta : T \times S \to S$ *definouvanou diagramem*



Pak struktura (T, S, δ) *je kvazi–multiautomat splňující podmínku zobecněné smíšené asociativity, pro všechny vstupy aplikované na libovolný stav. Pro lepší představu o splnění podmínky GMAC uvedeme několik konkrétních akcí.*

$$\begin{aligned} \delta(1, \delta(2, r)) &\in \delta(1 \bullet 2, r) \\ \delta(1, t) &\in \delta(\{0, 1, 2, 4\}, r) \\ t &\in \{r, s, t, u\} \end{aligned}$$

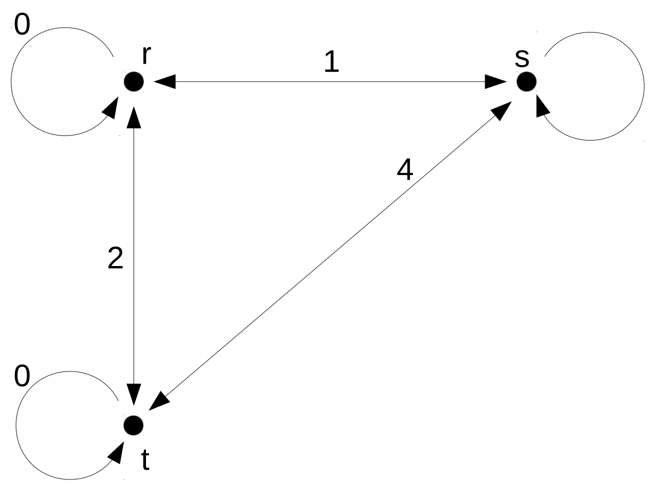
$$\begin{aligned} \delta(4, \delta(1, s)) &\in \delta(4 \bullet 1, s) \\ \delta(4, r) &\in \delta(\{1, 2, 4\}, s) \\ u &\in \{r, u, t\} \end{aligned}$$

Na závěr kapitoly si představíme, jak bude definovaná multistruktura, která je podkvazi–multiautomatem kvazi–multiautomatu z Definice 5.51.

Definice 2.12 *Nechť* $\mathbb{M} = (H, S, \delta)$ *je kvazi–multiautomat se vstupní polo–hypergrupou* H*. Jestliže* $\emptyset \neq T \subset S$ *a a* $\delta(t, a) \in T$ *pro každou dvojici* $[t, a] \in T \times H$*, pak trojice* $B = (H, T, \delta_T)$ *(kde* $\delta_T = \delta|_{(H \times T)}$*) se nazývá podkvazi–multiautomat kvazi–multiautomatu* $\mathbb{M} = (H, S, \delta)$.

Jestliže jsme touto definicí určili pojem podkvazi–multiautomatu, ukážeme, jak se změní diagram z Příkladu 2.11, když stavová množina bude obsahovat pouze tři prvky.

Příklad 2.13 *Uvažujme množinu* $S_1 = \{r, s, t\} \subset S = \{r, s, t, u\}$ *a hypergrupu* $(T, \bullet)$ *z Příkladu 2.11, kde* δ_T *je zúžení zobrazení* δ *definované* $\delta_T : T \times S_1 \to S_1$ *následujícím diagramem*



Tedy trojice (H, S_1, δ_T) *je podkvazi–multiautomat kvazi–multiautomatu* (T, S, δ).

2.4 Systémy

Slovo systém je jedním z nejpoužívanějších termínů nejen ve všech odvětvích vědy, ale i v běžném životě. Tento pojem lze chápat jako soubor prvků, které jsou vázány nějakým vztahem. Tato myšlenka inspirovala integrační vědní obor s názvem "teorie obecných systémů". Za zakladatele obecné teorie systémů je považován rakouský biolog Karel Ludwig von Bertalanffy. Jeho matematický model růstu organismu v čase byl publikován v roce 1934, s jistými obměnami se používá do dnes. Teorie systemů zaznamenala nebývalý rozvoj, a to zejména v posledních padesáti letech. Bertalanffyho teorie systémů je založena na předpokladu, že živé organismy jsou otevřené systémy, které mohou vyměňovat se svým okolím látky a energie, a proto nemohou být popsány pomocí běžných fyzikálních modelů pro uzavřené systémy. Bertanlaffy ukázal, že interakce mezi částmi systému jsou základními vlastnostmi pro celý systém, který může vykazovat vlastnosti, které nevyplývají přímo z vlastností celku. Obecná teorie systémů zkoumá objekty a jevy v této souvislosti, ať už interní nebo externí. Vývoj této vědní disciplíny je pevně rozdělen do dvou hlavních směrů. První směr reprezentuje nároky ekonomie, biologie a dalších méně formalizovaných disciplín. Zatímco ve druhém směru, na základě teorie obvodů a teorie řízení, se snažil o vytvoření obecné teorie systémů jako deduktivního systému. Na základě Bertalaffyho teorie byla vyvinuta Chapman-Richardsonova funkce (CHRF). Model byl široce používán v lesnictví díky své flexibilitě, přesnosti a smysluplným analytickým vlastnostem. Více viz: Modelovací časové funkce 3.1.

Mnohé pojmy teorie systémů lze definovat na základě koncepce obecného systému, přesto v konkrétních aplikacích je zapotřebí uvažovat vstupní a výstupní objekty opatřené některou speciálnější strukturou např. strukturou vektorového prostoru, nebo algebraickou strukturou případně hyperstrukturou. Následně pak přechodová relace systému by měla být kompatibilní s těmito strukturovanými objekty. Tak přicházíme k pojetí (abstraktního) úplného lineárního systému.

Nyní uvedeme definici lineárního systému:

Definice 2.14 *[17] Nechť U, V jsou vektorové prostory nad tělesem komplexních čísel $\mathbb{C}$ a $S \subseteq U \times V$ neprázdná binární relace s těmito vlastnostmi:*

1. *Pro každé dvojice vektorů $[\vec{u}, \vec{v}] \in S$, $[\vec{u}', \vec{v}'] \in S$ platí $[\vec{u}, \vec{v}] + [\vec{u}', \vec{v}'] = [\vec{u} + \vec{u}', \vec{v} + \vec{v}'] \in S$.*

2. *Pro každou dvojici $[\vec{u}, \vec{v}] \in S$ a každé komplexní číslo $y \in \mathbb{C}$ platí $y[\vec{u}, \vec{v}] = [y\vec{u}, y\vec{v}] \in S$. Obecný systém (U, V, S) se nazývá úplný lineární systém.*

Následující věta je fundamentální v teorii lineárních systémů. Uvedeme ji bez důkazu (důkaz je obsažen např. v monografii [56], kap. II, § 1 a využívá některé speciální matematické prostředky jako je Zornovo lemma).

Lemma 2.15 *Nechť U, V jsou vektorové prostory nad tělesem komplexních čísel $\mathbb{C}$ a $S \subseteq U \times V$ je neprázdná relace. Systém (U, V, S) je lineární právě tehdy, když existuje globální reakce $R\colon C \times U \to V$ (tedy zobrazení) s těmito vlastnostmi:*

1. *Objekt C je vektorový prostor nad $\mathbb{C}$.*

2. *Existuje dvojice lineárních zobrazení (tedy homomorfismů vektorových prostorů) $R_1\colon C \to V$, $R_2\colon U \to V$ takových, že pro každou dvojici $[\vec{c}, \vec{u}] \in C \times U$ platí*

$$R(\vec{c}, \vec{u}) = R_1(\vec{c}) + R_2(\vec{u})\,.$$

Poznamenejme, že globální reakce $R\colon C \times U \to V$ z výše uvedené věty se obvykle nazývá lineární globální reakcí, prostor C se nazývá linearním objektem globálních stavů a funkce $R_1\colon C \to V$, $R_2\colon U \to V$ (pro které platí $R(\vec{c}, \vec{u}) = R_1(\vec{c}) + R_2(\vec{u})$) se nazývají globální reakcí na stavy, globální reakcí na vstupy (v daném pořadí).

Příklady lineárních systémů vytvářejí některé časové (diskrétní i kontinuální) systémy. Za účelem definice obecného časového systému, jehož vstupní a výstupní objekty jsou tvořeny vstupními a výstupními signály, zavedeme pojem časové stupnice.

Připomeňme, že lineárně uspořádanou množinou nebo-li řetězcem rozumíme neprázdnou množinu M, na níž je definována binární relace $\leqq$ ($\leqq \subseteq M \times M$) s těmito vlastnostmi. Relace $\leqq$ je reflexivní ($x \leqq x$ pro každý prvek $x \in M$), antisymetrická ($x, y \in M$, $x \leqq y$, $y \leqq x$ implikuje $x = y$), transitivní ($x, y, z \in M$, $x \leqq y$, $y \leqq z$ implikuje $x \leqq z$) a úplná (pro libovolnou dvojici prvků $x, y \in M$ buďto $x \leqq y$, nebo $y < x$). Zde $y < x$ znamená $y \leqq x$ a $y \neq x$. Prvek $x_0 \in M$ se nazývá nejmenší prvek uspořádané množiny $(M, \leqq)$, jestliže platí $x_0 \leqq x$ pro každý prvek $x \in M$. Dále, intervalem I v uspořádané množině $(M, \leqq)$ se rozumí každá její alespoň dvouprvková podmnožina I s následující vlastností.

Pro každou dvojici prvků $x, y \in I$, pro níž $x < y$ a pro každý prvek $z \in M$ takový, že $x \leqq z \leqq y$, platí $z \in I$.

Je zřejmé, že toto zavedení pojmu interval zobecňuje (a tedy zahrnuje) všechny speciální případy intervalů. Nyní časovou množinou, nebo lépe časovou stupnicí T (v obecném pojetí), nazýváme každou lineárně uspořádanou množinu s nejmenším prvkem $t_0 \in T$. V uvažovaných případech tento pojem poněkud zúžíme a budeme za časovou stupnici považovat interval T buďto v řetězci $\mathbb{R}_0^+$ všech nezáporných reálných čísel (kontinuální časová stupnice) s nejmenším prvkem $t_0 \geqq 0$ nebo v řetězci $\mathbb{N}_0$, všech nezáporných celých čísel (diskrétní časová stupnice) s nejmenším prvkem $t_0 \geqq 0$ v $(\mathbb{N}_0, \leqq)$. Zde $\mathbb{N}_0$ označuje množinu všech přirozených čísel rozšířenou o číslo 0. Tuto množinu, rovněž jako množinu reálných čísel, uvažujeme s přirozeným uspořádáním čísel.

Nyní přistoupíme k definici obecného časového systému, která je uvedená v práci [17].

Definice 2.16 *Nechť A, B jsou libovolné (neprázdné) množiny, T je časová stupnice a A^T, B^T jsou množiny všech zobrazení časové stupnice T do A a do B nazývané množinami signálů. Nechť $X \subseteq A^T$, $Y \subseteq B^T$. Pak systém (X, Y, S), kde $S \subseteq X \times Y$ je tranzitní relace se nazývá obecný časový systém s abecedou vstupů A, abecedou výstupů B. Množina X se nazývá časovým objektem vstupních signálů $x\colon T \to A$, množina Y se nazývá časovým objektem výstupních signálů $y\colon T \to B$.*

Přechodová relace vstup – výstup může být zadána diferenciální rovnicí vstup – výstup tvaru $\frac{dy(t)}{dt} = u(t)$, kde $t \in T = \langle 0, \infty)$ (můžeme předpokládat i interval $(-\infty, \infty)$) a funkce u patří do množiny spojitých časových funkcí definovaných na intervalu $T = \langle 0, \infty)$. V tomto případě přechodová relace vstup–výstup $R\langle t_0, t_1\rangle$ tvořená dvojicemi vstup – výstup, kde uvažované funkce jsou zúženy na interval $\langle t_0, t_1\rangle$, je tvořena dvojicemi časových funkcí tvaru $\left[u(t), \alpha + \int\limits_{t_0}^{t} u(\tau)\, d\tau\right]$, $t_0 \leqq t \leqq t_1$, kde α je libovolná reálná konstanta. Konkrétními dvojicemi mohou být dvojice $[1, t]$, $[1, 1+t]$, $[t, \frac{t^2}{2}+1]$, $t_0 \leqq t \leqq t_1$ a další. Jestliže v uvedeném příkladě rovnici vstup výstup zaměníme za rovnici

$$\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = u(t)\,, \tag{18}$$

pak dvojice vstup – výstup tvořící přechodovou relaci daného systému jsou ve tvaru

$$\left[u(t), \alpha e^{-(t-t_0)} + \int_{t_0}^{t} e^{-(t-\tau)} u(\tau)\, d\tau\right], \tag{19}$$

$t_0 \leqq t \leqq t_1$, kde časová funkce $u(t)$ náleží do množiny časových funkcí, pro které integrál $\int\limits_{t_0}^{t} e^{-(t-\tau) u(\tau)\, d\tau}$ je definován pro všechny hodnoty proměnné $t \in \langle t_0, t_1\rangle$ a α je libovolné reálné číslo. Toto číslo může mít konkrétní hodnotu v návaznosti na počáteční podmínku kladenou na systém. Poznamenejme, že každému vstupu $u(t)$, $t \in \langle t_0, t_1\rangle$ je přiřazena množina výstupů $y(t)$, $t \in \langle t_0, t_1\rangle$, které jsou druhými složkami dvojic (19), tedy řešeními diferenciální rovnice (18) s konstantou α, která má úlohu parametru.

3 Současný stav

3.1 Modelovací časové funkce

Předtím než budeme definovat časovou funkci, je nutné popsat samotný pojem času matematickými prostředky. Tento termín už byl zmíněn výše, nyní zavedeme formální definici. Volíme zde velmi obecnou definici časové možiny, která představuje jistou matematickou strukturu a tak tento pojem může zahrnovat i bohatěji strukturované časové množiny. Následujícím dvěma definicím se podrobněji věnují Chvalina a Moučka v práci [22].

Definice 3.1 *Trojici $(T, \leq, t_0)$ nazvěme časovou množinou, jestliže platí*

a) T je množina,

b) $\leq$ je relace lineárního uspořádání na T,

c) t_0 je nejmenší prvek v $(T, \leq)$,

přitom nejmenší prvek t_0 nazýváme počáteční čas neboli počátek a libovolný prvek t z množiny T nazýváme časový okamžik neboli krátce jen čas.

Ve zmíněné práci se autoři dále zabývají definicí zúžené časové množiny a dále definují časovou minulost, časovou budoucnost a časový interval. Nám v této práci stačí pouze základní definice, neboť budeme uvažovat časové funkce na spojité časové množině $(\mathbb{R}_+, \leq, 0)$ s přirozeným uspořádáním, kde $\mathbb{R}_+$ je množina všech nezáporných reálných čísel a 0 je počátek. Nyní přistoupíme k samotné definici časové funkce, někdy také nazývané pojmem signál.

Definice 3.2 *Nechť $(T, \leq, t_0)$ je časová množina. Pak každé zobrazení (případně každá funkce) f s definičním oborem T je časovou funkcí, přesněji časovou funkcí na časové množině $(T, \leq, t_0)$ a daným oborem hodnot.*

Časové funkce tvoří poměrně jednoduchý, přesto velmi důležitý aparát pro popis časových závislostí.

Jednou z nejznámějších časových funkcí je Gaussův pulz,

$$v(t) = A \cdot \exp(-2\pi t^2), \tag{20}$$

který je používán k netradičnímu měření mikrovlnných struktur v časové oblasti [72]. Pomocí takového měření, které se spíše orientuje na antény, filtry apod. lze prakticky měřit všechny parametry známé z vysokofrekvenční a mikrovlnné techniky. Gaussův pulzní signál je výhradně používaným signálem pro měření širokopásmových struktur v časové oblasti, případně se používají signály jemu velmi podobné. Osamocený Gaussův puls se pro tyto měřící účely využívá zřídka. Převážně se využívá sled Gaussových impulzů s přesně definovanou periodou tak, aby bylo možné automatizovat měření. Poprvé uvažujeme Gaussův pulzní signál ve spojení s lineární diferenciální rovnicí, a tedy i s lineárními diferenciálními operátory v práci [15]. Další motivací je použití Gaussova pulzu v širokopásmových UWB systémech [71]. UWB je bezdrátová radiová technologie přenosu informace dat, která má výborné předpoklady pro využití v komunikaci na krátký dosah. To vzbuzuje jistou podobnost s automaty a multiautomaty [22, 24, 25, 43, 69, 83], které se v minulosti považovaly za systémy, které mohou být použity pro přenos informací specifického typu. Kvazi–multiautomaty, které jsou přirozeným zobecněním automatů, se mohou skládat z přesně takových funkcí jaké jsou např. v pracech [43, 45].

Jinou klasickou modelující funkcí je funkce harmonických kmitů. Tyto harmonické kmity dělíme do tří kategorii, a to volné kmitání, kde amplituda je konstantní, tlumené kmitání, kde amplituda klesá s nárůstem času, a naposled vynucené kmitání, kde amplituda závisí na rozdílu tlumící a vnější budící síly. Kmitavé pohyby zejména ve fyzice umožňují relativně jednoduše modelovat celou řadu fyzikálních jevů. V praxi na pohybující se tělesa působí odporové síly, převážně se jedná o tlumený kmitavý pohyb. Tento pohyb lze popsat funkcí

$$y(t) = A \cdot \exp(-\lambda t) \cdot \sin(bt). \tag{21}$$

Další modelující funkcí je Chapman-Richardsonova funkce uvedená v [73] a dále ve spojitosti s hyperstrukturami rozpracovaná v práci [44, 45], která je jednou z nejvíce používaných funkcí vycházejících z Bertalanffyho teorie obecného systému. Jak již bylo uvedeno, Bertalanffy vyšel z předpokladu, že živé organismy jsou otevřené systémy, jež si se svým okolím vyměňují látky a energii, a nedají se tedy popsat běžnými fyzikálními modely pro systémy uzavřené. Proto se s Chapman-Richardsonovou funkcí setkáváme právě v případech modelujících růst a také přírůstky některých ekosystémů. Chapman-Richardsonova funkce:

$$y(t) = A \cdot [1 - exp(-ct)]^b \tag{22}$$

je jednou z růstových funkcí, která je závislá na čase. Díky takovéto funkci a jiným růstovým funkcím můžeme prognózovat, kdy systém dosáhne maximální rychlosti růstu, kdy dojde ke kulminaci přírustkové funkce.

Zvláště zajímavou modelující funkcí je funkce, která vyjadřuje exponenciální zákon radioaktivního rozpadu $y(t) = A \cdot \exp(\alpha t)$. Tuto modelující funkci lze použít jen pro radioaktivní látku sestávající z radioaktivních jader stejného druhu s přesně danou hodnotou poločasu rozpadu, jejíž dceřiná jádra jsou již stabilní a dále se nerozpadají. Jsou-li však v preparátu obsaženy dva nebo více druhů radionuklidů s různými poločasy rozpadu, nebude závislost okamžité aktivity na čase již (mono)exponenciální funkce, ale bude kombinací dvou či několika exponenciálních závislostí s poločasy odpovídajícími zastoupeným radionuklidům - bude se jednat o biexponenciální či obecně multiexponenciální závislost, která je vyjádřena následující funkcí

$$y(t) = A \cdot (\exp(\lambda t) - \exp(\beta t)). \tag{23}$$

Můžeme uvažovat i další funkce, které se často objevují jako řešení diferenciálních rovnic. Diferenciální rovnice se velice často využívají pro modelování elektrických jevů v elektronických obvodech. Nyní již uvedeme jen výčet některých funkcí.

- $y(t) = \frac{\exp(-\lambda t)}{at+b}$,
- $y(t) = \sin \sqrt{t}$,
- $y(t) = \sin t$,
- $y(t) = \exp(\lambda t) \cos at$,
- $y(t) = b \ln(at)$,
- $y(t) = 2 \sin t + 1$.

Nalezli bychom i další funkce, které se běžně používají k popisu elektrotechnických jevů, např. funkce (15), která je řešením proudové odezvy v Příkladu 2.2.

3.2 Hyperstruktury

Od svého zrodu v roce 1938 zaznamenaly hyperstruktury velký rozvoj v řadě zemí po celém světě. Stejně tak je tato teorie provázaná s celou řadou matematických disciplín. O nemalém zájmu o tuto problematiku hovoří i významné mezinárodní konference pořádané v tříletých cyklech, které jsou známe pod zkratkou AHA, tj. Algebraické Hyperstruktury a jejich Aplikace. V této práci uvedeme především ty matematické disciplíny a autory, které jsou jistým způsobem provázané s tématem disertační práce (kompletní přehled všech odvětví je uveden v knize [29] str. 37):

- *Automaty* (A.R. Ashrafi, J. Chvalina, L. Chvalinová, G. Massouros),
- *binární relace* (J. Chvalina, I.G. Rosenberg, P. Corsini, V. Leoreanu, B. Davvaz, I. Chajda, Š. Hošková, I. Cristea, M. De Salvo, G. Lo Faro),
- *booleova algebra* (A.R. Ashrafi, M. Konstantinidou),
- *geometrie* (W. Prenowitz, J. Jantosciak, G. Tallini),
- *svazy a hypersvazy* (J.C. Varlet, T. Nakano, J. Mittas, A. Kehagias, M. Konstantinidou, k. Serafimidis, V. Leoreanu, I.G. Rosenberg, B. Davvaz, G. Calugareanu, G. Radu, A.R. Ashrafi),
- *zobecněné dynamické systémy* (M.R. Molaei).

Dalším poměrně novým tématem v oblasti hypergrup jsou H_v–structury, které zavedl T. Vougiouklis [78, 79, 80]. Na toto témá navazují další autoři jako B. Davvaz, M.R. Darafsheh, S. Spartalis, A. Dramalidis a další. H_v–structury jsou speciální případ hyperstruktur, pro které platí slabá podmínka asociativity. Jestliže v Definici 2.3 uvádíme, že $(a * b) * c = a * (b * c)$ pro každé $a, b, c \in H$, pak slabou asociativitou myslíme:

$$(a * b) * c \cap a * (b * c) \neq \emptyset,$$

pro každé $a, b, c \in H$. Nejnovějším tématem z oblasti hypestruktur je rozšíření binárních hyperoperací na případ n-arní hyperoperace, které zavedli B. Davvaz a T. Vougiouklis v publikaci [32], a začali se jím zabývat i další autoři, jedním z nich je Novák [66]a další [28, 47]. Předmětem této práce není zkoumání prroblematiky n-árních hyperoperací, avšak v části 5.2.2 je naznačeno jak jednoduše z binární hyperoperace získat n-ární.

Koncové lemma, které jsme popsali výše, je konstruováno mnohými českými i zahraničními autory, t.j. Borzooei, Chvalina, Davvaz, Nezhad, Hošková-Mayerova a další [10, 11, 39] (nebo např. kniha [30], kapitola 8.3 a 8.4.). Pro ucelenost probematiky na tomto místě uvedeme formální definici koncového lemma, které je poměrně podrobně studováno z teoretického hlediska v literatuře [64, 65].

Lemma 3.3 *([10], Theorem 1.3, p. 146) Buď $(H, \cdot, \leq)$ uspořádaná pologrupa. Binární hyperoperace $* : H \times H \to \mathcal{P}^*(H)$ definovaná předpisem*

$$a * b = \{x \in H; a \cdot b \leq x\} \tag{24}$$

je asociativní. Polohypergrupa $(H, *)$ je komutativní právě tehdy, když pologrupa $(H, \cdot)$ je komutativní.

V této práci je poměrně často využita konstrukce hypergrup v souvislosti právě s koncovým lemmatem, přesto některé konstrukce hyperstruktur vyžadují speciální přístup jako je třeba konstrukce spojnicového prostoru ve Větě 5.25. Pro tuto konstrukci využijeme poznatků, které přináší práce J. C. Varleta [77]. Varlet ve své práci ukazuje, že ve svazu platí ekvivalence mezi distribudivitou a spojnicovým prostorem.

Definice 3.4 *[77] Nechť $\mathfrak{L}_{\leq} = (L, \wedge, \vee)$ je svaz, kde $\wedge$ je spojení, $\vee$ je průsek a $\leq$ je relace uspořádání a nechť:*

$$\forall (a,b) \in L^2, a \diamond b = \{x \in L \mid a \wedge b \leq x \leq a \vee b\}.$$

Věta 3.5 *[77] Pro svaz $\mathfrak{L}_{\leq}$ jsou následující podmínky eqvivalentní:*

(1) $\mathfrak{L}_{\leq}$ je distributivní,

(2) $\mathbb{L}_{\leq} = (L, \diamond)$ je spojnicový prostor.

Tohoto tvrzení využíváme pro konstrukci již zmíněné Věty 5.25, která hraje důležitou úlohu pro ukázku, jak je možné proniknout v teorii hyperstruktur do aplikační sféry v problematice optimalizací elektrotechnických simulací.

Uvedeme definici, kterou zavedl profesor Chvalina, a kterou citují další světový autoři Davvaz a Leoreanu [27] (Definice 1. str 96). Stejnou úlohu jako v případě Varletovy definice 5.33, hraje i tato definice zásadní roli pro konstrukci spojnicového prostoru ve Větě 5.19.

Definice 3.6 *Buď $(H, *)$ hypergrupoid. Nazvěme H kvazipořádkovou hypergrupou (určenou kvazi-pořádkem), když $\forall (a,b) \in H^2, a \in a^3 \subseteq a^2$ a také $a * b = a^2 \cup b^2$. Navíc, jestliže platí následující implikace*

$$a^2 = b^2 \Rightarrow a = b$$

pro každé $(a,b) \in H^2$, pak $(H, *)$ se nazývá pořádková hypergrupa.

Lemma 3.7 *([10], Theorem 2.1, p. 150)*

1° Buď (G, R) kvaziuspořádaná množina. Pro každou dvojici $a, b \in G$ položme

$$a *_R b = R(a) \cup R(b) = R(\{a,b\}).$$

Potom $(G, *_R)$ je extenzivní komutativní hypergrupa.

2° Buďte $(G, R), (H, S)$ kvaziuspořádané množiny, $f : (G, R) \to (H, S)$ (silně) izotonní zobrazení. Pak $(G, *_R) \to (H *_R)$ je (silný hyperhomomorfizmus).

V souladu s terminologií použitou v této práci nazýváme hypergrupu $(H, *)$ horní (dolní) pořádkovou hypergrupou, jestliže existuje kvaziuspořádání R na množině H takové, že $a * b = R(\{a,b\}), (a * b = R^{-1}(\{a,b\}))$. Níže uvedená věta udává nutnou a postačující podmínku pro to, aby pořádková hypergrupa byla spojnicovým prostorem. Charakterizaci vyjádříme v termínech operátorů U_R, L_R, přiřazující k dané množině M množinu všech jejich horních, dolních závor, nazývanou také horním a dolním kuželem, v daném pořadí. Přesněji pro uspořádanou množinu $(X, R), M \subseteq X$ klademe $U_R(M) = \{x \in X; aRx$ pro každý prvek $a \in M\}, L_R(M) = \{x \in X; xRa$ pro každý prvek $a \in M\}$. Je zřejmé, že $U_R(x) = R(x), L_R(x) = R^{-1}(x)$ pro každý prvek $x \in X$.

Lemma 3.8 *([10], Theorem 6.1, p. 182) Buď (X, R) uspořádaná množina, $(X, \circ)$ $((X, *))$ horní (dolní) pořádková hypergrupa uspořádané množiny (X, R). Potom $(X, \circ)$ $((X, *))$ je spojnicový prostor právě tehdy, když pro každou dvojici R-nesrovnatelných prvků $a, b \in X$, pro kterou je množina $L_R(a, b)$ $(U_R(a, b))$ neprázdná, je také množina $U_R(a, b)$ $(L_R(a, b))$ neprázdná.*

V této práci uvádíme jen nejnutnější definice a věty, které jsou nezbytné pro formulaci námi zkoumaných a studovaných problémů, přestože si uvědomujeme, že existuje mnoho prací s různými tématy o hyperstrukturách, které zasahují do dalších odvětví matematiky, jak jsme již zmínili na začátku této kapitoly. Poznamenejme, že např. profesor T. Vougiouklis shromažďuje veškeré práce o hyperstrukturách, které jsou ve velkém tezauru na Demokritově univerzitě v Alexandroupolis. Tento tezaurus již zaznamenal více jak 1000 článku a jiných prací, které jsou bezprostředně spjaty se studovanou problematikou hyperstruktur.

3.3 Kvazi–multiautomaty

Jak již bylo řečeno kvazi–multiautomaty jsou případy jistého zobecnění kvazi–automatů. Existuje několik variant přístupů jak zobecnit podmínku "MAC"uvedenou v Definici 2.8 na případ multi–automatů. Jeden z klasických přístupů představuje práce Chvaliny [9], kde poprvé uvedl zobecněnou podmínku GMAC. Na jeho práci pak navázali další autoři, například Borzooei, Varasteh, Hasankhani [8], kteří používají podmínku GMAC pro konstrukci Fuzzy multiautomatů.

Jiný přístup ke zobecnění automatů na případy multiautomatů představuje práce A. R. Ashrafiho a A. Madanshekafa [1], kde v jejich pojetí není použit termín multiautomat. Na místo tohoto termínu autoři mluví o zobecnění akce hypergrupy na abstraktní neprázdné množině. Za použití naší symboliky stručně představíme zobecnění v pojetí práce Madanshekafa a Ashrafiho.

Definice 3.9 *Nechť* $(G, *)$ *je polohypergrupa* X *je abstraktní neprázdná množina. Zobrazení* $\delta : G \times X \to \mathcal{P}(X)$ *je takové* $\delta(g, x) \neq \emptyset$ *pro každou dvojici* $[g, x] \in G \times X$ *a* $\delta(x, h * g) \subseteq \delta(\delta(x, h), g), \delta(X, g) = X$ *pro každé* $x \in X$ *a každou dvojici prvků* $h, g \in G$.

Dálší iránští autoři jako M.K. Sen, R. Ameri, G Chowdhury vychází z práce výše popsaného zobecnění podmínky smíšené asociativity a studují vztahy mezi nedeterministickými automaty, ovšem jejich hyperakce jsou různé od Madanshekaf–Ashrafiho konceptu.

Poznámka 3.10 *Pro upřesnění pojmů čtenáři připomeňme, že nedeterministický automat se liší od námi studovaného multiautomatu především tím, že u nedeterministického automatu uvažujeme nejednoznačnou tranzitní funkci s jednoznačným vstupem, zatímco v problematice multiautomatů je tranzitní funkce jednoznačná a nejednoznačnost je na vstupu multiautomatu.*

V roce 2011 navázali na práci Bavela [2], ale i na práce dalších autorů studujících převážně hyperstruktury [12, 25, 27, 37, 53, 81] autoři J. Zhan, S. Sh. Mousavi a M. Jafarpour. Ti se ve svéch práci [83] zabývají hyperakcemi hypergrup na neprázdné množině. Jejich přínos je především v uvedení konstrukce hypergrupy z hyperakce na množině. Dále se zabývají přiřazením zobecněné stavové hypergrupy k nedeterministickým automatům, které můžou být asociované hyperakcí.

Willibald Dörfler v práci [34] zavádí různé součiny automatů a dále studuje jejich speciální vlastnosti. Přitom vychází z práce G. Birkhoffa a J.D. Lipsona [7] nebo F. Gécsega a I. Peaka [36], ale i dalších autorů. Tyto definice jsou následně používány ve spojení s fuzzy v publikacích [51, 57, 76].

Nejprve na tomto místě stručně představíme tři základní typy součinů v zavedených W. Dörflerem. Tyto součiny pak v části 5.3.1 zobecníme na případ kvazi–multiautomatů.

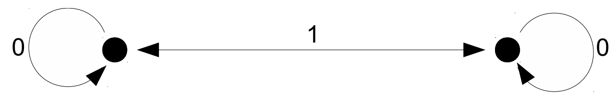
Definice 3.11 *[34] Nechť* $\mathbb{A}_1 = (H, S_1, \delta_1), \mathbb{A}_2 = (H, S_2, \delta_2), \mathbb{A}_3 = (M, S_3, \delta_3)$ *jsou automaty. Homogenním součinem* $\mathbb{A}_1 \times \mathbb{A}_2$ *budeme rozumět automat* $(H, S_1 \times S_2, \delta_1 \times \delta_2)$ *, kde* $\delta_1 \times \delta_2 : H \times (S_1 \times S_2) \to S_1 \times S_2$ *je zobrazení splňující podmínku:*

$$(\delta_1 \times \delta_2)(h, (s, t)) = (\delta_1(h, s), \delta_2(h, t)); s \in S_1, t \in S_2, h \in H,$$

zatímco heterogenním součinem $\mathbb{A}_1 \otimes \mathbb{A}_3$ *je automat* $(H \times M, S_1 \times S_3, \delta_1 \otimes \delta_3)$*, kde* $(\delta_1 \otimes \delta_3) : (H \times M) \times (S_1 \times S_3) \to S_1 \times S_3$ *splňuje zobrazení*

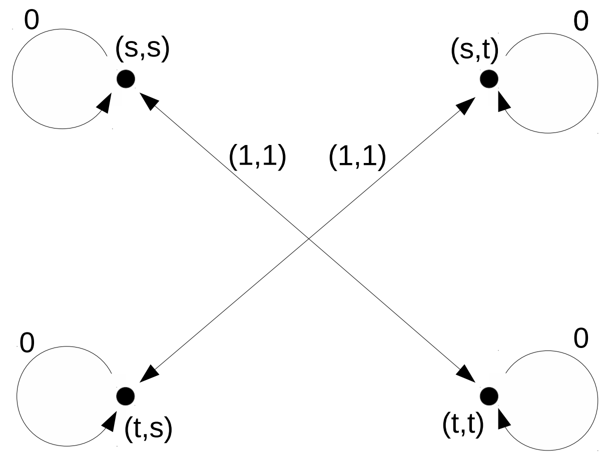
$$(\delta_1 \otimes \delta_3)((h, m), (s, t)) = (\delta_1(h, s), \delta_3(m, t)); \text{ pro všechna } h \in H, m \in M, s \in S_1, t \in S_3.$$

Příklad 3.12 *Uvažujme konkrétní automat* $\mathbb{A}_1 = (\{0,1\}, \{s,t\}, \delta_1)$*, kde množina vstupů má dva prvky* 0 *a* 1*, množina stavů je* $\{s,t\}$ *a* δ_1 *je zobrazení definované Obrázkem 3.*



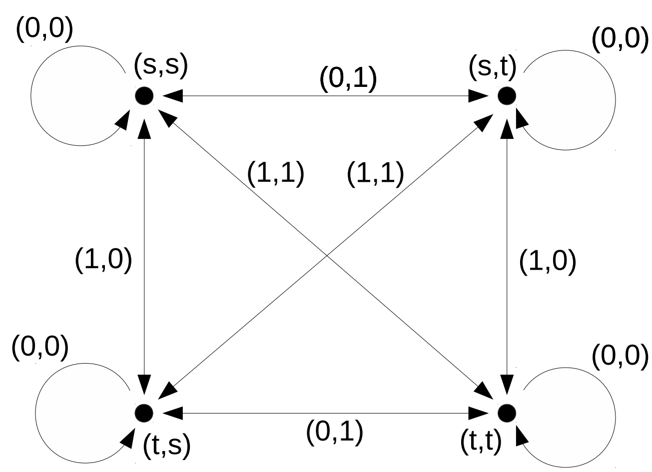
Obrázek 3: Zobrazení δ_1

Pak homogenní součin automatů $\mathbb{A}_1 \times \mathbb{A}_1$ *je znázorněn diagramem na Obrázku 4.*



Obrázek 4: Diagram homogenního součinu $\mathbb{A}_1 \times \mathbb{A}_1$

Dále, heterogenní součin $\mathbb{A}_1 \otimes \mathbb{A}_1$ *znázorňuje diagram na Obrázku 5.*



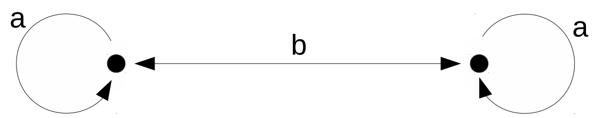
Obrázek 5: Diagram heterogenního součinu $\mathbb{A}_1 \otimes \mathbb{A}_1$

Definice 3.13 *Nechť* $\mathbb{A} = (I, S, \delta_A)$ *a* $\mathbb{B} = (J, T, \delta_B)$ *jsou dva kvazi–automaty* $\delta_A : I \times S \to S$, $\delta_B : J \times T \to T$ *s disjunktními vstupními abecedami* ($I \cap J = \emptyset$)*. Kartézským součinem* $\mathbb{A} \cdot \mathbb{B}$ *budeme rozumět automat* $\mathbb{A} \cdot \mathbb{B} = (I \cup J, S \times T, \delta_A \cdot \delta_B)$*, kde*

$$(\delta_A \cdot \delta_B)(x, (s,t)) = \begin{cases} (\delta_A(x,s), t) & \textit{když } x \in I, \\ (s, \delta_B(x,t)) & \textit{když } x \in J, \end{cases}$$

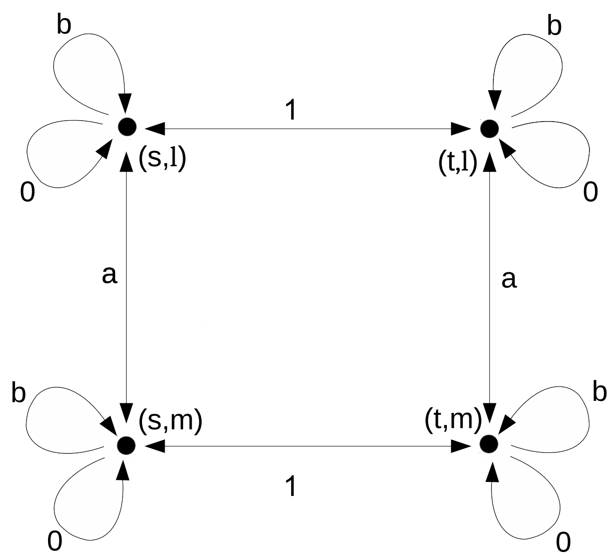
$(s,t) \in S \times T$. *Samozřejmě se zobrazením* $\delta_A \cdot \delta_B : (I \cup J) \times (S \times T) \to S \times T$.

Příklad 3.14 *Pro vyobrazení kartészké kompozice automatů zavedeme automat* $\mathbb{A}_2 = (\{a,b\},\{l,m\},\delta_2)$, *kde množina vstupů je* $\{a,b\}$, *množina stavů je* $\{l,m\}$ *a* δ_2 *je zobrazení definované Obrázkem 6. Dále uvažujeme automat* $\mathbb{A}_1 = (\{0,1\},\{s,t\},\delta_1)$ *z příkladu 3.12.*



Obrázek 6: Zobrazení δ_2

Výsledek kartézského součinu automatů $\mathbb{A}_1 \cdot \mathbb{A}_2$ *je reprezentován diagramem na Obrázku 7.*



Obrázek 7: Kartézská kompozice $\mathbb{A}_1 \cdot \mathbb{A}_2$

Zobecněním součinů automatů na případ součinů kvazi–multiautomatů lineárních diferenciálních operátorů, které jsou popsány výše, vzniká jistý problém. Tedy pro tyto konkrétní součiny podmínka GMAC není splněna. Díky různým variantám zobecnění podmínky MAC si můžeme dovolit modifikovat podmínku GMAC (kompletní formulace problému a modifikace GMAC na E-GMAC a na SE-GMAC je popsána v kapitole 5.3.2).

Zkoumání určitých vlastností jistých algebraických struktur v tomto případě automatů, případně multiautomatů leží v oblasti zájmu mnoha autorů [1, 9, 13, 18, 36, 53] a ve spojení s fuzzy strukturami to jsou práce [8, 54, 76]. Je naprosto běžnou skutečností, že u klasických automatů je snad základním principem zajímat se především o tyto vlastnosti:

Definice 3.15 *Automat* $\mathbb{A} = (H,S,\delta)$ *se nazývá:*

- *Abelovský (nebo komutativní): Když* $\delta(s, x \cdot y) = \delta(s, y \cdot x)$ *pro všechny trojice* $[s, x, y] \in S \times H \times H$.

- *Cyklický: Když existuje stav* $s \in S$ *takový, že pro všechny stavy* $t \in S$ *existuje prvek* $a \in H$ *s vlastností* $\delta(s, a) = t$. *Navíc jestliže množina všech generátorů* $\mathbb{A}$ *je přesně množina* S, *pak automat je silně souvislý.*

Definice 3.16 *Automat* $\mathbb{A} = (H, S, \delta)$ *se nazývá tranzitivní, když je splněna následující podmínka: Pro všechna* $(s, t) \in S \times S$ *existuje automorfismus* ρ *automatu* $\mathbb{A}$ *(tj.* $\rho : S \longrightarrow S$ *je bijekce taková, že* $\rho(\delta(s, x)) = \delta(\rho(s), x)$ *pro každé* $s \in S$ *a každé* $x \in H$*).*

Definice 3.17 *Tranzitivní automat se nazývá kvaziperfektní, jestliže je silně souvislý.*

Výše uvedené vlastnosti bez újmy na obecnosti můžeme zkoumat i v případě kvazi—multiautomatů. V práci Dörflera jsou tyto vlastnosti modifikovány na problematiku kartézské kompozice.

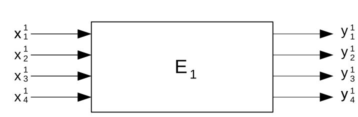
3.4 Systémy vstup–výstup

Koncem čtyřicátých let dvacátého století dochází k bouřlivému rozvoji celé řady vědních disciplín, tedy expanduje i teorie systémů jako nová vědní disciplína a začíná se výrazně prosazovat.

I když již mnohem dříve můžeme zaznamenat zmínky o prvních systémech, lze tedy konstatovat, že systém jako takový má velmi dlouhou historii. Mnoho velkých myslitelů nahlíželo na systém z různých úhlů pohledů a v rozličných disciplínách vznikly některé speciální případy jako je metodika obecného systému, která je i v dnešní době relativně nová disciplína. I když systém pronikl do mnoha vědních oborů, stále ještě se nepodařilo získat zcela ideální definici pro koncepce systémů (jako v případě naší Definice 2.14, kde vstup a výstup jsou vektorové prostory). Bertalaffyho přínos, který poukazuje na vztahy mezi objekty systému, byl již zmíněn dříve.

Stará historicko filozofická tradice vychází z toho, že systém má vlastnosti, které se liší od vlastností jeho konstrukčního elementu (některými autory označován jako prvek), a tyto vlastnosti se nerovnají souhrnu vlastností jeho konstrukčního elementu. Tedy v tomto pojetí je celek více jak souhrn jeho částí. V kontextu obecné teorie systémů dosáhl významných výsledků polský vědec Oskar Lange, který se opírá o aparát teoretického popisu kybernetických systémů, který vytvořil H. Greniewský. Na část Langových výsledků navazuje V. N. Sadovskij, který *prvkem* nazývá předmět libovolné povahy. Tento předmět je závislý na jiných předmětech a také působí na ostatní předměty. *Okolím* nazývá množinu předmětů, na kterých je daný prvek závislý nebo množinu předmětů, kterou prvek ovlivňuje. V práci [74] se Sadovskij zabývá hledáním pravidla **transformace** T mezi vstupem x a výstupem y u prvku E (ve zbytku práce budeme používat termín konstrukční element E namísto prvku E), tím umožňuje vytvořit úplný popis způsobu činnosti jednotlivého konstrukčního elementu E. Mluví-li o dvou konstrukčních elementech E_1 a E_2, které jsou spjaté vazbou, zavádí pojem **matice vazby** s označením C a formuluje pravidla pro sestavení této matice. Dále pro popis systému, který je složen z několika konstrukčních elementů, sestavuje Sadovskij matici s označením **maticová struktura systému**, prvky maticové struktury systému jsou právě výše zmíněné matice vazby. Pro snadnou orientaci ve výše představených termínech a přesné pochopení problematiky uvedeme názorný příklad.

Příklad 3.18 *Nejprve uvažujme konstrukční element E_1, který je opatřen vstupním vektorem $\vec{x} = (x_1^1, x_2^1, x_3^1, x_4^1)$ a výstupním vektorem $\vec{y} = (y_1^1, y_2^1, y_3^1, y_4^1)$. Konstrukční element E_1 je znázorněn na Obrázku 8.*

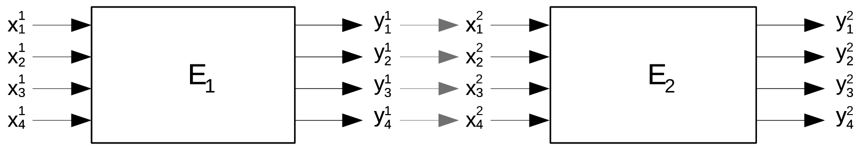


Obrázek 8: Konstrukční element E_1

Způsob činnosti konstrukčního elementu E_1 matematicky představuje transformaci vstupního vektoru $\vec{x}$ na výstupní vektor $\vec{y}$, tedy toto můžeme zapsat takto

$$\vec{y} = T(\vec{x}). \tag{25}$$

Jestliže chceme ukázat vazbu mezi konstrukčními elementy, musíme zavést další konstrukční element E_2 *se vstupním vektorem* $\vec{x} = (x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_4^2)$ *a výstupním vektorem* $\vec{y} = (y_1^2, y_2^2, y_3^2, y_4^2)$. *Konstrukční element* E_2 *je de facto stejný jako na Obrázku 8, jen na místo indexů* 1 *uvažujeme index* 2. *Proto nebudeme zavedení konstrukčního elementu* E_2 *podporovat obrázkem, navíc je částí Obrázku 9. Obrázek 9 znázorňuje vazbu mezi* E_1 *a*



Obrázek 9: Schéma matice vazby C_{12}

E_2 *(vazba je naznačena šedými šipkami). Matice vazby má čtyři řádky a čtyři sloupce, její prvky jsou hodnoty* 1 *nebo* 0, *na kterých pozicích je jedna a na kterých nula, vysvětlíme po uvedení matice*

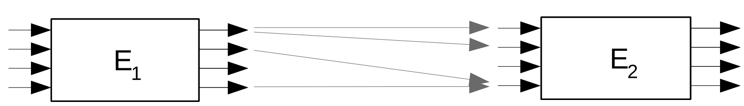
$$C_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{26}$$

V matici C_{12} *je hodnota* 1 *na pozici prvku* c_{11}, *protože výstup* y_1^1 *ovlivňuje vstup* x_2^1, *hodnota* 0 *je na pozici prvku* c_{12}, *jelikož výstup* y_1^1 *neovlivňuje vstup* x_2^2 *a stejně tak pro* c_{13} *a* c_{14}. *Druhý řádek vypovídá o ovlivnění vstupů* x_1^2, x_2^2, x_3^2 *a* x_4^2 *výstupem* y_2^1, *tedy výstup* y_2^1 *ovlivňuje pouze vstup* x_2^2, *proto* c_{22} *má hodnotu* 1. *Stejně bychom postupovali i pro další řádky matice* (26).

Příklad 3.19 *Jestliže v Příkladu 3.18 budeme uvažovat vazby schématicky vyjádřené na Obrázku 10, matice vazby* C'_{12} *bude nabývat tohoto tvaru*

$$C_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{27}$$

Při formulaci matice vazby zachováváme stejný postup jako v Příkladu 3.18. Na schématu



Obrázek 10: Schéma matice vazby C'_{12}

vazeb v Obrázku 10 jsme pro přehlednost vazeb vynechali označení vstupů a výstupů u obou konstrukčních elementů, avšak předpokládáme, že vstupy a výstupy jsou stejné jako v Obrázku 9.

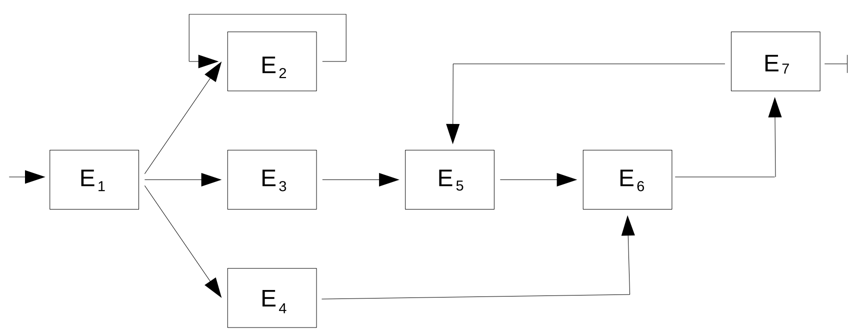
V Příkladech 3.18 a 3.19 jsme ukázali způsob, jakým lze vhodně popsat vazby mezi dvěma konstrukčními elementy jistého systému. Dále uvedeme příklad, na kterém demonstrujeme vysvětlení pojmu **maticová struktura systému**.

Příklad 3.20 *V tomto příkladě budeme volit opačný postup oproti předchozím dvěma příkladům. Nyní máme zadanou maticovou strukturu systému* S*, jejímiž prvky jsou matice vazby* C_{rs}*, kde* $r, s \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$*, a budeme sestavovat diagram systému* $\mathcal{S}$*. Tedy maticová struktura* S *systému* $\mathcal{S}$ *je tvaru*

$$S = \begin{bmatrix} 0 & C_{12} & C_{13} & C_{14} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{35} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{46} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{56} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{67} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{75} & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{28}$$

Podle maticové struktury systému S *v prvním řádku na první pozici máme nulovou hodnotu, tedy konstrukční element* E_1 *nepůsobí sám na sebe, tedy nemá zpětnou vazbu. Na druhé pozici je matice vazby* C_{12}*, tedy konstrukční element* E_1 *ovlivňuje konstrukční element* E_2*, na třetí a čtvrté pozici máme matice vazby* C_{13} *a* C_{14}*, tedy konstrukční element* E_1 *dále ovlivňuje i konstrukční elementy* E_3 *a* E_4*, při zachovaném pořadí. Dále už jen stručně v druhém řádku konstrukční element* E_2 *ovlivňuje sama sebe. Podle třetího řádku matice* S *konstrukční element* E_3 *působí na konstrukční element* E_5*. Následně konstrukční element* E_4 *působí na konstrukční element* E_6*; konstrukční element* E_5 *na konstrukční element* E_6*; konstrukční element* E_6 *na konstrukční element* E_7*; konstrukční element* E_7 *na konstrukční element* E_5*.*

Tedy systém $\mathcal{S}$ *podle maticové struktury* (28) *je znázorněn na Obrázku 11.*



Obrázek 11: Maticová struktura systému S

Tímto jsme ukázali maticový popis systému podle teorie v [74], v další části kapitoly se budeme věnovat množinově relačnímu popisu.

Důležitý krok v rozpracování obecné teorie systémů za použití aparátu teorie množin a teorie relací udělal M. Mesarović a jeho spolupracovníci, kteří rozpracovali základy konečného a účelového přístupu ve výzkumu systémů. Jejich práce prezentovaná na 3. mezinárodní konferenci o kybernetice je průlomové dílo v této vědní disciplíně. V koncepci M. Mesarovíce se obecná teorie systému chápe jako teorii formálních (matematických) modelů reálných (nebo konceptuálních) systémů. Mesarović v publikaci [56] uvádí, že matematickou teorii abstraktních systémů pokládáme za takovou teorii matematických modelů reálně existujících systémů, v rámci které zkoumá základní vlastnosti těchto systémů za použití jednoduchých matematických struktur. V teoreticko–technických termínech Mesarović definuje systém jako relaci. Tedy systém S je relace definovaná na $V_1, V_2 \dots V_n$ předpisem

$$S \subseteq V_1 \times V_2 \times \dots V_n.$$

Mesarović vymezuje dva základní typy problémů zkoumaných v obecné teorii systémů. První typ představuje úlohu konstruktivní analýzy, konstruktivní specifikace, spočívající v hledání efektivní procedury, podle které lze pomocí několika konstrukčních elementů nalézt ostatní konstrukční elementy.

Příklad 3.21 *Objasníme si to na jednoduchém příkladě. Mějme určitý objekt, který nás zajímá a má určené dvě vlastnosti (atributy)* A_1 *a* A_2*. Množiny hodnot, které nabývá* A_1 *a* A_2*, označíme* MH_1 *a* MH_2*, kde* $MH_1 = \{0, 1, 3, 5, 9, 12\}$ *a* $MH_1 = \{4, 6, 10, 14, 22, 28\}$*, platí tyto současné výskyty hodnot* $s_1(0, 4)$*;* $s_2(1, 6)$*;* $s_3(3, 10)$*;* $s_4(5, 14)$*;* $s_5(9, 22)$*;* $s_6(12, 28)$*. Každá z uvedených dvojic hodnot úplně definuje daný experiment v takové míře v jaké souvisí s vlastnostmi* A_1 *a* A_2*. Náš objekt jako celek můžeme vyjádřit jako soubor dvojic*

$$\boldsymbol{S} = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6\}.$$

$\boldsymbol{S}$ *je formálním modelem zkoumaného objektu, tj. určitého reálného systému, a představuje abstrakní, formální systém.*

V právě uvedeném příkladě konstruktivní specifikace zavedeného systému **S** je ronice

$$x_2 = 2x_1 + 4,$$

pomocí které pro hodnotu x_1 (nabývající hodnoty z množiny MH_1) můžeme lehce určit hodnoty x_2. Je ale nutné rozlišovat mezi systémem **S** a jeho konstruktivní specifikací; pro stejný systém můžeme vytvořit různé specifikace.

Druhý typ problému spočívá v analýze systémových vlastností a vyúsťuje do hledání způsobu formalizace valstností charakterizující reálně existující systém a do dalšího použití těchto formálních představ na konstruktivní specifikaci systému ([56]). Aparát teorie množin a teorie relací, který Mesarović zvolil za základ své varianty obecného systémů, postačuje na definování a zkoumání široké třídy systémových pojmů.

4 Cíle disertační práce

V projektu jsou zkoumány systémy vstup-výstup se strukturovanými vstupními a výstupními prostory opatřené algebraickými i analytickými multistrukturami a příslušnou kompatibilní přechodovou relací vstup-výstup. V souvislosti s multiautomaty uvažovanými jako akce binárních hyperstruktur na vhodných stavových prostorech měly by být konstruované struktury aplikovány na studium konkrétních systémů a signálů ve spojitém čase.

4.1 Lineární operátory modelovacích časových signálů

Sestavit lineární diferenciální rovnice druhého řádu pro konkrétní časové procesy popisující různé typy technických jevů a stejně tak pro lineární diferenciální rovnice druhého řádu v Jacobiho tvaru. Popsat lineární diferenciální operátory, které jsou levými stranami těchto lineárních homogenních diferenciálních rovnic, které mohou být uvažovány v elektronických obvodech.

4.2 Hyperstruktury lineárních diferenciálních operátorů

Prostudovat vlastnosti hyperstruktur lineárních diferenciálních operátorů druhého řádu a vlastnosti hyperstruktur lineárních diferenciálních operátorů druhého řádu v Jacobiho tvaru s rozličnými binárními hyperoperacemi vytvořenými nejen pomocí „Ends Lemma”. Následně pak tyto struktury zobecnit na řád n. Dále zkoumat možnosti vytváření hypergrup z komutativní kvazi–uspořádané pologrupy, která není grupou.

4.3 Kvazi–multiautomaty

Zkonstruovat kvazi–multiautomaty, které jsou opatřeny vstupní (polo–)hypergrupou a množinou stavů, která je tvořena lineárními diferenciálními operátory. Formulovat konkrétní příklady kvazi–multiautomatů, které usnadní chápání takovýchto konstrukcí. Dále pokusit se vhodně zobecnit součiny automatů zavedené W. Dörflerem, tj. homogenní součin, heterogenní součin a kartézskou kompozici na případy kvazi–multiautomatů.

4.4 Systémy

Studium obecných systémů vstup–výstup s přechodovými relacemi mezi vstupními a výstupními prostory s multistrukturami tvořenými časovými funkcemi konkrétních signálů. Popsat souvislosti mezi obecnými systémy vstup–výstup v pojetí Mesarovice–Takahary pro konkrétní signály. Zkonstruovat tyto systémy z kvazi–multiautomatů lineárních diferenciálních operátorů časových procesů.

Neméně významným cílem práce je umožnit čtenáři snadnou orientaci v terminologii a problematice hyperstruktur a kvazi-multiautomatů, přitom podpořit pochopení těchto pojmů odpovídajícími příklady.

5 Vlastní výsledky

5.1 Lineární diferenciální operátory modelovacích časových signálů

V části 3.1 Modelovací časové funkce uvádíme některé typy modelovacích funkcí. Ke každé modelovací funkci nalezneme její první a druhou derivaci. Poté z první a druhé derivace sestavíme lineární diferenciální rovnici druhého řádu. Z takto sestavené diferenciální rovnice získáme lineární diferenciální operátor druhého řádu. Tyto operátory následně uvažujeme jako prvky množin, na kterých zavádíme v Kapitole 5.2 rozličné binární hyperoperace a studujeme jejich vlastnosti. Tato metoda získávání lineárních diferenciálních operátorů z diferenciálních rovnic vychází z práce profesora Otakara Borůvky. Ten ve svých studiích o diferenciálních rovnicích používal algebraizace a geometrizace studovaných objektů a objevuje mnohdy překvapivé výsledky. V tomto přístupu prof. Borůvky pokračují jeho žáci jako je např. profesor Neuman [58, 59, 60, 61], ale i další autoři studují z hlediska algebraického přístupu lineární diferenciální operátory, jako jsou např. práce [3, 4, 5, 6]. Ve smyslu této motivace je i náš přístup k modelovacím funkcím, které jsou řešením homogenních diferenciálních rovnic.

Nyní si představíme postup, jak získáváme z modelovacích funkcí diferenciální rovnice reprezentované předpisi (33) (34) (35) (36).

Nechť $y(t) = A \cdot \exp(-\lambda t) \cdot \sin(bt)$ je časová funkce tlumených kmitů a její první derivace je funkce daná předpisem

$$y'(t) = -A\lambda \exp(-\lambda t) \cdot \sin(bt) + A \cdot \exp(-\lambda t) \cdot \cos(bt)b \tag{29}$$

pak druhá derivace je

$$y''(t) = A\lambda^2 \exp(-\lambda t) \cdot \sin(bt) - 2A\lambda \exp(-\lambda t) \cdot b\cos(bt) - A\exp(-\lambda t) \cdot b^2 \cdot \sin(bt) \tag{30}$$

Pro sestavení diferenciální rovnice postupujeme následujícím způsobem: Z rovnice (29) po jednoduché úpravě získáme

$$A \cdot \exp(-\lambda t) \cdot \cos(bt)b = y'(t) + A\lambda \exp(-\lambda t) \cdot \sin(bt) \tag{31}$$

a dosadíme do rovnice (30) za $A \cdot \exp(-\lambda t) \cdot \cos(bt)b$ a zároveň vytkneme $A \cdot \exp(-\lambda t) \cdot \sin(bt)$. Pak rovnice (30) bude tvaru:

$$y''(t) = (\lambda^2 - b^2)A \cdot \exp(-\lambda t) \cdot \sin(bt) - 2\lambda(y'(t) + A\lambda \exp(-\lambda t) \cdot \sin(bt)). \tag{32}$$

A nakonec do rovnice (32) dosadíme za výraz $A \cdot \exp(\lambda t) \cdot \sin(bt)$, kde ze zadání modelovací funkce je zřejmé, že tento výraz je roven $y(t)$. Pak konečná diferenciální rovnice má tvar:

$$y''(t) + 2\lambda y' + (b^2 + \lambda^2)y = 0. \tag{33}$$

Tímto postupem z modelovacích funkcí získáme diferenciální rovnice, další diferenciální rovnice uvedeme už bez výše uvedeného postupu. Jako další modelující funkci uvažujme $y(t) = \exp(-\alpha t) - \exp(-\beta t)$, která je dvouparametrický signál, a její aplikovatelnost v praxi jsme si představili výše. První a druhá derivace je $y'(t) = -\alpha \exp(-\alpha t) +$

$\beta\exp(-\beta t)$ a $y''(t) = \alpha^2\exp(-\alpha t) + \beta^2\exp(-\beta t)$. Tedy uvedená funkce je řesením následující diferenciální rovnice

$$y''(t) - (\alpha - \beta)y'(t) + \alpha\beta y(t) = 0. \tag{34}$$

Nakonec uvedeme poslední dvě modelovací funkce, které jsou rešením diferenciálních rovnic v Jacobiho tvaru. První z těchto funkcí je funkce Gaussova pulzního signálu $v(t) = a\cdot\exp(-2\pi t^2)$ a její první a druhá derivace

$$v'(t) = -4a\pi t\exp(-2\pi t^2),\ v''(t) = 4\pi a\cdot\exp(-2\pi t^2)(4\pi t^2 - 1).$$

Pak z takto daných rovnic získáme diferenciální rovnici

$$v''(t) + (4\pi - 16a\pi^2 t^2)v(t) = 0. \tag{35}$$

Druhým signálem je Chapman-Richardsonova funkce (CHRF) $y = A\cdot[1-\exp(-ct)]^b$. Připomeňme, že tato modelující funkce je jedna z nejpoužívanějších modelujících funkcí v klasickém pojetí Bertalanffyho růstového a přírůstkového systému. Jako u výše zmíněných funkcí určíme první a druhou derivaci.

$$y' = Abc[1-\exp(-ct)]^{b-1}\cdot\exp(-ct),\quad y'' = -Abc^2\cdot[1-\exp(-ct)]^b\cdot\frac{\exp(ct)-b}{(\exp(ct)-1)^2}.$$

Z této první a druhé derivace získáme lineární diferenciální rovnici druhého řádu v Jacobiho tvaru.

$$y(t)'' + \frac{bc^2\cdot(\exp(ct)-b)}{(\exp(ct)-1)^2}\cdot y(t) = 0. \tag{36}$$

Sestavili jsme homogenní lineární diferenciální rovnice druhého řádu pro modelovací funkce z kapitoly 3.1. Každá homogenní lineární diferenciální rovnice 2. řádu má fundamentální systém řešenní, který je tvořený dvojicí lineárně nezávislých řešení. Ve stručnosti připomeňme metodu hledání druhého řešení homogení lineární diferenciální rovnice 2. řádu, pokud již známe jedno řešení z fundamentálního systému řešení. Metoda, o které se zmíníme, je známa jako metoda redukce řádu diferenciální rovnice.

Jestliže máme lineární diferenciální rovnice druhého řádu

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \tag{37}$$

a y_0 je řešením homogení diferenciální rovnice, pak druhá funkce z fundamentálního systému řešení je tvaru.

$$y = y_0(x)\int v(x)dx. \tag{38}$$

Zderivujeme funkci y a získáme první

$$y' = y_0'(x)\int v(x)dx + v(x)\cdot y_0(x) \tag{39}$$

a druhou derivaci y'':

$$y'' = y_0''(x) \int v(x)dx + 2v(x) \cdot y_0'(x) + v'(x) \cdot y_0(x) \tag{40}$$

Dosazením (38), (39) a (40) do diferenciální rovnice (37) a vytknutím $\int v(x)dx$ a $v(x)$ získáme

$$(y_0''(x)+p(x)y_0'(x)+q(x)y_0(x)) \int v(x)dx+v'(x)y_0(x)+v(x)(2y_0'(x)+p(x)y_0(x)) = f(x),$$

kde z prvního řešení homogení rovnice víme, že $y_0''(x) + p(x)y_0'(x) + q(x)y_0(x) = 0$. Tedy po konečné úpravě získáme lineární diferenciální rovnici prvního řádu

$$v'(x)y_0(x) + v(x)(2y_0'(x) + p(x)y_0(x)) = f(x). \tag{41}$$

Pak druhé řešení z fundamentálního systému hledáme ve tvaru $y_1 = y_0 \cdot \int v(x)$.

Pomocí této metody najdeme druhé funkce, které jsou řešením homogeních lineárních diferenciálních rovnic.

Příklad 5.1 *Najděte druhou funkci z fundametálního systému řešení pro homogenní lineární diferenciální rovnici 2.řádu $y''(t)+2\lambda y'+(b^2+\lambda^2)y = 0$, když známe jedno z řešení $y(t) = A \cdot \exp(-\lambda t) \cdot \sin(bt)$.*

Řešení: První derivaci máme vyjádřenou výše v rovnosti (29), pak dosadíme do obecného vzorce (41), který jsme odvodili výše, a zredukovaná diferenciální rovnice má tvar

$$\begin{aligned} v'A \cdot \exp(-\lambda t) \cdot \sin(bt) + v(2(-A\lambda \exp(-\lambda t) \cdot \sin(bt)+ \\ + A\exp(-\lambda t) \cdot \cos(bt)b) + 2\lambda A \exp(-\lambda t) \cdot \sin(bt)) = 0 \end{aligned} \tag{42}$$

Jedná se o diferenciální rovnici 1. řádu se separovatelnými proměnnými. Po separaci proměnných a úpravě získáme tvar

$$\frac{d(v)}{d(t)} \cdot \frac{1}{v} = \frac{2A\lambda \exp(-\lambda t)\sin(bt) - 2A\exp(-\lambda t)\cos(bt)b - 2\lambda A\exp(-\lambda t)\sin(bt)}{A\exp(-\lambda t)\sin(bt)}. \tag{43}$$

Upravíme rovnici (43), pak po roznásobení $d(t)$ a následném zkrácení získame tvar

$$\frac{d(v)}{v} = \frac{-2\cos(bt)b}{\sin(bt)} d(t).$$

Obě strany rovnice zintegrujeme a dostáváne rovnost

$$\ln|v| = -2\ln(\sin(bt)).$$

Jestliže rovnici odlogaritmujeme, zjistíme, že výsledná funkce je tvaru

$$v = \frac{1}{\sin^2(bt)},$$

dosazením do $y_1 = y_0 \cdot \int v(x)$ zjistíme, že druhá funkce z fundamentálního systému je tvaru:

$$y_1 = B\exp(-\lambda t)\cos(bt).$$

Uvedeme ještě jeden příklad, kde budeme hledat druhou funkci z fundamentálního systému řešení pro diferenciální rovnici v Jacobiho tvaru. Tentokrát bude výpočet poněkud jednodušší, neboť pro diferenciální rovnice v Jacobiho tvaru je hodnota koeficientu funkce $p(x) = 0$.

Příklad 5.2 *Najděte druhou funkci z fundametálního systému řešení pro homogenní diferenciální rovnice 2.řádu v Jacobiho tvaru*

$$v''(t) + (4\pi - 16a\pi^2 t^2)v(t) = 0,$$

když znáte jedno z řešení $y_0 = a \cdot \exp(-2\pi t^2)$.

Řešení: Stejně jako v Příkladu 5.1 známe první derivaci $y_0' = -4a\pi t \exp(-2\pi t^2)$, *pak dosadíme do vzorce* (41), *který máme odvozený pro obecný výpočet, takže zredukovaná diferenciální rovnice má tvar*

$$y'(t)a \cdot \exp(-2\pi t^2) + y(t)2(-4a\pi t \exp(-2\pi t^2)) = 0. \qquad (44)$$

Jedná se o diferenciální rovnici 1. řádu se separovatelnými proměnnými. Po separaci proměnných získáme tvar

$$\frac{d(y)}{y} a \cdot \exp(-2\pi t^2) = 8 \cdot a\pi t \exp(-2\pi t^2) d(t).$$

Rovnici můžeme krátit výrazem $a \cdot \exp(-2\pi t^2)$, *tím získáme tvar*

$$\frac{d(y)}{y} = 8\pi t d(t).$$

Rovnici zintegrujeme a po úpravě zjistíme výslednou funkci

$$y(t) = \exp(4\pi t^2).$$

Tedy jsme získali funkci, která je řešením rovnice (44) *a po dosazení do* $y_1 = y_0 \cdot \int v(x)$ *zjistíme, že druhé řešení je tvaru* $y_1 = a \exp(-2\pi t^2) \cdot \int_0^t \exp(4\pi x^2) dx$

Zbylé dvě časové modelovací funkce spolu s předchozími uvedeme pro přehlednost v následující tabulce, kde v prvním sloupci jsou časové modelovací funkce, v druhém sloupci jsou lineární diferenciální rovnice druhého řádu a ve třetím sloupci jsou druhé funkce z fundamentálního systému řešení.

Modelovací funkce	**Diferenciální rovnice**	**Druhá funkce**
$y(t) = A \cdot \exp(-\lambda t) \cdot \sin(bt)$	$y''(t) + 2\lambda y'(t) + (b^2 + \lambda^2)y(t) = 0$	$y(t) = B \exp(-\lambda t) \cos(bt)$
$y(t) = \exp(-\alpha t) + \exp(-\beta t)$	$y''(t) - (-\alpha - \beta)y'(t) + \alpha\beta y(t) = 0$	obsažena v modelovací funkci
$y(t) = A \cdot [1 - exp(-c \cdot t)]^b$	$y''(t) + bc^2 \frac{\exp(-2ct) - \exp(-ct)}{(1-(\exp(ct))^2} y(t) = 0$	$y(t) = A(1 - \exp(-ct))^b \int_0^t \frac{1}{(1-\exp(-cx))^{2b}} dx$
$y(t) = a \cdot \exp(-2\pi t^2)$	$y''(t) + (4\pi - 16a\pi^2 t^2)y(t) = 0$	$y(t) = a \exp(-2\pi t^2) \cdot \int_0^t \exp(4\pi x^2) dx$

Pro sestavené diferenciální rovnice, jejichž řešením je fundametální systém funkcí uvedený v tabulce, budeme dále uvažovat lineární diferenciální operátory, které odpovídají levé straně těchto diferenciálních rovnic.

Množinu všech reálných čísel budeme značít $\mathbb{R}$, pod označením $\mathbb{R}^+$ rozumíme podmnožinu všech nezáporných čísel množiny $\mathbb{R}$; pod označením $\mathbb{C}(I)$ (užívá se i označení $\mathbb{C}^0(I)$) budeme rozumět okruh všech spojitých funkcí na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$ s obvyklým sčítáním a násobením funkcí. Analogicky okruh všech spojitých funkcí na intervalu I, které mají všechny derivace až do řádu k pro nějaké přirozené číslo k, budeme označovat $\mathbb{C}^k(I)$. Symbolem $\mathbb{C}^+(I)$ označíme podpolookruch okruhu $\mathbb{C}(I)$ tvořený všemi kladnými nenulovými funkcemi.

Označme $\mathbb{A}_2(I)$ množinu nesingulárních obyčejných lineárních homogenních diferenciálních rovnic druhého řádu

$$y'' + p(x)y' + q(x)y \ = \ 0$$

takových, že $p \in \mathbb{C}^+(I), q \in \mathbb{C}(I)$. Nechť Id je identický operátor a $D \ = \ d/dx$. Dále označíme $[p, q]$ jak je obvyklé uspořádanou dvojicí funkcí p, q. Pak $L(p, q)$ je lineární diferenciální operátor $L(p, q) \ = \ D^2 + p(x)D + q(x)Id$, za použití rovnice $(P_2(y, x; I))$ získáme formu $L(p, q)(y) \ = \ 0$. Definujme

$$\mathbb{LA}_2(I) \ = \ \{L(p, q) : \mathbb{C}^2(I) \longrightarrow \mathbb{C}(I); [p, q] \in \mathbb{C}^+(I) \times \mathbb{C}(I)\}$$

množinou všech lineárních diferenciálních operátorů druhého řádu.

Příklad 5.3 *Pro modelující funkci tlumených kmitů máme lineární diferenciální rovnici druhého řádu $y'' - 2\lambda y' + (b^2 + \lambda^2)y = 0$. Pak množina lineárních diferenciálních operátoů je*

$$\mathbb{LA}_2(I) = \{L(-2\lambda^2, b^2 + \lambda^2);\ [\lambda, b] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\}.$$

Příklad 5.4 *Pro signál $y = \exp(\alpha t) - \exp(\beta t)$, kde $\alpha < \beta$ máme lineární diferenciální rovnici druhého řádu $y'' - (\alpha - \beta)y' + \alpha\beta y = 0$. Potom množina lineárních diferenciálních operátorů je*

$$\mathbb{LA}_2(I) = \{L(-\alpha + \beta, \alpha\beta);\ [\alpha, \beta] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R},\ \alpha < \beta\}.$$

Jak jsme již naznačili, tato práce je z části věnována jistým vztahům mezi hyperstrukturami a lineárními diferenciálními rovnicemi druhého řádu. Je třeba poznamenat, že Otakar Borůvka byl první, kdo začal v padesátých letech systematické studium globálních vlastností rovnic s levou stranou ve tvaru $y'' + p(x)y$, kde $p \in \mathbb{C}(I)$. V práci [60], str. 229 je dokázáno, že pokud h je fáze a φ je rozptyl výše uvedené rovnice (srov. [60]), pak platí, že h a φ splňuje Abelovu funkcionální rovnici $h(\varphi(x)) = h(x) + \pi \operatorname{sgn} h'$. Rovnice v Jacobiho formě vedly ke zkoumání grup a hypergrup operátorů $L(0, p), p \in \mathbb{C}(I)$. Dále definujeme $L(0, q)y \ = y'' + q(x)y$ Otakar Borůvka našel kritérium globální ekvivalence pro diferenciální rovnice druhého řádu v Jacobiho tvaru, tj.

$$y'' + q(x) \cdot y = 0,\ q \in \mathbb{C}(I).$$

Z cenné literatury věnované této problematice z hlediska přístupu využívajícího klasické algebraické a geometrické struktury jmenujme [58, 59, 61, 62].

Dále zavedeme definici lineárních diferenciálních operátorů v Jacobiho tvaru (za předpokladu, že $q(x) \neq 0$, pro všechna $x \in I$).

$$\mathbb{JA}_2(I) \; = \; \{L(0,q);\; q \in \mathbb{C}^+(I)\}.$$

Příklad 5.5 *Pro modelující funkci Gaussova signálu máme lineární diferenciální rovnici druhého řádu v Jacobiho tvaru $y''(t) - 16a\pi t^2 y(t) = 0$. Pak množina lineárních diferenciálních operátorů je*

$$\mathbb{JA}_2(I) = \{L(0,\Psi(a,t)); \Psi(a,t) = -16a\pi t^2,\; a \in \mathbb{R}, t \in \langle 0,\infty)\}.$$

Příklad 5.6 *Pro signál $y = A \cdot [1 - exp(-c \cdot t)]^b$, máme lineární diferenciální rovnici druhého řádu v Jacobiho tvaru $y'' + bc^2 \cdot \frac{exp(ct)-b}{(exp(ct-1)^2}y = 0$. Potom množina lineárních diferenciálních operátorů je*

$$\mathbb{J}_g\mathbb{A}_2(I) = \{L(0, bc^2\frac{exp(ct)-b}{(exp(ct-1)^2});\; [b,c] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R},\; t \in \langle 0,\infty)\}.$$

Na výše definovaných množinách lineárních diferenciálních operátorů zavedeme jednoznačné binární operace, tím získáme jednoznačné algebraické struktury s jednou operací.

Příklad 5.7 *[11] Nechť $I \subseteq \mathbb{R}$ je otevřený interval a $\mathbb{LA}_2(T) = \{L(p,q); p(x), q(x) \in \mathbb{C}^+(I)\}$. Pro každou dvojici lineárních diferenciálních operátorů $L(p_1,p_1), L(p_2,p_2) \in \mathbb{LA}_2(T)$ definujeme binární operaci "$\cdot$"takto:*

$$L(p_1,q_1) \cdot L(p_2,q_2) = L(p_1p_2, p_1q_2 + q_1). \tag{45}$$

Klademe $L(p_1,q_1) \leq L(p_2,q_2)$, jestliže $p_1(x) = p_2(x), q_1(x) \leq q_2(x)$ pro všechna $x \in I$. Potom $(\mathbb{LA}_2(T),\cdot,\leq)$ je nekomutativní kvazi–uspořádaná grupa. Důkaz můžeme najít v práci [11].

Příklad 5.8 *Stejnou konstrukcí jako v Příkladu 5.7 sestrojíme grupu lineárních diferenciálních operátorů v Jacobiho tvaru. Nechť $I \subseteq \mathbb{R}$ je otevřený interval a $\mathbb{JA}_2(I)_q = \{L(0,p); p(x) \in \mathbb{C}^+(I);$ pro všechna $x \in I\}$. Pro každou dvojici lineárních diferenciálních operátorů v Jacobiho tvaru $L(0,p), L(0,q) \in \mathbb{JA}_2(I)_q$ definujeme binární operaci "$\cdot$"takto:*

$$L(0,p) \cdot L(0,q) = L(0,pq)$$

a $L(0_0,\ldots,0_{n-1}) \leq L(0,q)$, jestliže $p(x) \leq q(x)$ pro všechna $x \in I$. Potom $(\mathbb{JA}_2(I)_q,\cdot,\leq)$ je komutativní kvazi–uspořádaná grupa.

Důkaz.

1 Asociativita

$$\begin{aligned} L(0,p) \cdot (L(0,q) \cdot L(0,u)) &= L(0,p) \cdot L(0,qu) = L(0,pqu) \\ &= L(0,pq) \cdot L(0,u) = ((L(0,p) \cdot L(0,q)) \cdot L(0,u). \end{aligned}$$

Tedy operace "$\cdot$"je asociativní. Existence neutrálního a inverzního prvku je zde zřejmá, proto vynecháme výpočet; neutrálním prvkem je operátor $L(0,1)$ a inverzním prvkem k prvku $L(0,p)$ je operátor $L(0,\frac{1}{p})$.

2 Důsledek definice relace uspořádání "$\leq$"na $\mathbb{JA}_2(I)_q$ je, že relace je reflexivní, antisymetrická a tranzitivní, proto $(\mathbb{JA}_2(I)_q, \leq)$ je uspořádaná množina.

3 Ověříme kompaktibilitu (slučitelnost) kvazi–uspořádání na $\mathbb{JA}_2(I)_q$ s binární operací- "$\cdot$". Předpokládejme, že $L(0,p), L(0,q), L(0,u) \in \mathbb{JA}_2(I)_q$ a diferenciální operátory splňují vlastnost $L(0,p) \leq L(0,q)$ a $L(0,u)$ je libovolný operátor. Pak

$$p(x) \leq q(x), \qquad \text{pro všechna } x \in I,$$

z tohoto plyne

$$u(x) \cdot p(x) \leq u(x) \cdot p(x) \qquad \text{pro všechna } x \in I,$$

proto

$$L(0,u) \cdot L(0,p) \leq L(0,u) \cdot L(0,q)$$

Protože operace " $\cdot$ " je komutativní, nemusíme provádět výpočet z druhé stravny, a tedy $(\mathbb{JA}_2(I)_q, \cdot, \leq)$ je komutativní kvazi–uspořádaná grupa.

V této části jsme sestavili homogenní lineární diferenciální rovnice, pro které jsou řešením modelovací funkce (20), (21) (22) a (23). Popsali jsme operátory homogenních lineárních diferenciálních rovnic, které jsou levými stranami těchto rovnic, které mohou být obsaženy v různých technických jevech.

5.2 Hyperstruktury lineárních diferenciálních operátorů

5.2.1 Hyperstruktury lineárních diferenciálních operátorů 2.řádu

Jsou zkoumány struktury vytvářené diferenciálními operátory, které jsou levými stranami homogenních diferenciálních rovnic uvažovaných v elektrických obvodech. Tím je vytvářen teoretický potenciál vhodný k popisu vztahů a souvislostí mezi časovými funkcemi modelující různé děje probíhající v elektrických a elektronických obvodech.

V této části jsou studovány základní algebraické vlastnosti hyperstruktur speciálních diferenciálních operátorů duhého řádu a diferenciálních operátorů druhého řádu v Jacobiho tvaru. Diferenciální rovnice z předchozí kapitoly a jejich operátory jsou zajímavou motivací pro studium vztahů mezi takto formovanými strukturami. Náš přístup s využitím hypergrup a spojnicového prostoru je zde veden především přes ”koncové lemma”, nebo lépe k zavádění hyperoperací je použito tohoto lemma. Vlastní důkazy jsou vedeny prostřednictvím základních definic, přesto ale v některých případech vycházíme z kvaziuspořádané grupy. Předmět zájmu pro tyto hyperstruktury konkrétních časových procesů s rozličnými vlastnostmi můžeme nalést při popisu a studiích jistých zákonitostí časových modelů.

Jak jsme již dříve uvedli množina $\mathbb{LA}_2(I)$ je množinou všech diferenciálních operátorů druhého řádu

$$\mathbb{LA}_2(I) \;=\; \{L(p,q) : \mathbb{C}^2(I) \longrightarrow \mathbb{C}(I); [p,q] \in \mathbb{C}_+(I) \times \mathbb{C}(I)\}. \tag{46}$$

Dle konstrukce popsané v kapitole 2.2 získáme z nekomutativní uspořádané grupy hypergrupu splňující transposiční axiom. Nejprve připomeňme, že uspořádáním na množině lineárních diferenciálních operátorů (46), která je zavedena a studována v [11], myslíme relaci:

$$L(p_1,q_1) \leq L(p_2,q_2) \text{ když } p_1(x) = p_2(x), q_1(x) \leq q_2(x) \text{ pro všechna } x \in T. \tag{47}$$

Ucelenou představu o takovéto konstrukci hypergrupy jsme získali v kapitole 2.

Na množině (46) definujeme binární hyperoperaci $* : \mathbb{LA}_2(I) \times \mathbb{LA}_2(I) \to \mathbb{LA}_2(I)$ předpisem

$$L(p_1,q_2) * L(p_2,q_2) \;=\; \{L(p,q) \in \mathbb{LA}_2(I); p_1p_2 = p, p_1q_2 + q_1 \leq q\} \tag{48}$$

pro všechny dvojice $L(p_1,q_1), L(p_2,q_2) \in \mathbb{LA}_2(I)$. Tato hyperoperace koresponduje s binární operací (45) tak, že $L(p_1,q_1) * L(p_2,q_2) = [L(p_1,q_1) \cdot L(p_2,q_2))_{\leq}$.

Věta 5.9 *Nechť $I \subseteq \mathbb{R}$ je otevřený interval. Jestliže definujeme na množině $\mathbb{LA}_2(I)$ (46) hyperoperaci předpisem (48), pak $(\mathbb{LA}_2(I), *)$ je nekomutativní transpoziční hypergrupou, tj. nekomutativním spojnicovým prostorem.*

Důkaz. Důkaz spíše zřejmý díky relaci (47), která je reflexivní a tranzitivní, a jestliže si uvědomíme, že $L(p_1,q_2) * L(p_2,q_2) = L(p,q) \in \mathbb{LA}_2(I); L(p_1,q_2) \ldots L(p_2,q_2)) \leq L(p,q)$, pak díky koncovému lemmatu získáme nekomutativní spojnicový prostor.

Kompletní důkaz analogického tvrzení je uveden např. [11] či v jisté implicitní podobě je obsaženo v [16, 70].

Dále zavedeme podmnožiny $\mathbb{L}_{C1}\mathbb{A}_2(I)$ a $\mathbb{L}_{11}\mathbb{A}_2(I)$.

$$\mathbb{L}_{C1}\mathbb{A}_2(I) \;=\; \{L(c,q); L(c,q) \in \mathbb{L}\mathbb{A}_2(I), c \in \mathbb{R}, c > 0\} \tag{49}$$

a

$$\mathbb{L}_{11}\mathbb{A}_2(I) \;=\; \{L(\chi_1,q); q \in \mathbb{C}(I), \chi_1 \equiv 1\}. \tag{50}$$

Na podmnožinách $\mathbb{L}_{C1}\mathbb{A}_2(I)$ a $\mathbb{L}_{11}\mathbb{A}_2(I)$ zavedených formulami (49)(50) v daném pořadí, definujeme zúženou hyperoperaci "$*$", která koresponduje s (48). Potom podmnožina $\mathbb{L}_{11}\mathbb{A}_2(I)$ množiny $\mathbb{L}\mathbb{A}_2(I)$ tvořena všemi diferenciálními operátory ve tvaru $L(\chi_1,q), q \in \mathbb{C}(I)$ a podmožina $\mathbb{L}_{C1}\mathbb{A}_2(I)$ je tvořena objekty $L(p,q)$, kde p je konstantní funkce s kladnou hodnotou. Vzhledem k tomu, že $L(\chi_1,q_1) * L(\chi_1,q_2) \subseteq \mathbb{L}_{11}\mathbb{A}_2(I)$ pro jakékoli dvě funkce $q_1,q_2 \in \mathbb{C}(I)$ a hyperoperace "$*$"je zúžená na tuto podmnožinu, vidíme, že $(\mathbb{L}_{11}\mathbb{A}_2(I),*)$ je komutativní podhypergrupoid hypergrupy $(\mathbb{L}\mathbb{A}_2(I),*)$. A navíc můžeme ukázat, že $(\mathbb{L}_{11}\mathbb{A}_2(I),*)$ a $(\mathbb{L}_{C1}\mathbb{A}_2(I),*)$ jsou podhypergrupy nekomutativního spojnicového prostoru $(\mathbb{L}\mathbb{A}_2(I),*)$.

Poznámka 5.10 *Když hypergrupa S je normální podhypergrupou hypergrupy H, píšeme $S \lhd H$.*

Věta 5.11 *Hypergrupoidy $(\mathbb{L}_{11}\mathbb{A}_2(I),*)$ a $(\mathbb{L}_{C1}\mathbb{A}_2(I),*)$ jsou podhypergrupy hypergrupy $\mathbb{L}\mathbb{A}_2(I)$. Dále platí*

$$\mathbb{L}_{11}\mathbb{A}_2(I) \lhd \mathbb{L}_{C1}\mathbb{A}_2(I) \lhd \mathbb{L}\mathbb{A}_2(I)$$

a

$$\mathbb{L}_{11}\mathbb{A}_2(I) \lhd \mathbb{L}\mathbb{A}_2(I).$$

Důkaz. Nechť $L(c_1,q_1), L(c_2,q_2) \in \mathbb{L}_{C1}\mathbb{A}_2(I)$. Pak

$$L(c_1,q_1) * L(c_2,q_2) \;=\; \{L(c_1c_2,g); q_1(x) + c_1q_2(x) \leq g(x), x \in I\} \in \mathbb{L}_{C1}\mathbb{A}_2(I).$$

Tedy

$$\mathbb{L}_{C1}\mathbb{A}_2(I) * \mathbb{L}_{C1}\mathbb{A}_2(I) = \bigcup\{L(r,q) * L(s,v); L(r,q), L(s,v) \in \mathbb{L}_{C1}\mathbb{A}_2(I)\} \subseteq \mathbb{L}_{C1}\mathbb{A}_2(I).$$

Je evidentní, že zúžená hyperoperace (48) na množině (49) je asociativní, a dále ukážeme, že polohypergrupa $(\mathbb{L}_{C1}\mathbb{A}_2(I),*)$ splňuje reprodukční axiom.

Předpokládejme, že $L(c_1,p_1) \in \mathbb{L}_{C1}\mathbb{A}_2(I)$ je libovolný operátor. Pak následující inkluze je evidentní

$$L(c,p) * \mathbb{L}_{C1}\mathbb{A}_2(I) \subseteq \mathbb{L}_{C1}\mathbb{A}_2(I).$$

Když $L(r,q) \in \mathbb{L}_{C1}\mathbb{A}_2(I)$, pak definujeme $s = \frac{r}{c}$ a $\varphi(x) \;=\; \frac{1}{c}(q(x) - p(x)), x \in I$. Pak $\varphi \in \mathbb{C}(I)$ a

$$L(c,p) * L(s,\varphi) \;=\; \{L(cs,\psi); c\varphi(x) + p(x) \leq \psi(x), x \in I\} = \{L(r,\psi), c\varphi + p \leq \psi\}.$$

Protože $q(x) = c\varphi(x) + p(x)$, máme

$$L(r,q) \in L(c,p) * L(s,\varphi) \subseteq L(c,p) * \mathbb{L}_{C1}\mathbb{A}_2(I),$$

tedy

$$L(c,p) * \mathbb{L}_{C1}\mathbb{A}_2(I) \;=\; \mathbb{L}_{C1}\mathbb{A}_2(I).$$

Podobně definujeme $\varphi(x) = q(x) - sp(x), x \in (I)$ získáme $L(r,q) \in L(\frac{r}{c},\varphi) * L(c,p) \subseteq \mathbb{L}_{C1}\mathbb{A}_2(I) * L(c,p)$ a následně

$$\mathbb{L}_{C1}\mathbb{A}_2(I) * L(c,p) \;=\; \mathbb{L}_{C1}\mathbb{A}_2(I).$$

Proto $(\mathbb{L}_{C1}\mathbb{A}_2(I), *)$ je podhypergrupou hypergrupy $(\mathbb{L}\mathbb{A}_2(I), *)$. Podobným způsobem můžeme získat analogické tvrzení pro hypergrupoid $(\mathbb{L}_{11}\mathbb{A}_2(I), *)$.

V následující části důkazu se budeme zabývat vlastností normality, tedy ukážeme, že pro libovolný operátor $L(p,q) \in \mathbb{L}\mathbb{A}_2(I)$ platí rovnost

$$L(p,q) * \mathbb{L}_{C1}\mathbb{A}_2(I) \;=\; \mathbb{L}_{C1}\mathbb{A}_2(I) * L(p,q).$$

Nechť $L(p,q) \in \mathbb{L}\mathbb{A}_2(I)$ je libovolný operátor. Pak platí

$$\begin{gathered} L(p,q) * \mathbb{L}_{C1}\mathbb{A}_2(I) = \bigcup\{L(p,q) * L(c,v); L(c,v) \in \mathbb{L}_{C1}\mathbb{A}_2(I)\} = \\ = \{L(f,g); L(cp, pv+q) \;\leq\; L(f,g); L(f,g) \in \mathbb{L}\mathbb{A}_2(I)\} = \\ \{L(f,g); f(x) = c \cdot p(x), p(x)v(x) + q(x) \leq g(x), g \in \mathbb{C}(I)\}. \end{gathered}$$

Provedeme výpočet pro hypersoučin v opačném pořadí, protože operace není komutativní

$$\begin{gathered} \mathbb{L}_{C1}\mathbb{A}_2(I) * L(p,q) = \bigcup\{L(r,u) * L(p,q); L(r,u) \in \mathbb{L}_{C1}\mathbb{A}_2(I)\} = \\ = \{L(\varphi,\psi); rp(x) = \varphi(x), rq(x) + u(x) \leq \psi(x), \psi \in (I)\}. \end{gathered}$$

Nyní, když $L(f,g) \in L(p,q) * \mathbb{L}_{C1}\mathbb{A}_2(I)$, pak $f(x) = \varphi(x)$ pro $c = r$. Dále, pro $r = 1$ a $u(x) = p(x)v(x) \in \mathbb{C}(I)$ máme $rq(x) + u(x) = p(x)v(x) + q(x), x \in I$. Tedy $L(f,g) = L(\varphi,\psi)$ pro

$$\varphi(x) = p(x)v(x) + q(x) = q(x) + u(x), x \in I, \text{ tj. } L(f,q) \in \mathbb{L}_{C1}\mathbb{A}_2(I) * L(p,q),$$

proto

$$L(p,q) * \mathbb{L}_{C1}\mathbb{A}_2(I) \subseteq \mathbb{L}_{C1}\mathbb{A}_2(I) * L(p,q).$$

Jednoduše,

$$\mathbb{L}_{C1}\mathbb{A}_2(I) * L(p,q) = \bigcup_{L(r,u) \in \mathbb{L}_{C1}\mathbb{A}_2(I)} \{L(r,u) * L(p,q)\} = \{L(\varphi,\psi); \varphi = rp, rq + u \leq \psi\}.$$

Množina na levé straně je tvaru

$$\bigcup\{L(f,g); f = cp, p\alpha + q \leq g, L(c,\alpha) \in \mathbb{L}_{C1}\mathbb{A}_2(I)\}$$

(pro $c = r \in \mathbb{R}^+$ máme $f = \varphi$).

Nechť $L(u,v) \in \mathbb{L}_{C1}\mathbb{A}_2(I) * L(p,q)$. Pak pro nějaké $L(c,\psi)$ máme $L(u,v) \in L(c,\psi) * L(p,q) = \{L(cp,\xi); cq + \varphi \leq \xi, \xi \in \mathbb{C}(I)\}$, tj. $u = cp, cq + \psi \leq v$. Pro $p(x) \neq 0$ pro každé $x \in I$, funkce $h(x) = \frac{1}{p(x)}[(c-1)q(x) + \psi(x)], x \in I$ je dobře definovaná $h \in \mathbb{C}(I)$ a získáme

$$p(x)h(x) + q(x) = cq(x) + \psi(x) \leq v(x), x \in I,$$

proto

$$L(u,v) \in \bigcup \{L(cp,g); ph+q \le g, L(c,h) \in \mathbb{L}_{C1}\mathbb{A}_2(I)\} = L(p,q) * \mathbb{L}_{C1}\mathbb{A}_2(I),$$

z toho důvodu

$$\mathbb{L}_{C1}\mathbb{A}_2(I) * L(p,q) \subseteq L(p,q) * \mathbb{L}_{C1}\mathbb{A}_2(I).$$

Následně platí rovnost

$$\mathbb{L}_{C1}\mathbb{A}_2(I) * L(p,q) = L(p,q) * \mathbb{L}_{C1}\mathbb{A}_2(I),$$

tj. hypergrupa $(\mathbb{L}_{C1}\mathbb{A}_2(I), *)$ je normální podhypergrupa hypergrupy $(\mathbb{L}\mathbb{A}_2(I), *)$. Stejným způsobem lze získat tvrzení, že

$$(\mathbb{L}_{11}\mathbb{A}_2(I), *) \lhd (\mathbb{L}\mathbb{A}_2(I), *) \text{ a stejně } (\mathbb{L}_{C1}\mathbb{A}_2(I), *) \lhd (\mathbb{L}\mathbb{A}_2(I), *).$$

Tímto je důkaz kompletní.

Dále budeme zkoumat vlastnosti hyperstruktur lineárních diferenciálních operátoů Jacobiho tvaru. Ještě předtím než zavedeme dvě množiny lineárních diferenciálních operátoů Jacobiho tvaru, stanovme jednu důležitou podmnožinu množiny $\mathbb{L}\mathbb{A}_2(I)$, tedy

$$\mathbb{L}\mathbb{A}_2(I) \supset \mathbb{L}\mathbb{A}_2(I)_q = \{L(p,q); p,q \in \mathbb{C}(I), q(x) \neq 0, x \in I\}. \tag{51}$$

Nyní díky zavedené množině $\mathbb{L}\mathbb{A}_2(I)_q$, kde funkce $q(x)$ je různa od nuly, zavedeme množinu lineárních diferenciálních operátoů Jacobiho tvaru

$$\mathbb{J}\mathbb{A}_2(I)_q = \{L(0,q) \in \mathbb{L}\mathbb{A}_2(I)_q\} \tag{52}$$

a následně její podmnožinu

$$\mathbb{J}_C\mathbb{A}_2(I)_q = \{L(0,r); r \in \mathbb{R}, r \neq 0\}. \tag{53}$$

Předpokládejme, že koeficienty p, q, φ atd. diferenciálních operátorů uvažovaných v $(\mathbb{J}\mathbb{A}_2(I)_q), (\mathbb{J}_C\mathbb{A}_2(I)_q)$ jsou kladné funkce na intervalu I. Konstruujeme hypergrupoidy $(\mathbb{J}\mathbb{A}_2(I)_q, *_B), (\mathbb{J}_C\mathbb{A}_2(I)_q, *_C)$ s definovanými hyperoperacemi:

$$*_B : \mathbb{J}\mathbb{A}_2(I)_q \times \mathbb{J}\mathbb{A}_2(I)_q \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{J}\mathbb{A}_2(I)_q)$$

$$*_C : \mathbb{J}_C\mathbb{A}_2(I)_q \times \mathbb{J}_C\mathbb{A}_2(I)_q \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{J}_C\mathbb{A}_2(I)_q)$$

předpisy:

Pro libovolnou dvojici $L(0,p), L(0,q) \in \mathbb{J}\mathbb{A}_2(I)_q$ položíme

$$L(0,p) *_B L(0,q) \;=\; \{L(0,\varphi); \varphi \in \mathbb{C}_+(I), p(x).q(x) \le \varphi(x), x \in I\} \tag{54}$$

a pro libovolnou dvojici $L(0,r), L(0,s) \in \mathbb{J}_C\mathbb{A}_2(I)_q$ definujeme

$$L(0,r) *_C L(0,s) \;=\; \{L(0,t); t \in \mathbb{R}^+, rs \le t\}. \tag{55}$$

Za použití následující věty ukážeme, že hypergrupoidy $(\mathbb{J}\mathbb{A}_2(I)_q, *_B), (\mathbb{J}_C\mathbb{A}_2(I)_q, *_C)$ jsou hypergrupami.

Lemma 5.12 *V komutativním hypergrupoidu $(H, \cdot)$ jsou tato tvrzení ekvivalentní.*

1) *Platí $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ pro všechny trojice $a, b, c \in H$.*

2) *Platí $(a \cdot b) \cdot c \subseteq a \cdot (b \cdot c)$ pro všechny trojice $a, b, c \in H$.*

3) *Platí $a \cdot (b \cdot c) \subseteq (a \cdot b) \cdot c$ pro všechny trojice $a, b, c \in H$.*

Věta 5.13 *Nechť $I \subseteq \mathbb{R}$ je otevřený interval. Hypergrupoidy $(\mathbb{J}\mathbb{A}_2(I)_q, *_B), (\mathbb{J}_C\mathbb{A}_2(I)_q, *_C)$ jsou komutativní hypergrupy takové, že $(\mathbb{J}_C\mathbb{A}_2(I)_q, *_C)$ je normální podhypergrupa hypergrupy $(\mathbb{J}\mathbb{A}_2(I)_q, *_B)$.*

Důkaz. Předpokládejme, že $I \subseteq \mathbb{R}$. Pro libovolnou dvojici $L(0, p), L(0, q) \in \mathbb{J}\mathbb{A}_2(I)_q$ máme $L(0, p) *_B L(0, q) = \{L(0, \varphi); \varphi \in \mathbb{C}(I), p(x).q(x) \leq \varphi(x), x \in I\} = L(0, q) *_B L(0, p)$. Je zřejmé, že hypergrupoid $(\mathbb{J}\mathbb{A}_2(I)_q, *_B)$ je komutativní.

Nechť $L(0, p), L(0, q), L(0, u) \in \mathbb{J}\mathbb{A}_2(I)_q$ jsou libovolné trojice. Předpokládejme, že

$$L(0, \varphi) \in (L(0, p) *_B L(0, q)) *_B L(0, u) = \bigcup_{L(0,\psi) \in L(0,p) *_B L(0,q)} \{(L(0, \psi) *_B L(0, u)\}.$$

Pak existuje funkce $\psi_0 \in \mathbb{C}(I), \psi_0(x) \geq 0, x \in I$ taková, že $p(x)q(x) \leq \psi_0(x), x \in I$ a $L(0, \varphi) \in L(0, \psi_0) *_B L(0, u)$ tj. $\psi_0(x) \cdot u(x) \leq \varphi(x), x \in I$. Pak $p(x) \cdot q(x) \cdot u(x) \leq \varphi, x \in I$. Pro $\omega_0(x) = q(x) \cdot u(x), x \in I$ máme

$$p(x) \cdot \omega_0(x) = p(x) \cdot q(x) \cdot u(x) \leq \varphi(x), x \in I$$

tedy

$$L(0, \varphi) \in L(0, p) *_B L(0, \omega_0) \subseteq \bigcup \{L(0, p) *_B L(0, \omega_0); L(0, \omega_0) \in L(0, q) *_B L(0, u)\} = \\ = L(0, p) *_B (L(0, q) *_B L(0, u)).$$

Z toho důvodu

$$L(0, \varphi) \in L(0, p) *_B (L(0, q) *_B L(0, u)).$$

Protože inkluze

$$(L(0, p) *_B L(0, q)) *_B L(0, u) \subseteq L(0, p) *_B (L(0, q) * L(0, u))$$

pro každou trojici $[L(0, p), L(0, q), L(0, u)] \in \mathbb{J}\mathbb{A}_2(I)_q \times \mathbb{J}\mathbb{A}_2(I)_q \times \mathbb{J}\mathbb{A}_2(I)_q$ implikuje opačnou inkluzi, zjistili jsme, že hypergrupoid $(\mathbb{J}\mathbb{A}_2(I)_q, *_B)$ je asociativní, tj. $(\mathbb{J}\mathbb{A}_2(I)_q, *_B)$ je polohypergrupa.

Pro $\omega_0(x) = q(x) \cdot u(x), x \in I$ máme

$$p(x) \cdot \omega_0(x) = p(x) \cdot q(x) \cdot (x) \leq \varphi(x), x \in I,$$

tedy

$$L(0, \varphi) \in L(0, p) *_B L(0, \omega_0) \subseteq \bigcup \{L(0, p) *_B L(0, \omega); L(0, \omega) \in L(0, q) *_B L(0, u)\} = \\ = L(0, p) *_B (L(0, q) *_B L(0, u)).$$

Proto

$$L(0,\varphi) \in L(0,p) *_B (L(0,q) *_B L(0,u)).$$

Dále $L(0,p) *_B \mathbb{JA}_2(I)_q = \mathbb{JA}_2(I)_q$. Je evidentní, že $L(0,p) *_B \mathbb{JA}_2(I)_q \subseteq \mathbb{JA}_2(I)_q$. Uvažujme libovolný operátor $L(0,\varphi) \in \mathbb{JA}_2(I)_q$. Pak existuje

$$L(0,\psi) \in \mathbb{JA}_2(I)_q \text{ s vlastností } L(0,\varphi) \in L(0,p) *_B L(0,\psi), p \cdot \psi \leq \varphi.$$

Definujeme-li totiž funkci $\psi(x) = \frac{\varphi(x)}{p(x)}, x \in I$, obdržíme výše uvedený vztah. Protože $p(x) > 0$ pro všechna $x \in I$ funkce $\psi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ je spojitá kladná funkce na intervale I. Pak $p(x) \cdot \psi(x) = \frac{p(x)\varphi(x)}{p(x)} = \varphi(x), x \in I$, tedy $L(0,\varphi) \in L(0,p) *_B L(0,\psi)$, kde $L(0,\psi) \in \mathbb{JA}_2(I)_q$.

Následně

$$\mathbb{JA}_2(I)_q \subseteq L(0,p) *_B \mathbb{JA}_2(I)_q.$$

Z tohoto důvodu je axiom reprodukce splněn.

Nyní uvažujme hypergrupoid $(\mathbb{J}_C\mathbb{A}_2(I)_q, *_C)$. Protože pro každou dvojici operátorů $L(0,r), L(0,s) \in \mathbb{J}_C\mathbb{A}_2(I)_q \subset \mathbb{JA}_2(I)_q$ platí

$$\begin{aligned} L(0,r) *_C L(0,s) &= \{L(0,t); t \in \mathbb{R}^+, r \cdot s \leq t\} = L(0,r) *_B L(0,s) = \\ &= \{L(0,\varphi); \varphi \in \mathbb{C}_+(I); r \cdot s \leq \varphi(x), x \in I\} \cap \mathbb{J}_C\mathbb{A}_2(I)_q, \end{aligned}$$

(protože $\varphi \in \mathbb{C}_+(I)$ je pouze kladná konstatní funkce, která je určena svými hodnotami) máme, že $(\mathbb{J}_C\mathbb{A}_2(I)_q, *_C)$ je podhypergrupoid hypergrupy $(\mathbb{JA}_2(I)_q, *_B)$. Hyperoperace "$*_C$"je evidentně asociativní a komutativní. Podobně jako výše (použití kladných reálných čísel právě představuje kladné konstantní funkce) získáme inkluzi

$$\mathbb{J}_C\mathbb{A}_2(I)_q \subset L(0,r) *_C \mathbb{J}_C\mathbb{A}_2(I)_q$$

platnou pro libovolně vybraný operátor $L(0,r) \in \mathbb{J}_C\mathbb{A}_2(I)_q$. Opačná inkluze je zřejmá, tedy zjistíme, že polohypergrupa $(\mathbb{J}_C\mathbb{A}_2(I)_q, *_C)$ je komutativní podhypergrupa hypergrupy $(\mathbb{JA}_2(I)_q, *_B)$. Protože hypergrupa $(\mathbb{JA}_2(I)_q, *_B)$ je komutativní, její podhypergrupa $(\mathbb{J}_C\mathbb{A}_2(I)_q, *_C)$ je normální. Tím je důkaz kompletní.

Věta 5.14 *Nechť $I \subseteq \mathbb{R}$ je otevřený interval. Podhypergrupa $(\mathbb{J}_C\mathbb{A}_2(I), *_C)$ hypergrupy $(\mathbb{JA}_2(I), *_B)$ je uzavřená a reflexivní.*

Důkaz. Protože hypergrupa $(\mathbb{JA}_2(I), *_B)$ je komutativní, pro všechny dvojice operátorů $L(0,r), L(0,s) \in \mathbb{J}_C\mathbb{A}_2(I)$ platí, že

$$L(0,r)/L(0,s) = L(0,s) \setminus L(0,r).$$

Dále

$$\begin{aligned} L(0,r)/L(0,s) &= \{L(0,\alpha); L(0,r) \in L(0,\alpha) *_C L(0,s)\} = \\ &= \{L(0,\alpha); \alpha \cdot s \leq r, \alpha \neq 0\} \subseteq \mathbb{J}_C\mathbb{A}_2(I). \end{aligned}$$

Tedy podhypergrupa $(\mathbb{J}_C\mathbb{A}_2(I), *_C)$ hypergrupy $(\mathbb{JA}_2(I), *_B)$ je uzavřená.

Jednoduše, když $L(0,q) \in \mathbb{JA}_2(I)$, pak

$$L(0,q) \setminus \mathbb{J}_C\mathbb{A}_2(I) = \bigcup_{L(0,r)\in\mathbb{J}_C\mathbb{A}_2(I)} (L(0,r)/L(0,q)) = \mathbb{J}_C\mathbb{A}_2(I)/L(0,q)$$

z rovnosti výše je zřejmé, že podhypergrupa $(\mathbb{J}_C\mathbb{A}_2(I), *_C)$ je reflexivní.

Věta 5.15 *Hypergrupa $(\mathbb{JA}_2(I)_q, *_C)$ je invertibilní v hypergrupě $(\mathbb{JA}_2(I)_q, *_B)$ právě tehdy, když interval I je kompaktní.*

Důkaz. Předpokládejme, že interval I je kompaktní, tj. ohraničený a uzavřený. Když $L(0,p), L(0,q) \in \mathbb{JA}_2(I)_q$ jsou libovolné diferenciální operátory (kde $p,q \in \mathbb{C}_+(I)$), pak

$$L(0,p)/L(0,q) = \{L(0,u); L(0,p) \in L(0,u) *_B L(0,q)\} =$$

$$\{L(0,u); u(x)q(x) \leq p(x), u \in \mathbb{C}_+(I)\} = \{L(0,u); u(x) \leq \frac{p(x)}{q(x)}, u \in \mathbb{C}_+(I)\}.$$

Jednoduše,

$$L(0,q)/L(0,p) = \{L(0,v), v(x) \leq \frac{q(x)}{p(x)}, v \in \mathbb{C}_+(I)\}.$$

Nyní předpokládejme, že $L(0,p)/L(0,q) \approx \mathbb{J}_C\mathbb{A}_2(I)_q$ pro nějakou dvojici $L(0,p), L(0,q) \in \mathbb{JA}_2(I)_q$. Pak existuje kladné číslo $c \in \mathbb{R}_+$ takové, že $L(0,c) \in L(0,p)/L(0,q)$, tj. $0 < c \leq \frac{p(x)}{q(x)}, x \in I$. Protože interval I je kompaktní a p,q jsou kladné funkce, pak také funkce $\frac{q(x)}{p(x)}$ je kladná a spojitá na intervalu I. Označme r jako nejmenší hodnotu funkce $\frac{q(x)}{p(x)}$ na I. Pak $0 < r \leq \frac{q(x)}{p(x)}, x \in I$, tj. $L(0,r) \in L(0,q)/L(0,p)$, proto

$$L(0,q)/L(0,p) \approx \mathbb{J}_C\mathbb{A}_2(I)_q,$$

následně hypergrupa $(\mathbb{JA}_2(I)_q, *_B)$ je invertibilní.

Nyní předpokládejme, že interval I není kompaktní. Nejprve předpokládejme, že interval I je ohraničený, ale není uzavřený. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $I = (a,b\rangle$ nebo $I = (a,b)$, kde $0 < a < b$.

Definujeme funkce $p(x) = x, q(x) = (x-a)^2, x \in I$. Pak funkce $\varphi(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ náleží $\mathbb{C}_+(I)$. Navíc derivace $\varphi'(x)$ existuje pro všechna $x \in I$ (pro $x = b$ v prvním případě uvažujeme $\varphi'_-(b)$) a $\varphi'(x) = -\frac{x+a}{(x-a)^3} < 0$ na celém intervalu I. Následně funkce φ je klesající na I. Pak

$$\varphi(b) = \lim_{x\to b_-} \varphi(x) = \lim_{x\to b_-} \frac{x}{(x-a)^2} = \frac{b}{(b-a)^2} > 0,$$

pro $c = \frac{b}{(b-a)^2}$ máme $c \leq \varphi(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, x \in I$, tedy $L(0,c) \in L(0_0,\ldots,0_{n-1})/L(0,q)$, proto

$$L(0,p)/L(0,q) \approx \mathbb{J}_C\mathbb{A}_2(I)_q.$$

Nicméně funkce $[\varphi(x)]^{-1} = \frac{q(x)}{p(x)}$ není zdola ohraničena žádným kladným číslem, protože

$$\lim_{x\to a_+} \frac{1}{\varphi(x)} = \lim_{x\to a_+} \frac{(x-a)^2}{x} = 0,$$

tedy

$$L(0,p)/L(0_0,\dots,0_{n-1})\cap \mathbb{J}_C\mathbb{A}_2(I)_q=\emptyset.$$

V druhém případě předpokládáme, že interval I není ohraničený, tj. $I=\langle a,\infty)$, kde $a>0$. Pak pro $p(x)=x^2, q(x)=x, x\in I$ máme $a\le x=\frac{p(x)}{q(x)}, x\in I$. Pro funkci $\frac{q(x)}{p(x)}=\frac{1}{x}$ platí $\lim_{x\to\infty}\frac{q(x)}{p(x)}=0$, tedy tato funkce $\frac{q(x)}{p(x)}$ není ohraničena ze zdola žádným kladným číslem.

Příklad 5.16 *Uvažujme množinu $\mathbb{J}_g\mathbb{A}_2(T)$ definovanou v předchozí kapitole formulí* (5.6). *Pro jednoduchost zde zvolíme jinou formu zápisu, a tedy*

$$\mathbb{J}_g\mathbb{A}_2(T)=\{L(0,\Psi(b,c)t);\Psi(b,c)t=bc^2\frac{\exp(ct)-b}{(\exp(ct)-1)^2},b,c\in\mathbb{R}^+\}. \tag{56}$$

Stejně jako ve výše prezentovaných výsledcích zavedeme podmnožinu $\mathbb{J}^g_{C1}\mathbb{A}_2(T)$ množiny $\mathbb{J}_g\mathbb{A}_2(T)$ takto

$$\mathbb{J}^g_{C1}\mathbb{A}_2(T)=\{L(0,\Psi(b,c)t);b=1,c\in\mathbb{R}^+\}. \tag{57}$$

Na množině $\mathbb{J}_g\mathbb{A}_2(T)$ definujeme binární hyperoperaci $\#$ a na množině $\mathbb{J}^g_{C1}\mathbb{A}_2(T)$ definujeme zúženou hyperoperaci $\#_1$:

$$\#:\mathbb{J}_g\mathbb{A}_2(T)\times\mathbb{J}_g\mathbb{A}_2(T)\to,\mathbb{J}_g\mathbb{A}_2(T);\;\;\#_1:\mathbb{J}^g_{C1}\mathbb{A}_2(T)\times\mathbb{J}^g_{C1}\mathbb{A}_2(T)\to\mathbb{J}^g_{C1}\mathbb{A}_2(T)$$

předpisy

$$L(0,\Psi(a,b)t)\#L(0,\Psi(c,d)t)=\{L(0,\Psi(k,l)t);k,l\in\mathbb{R}^+,k\ge ac,l\ge bd\}$$
$$L(0,\Psi(1,u)t)\#L(0,\Psi(1,v)t)=\{L(0,\Psi(1,w)t);w\in\mathbb{R}^+,w\ge uv,\}$$

pro každé dva operátory $L(0,\Psi(a,b)t),L(0,\Psi(c,d)t)\in\mathbb{J}_g\mathbb{A}_2(T)$ a pro každé dva operátory $L(0,\Psi(1,u)t),L(0,\Psi(1,v)t)\in\mathbb{J}^g_{C1}\mathbb{A}_2(T)$. Pak je jednoduché ukázat, že obě struktury lineárních diferenciálních operátorů $(\mathbb{J}_g\mathbb{A}_2(T),\#)$ a $(\mathbb{J}^g_{C1}\mathbb{A}_2(T),\#_1)$ sestaveny z konkrétního modelujícího signálu jsou transpoziční hypergrupy takové, že $(\mathbb{J}^g_{C1}\mathbb{A}_2(T),\#_1)$ je normální podhypergrupa hypergrupy $(\mathbb{J}_g\mathbb{A}_2(T),\#)$. Navíc hypergrupa $(\mathbb{J}_g\mathbb{A}_2(T),\#)$ je uzavřená a reflexivní. Důkazy pro tyto konkrétní struktury korespondují s důkazy obecněji formulovaných Vět (5.13),(5.14) *a kompletní je lze nalézt v práci [45].*

Ovšem zde je zřemé, že invertibilita není spněna, neboť $L(0,\Psi(8,6)t)/L(0,\Psi(10,20)t)=\{L(0,\Psi(e,f)t);e\le 0,8,f\le 0,3\}$. Tedy $\{L(0,\Psi(e,f)t);e\le 0,8,f\le 0,3\}\cap\mathbb{J}^g_{C1}\mathbb{A}_2(T)=\emptyset$.

V této kapitole jsme zkoumali základní vlastnosti hyperstruktur a jejich podstruktur jako jsou normalita, reflexivita, uzavřenost a invertibilita na obecném reálném intervale I. Jestliže chceme uvažovat tyto hyperstruktury jako nástroje pro modelování časových procesů, je vhodné interval I zaměnit za interval $T=\langle 0.\infty)$ neboli časovou množinou zavedenou v Definici 3.2. Tohoto nahrazení si můžeme již povšimnout při formulaci konkrétních příkladů, kde neuvažujeme pro časové funkce záporný definiční obor.

Dále se nám podařilo ukázat, že vlastnost invertibility neplatí v Příkladě 5.16 a u jiné konstrukce je platná právě tehdy, když interval I je kompaktní, zatímco ostatní vlastnosti se podařilo prokázat bez újmy na obecnosti.

5.2.2 Hyperstruktury dimenzionálních vektorů

Direktní hyperoperace

V předchozí podsekci 5.2.1 uvažujeme hyperstruktury lineárních diferenciálních operátorů druhého řádu, kde volíme obecný přístup, který lze jednoduše aplikovat na konkrétní časové signály. V této části se dále budeme zabývat zobecněním hyperstruktur vektorového prostoru a lineárních diferenciálních operátorů n-tého řádu, kde $n \in \mathbb{N}$ je kladné celé číslo $n \geq 2$. V první čísti kapitoly se zaměříme na konstrukci hyperoperace jako direktního součinu vektorů, tedy za použití „koncového lemmatu"na každou složku vektoru a operátoru konstruujeme hyperstruktury. Zatímco ve druhé části definujeme hyperoperace jako minimum a maximum na množinách matic typu $n \times n$.

Motivací pro takové konstrukce je nejen zobecňování struktur ve smyslu Borůvkovy školy, ale tyto struktury dále uvažujeme jako vstupní struktury nebo jako stavové množiny (bez hyperoperací) při konstrukci kvazi-multiautomatů, jenž mohou být základním konstrukčním elementem pro systémy vstup–výstup.

V části 3.1 uvádíme speciální modelovací funkce, což tedy slouží jako vhodná motivace pro další úvahy a studie strukur tvořených takovými signály, proto uvažujeme konutativní okruh

$$\mathscr{R}_n^{\mathbb{F}}(\Omega) = [\mathbb{F}(\Omega)]^n = \mathbb{F}(\Omega) \times \ldots \times \mathbb{F}(\Omega) \tag{58}$$

tvořený n–dimenzionálními vektory $(f_0, \ldots, f_{n-1})$ reálných funkcí m–proměnných $f : \Omega \to \mathbb{R}$, kde $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{R}^m, m \in \mathbb{N}$. Binární operace sčítání je definovaná, jak je obvyklé pro vektory, násobení je definované předpisem

$$(f_0, \ldots, f_{n-1}) \cdot (g_0, \ldots, g_{n-1}) = (f_0 g_0, \ldots, f_{n-1} g_{n-1}), \tag{59}$$

pro všechny dvojice vektorů $\vec{f} = (f_0, \ldots, f_{n-1}), \vec{g} = (g_0, \ldots, g_{n-1}) \in \mathscr{R}_n^{\mathbb{F}}(\Omega)$. Poznamenejme, že $(\mathscr{R}_n^{\mathbb{F}}(\Omega), \cdot)$ je komutativní monoid. Proto můžeme uvažovat vhodnou podmnožinu $\mathbb{S} \subseteq \mathscr{R}_n^{\mathbb{F}}(\Omega)$ takovou, že $\mathbb{S}$ je podmonoid monoidu $(\mathscr{R}_n^{\mathbb{F}}(\Omega), \cdot)$.

Na tomto okruhu $\mathscr{R}_n^{\mathbb{F}}(\Omega)$ a pro tuto podmnožinu $\mathbb{S}$ definujme binární relaci $\varrho_{\mathbb{S}}$ danou pravidlem:

Když $\vec{f} = (f_0, \ldots, f_{n-1}), \vec{g} = (g_0, \ldots, g_{n-1}) \in \mathscr{R}_n^{\mathbb{F}}(\Omega)$, pak položíme $\vec{f} \varrho_{\mathbb{S}} \vec{g}$, jestliže existuje vektor $\vec{h} = (h_0, \ldots, h_{n-1}) \in \mathbb{S}$ takový, že

$$(g_0, \ldots, g_{n-1}) = (h_0, \ldots, h_{n-1}) \cdot (f_0, \ldots, f_{n-1}) = (h_0 f_0, \ldots, h_{n-1} f_{n-1}).$$

Dále, definujeme binární hyperoperaci $*^d : \mathscr{R}_n^{\mathbb{F}}(\Omega) \times \mathscr{R}_n^{\mathbb{F}}(\Omega) \to \mathcal{P}(\mathscr{R}_n^{\mathbb{F}}(\Omega))$ takovou, že pro každou dvojici vektorů $\vec{f} = (f_0, \ldots, f_{n-1}), \vec{g} = (g_0, \ldots, g_{n-1}) \in \mathscr{R}_n^{\mathbb{F}}(\Omega)$ položíme

$$\begin{aligned}(f_0, \ldots, f_{n-1}) *^d (g_0, \ldots, g_{n-1}) = \\ \{(f_0\varphi_0, \ldots, f_{n-1}\varphi_{n-1}); (\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1}) \in \mathbb{S}\} \cup \\ \cup \{(g_0\psi_0, \ldots, g_{n-1}\psi_{n-1}); (\psi_0, \ldots, \psi_{n-1}) \in \mathbb{S}\} = \varrho_{\mathbb{S}}(\vec{f}) \cup \varrho_{\mathbb{S}}(\vec{g}).\end{aligned}$$

Poznamenejme, že v našem označení "$*^d$", symbol d znamená "direktní"násobení vektorů, tím myslíme, že násobíme po složkách.

Věta 5.17 *Hypergrupoid* $(\mathscr{R}_n^{\mathbb{F}}(\Omega), *^d)$ *je extensivní komutativní hypergrupa; to jest kvazi–pořádková hypergrupa určena kvazi–uspořádaným okruhem* $\mathscr{R}_n^{\mathbb{F}}(\Omega)$. *Navíc,* $(\mathscr{R}_n^{\mathbb{F}}(\Omega), *^d)$ *je spojnicový prostor.*

Důkaz. Předpokládejme, že $\mathbb{S}$ je podmonoid monoidu $\mathscr{R}_n^{\mathbb{F}}(\Omega)$, s prvkem $(1, \ldots, 1) \in \mathbb{S}$. Tedy relace $\varrho_{\mathbb{S}}$ je reflexivní. Je také zřejmé, že relace je tranzitivní, tj. relace kvazi–uspořádaní na okruhu $\mathscr{R}_n^{\mathbb{F}}(\Omega)$. Fakt, že $(\mathscr{R}_n^{\mathbb{F}}(\Omega), *^d)$ je extensivní komutativní hypergrupa, plyne z Definice 3.6.

Kvazi-pořádková hypergrupa $(\mathscr{R}_n^{\mathbb{F}}(\Omega), *^d)$ je určena výše definovanou relací kvazi–uspořádání $\varrho_{\mathbb{S}} \subset \mathscr{R}_n^{\mathbb{F}}(\Omega) \times \mathscr{R}_n^{\mathbb{F}}(\Omega)$ na okruhu $\mathscr{R}_n^{\mathbb{F}}(\Omega)$. Předpokládejme, že $\vec{f}, \vec{g} \in \mathscr{R}_n^{\mathbb{F}}(\Omega)$ jsou vektory takové, že $L_{\varrho_{\mathbb{S}}}(\vec{f}, \vec{g}) \neq 0$, čímž myslíme, že existuje vektor $\vec{h} \in \mathscr{R}_n^{\mathbb{F}}(\Omega)$ takový, že $\vec{h}\varrho_{\mathbb{S}}\vec{f}, \vec{h}\varrho_{\mathbb{S}}\vec{g}$. Pak pro vhodnou dvojici vektorů $\vec{v}, \vec{u} \in \mathbb{S} \subseteq \mathscr{R}_n^{\mathbb{F}}(\Omega)$ máme

$$\vec{h} \cdot \vec{u} = \vec{f},\ \vec{h} \cdot \vec{v} = \vec{g}.$$

Pak $\vec{f} \cdot \vec{v} = \vec{h} \cdot \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{h} \cdot \vec{v} \cdot \vec{u} = \vec{g} \cdot \vec{u}$. Označíme-li $\vec{p} = \vec{f} \cdot \vec{v} = \vec{g} \cdot \vec{u}$, zjistíme, že $\vec{f}\varrho_{\mathbb{S}}\vec{p}$, $\vec{g}\varrho_{\mathbb{S}}\vec{p}$, tedy $U_{\varrho_{\mathbb{S}}}(\vec{f}, \vec{g}) \neq 0$. Následně podle Lemmatu 3.8 hypergrupa $(\mathscr{R}_n^{\mathbb{F}}(\Omega), *^d)$ je spojnicový prostor.

Pod označením $\mathbb{LA}_n(T)$ budeme rozumět množinu všech lineárních diferenciálních operátorů n-tého řádu $L(p_0, \ldots, p_{n-1})$, kde $p_k \in C(T)$. Tyto lineární diferenciální operátory tvoří levé strany lineárních diferenciálních rovnic, tj.

$$L(p_0, \ldots, p_{n-1})y = y^{(n)}(x) + p_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + ... + p_0(x)y(x)$$

pro každé $y \in C^n(T), (T \subseteq \mathbb{R})$. Struktura $[C(T)]^n = \underbrace{C(T) \times ... \times C(T)}_{n}$ je lineárním vektorovým prostorem $\vec{p} = (p_0, \ldots, p_{n-1})$ spojitých funkcí. Dále definujme hyperoperaci "$*^d$"jako direktní součin na množině $\mathbb{LA}_n(T)$ následovně:

$$\begin{aligned} L(p_0, \ldots, p_{n-1}) *^d L(g_0, \ldots, g_{n-1}) = \\ \{L(\varphi_0 p_0, \ldots, \varphi_{n-1} p_{n-1}); (\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1}) \in [C(T)]^n\} \cup \\ \cup \{L(\psi_0 g_0, \ldots, \psi_{n-1} g_{n-1}); (\psi_0, \ldots, \psi_{n-1}) \in [C(T)]^n\}. \end{aligned} \quad (60)$$

Pro každou dvojici lineárních diferenciálních operátorů $L(p_0, \ldots, p_{n-1}), L(g_0, \ldots, g_{n-1}) \in \mathbb{LA}_n(T)$.

V následujícím textu, pokud nebude uvedeno jinak, budeme používat toto značení:

$$\mathscr{L}(\vec{p}) = \{L(\varphi_0 p_0, \ldots, \varphi_{n-1} p_{n-1}); (\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1}) \in [C(T)]^n\}, \quad (61)$$

$$L(\vec{g}) = L(g_0, \ldots, g_{n-1}). \quad (62)$$

Pak binární hyperoperace (60) díky zavedenému značení (61) bude tvaru:

$$L(p_0, \ldots, p_{n-1}) *^d L(g_0, \ldots, g_{n-1}) = \mathscr{L}(\vec{p}) \cup \mathscr{L}(\vec{g}).$$

Věta 5.18 *Předpokládejme, že* $\mathbb{LA}_n(T) = \{L(p_0, \ldots, p_{n-1}); p_k \in C(T), k = 0, ..., n-1\}$. *Pak hypergrupoid* $(\mathbb{LA}_n(T), *^d)$ *je komutativní hypergrupou.*

Důkaz. Je evidentní, že hyperoperace "$*^d$"je komutativní. Nyní ukažme, že platí rovnost

$$L(p_0, \dots, p_{n-1}) *^d (L(q_0, \dots, q_{n-1}) *^d L(g_0, \dots, g_{n-1}) =$$
$$= (L(p_0, \dots, p_{n-1}) *^d L(q_0, \dots, q_{n-1}))) *^d L(g_0, \dots, g_{n-1}),$$

pro každé $L(p_0, \dots, p_{n-1}), L(g_0, \dots, g_{n-1}), L(q_0, \dots, q_{n-1}) \in \mathbb{LA}_n(T)$ a operace je také asociativní.

Upravíme levou stranu (L):

$$L(p_0, \dots, p_{n-1}) *^d (L(q_0, \dots, q_{n-1}) *^d L(g_0, \dots, g_{n-1})) =$$
$$L(\vec{p}) *^d (L(\vec{q}) *^d L(\vec{g})) = L(\vec{p}) *^d (\mathscr{L}(\vec{q}) \cup \mathscr{L}(\vec{g})) =$$
$$\bigcup_{L(\vec{f}) \in \mathscr{L}(\vec{q}) \cup \mathscr{L}(\vec{g})} L(\vec{p}) *^d L(\vec{f}) = \bigcup_{L(\vec{f}) \in \mathscr{L}(\vec{q})} L(\vec{p}) *^d L(\vec{f}) \ \cup \bigcup_{L(\vec{f}) \in \mathscr{L}(\vec{g})} L(\vec{p}) *^d L(\vec{f}) =$$
$$\bigcup_{L(\vec{f}) \in \mathscr{L}(\vec{q})} (\{L(\vec{f}) \cdot (\vec{\psi}); (\vec{\psi}) \in [C(T)]^n\} \ \cup \mathscr{L}(\vec{p})) \cup$$
$$\bigcup_{(L(\vec{f}) \in \mathscr{L}(\vec{g})} (\{L(\vec{f}) \cdot (\vec{\varphi}); (\vec{\varphi}) \in [C(T)]^n\} \ \cup \mathscr{L}(\vec{p})) = \mathscr{L}(\vec{p}) \cup$$
$$\bigcup_{L(\vec{f}) \in \mathscr{L}(\vec{q})} (L(\vec{f}) \cdot (\vec{\psi}); (\vec{\psi}) \in C(T)]^n\} \ \cup \bigcup_{L(\vec{f}) \in \mathscr{L}(\vec{g})} (\{L(\vec{f}) \cdot (\vec{\varphi}); (\vec{\varphi}) \in [C(T)]^n\} =$$
$$\mathscr{L}(\vec{p}) \cup \{L(\psi_0\tau_0 q_0, ..., \psi_{n-1}\tau_{n-1}q_{n-1}); (\psi_0, \dots, \psi_{n-1}), (\tau_0, \dots, \tau_{n-1}) \in [C(T)]^n\}$$
$$\cup \{L(\varphi_0\omega_0 g_0, ..., \varphi_{n-1}\omega_{n-1}g_{n-1}); (\varphi_0, \dots, \varphi_{n-1}), (\omega_0, \dots, \omega_{n-1}) \in [C(T)]^n\} =$$
$$\mathscr{L}(\vec{p}) \cup \mathscr{L}(\vec{q}) \cup \mathscr{L}(\vec{g}).$$

Stejným způsobem upravíme stranu pravou (R):

$$(L(p_0, \dots, p_{n-1}) *^d L(q_0, \dots, q_{n-1})) *^d L(g_0, \dots, g_{n-1}) =$$
$$(L(\vec{p}) *^d L(\vec{q})) *^d L(\vec{g}) = (\mathscr{L}(\vec{p}) \cup \mathscr{L}(\vec{q})) *^d L(\vec{g}) =$$
$$\bigcup_{L(\vec{f}) \in \mathscr{L}(\vec{p})} L(\vec{f}) *^d L(\vec{g}) \ \cup \bigcup_{L(\vec{f}) \in \mathscr{L}(\vec{q})} L(\vec{f}) *^d L(\vec{g}) =$$
$$\bigcup_{L(\vec{f}) \in \mathscr{L}(\vec{p})} (\{L(\vec{f}) \cdot (\vec{\psi}); (\vec{\psi}) \in [C(T)]^n\} \ \cup \mathscr{L}(\vec{g}))$$
$$\cup \bigcup_{L(\vec{f}) \in \mathscr{L}(\vec{q})} (\{L(\vec{f}) \cdot (\vec{\varphi}); (\vec{\varphi}) \in [C(T)]^n\} \cup \mathscr{L}(\vec{g})) =$$
$$\mathscr{L}(\vec{g}) \cup \{L(\psi_0\tau_0 p_0, ..., \psi_{n-1}\tau_{n-1}p_{n-1}); (\psi_0, \dots, \psi_{n-1}), (\tau_0, \dots, \tau_{n-1}) \in [C(T)]^n\}$$
$$\cup \{L(\varphi_0\omega_0 q_0, ..., \varphi_{n-1}\omega_{n-1}q_{n-1}); (\varphi_0, \dots, \varphi_{n-1}), (\omega_0, \dots, \omega_{n-1}) \in [C(T)]^n\} =$$
$$\mathscr{L}(\vec{g}) \cup \mathscr{L}(\vec{p}) \cup \mathscr{L}(\vec{q}).$$

Ukázáli jsme, že L=R. Jelikož operace sjednocení je komutativní, pak platí rovnost

$$L(p_0, \dots, p_{n-1}) *^d (L(q_0, \dots, q_{n-1}) *^d L(g_0, \dots, g_{n-1})) =$$
$$= (L(p_0, \dots, p_{n-1}) *^d L(q_0, \dots, q_{n-1})) *^d L(g_0, \dots, g_{n-1}).$$

Tedy podmínka asociativity je splněna.

Dále ověříme platnost podmínky reprodukce $L(p_0,\dots,p_{n-1}) *^d \mathbb{LA}_n(T) = \mathbb{LA}_n(T)$. Pro libovolné $L(p_0,\dots,p_{n-1}) \in \mathbb{LA}_n(T)$ máme

$$L(p_0,\dots,p_{n-1}) *^d \mathbb{LA}_n(T) \subseteq \mathbb{LA}_n(T).$$

V případě opačné inkluze; nechť $L(p_0,\dots,p_{n-1}), L(q_0,\dots,q_{n-1}) \in \mathbb{LA}_n(T)$ je libovolná dvojice diferenciálních operátorů. Pak máme

$$L(p_0,\dots,p_{n-1}) *^d \mathbb{LA}_n(T) = \bigcup_{L(\vec{h})\in\mathbb{LA}_n(T)} L(\vec{p}) *^d L(\vec{h}) = \mathscr{L}(\vec{p}) \cup \bigcup_{L(\vec{h})\in\mathbb{LA}_n(T)} \mathscr{L}(\vec{h}),$$

kde

$$L(\vec{p}) = L(p_0,\dots,p_{n-1}), L(\vec{h}) = L(h_0,\dots,h_{n-1}).$$

Protože $L(\vec{q}) \in \mathbb{LA}_n(T)$, máme $L(\vec{q}) \in \{\mathscr{L}(\vec{h}); \vec{h} \in C^n(T)\}$, pro $\vec{q} = \vec{h}, L(\vec{q}) = L(\vec{h}) = L(s_0h_0,...,s_{n-1}h_{n-1})$ s $[s_0,...,s_{n-1}] = [1,1,...,1] \in \mathbb{R}^n$, tedy $L(q_0,\dots,q_{n-1}) = L(\vec{q}) \in \mathscr{L}(\vec{h}) \subseteq \bigcup_{L(\vec{h})\in\mathbb{LA}_n(T)} \mathscr{L}(\vec{h}) \subseteq L(p_0,\dots,p_{n-1}) *^d \mathbb{LA}_n(T)$. Následně platí rovnost

$$L(p_0,\dots,p_{n-1}) *^d \mathbb{LA}_n(T) = \mathbb{LA}_n(T).$$

Dokázat, že hypergrupa splňuje transposiční axiom a je tedy spojnicovým prostorem přímo z Definice 2.5, jak je standartně dokazováno např. [11, 16], je v případě hyperoperace $*^d$ pracné a neefektivní. Jestliže však ukážeme, že pro čtveřici libovolných diferenciálních operátorů $L(\vec{p}), L(\vec{q}), L(\vec{g}), L(\vec{h})$ vždy platí

$$L(\vec{p}) *^d L(\vec{q}) \approx L(\vec{g}) *^d L(\vec{h}),$$

tedy jejich průnik je vždy neprázdný. Výpočet se zjednoduší a implikace z Definice 2.5 bude vždy pravdivá, tedy hypergrupa bude splňovat transpoziční axiom.

Věta 5.19 *Nechť* $\mathbb{LA}_n(T)^{-0} = \{L(p_0,\dots,p_{n-1}); p_k \in C(T), p_k \neq 0, k = 1,...,n-1\}$. *Pak komutativní hypergrupa* $(\mathbb{LA}_n(T)^{-0}, *^d)$ *je spojnicový prostor.*

Důkaz. Předpokládejme, že $L(\vec{p}), L(\vec{q}), L(\vec{g}), L(\vec{h}) \in \mathbb{LA}_n(T)$. Pak

$$L(\vec{p}) *^d L(\vec{q}) \approx L(\vec{g}) *^d L(\vec{h}) =$$
$$\mathscr{L}(\vec{p}) \cup \mathscr{L}(\vec{q}) \approx \mathscr{L}(\vec{g}) \cup \mathscr{L}(\vec{h}),$$

kde $\mathscr{L}(\vec{p}) = \{L(\varphi_0p_0,\dots,\varphi_{n-1}p_{n-1}); (\varphi_0,\dots,\varphi_{n-1}) \in [\mathbb{C}(T)]^n\}$. Jestliže položíme funkci $\varphi_k = \frac{1}{p_k}$ pro $k = 1,...,n-1$ pak vektor $L(\frac{1}{p_0}p_0,...,\frac{1}{p_{n-1}}p_{n-1}) = L(1,...,1) \in \mathscr{L}(\vec{p})$. Analogickým postupem získáme $L(1,...,1) \in \mathscr{L}(\vec{q}), L(1,...,1) \in \mathscr{L}(\vec{g}), L(1,...,1) \in \mathscr{L}(\vec{h})$. Tedy

$$\mathscr{L}(\vec{p}) \cup \mathscr{L}(\vec{q}) \cap \mathscr{L}(\vec{g}) \cup \mathscr{L}(\vec{h}) = L(1,...,1)$$

Tímto elegantním způsobem jsme jednoduše ukázali, že hypergrupa $(\mathbb{LA}_n(T)^{-0}, *^d)$ splňuje transpoziční axiom a je spojnicovým prostorem. Ovšem byli jsme nuceni snížit předpoklad tím, že jsem vyloučili funkce s nulovou funkční hodnotou. V tomto pojetí není vyloučení nulového operátoru $L(0,\dots,0)$ z množiny $\mathbb{LA}_n(T)$ nikterak rozhodující, avšak jsou situace, kdy nulový operátor může mít zásadní význam pro jiné struktury. Tento nulový operátor pro nás hraje zásadní úloho jako počáteční stav při konstrukci kartéské kompozice multiautomatů a je nutné aby byl obsažen v množině $\mathbb{LA}_n(T)$.

Existuje jiný postup, kterým lze elegantně ukázat bez újmy na obecnosti, že hypergrupoid $(\mathbb{LA}_n(T), *^d)$ je spojnicový prostor ato je využití Definice 3.6 a Věty 3.8.

Věta 5.20 *Hypergrupoid* $(\mathbb{LA}_n(T), *^d)$ *je spojnicový prostor.*

Důkaz. Důkaz vyplývá z Věty 3.8 a je analogický jejímu důkazu. Vskutku, množina $\mathscr{L}(\vec{p})$ je horní závora množiny $(\mathbb{LA}_n(T), \leq)$ generovaná operátorem $L(p_0,\dots,p_{n-1})$, kde relace $\leq$ je kvazi-uspořádání definované předpisem

$$L(p_0,\dots,p_{n-1}) \leq L(q_0,\dots,q_{n-1}),$$

jestliže existuje vektor $(\varphi_0,\dots,\varphi_{n-1}) \in [C(T)]^n$ takový, že $q_k = p_k\varphi_k$, pro všechna $k = 0,\dots,n-1$. Nyní jednoduše jak v důkazu Věty 5.17 snadno získáme kvazi-uspořádanou množinu, která splňuje kritérium formulované v Definici 3.6. Předpokládejme, že existuje $L(\vec{\varphi}) \in (L(\vec{p})]_{\leq} \cup (L(\vec{q})]_{\leq}$ pro libovolnou dvojici operátorů $L(\vec{p}), L(\vec{q}) \in \mathbb{LA}_n(T)$, tj. $\vec{p} = \vec{\varphi}\cdot\vec{u}$, $\vec{q} = \vec{\varphi}\cdot\vec{v}$ pro vhodnou dvojici vektorů $\vec{u}, \vec{v} \in [C(T)]^n$. Pak

$$\vec{p}\cdot\vec{v} = \vec{\varphi}\cdot\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot\vec{\varphi}\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot\vec{q} = \vec{q}\cdot\vec{u}.$$

Protože $\vec{w} = \vec{p}\cdot\vec{v} = \vec{q}\cdot\vec{u}$, máme $L(\vec{p}) \leq L(\vec{w})$, $L(\vec{q}) \leq L(\vec{w})$, tj. $L(\vec{w}) \in [L(\vec{p}))_{\leq} \cap [L(\vec{q}))_{\leq}$ a podmínka je splněna.

Min-max hyperstruktury matic formované svazem

V této části práce využijeme spojení dvou algebraických přístupů, a to teorie hyperstruktur a poznatků z teorie svazů. Se základním konceptem a terminologií hyperstruktur jsme se již plně seznámili. Poznatků z teorie svazu ve spojení s hyperstrukturami využijeme především výsledků Varleta [77], ale i dalších autorů, jenž se touto tématikou zabývají, jako je např. práce Leoreanu-Fonety a Davvaz [48], ale i dalších.

Označme $\mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S})$ množinu všech $m \times n$ matic, jako prvky takovéto matice rozumějme prvky z množiny $\mathcal{S}$, tj.

$$\mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S}) = \{\mathbf{M} = [m_{i,j}]); m_{i,j} \in \mathcal{S}, i = \{1,\dots,m\}, j = \{1,\dots,n\}\}. \tag{63}$$

Na $\mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S})$, pro libovolnou dvojici matic $\mathbf{A},\mathbf{B} \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S})$, definujme relaci $\leq_M$ pravidlem

$$\mathbf{A} \leq_M \mathbf{B}, \text{ když } a_{i,j} \leq_e b_{i,j} \text{ pro všechna } i = \{1,\dots,m\}, j = \{1,\dots,n\}, \tag{64}$$

kde $\leq_e$ je vhodná relace mezi prvky matic. Předpokládejme, že $(\mathcal{S}, \inf, \sup, \leq_e)$ je svaz a definujme *minimum matic* $\mathbf{A},\mathbf{B} \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S})$ předpisem

$$\min\{\mathbf{A},\mathbf{B}\} = \mathbf{C}, \text{ kde } \mathbf{C} \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S}) \text{ je takové, že } c_{i,j} = \inf\{a_{i,j}, b_{i,j}\} \tag{65}$$

pro každé $i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, n\}$, takto definujeme *minimum* pro dvě matice, analogicky definujeme i v případě více matic; a dále *maximum matic* $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S})$ jako

$$\max\{\mathbf{A}, \mathbf{B}\} = \mathbf{D},\ \text{kde } \mathbf{D} \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S}) \text{ je takové, že } d_{i,j} = \sup\{a_{i,j}, b_{i,j}\} \tag{66}$$

pro každé $i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, n\}$, takto definujeme *maximum* pro dvě matice, analogicky definujeme i v případě více matic.

Jestliže předpokládáme, že $(\mathcal{S}, \inf, \sup, \leq_e)$ je *svaz*, pak je zřejmé, že platí vztah (64) a operace (65) a (66) definovaná na $\mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S})$.

Lemma 5.21 *Operace* min *a* max *definované na* $\mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S})$ *předpisy* (65) *a* (66) *jsou idempotentní, komutativní a asociativní.* $(\mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S}), \leq_M)$ *je uspořádaná množina. Struktury* $(\mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S}), \min, \leq_M)$ *a* $(\mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S}), \max, \leq_M)$*, jsou uspořádané pologrupy.*

Lemma 5.21 nám umožňuje stavovit závěr pro strukturu $(\mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S}), \min, \max, \leq_M)$.

Věta 5.22 *Uspořádaná množina* $(\mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S}), \min, \max, \leq_M)$*, kde operace* min *a* max *jsou definovány předpisy* (65) *a* (66) *a relace* $\leq_M$ *je definována předpisem* (64)*, je svaz.*

Důkaz. Z Lemmatu 5.21 vyplývá komutativita, asociativita a idempotence. Zákon absorbce platí díky vztahu mezi $\leq_M$ a $\leq_e$, vyjádřeným (64), a faktem,že $(\mathcal{S}, \inf, \sup, \leq_e)$ je svaz.

Nyní když jsme definovali $\mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S})$, definujme dvojici duálních hyperoperací na $\mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S})$ za použití (64) a (65), nebo (66).

Nejprve, pro libovolnou dvojici matic $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S})$ definujeme

$$\mathbf{A} \circ \mathbf{B} = \{\mathbf{C} \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S}); \min\{\mathbf{A}, \mathbf{B}\} \leq_M \mathbf{C}\}, \tag{67}$$

tj., pro všechny $i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, n\}$,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix} =$$

$$\left\{ \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & \dots & c_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S}); \inf\{a_{ij}, b_{ij}\} \leq_e c_{ij} \right\}$$

a duálně

$$\mathbf{A} \bullet \mathbf{B} = \{\mathbf{D} \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S}); \max\{\mathbf{A}, \mathbf{B}\} \geq_M \mathbf{D}\}, \tag{68}$$

tj. pro všechny $i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, n\}$,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix} =$$

$$\left\{ \begin{bmatrix} d_{11} & \dots & d_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ d_{m1} & \dots & d_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S}); \sup\{a_{ij}, b_{ij}\} \geq_e d_{ij} \right\}.$$

Lemma 5.23 *Pro libovolnou čtveřici* $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3, \mathbf{A}_4 \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S})$ *máme* $\mathbf{A}_1 \circ \mathbf{A}_2 \approx \mathbf{A}_3 \circ \mathbf{A}_4$ *a* $\mathbf{A}_1 \bullet \mathbf{A}_2 \approx \mathbf{A}_3 \bullet \mathbf{A}_4$.

Důkaz. Důkaz provedeme jen pro operaci $\circ$, pro druhou operaci je totiž analogický. Předpokládejme, že $\mathbf{A}_i, i \in \{1,2,3,4\}$, jsou libovolné prvky $\mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S})$. Označme $\mathbf{B} = \max\{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3, \mathbf{A}_4\}$. Protože $\mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S})$ je svaz, pak je zřejmé, že $\mathbf{B} \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S})$. Navíc, existuje $\min\{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2\} \leq_M \mathbf{B}$ a $\min\{\mathbf{A}_3, \mathbf{A}_4\} \leq_M \mathbf{B}$. Z toho plyne výsledek $\mathbf{B} \in \mathbf{A}_1 \circ \mathbf{A}_2$ a také $\mathbf{B} \in \mathbf{A}_3 \circ \mathbf{A}_4$, tím je lemma dokázáno.

Příklad 5.24 *Nechť* $\mathcal{S}$ *je svaz dělitelů vhodného přirozeného čísla* n*, kde* $\inf\{a,b\}$ *je největší společný dělitel* $a, b \in \mathbb{N}$ *a* $\sup\{a,b\}$ *je nejmenší společný násobek* a, b *a* $a \leq_e b$*, když* $a|b$*. Pro příklad položme* $n = 120$*, pak dělitelé jsou* $1,2,3,4,5,6,8,10,12,15,20,24,30,40$ $,60,120$*. Konstruujeme* $\mathbb{M}_{2,2}(\mathcal{S})$ *a zvolme libovolnou čtveřici* $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3, \mathbf{A}_4 \in \mathbb{M}_{2,2}(\mathcal{S})$*, kde* $\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 8 & 15 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$, $\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 10 & 12 \\ 20 & 24 \end{bmatrix}$ $\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} 8 & 12 \\ 30 & 1 \end{bmatrix}$*. Pak* $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 40 & 60 \\ 60 & 24 \end{bmatrix}$,

$$\mathbf{A}_1 \circ \mathbf{A}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, 2|a_{11}, 3|a_{12}, 1|a_{21}, 6|a_{22} \right\},$$
$$\mathbf{A}_3 \circ \mathbf{A}_4 = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, 1|a_{11}, 2|a_{12}, 5|a_{21}, 1|a_{22} \right\},$$

a samozřejmě $\mathbf{B} \in \mathbf{A}_1 \circ \mathbf{A}_2 \cap \mathbf{A}_3 \circ \mathbf{A}_4$.

Věta 5.25 *Hypergrupoidy* $(\mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S}), \circ)$ *a* $(\mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S}), \bullet)$ *jsou spojnicové prostory.*

Důkaz. Hyperoperace $\circ$ a $\bullet$ jsou duální, to znamená, že důkazy budou analogické. Budeme tedy provádět důkaz jen pro fakt, že struktura $(\mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S}), \circ)$ je spojnicový prostor. Komutativita u hyperoperace je evidentní. Dále, díky Lemmatu 3.3 jednoduše můžeme říci, že hypergrupoid $(\mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S}), \circ)$ je polohypergrupa.

Reprodukční axiom, tj. podmínka $\mathbf{A} \circ \mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S}) = \mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S})$ pro všechna $\mathbf{A} \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S})$ platí. Je zřejmé, že $\mathbf{A} \circ \mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S}) \subseteq \mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S})$, pro všechna $\mathbf{A} \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S})$. Ukažme, že opačná inkluze $\mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S}) \subseteq \mathbf{A} \circ \mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S})$, pro všechna $\mathbf{A} \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S})$ je platná. Určeme, že

$$\mathbf{A} \circ \mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S}) = \bigcup_{\mathbf{X} \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S})} \mathbf{A} \circ \mathbf{X} = \bigcup_{\mathbf{X} \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S})} \{\mathbf{C} \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S}); \min\{\mathbf{A}, \mathbf{X}\} \leq C\}.$$

Pro pevné $\mathbf{A} \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S})$ a libovolné $\mathbf{M} \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S})$ máme tři možné případy:

1. Když $\mathbf{M} \leq_M \mathbf{A}$, pak $\min\{\mathbf{A}, \mathbf{M}\} = \mathbf{M}$ a protože $\leq_M$ je reflexivní, pak $\mathbf{M} \in \mathbf{A} \circ \mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S})$.

2. Když $\mathbf{A} \leq_M \mathbf{M}$, pak $\min\{\mathbf{A}, \mathbf{M}\} = \mathbf{A}$ což znamená, že $\mathbf{M} \in \mathbf{A} \circ \mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S})$.

3. Když $\mathbf{A}$ a $\mathbf{M}$ nejsou v relaci $\leq_M$, pak existuje $\min\{\mathbf{A}, \mathbf{M}\} \leq \mathbf{M}$, které znamená, že $\mathbf{M} \in \mathbf{A} \circ \mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S})$.

Tedy, $(\mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S}), \circ)$ je komutativní hypergrupou. Nakonec transpoziční axiom platí díky Lemmatu 5.23.

Nyní analogicky vztahům (67) a (68) pro matice $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S})$ definujeme

$$\mathbf{A} * \mathbf{B} = \{\mathbf{C} \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S}); \max\{\mathbf{A}, \mathbf{B}\} \leq_M \mathbf{C}\}, \tag{69}$$

tj. pro všechna $i \in \{1, \ldots, m\}, j \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{m1} & \ldots & b_{mn} \end{bmatrix} =$$
$$\left\{ \begin{bmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{m1} & \ldots & c_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S}); \sup\{a_{ij}, b_{ij}\} \leq_e c_{ij} \right\}$$

a duálně

$$\mathbf{A} \star \mathbf{B} = \{\mathbf{D} \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S}); \min\{\mathbf{A}, \mathbf{B}\} \geq_M \mathbf{D}\}, \tag{70}$$

tj. pro všechna $i \in \{1, \ldots, m\}, j \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \star \begin{bmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{m1} & \ldots & b_{mn} \end{bmatrix} =$$
$$\left\{ \begin{bmatrix} d_{11} & \ldots & d_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ d_{m1} & \ldots & d_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S}); \inf\{a_{ij}, b_{ij}\} \geq_e d_{ij} \right\}.$$

Příklad 5.26 *Uvažujme množinu $\mathbb{LA}_2(T)$, kde funkce $p(x), q(x)$ jsou konstantní nezáporné funkce definované na intervalu $T = \langle 0, \infty)$ s definovaným uspořádáním $L(a,b) \leq_e L(c,d)$, když $a \leq c$ a $b \leq d$, jenž znázorňuje Obrázek (12). Pak pro konkrétní dvě matice typu 2×2, kde $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} L(5,8) & L(3,0) \\ L(2,4) & L(1,9) \end{bmatrix}$ a $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} L(7,2) & L(2,1) \\ L(6,1) & L(3,5) \end{bmatrix}$ s hyperoperací $*$ definovanou předpisem (69) máme*

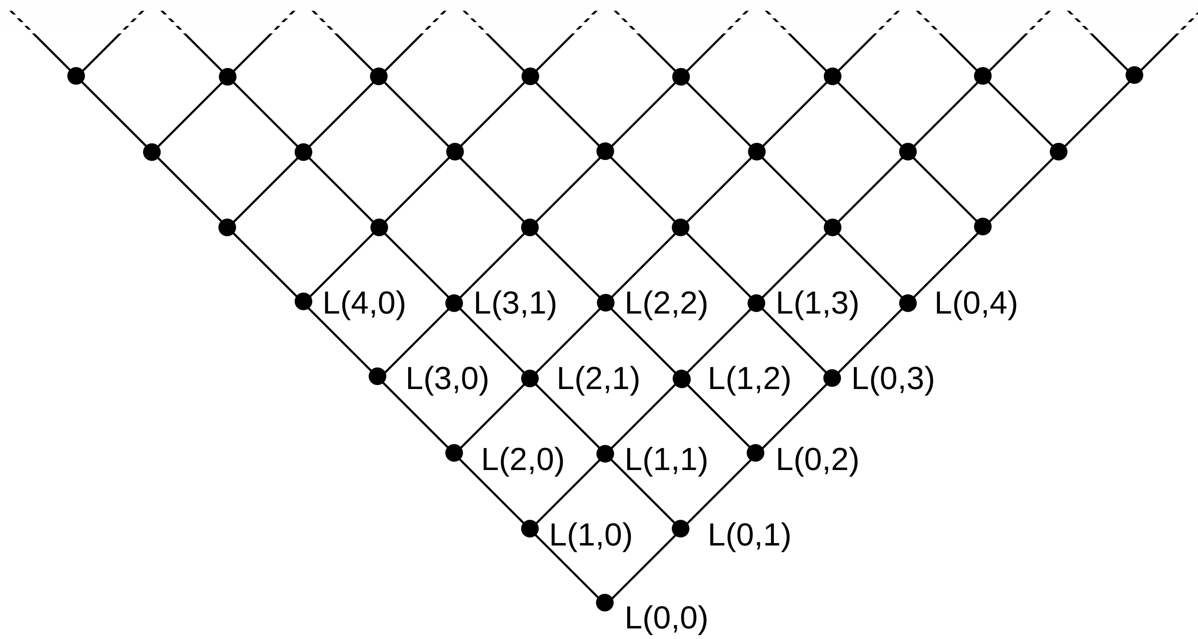
$$\mathbf{A} * \mathbf{B} = \left\{ \begin{bmatrix} L(a_{11}^1, a_{11}^2) & L(a_{12}^1, a_{12}^2) \\ L(a_{21}^1, a_{21}^2) & L(a_{22}^1, a_{22}^2) \end{bmatrix};\ a_{ij}^k \in \mathbb{N},\ i, j, k \in \{1, 2\} \right\},$$

kde prvky a_{ij} jsou takové, že

$$7 \leq a_{11}^1, 8 \leq a_{11}^2, 3 \leq a_{12}^1, 1 \leq a_{12}^2, 6 \leq a_{21}^1, 4 \leq a_{21}^2, 3 \leq a_{22}^1, 9 \leq a_{22}^2.$$

Věta 5.27 *Hypergrupy $(\mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S}), *)$ a $(\mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S}), \star)$ jsou komutativní polohypergrupy.*

Důkaz. Pro hyperoperaci “$*$” vyplývá přímo z Lemma 3.3 a Lemma 5.21; pro hyperoperaci “$\star$” to vyplývá z faktu, že hyperoperace min a max jsou duální.



Obrázek 12: Svaz lineárních diferenciálních operátorů celých nezáporných čísel

Poznámka 5.28 *Polohypergrupy nesplňují reprodukční axiom. Hyperoperace* $\star$ *a* $*$*, nebo také operace* min *a* max*, které jsou duální, nesplňují podmínku reprodukce* $\mathbf{A} * \mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S}) \neq \mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S})$ *pro každé* $\mathbf{A} \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S})$*. Demonstrujme neplatnost podmínky jen na polohypergrupě* $(\mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S}), *)$*. Určeme, že*

$$\mathbf{A} * \mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S}) = \bigcup_{\mathbf{X} \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S})} \mathbf{A} * \mathbf{X} = \bigcup_{\mathbf{X} \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S})} \{\mathbf{C} \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S}); \max\{\mathbf{A}, \mathbf{X}\} \leq_M C\}.$$

Nyní pro matice $\mathbf{A}, \mathbf{X} \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S})$ *takové, že* $\mathbf{X} \leq_M \mathbf{A}$ *existuje* $\max\{\mathbf{A}, \mathbf{X}\} = \mathbf{A}$ *a když* $\mathbf{M} \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S})$ *je taková matice, že* $M \leq_M \mathbf{A}$*, pak* $\mathbf{M} \notin \mathbf{A} * \mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S})$*.*

Věta 5.29 *Polohypergrupy* $(\mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S}), *)$ *a* $(\mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S}), \star)$ *splňují transpoziční axiom.*

Důkaz. Opět stačí ukázat důkaz pouze pro jednu strukturu $(\mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S}), *)$. Důkaz je analogický k důkazu Lemma 5.23. Označme matici $\mathbf{B} = \max\{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3, \mathbf{A}_4\}$. Pak platí $\mathbf{B} \geq_M \max\{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_4\}$ a $\mathbf{B} \geq_M \max\{\mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3\}$, tj. $\mathbf{B} \in \mathbf{A}_1 * \mathbf{A}_4$ a zároveň $\mathbf{B} \in \mathbf{A}_2 * \mathbf{A}_3$.

Příklad 5.30 *Když v Příkladě 5.24 použijeme "$*$"namísto "$\circ$", dostaneme, že*

$$\mathbf{A}_1 * \mathbf{A}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, 40|a_{11}, 60|a_{12}, 60|a_{21}, 24|a_{22} \right\},$$
$$\mathbf{A}_3 * \mathbf{A}_4 = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, 8|a_{11}, 12|a_{12}, 30|a_{21}, 3|a_{22} \right\}$$

a samozřejmě $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 40 & 60 \\ 60 & 24 \end{bmatrix} \in \mathbf{A}_1 \circ \mathbf{A}_2 \cap \mathbf{A}_3 \circ \mathbf{A}_4$.

Poznámka 5.31 *Poznamenejme, že transpoziční axiom je obvykle studován na hypergrupách, jeho platnost ovšem není podmíněna reprodukčním zákonem. Transpoziční polohypergrupy, které nejsou hypergrupami, jsou studovány bratry Massourosovými v publikaci [54].*

Jedním z velmi základních pojmů teorie hyperstruktur je uvažovaný interval jako výsledek hyperoperace aplikovaný na jeho koncové body. Inspirováni touto úvahou definujeme pro dvě libovolné matice $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S})$ hyperoperaci "$\odot$"předpisem

$$\mathbf{A} \odot \mathbf{B} = \{\mathbf{C} \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S}); \min\{\mathbf{A}, \mathbf{B}\} \leq_M \mathbf{C} \leq_M \max\{\mathbf{A}, \mathbf{B}\}\}, \tag{71}$$

tj. pro všechna $i \in \{1, \ldots, m\}, j \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{m1} & \ldots & b_{mn} \end{bmatrix} =$$
$$\left\{ \begin{bmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{m1} & \ldots & c_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S}); \inf\{a_{ij}, b_{ij}\} \leq_e c_{ij} \leq_e \sup\{a_{ij}, b_{ij}\} \right\}.$$

Připomeňme, že (71) je maticová variace hyperoperace definované Varletem [77], jeho myšlenky studovali a aplikovali např. Davvaz, Leoreanu-Fotea nebo Rosenberg [46, 48, 49, 50]. Struktura $(\mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S}), \odot)$ je spojnicový prostor, to můžeme jednoduše dokázat za pomoci výsledků obdržených Varletem [77].

V tomto ohledu poznamenejme, že distributivní svaz $(\mathfrak{L}, \wedge, \vee)$ je takový, že jehož dvě operace jsou navzájem distributivní.

Věta 5.32 *Svaz* $(\mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S}), \min, \max)$ *je distributivní právě tehdy, když svaz* $(\mathcal{S}, \inf, \sup)$ *je distributivní.*

Důkaz. Důkaz je evidentní díky přímočaré korespondenci mezi relacemi"$\leq_M$"a "$\leq_e$"zavedené formulí (64) a korespondenci mezi definicí minima a maxima matic a použitím infima a supréma jejich vstupů. Když $(\mathcal{S}, \inf, \sup)$ je distributivní, pak distributivní zákon je splněn pro všechna $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} \in \mathcal{S}$, to znamená, že distributivní zákon je platný stejně tak pro matice, kde uvažujeme, že $(\mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S}), \min, \max)$ je distributivní. Na druhé straně, když $(\mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S}), \min, \max)$ je distributivní, pak

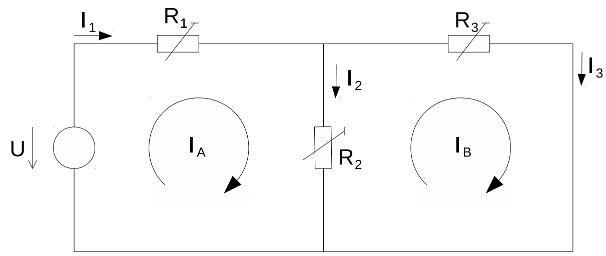
$$\max\{\mathbf{A}, \min\{\mathbf{B}, \mathbf{C}\}\} = \min\{\max\{\mathbf{A}, \mathbf{B}\}, \max\{\mathbf{B}, \mathbf{C}\}\},$$

pro každou $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S})$ a vzhledem k definici minima a maxima matic okamžitě získáme, že $(\mathcal{S}, \inf, \sup)$ je distributivní.

Definice 5.33 *[77] Nechť* $\mathfrak{L}_{\leq} = (L, \wedge, \vee)$ *je svaz se spojením* $\wedge$*, průsekem* $\vee$ *a relace uspořádání* $\leq$ *a nechť:*

$$\forall (a, b) \in L^2, a \diamond b = \{x \in L \mid a \wedge b \leq x \leq a \vee b\}.$$

Věta 5.34 *[77] Pro svaz* $\mathfrak{L}_{\leq}$ *jsou následující podmínky ekvivalentní:*



Obrázek 13: Obvod s termistory

(1) $\mathfrak{L}_{\leq}$ *je distributivní,*

(2) $\mathbb{L}_{\leq} = (L, \diamond)$ *je spojnicový prostor.*

Věta 5.32 a Varletovy výsledky nám umožňují okamžitě uvést následující.

Důsledek 5.35 *Hypergrupa* $(\mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S}), \odot)$ *je spojnicový prostor právě tehdy, když svaz* $(\mathcal{S}, \inf, \sup)$ *je distributivní.*

Příklad 5.36 *Modifikujme příklad 2.1 z první části práce. Nyní uvažujme stejnosměrné napájecí napětí* $U = 10V$ *a místo cívek a odporů budeme uvažovat termistory* R_1, R_2, R_3 *jako je na Obrázku 13. Dále uvažujme, že každý termistor je v jiném prostředí, tedy termistor* R_1 *je vystaven venkovním povětrnostním vlivům, termistor* R_2 *je ve sklepě a termistor* R_3 *je v domácnosti. Tedy v různých ročních časových obdobích se bude měnit hodnota odporů, která je daná tabulkou. V závislosti na změně teploty během dne budou hodnoty termistorů nabývat hodnoty od minimální až po maximální. Tedy jestliže nejnižší teploty za ben byly venku* $-6°C$*, ve sklepě* $19°C$ *a v kuchyni také* $19°C$ *a naopak nejvyšší venku* $0°C$*, ve sklepě* $19°C$ *a v kuchyni také* $24°C$*, pak hodnoty odporů byly* $R_1 = 10 - 12$*,* $R_2 = 19$*,* $R_3 = 8 - 10$*.*

Teplota	R_1	R_2	R_2
$-6°C$	12	8	20
$0°C$	10	6	16
$19°C$	6	4	10
$24°C$	5	3	8

Jestliže jako v Příkladu 2.1 sestavíme matici pro řešení obvodu. Matice bude nabývat své minimální a maximální hodnoty. Tedy matici odporů jsme nahradili maticovou hyperstrukturou a maticová rovnice bude mít tvar

$$\begin{bmatrix} (R_1 + R_2) & -R_2 \\ -R_2 & (R_2 + R_3) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_A \\ I_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{72}$$

kde hodnoty odporů jsou z intervalu $(R_1 + R_2) \in \langle 29, 31\rangle, R_2 \in \langle 19, 19\rangle, (R_2 + R_3) \in \langle 27, 29\rangle$*.*

Jestliže budeme uvažovat speciální příklad, kdy $m = n = 1$ z množiny $\mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S})$, získáme originální svaz $\mathcal{S}$. To umožňuje analogické konstrukce EL–hyperstruktur (24). Pro každé $(a,b,c,d) \in H^4$,hyperoperace (67), (68), (69), (70), (71) jsou redukovány na

$$a \circ b = \{c \in \mathcal{S}; \inf\{a,b\} \leq_e c\}$$
$$a \bullet b = \{d \in \mathcal{S}; \sup\{a,b\} \geq_e c\}$$
$$a * b = \{c \in \mathcal{S}; \sup\{a,b\} \leq_e c\}$$
$$a \star b = \{d \in \mathcal{S}; \inf\{a,b\} \geq_e d\}$$
$$a \odot b = \{c \in \mathcal{S}; \inf\{a,b\} \leq_e c \leq_e \sup\{a,b\}\}$$

a okamžitě může stanovit následující důsledek.

Důsledek 5.37 *Když $(\mathcal{S}, \inf, \sup, \leq_e)$ je svaz, pak*

1. *hypergrupoidy $(\mathcal{S}, \circ)$ a $(\mathcal{S}, \bullet)$ jsou spojnicové prostory,*
2. *hypergrupoidy $(\mathcal{S}, *)$ a $(\mathcal{S}, \star)$ jsou polohypergrupy, které nejsou hypergrupami, ale splňují transpoziční zákon.*

Hyperstruktury jako vstupní abecedy

V kapitole Kvazi–multiautomaty lineárních diferenciálních operátorů 5.3.1 se budeme zabývat konstrukcemi kvazi–multiautomatů, kde jako vstupní abecedu uvažujeme (polo-)hypergrupy. Dále se pak zabýváme součiny kvazi–automatu definované W. Dörferem zobecněné na případy kvazi–multiautomatů. Na první pohled nepatrné rozdíly v níže konstruovaných strukturách mají pro toto zobecnění zásadní význam.

Jako jednu ze vstupních struktur uvažujeme $(\mathcal{R}_n, \bullet)$, kde $\mathcal{R}_n$ je n–dimenzionální vektorový prostor nad polem reálných čísel, tedy $\mathcal{R}_n = \{(s_0, \ldots, s_{n-1});\ s_k \in \mathbb{R},\ k = 0, ..., n-1\}$. Binární hyperoperace "$\bullet$"je definována za použití "Koncového lemmatu", jehož vlastnosti studoval např. Novák v [64] a další autoři. Definujme binární hyperoperaci předpisem

$$(r_0, \ldots, r_{n-1}) \bullet (s_0, \ldots, s_{n-1}) = \{(t_0, \ldots, t_{n-1}), t_k \geq r_k s_k, k = 0, ..., n-1\}. \tag{73}$$

Lemma 5.38 *Nechť $\mathcal{R}_n$ je n–dimenzionální vektorový prostor reálných čísel s hyperoperací definovanou rovností* (73)*. Pak $(\mathcal{R}_n, \bullet)$ je komutativní hypergrupa.*

Důkaz. Předpokládejme, že $(r_0, \ldots, r_{n-1}) = \vec{r}, (s_0, \ldots, s_{n-1}) = \vec{s}, (t_0, \ldots, t_{n-1}) = \vec{t} \in \mathcal{R}_n$. Pak $\vec{r} \bullet (\vec{s} \bullet \vec{t}) = \vec{r} \bullet \{\vec{u}, \vec{u} \geq \vec{s}\vec{t}\} = \bigcup_{\vec{u} \geq \vec{s}\vec{t}} \vec{r}\vec{u} = \{\vec{v};\ \vec{v} \geq \vec{r}\vec{s}\vec{t}\} = \bigcup_{\vec{w} \geq \vec{r}\vec{s}} \vec{r}\vec{w} = (\vec{r} \bullet \vec{s}) \bullet \vec{t}$. Tedy hypergrupoid $(\mathcal{R}_n, \bullet)$ splňuje podmínky asociativity a je tedy polohypergrupou.

Dále ukážeme, že polohypergrupa $(\mathcal{R}_n, \bullet)$ splňuje i podmínku reprodukce, tj. $\vec{r} \bullet \mathcal{R}_n = \mathcal{R}_n$. Evidentně platí $\vec{r} \bullet \mathcal{R}_n \subseteq \mathcal{R}_n$ pro všechny $\vec{r} \in \mathcal{R}_n$. Uvažujme libovolný prvek $\vec{t} \in \mathcal{R}_n$. Pak existuje i prvek $\vec{s} \in \mathcal{R}_n$ takový, že

$$\vec{t} \in \vec{r} \bullet \vec{s};\ \text{i.e. } t_k \geq r_k s_k, k = 0, ..., n-1.$$

Jestliže definujeme koeficienty předpisem $s_k = \frac{t_k}{r_k}$ pro každé $k \in \{0, ..., n-1\}$. Pak $r_k \cdot \frac{t_k}{r_k} = t_k$ pro každé $k = 0, ..., n-1$, tedy $\vec{t} \in \vec{r} \bullet \vec{s}$. Následně $\mathcal{R}_n \subseteq \vec{r} \bullet \mathcal{R}_n$ a získáme $\vec{r} \bullet \mathcal{R}_n = \mathcal{R}_n$. Tedy polohypergrupa $(\mathcal{R}_n, \bullet)$ je hypergrupou.

Poznámka 5.39 *Podle úvahy o transpozičním axiomu popsaným před konstrukcí Věty* (5.19) *je jednoduché ukázat bez újmy na obecnosti, že hypergrupa* $(\mathcal{R}_n, \bullet)$ *je spojnicovým prostorem. Tato vlastnost ovšem není pro naši další práci podstatná.*

Dále budeme uvažovat strukturu $(\mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{R}^+), \circ)$, která je speciálním případem struktury $(\mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S}), \circ)$, kde $\mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{R}^+)$ je množina všech čtvercových matic typu $n \times n$, jejímiž prvky jsou reálná nezáporná čísla a hyperoperace je definovnána předpisem (67). Jak jsem již naznačili, tyto struktury jsou důležité pro následující konstrukce, ve kterých zobecňujeme GMAC na E-GMAC a SE-GMAC. Tedy ukážeme rozdílný aspekt při různém zobecnění, k tomuto účelu potřebujeme zavést důležitou podmnožinu $\mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{R}_1^+)$, která je podmnožinou množiny $\mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{R}^+)$.

$$\mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{R}_1^+) = \{\mathbf{M} \in \mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{R}^+); \mathbf{M} = (m_{ij}), m_{ij} \geq 1, i, j \in \mathbb{N}_n\} \tag{74}$$

Protože reálná čísla tvoří svaz, můžeme nyní formulovat následující větu.

Lemma 5.40 *Hypergrupoid* $(\mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{R}^+), \circ)$ *a* $(\mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{R}_1^+), \circ)$ *jsou spojnicové prostory.*

Důkaz. Důkaz je analogický jako důkaz Věty 5.25.

Pro kartézskou kompozici kvazi–multiautomatu budeme uvažovat dvě navzájem disjunktní struktury z Lemma 5.38 a Lemma 5.40, kde pro $n \leq 2$ splňují podmínku dizjunktnosti, tj. jejich průnik je prázdná množina $\mathcal{R}_n \cap \mathbb{M}_n \neq \emptyset$. Při dalších úvahách je nezbytné sjednocení těchto množin, dále tedy budeme uvažovat $(\mathcal{R}_n \cup \mathbb{M}_n)$, na takovéto množině definujeme binární hyperoperaci

$$\triangle : (\mathcal{R}_n \cup \mathbb{M}_n) \times (\mathcal{R}_n \cup \mathbb{M}_n) \to \mathcal{P}^*(\mathcal{R}_n \cup \mathbb{M}_n)$$

předpisem:

$$\begin{gathered}
\text{Když } X = \vec{r} \in \mathcal{R}_n, Y = \vec{s} \in \mathcal{R}_n, \text{ pak } X \triangle Y = \vec{r} \bullet \vec{s} \subset \mathcal{P}^*(\mathcal{R}_n). \\
\text{Když } X = A \in \mathbb{M}_n, Y = B \in \mathbb{M}_n, \text{ pak } X \triangle Y = A \circ B \subset \mathcal{P}^*(\mathbb{M}_n). \\
\text{Když } X = \vec{r} \in \mathcal{R}_n, Y = A \in \mathbb{M}_n, \text{ pak } X \triangle Y = \{X, Y\} = \{\vec{r}, A\} = A \triangle \vec{r} = Y \triangle X.
\end{gathered} \tag{75}$$

Lemma 5.41 *Nechť* $\mathcal{R}_n, \mathbb{M}_n$ *jsou disjunktní množiny. Uvažujme strukturu* $((\mathcal{R}_n \cup \mathbb{M}_n), \triangle)$, *s binarní hyperoperací* (75). *Pak hypergrupoid je komutativní hypergrupou.*

Důkaz. Předpokládejme, že $X, Y \in (\mathcal{R}_n \cup \mathbb{M}_n)$. Ukážeme, že komutativní hypergrupoid splňuje asociativní podmínku a podmínku reprodukce. V hypergrupoidu $((\mathcal{R}_n \cup \mathbb{M}_n), \triangle)$ mohou nastat právě tři možnosti:

1. $X = \vec{r} \in \mathcal{R}_n, Y = \vec{s} \in \mathcal{R}_n$,
2. $X = A \in \mathbb{M}_n, Y = B \in \mathbb{M}_n$,
3. $X = \vec{r} \in \mathcal{R}_n, Y = A \in \mathbb{M}_n$.

První možnost jsme již dokázali v Lemmatu 5.38, stejně tak druhá možnost je dokázána v Lemma 5.40. Zbývá ověřit asociativitu pro třetí případ.

Předpokládejme, že $X, Y, Z \in (\mathcal{R}_n \cup \mathbb{M}_n)$. Pak

$$\begin{gathered}(X \bigtriangleup Y) \bigtriangleup Z = \{X, Y\} \bigtriangleup Z = \{(X \bigtriangleup Z)\} \cup \{(Y \bigtriangleup Z)\} = \\ = \{X, Z\} \cup \{Y, Z\} = \{X, Y, Z\} = \{X, Y\} \cup \{X, Z\} = \\ = \{(X \bigtriangleup Y)\} \cup \{(X \bigtriangleup Z)\} = X \bigtriangleup \{Y, Z\} = X \bigtriangleup (Y \bigtriangleup Z).\end{gathered}$$

Tím jsme dokázali, že komutativní hypergrupoid je komutativní hypergrupou.

Dále ověříme, že polohypergrupa $((\mathcal{R}_n \cup \mathbb{M}_n), \bigtriangleup)$ splňuje axiom reprodukce, tj. $X \bigtriangleup (\mathcal{R}_n \cup \mathbb{M}_n) = (\mathcal{R}_n \cup \mathbb{M}_n)$. Jestliže $X \in \mathcal{R}_n, Y \in \mathcal{R}_n$ nebo $X \in \mathbb{M}_n, Y \in \mathbb{M}_n$, pak reprodukční axiom platí, to můžeme jednoduše vidět v důkazu Lemma 5.38 a Lemma 5.40. Nyní předpokládejme, že $X = \vec{r} \in \mathcal{R}_n, Y = A \in \mathbb{M}_n$. Pak je evidentní, že $X \bigtriangleup \mathbb{M}_n \subseteq \mathbb{M}_n$, pro každé $X \in \mathbb{R}_n$. Uvažujme libovolný prvek $Y \in \mathbb{M}_n$. Pak

$$X \bigtriangleup \mathbb{M}_n = \bigcup_{A \in \mathbb{M}_n} X \bigtriangleup A = \bigcup_{A \in \mathbb{M}_n} \{\vec{r}, A\} = \{\vec{r}\} \cup \mathbb{M}_n \supseteq \mathbb{M}_n.$$

Následně $Y \in X \bigtriangleup \mathbb{M}_n$ a získáme $X \bigtriangleup \mathbb{M}_n = \mathbb{M}_n$. Tím jsme dokázali platnost i reprodukčního axiomu. Tedy komutativní polohypergrupa $((\mathcal{R}_n \cup \mathbb{M}_n), \bigtriangleup)$ je komutativní hypergrupou.

5.3 Kvazi–multiautomaty

5.3.1 Kvazi–multiautomaty lineárních diferenciálních operátorů

V kapitole 2.3 jsme uvedli základní koncepci automatu a kvazi–multiautomatu (Def. 2.8, 5.51). Dále se budeme zabývat konstrukcemi kvazi–multiautomatů, jenž jsou přirozeným zobecněním automatů bez výstupu. Existuje několik variant zobecnění podmínky MAC. Tyto konstrukce formulujeme dle Definice 5.51, kde struktury splňují podmínku obecné smíšené asociativity (GMAC), která je uvedená v pracech [9, 13, 19]. Pro následující konstrukce kvazi–multiautomatů použijeme hypergrupy, které jsme zavedli v předchozí kapitole, a jako množiny stavů použijeme množinu lineárních diferenciálních operátorů a množínu vektorů. Všechny množiny, případně struktury, jsme zavedli v přechozí kapitole a při formulaci kvazi–multiautomatů se odkážeme na konkrétní tvrzení.

Následně zkonstruujeme tři kvazi–multiautomaty $\mathbb{A}_1$, $\mathbb{A}_2$ a $\mathbb{A}_3$, ze kterých konstruujeme homogenní a heterogenní součin kvazi-multiautomatů ve smyslu definice W. Dörfera pro klasické automaty.

Věta 5.42 *Pro komutativní hypergrupu $(\mathcal{R}_n, \bullet)$ struktura $\mathbb{A}_1 = ((\mathcal{R}_n, \bullet), \mathbb{LA}_n(T), \delta_1)$ s tranzitní funkcí $\delta_1 : \mathcal{R}_n \times \mathbb{LA}_n(T) \to \mathbb{LA}_n(T)$ definovanou jako*

$$\delta_1(\vec{r}, L(\vec{p})) = (\vec{r} \cdot L(\vec{p})) = L(r_0 p_0, \ldots, r_{n-1} p_{n-1})$$

je kvazi–multiautomat s vstupní strukturou $(\mathcal{R}_n, \bullet)$ a stavovou množinou $\mathbb{LA}_n(T)$.

Důkaz. Ukážeme, že struktura $\mathbb{A}_1$ splňuje obecnou smíšenou podmínku asociativity (GMAC)

$$\delta_1(\vec{r}, \delta_1(\vec{s}, L(\vec{p}))) \in \delta_1(\vec{r} \bullet \vec{s}, L(\vec{p})).$$

Díky Lemma 5.38 víme, že struktura $(\mathcal{R}_n, \bullet)$ je hypergrupa. Dále upravíme zvlášť levou a pravou stranu podmínky GMAC. Úprava levé strany podmínky:

$$\begin{aligned}\delta_1(\vec{r}, \delta_1(\vec{s}, L(\vec{p}))) &= \delta_1(\vec{r}, L(s_0 p_0, \ldots, s_{n-1} p_{n-1}))\\ &= L(r_0 s_0 p_0, \ldots, r_{n-1} s_{n-1} p_{n-1}).\end{aligned}$$

Výpočet pravé strany podmínky:

$$\delta_1(\vec{r} \bullet \vec{s}, L(\vec{p})) = \delta_1 \left(\bigcup_{\vec{t} \geq \vec{r}\vec{s}} (\vec{t}, L(\vec{p})) \right) = \{L(t_0 p_0, \ldots, t_{n-1} p_{n-1}); \vec{t} \in \mathcal{R}_n, \vec{t} \geq \vec{r}\vec{s}\}.$$

Pro $\vec{t} = \vec{r}\vec{s}$ máme $L(r_0 s_0 p_0, \ldots, r_{n-1} s_{n-1} p_{n-1}) = L(t_0 p_0, \ldots, t_{n-1} p_{n-1});\ \vec{t} \in \mathcal{R}_n$, tedy

$$L(r_0 s_0 p_0, \ldots, r_{n-1} s_{n-1} p_{n-1}) \in \delta_1(\vec{r} \bullet \vec{s}, L(\vec{p})).$$

Tedy struktura $\mathbb{A}_1 = ((\mathcal{R}_n, \bullet), \mathbb{LA}_n(T), \delta_1)$ je kvazi–multiautomat.

Následující větu uvedeme bez důkazu. Důkaz je analogický důkazu Věty 5.42. Oproti předchozímu kvazi–multiautomatu je zde použita jiná stavová množina $\mathscr{R}_n^{\mathbb{F}}(\Omega)$, jejímiž prvky jsou n–dimensionální vektory.

Věta 5.43 *Struktura* $\mathbb{A}_2 = ((\mathcal{R}_n, \bullet), \mathscr{R}_n^{\mathbb{F}}(\Omega), \delta_2)$*, kde zobrazení* $\delta_2 : \mathcal{R}_n \times \mathscr{R}_n^{\mathbb{F}}(\Omega) \to \mathscr{R}_n^{\mathbb{F}}(\Omega)$ *je definováno pravidlem*

$$\delta_2(\vec{r}, \vec{p}) = \vec{r} \cdot \vec{p} = (r_0 p_0, \ldots, r_{n-1} p_{n-1}),$$

je kvazi–multiautomat.

Důkaz. Důkaz je analogický jako důkaz Věty 5.42.

Uvedeme příklad kvazi–multiautomatu pro konkrétní Gaussovy pulzní signály, o které se opírá naše motivace.

Příklad 5.44 *Uvažujme množinu* $\mathbb{JA}_2(T) = \{L(0, \Psi(a,t));\ a \in \mathbb{R}, t \in \langle 0, \infty)\}$ *z Příkladu 5.5 jako množinu stavů kvazi-multiautomatu* $\mathbb{G}_2 = ((\mathcal{R}_2, \bullet), \mathbb{JA}_2(T), \delta_1)$ *tvořeného operátory druhého řádu. Je evidentní, že struktura* $(\mathcal{R}_2, \bullet)$ *pro řád* $n = 2$ *je hypergrupou; to plyne z důkazu Lemmatu 5.38. Pro operaci* δ_1 *operující v řádu* $n = 2$ *definovanou výše platí*

$$\delta_1((r_1, r_0), L(0, \Psi(a,t))) = ((r_1, r_0) \cdot L(0, \Psi(a,t))) = L(0, \Psi(r_o \cdot a, t)).$$

S takto definovanou operací je důkaz GMAC podobný jako důkaz Věty 5.42. Tedy získáme konkrétní kvazi–multiautomat pro Gaussovy pulzní signály $\mathbb{G}_2$.

Dále zkonstruujeme kvazi–multiautomat A_3 se vstupní hyperstrukturou $(\mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{R}_1^+); \circ)$, která je hypergrupou, toto tvrzení jsme již uvedli v Lemmatu 5.40. Jen připomeňme, že $\mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{R}_1^+)$ je množina všech čtvercových matic řádu n a hyperoperace $\circ$ je definována:

$$A \circ B = \{C; \min\{A, B\} \leq C\}, \text{ tj.}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1} & \ldots & b_{nn} \end{bmatrix} =$$
$$\left\{ \begin{bmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n1} & \ldots & c_{nn} \end{bmatrix}; \min\{a_{ij}, b_{ij}\} \leq c_{ij}, i, j \in \{1, \ldots, n\} \right\},$$

kde $a_{i,j}, b_{i,j}, c_{i,j} \in \mathbb{R}_1^+$.

Věta 5.45 *Struktura* $\mathbb{A}_3 = ((\mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{R}_1^+), \circ), \mathscr{R}_n^{\mathbb{F}}(\Omega), \delta_3)$ *s přechodovou funkcí* $\delta_3 : (\mathbb{M}_n, \circ) \times \mathscr{R}_n^{\mathbb{F}}(\Omega) \to \mathscr{R}_n^{\mathbb{F}}(\Omega)$ *definovanou předpisem,*

$$\delta_3(A, \vec{p}) = \vec{p} \cdot A = \vec{q},$$

kde

$$\vec{p} \cdot \mathbf{A} = (p_0, \ldots, p_{n-1}) \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} = (q_0, \ldots, q_{n-1}) = \vec{\varphi},$$

je kvazi–multiautomat se vstupní hypergrupou $(\mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{R}_1^+), \circ)$ *a stavovou množinou* $\mathscr{R}_n^{\mathbb{F}}(\Omega)$.

Důkaz. Díky Větě 5.40 víme, že struktura $(\mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{R}_1^+), \circ)$ je hypergrupa. Dále ukážeme, že struktura $\mathbb{A}_3$ splňuje zobecněnou smíšenou podmínku asociativity (GMAC), tj.

$$\delta_3(B, \delta_3(A, \vec{p})) \in \delta_3(A \circ B, \vec{p})).$$

Provedeme úpravu levé strany části podmínky GMAC:

$$\delta_3\left((b_{ij}), \delta_3((a_{ij}), (p_0, \ldots, p_{n-1}))\right) = \delta_3\left((b_{ij}), (p_0, \ldots, p_{n-1}) \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}\right) =$$

$$= \delta_3\left((b_{ij}), \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i1}p_{i-1}, \ldots, \sum_{i=1}^{n} a_{in}p_{i-1}\right)\right) =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i1}p_{i-1}, \ldots, \sum_{i=1}^{n} a_{in}p_{i-1}\right) \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1} & \ldots & b_{nn} \end{bmatrix} =$$

$$= \left(b_{11}\sum_{i=1}^{n} a_{i1}p_{i-1} + \ldots + b_{n1}\sum_{i=1}^{n} a_{in}p_{i-1}, \ldots, \right.$$

$$\left. b_{1n}\sum_{i=1}^{n} a_{i1}p_{i-1} + \ldots + b_{nn}\sum_{i=1}^{n} a_{in}p_{i-1}\right) =$$

$$= \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}b_{j1}p_{j-1}, \ldots, \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}b_{jn}p_{j-1}\right) = (q_0, \ldots, q_{n-1}).$$

Dále provedeme úpravu pravé strany části podmínky GMAC:

$$\delta_3(\mathbf{A} \circ \mathbf{B}, (p_0, \ldots, p_{n-1})) =$$
$$= \{(p_0, \ldots, p_{n-1}) \cdot \mathbf{C}; \mathbf{C} = (c_{ij}); c_{ij} \geq \min\{a_{ij}, b_{ij}\}, i, j \in \mathbb{N}_n\} =$$
$$= \{(c_{11}p_0) + \ldots + c_{n1}p_{n-1}, \ldots, c_{1n}p_0 + \ldots + c_{nn}p_{n-1}); c_{ij} \geq \min\{a_{ij}, b_{ij}\}, i, j \in \mathbb{N}_n\}.$$

Protože platí $\mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{R}_1^+) = \{\mathbf{M}; \mathbf{M} = (m_{ij}), m_{ij} \geq 1, i, j \in \mathbb{N}_n\}$, tedy obecně máme

$$q_{k-1} = c_{1k}p_0 + \ldots + c_{nk}p_{n-1}.$$

Vzhledem k tomu

$$c_{jk} = \sum_{j,i=1}^{n} a_{ik}b_{jk} \geq \min\{a_{ik}b_{jk}\} \geq 1,$$

a následně získáme

$$(q_0, \ldots, q_{n-1}) = \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}b_{j1}p_{j-1}, \ldots, \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}b_{jn}p_{j-1}\right) \in$$
$$\in \{(c_{11}p_0 + \ldots + c_{n1}p_{n-1}, \ldots, c_{1n}p_0 + \ldots + c_{nn}p_{n-1}); c_{ij} \geq \min\{a_{ij}, b_{ij}\}, i, j \in \mathbb{N}_n\} =$$
$$= \delta_3(\mathbf{A} \circ \mathbf{B}, (p_0, \ldots, p_{n-1})).$$

Struktura $\mathbb{A}_3$ splňuje podmínku GMAC, a je tedy kvazi–multiautomatem.

Pro výše zavedené kvazi–multiautomaty jsme jasně ukázali, že podmínka GMAC, je splněna. V případě $\mathbb{A}_3$ jsme ovšem byli nuceni použít jako vstupní strukturu $(\mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{R}_1^+), \circ)$. V podkapitole Kartézská kompozice 5.3.3 zavádíme jisté modifikace podmínky GMAC na E-GMAC nebo SE-GMAC, které vyhovují kartézskému součinu kvazi–multiautomatů, kde podmínka GMAC přestává platit a při použití podmínky E-GNAC na místo GMAC můžeme uvažovat obecnější strukturu $(\mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{R}^+), \circ)$.

Pro lepší pochopení problematiky na následujícím příkladu demonstrujeme nesplnění podmínky pro množinu $\mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{R}^+)$.

Příklad 5.46 *Zúžení na $\mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{R}_1^+)$ místo množiny $\mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{R}^+)$ ve Větě 5.45 je podstatné pro platnost podmínky GMAC. Tedy pro matice*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.5 \\ 0.4 & 0.3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.5 \\ 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}$$

a vektor konstantních funkcí $\vec{p} = (p_1, p_2)$, takový jako je $\vec{p} = (1, 1)$ platí, že levá strana není obsažena v pravé straně, tj.

$$\delta_3(\mathbf{B}, \delta_3(\mathbf{A}, \vec{p})) \notin \delta_3(\mathbf{A} \circ \mathbf{B}, \vec{p}).$$

Vskutku, výpočtem levé strany podmínky GMAC dostaneme $\delta_3(\mathbf{A}, \vec{p}) = \vec{p} \cdot \mathbf{A} = (0.7, 0.8)$. Pak $\delta_3(\mathbf{B}, (0.7, 0.8)) = (0.7, 0.8) \cdot \mathbf{B} = (0.21, 0.43)$. Pro výpočet pravé strany podmínky GMAC nejprve uvažujeme, že $\min\{\mathbf{A}, \mathbf{B}\} = \mathbf{B}$. Nyní, $\vec{p} \cdot \mathbf{B} = (0.3, 0.6)$ a odtud výpočet pravé strany dává $\delta_3(\mathbf{A} \circ \mathbf{B}, \vec{p}) = \{(q_0, q_1); q_0 \geq 0.3, q_1 \geq 0.6\}$. Vidíme, že podmínka neplatí pro tuto konkrétní volbu $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ a $\vec{p}$.

5.3.2 Homogenní a Heterogenní součin kvazi–multiautomatů

V této části práce konstruujeme součiny kvazi–multiautomatů, které jsme zavedli výše, tj. Teorem 5.42, Teorem 5.43 a Teorem 5.45. Přitom vycházíme z práce Willibalda Dörfflera [34], kde definuje součiny automatů, korespondující s [7]. Jedná se tedy o jisté zobecnění homogenního a heterogenního součinu automatů na součin mezi kvazi–multiautomaty. Zvláštní pozornost je pak věnována Kartézskému součinu dvou kvazi–multiautomatů. Jak jsme se již zmínili, podmínka GMAC vyžaduje jisté modifikace.

Věta 5.47 *Uvažujme kvazi–multiautomat $\mathbb{A}_1 = ((\mathcal{R}_n, \bullet), \mathbb{LA}_n(T), \delta_1)$ a kvazi–multiautomat $\mathbb{A}_2 = ((\mathcal{R}_n, \bullet), \mathscr{R}_n^{\mathbb{F}}(\Omega), \delta_2)$ se stejnou vstupní strukturou $(\mathcal{R}_n, \bullet)$. Definujme*

$$\mathbb{A}_{hm} = ((\mathcal{R}_n, \bullet), \mathbb{LA}_n(T) \times \mathscr{R}_n^{\mathbb{F}}(\Omega), \delta_1 \times \delta_2),$$

kde

$$(\delta_1 \times \delta_2)(\vec{r}, (L(\vec{p}), \vec{p})) = (\delta_1(\vec{r}, L(\vec{p})), \delta_2(\vec{r}, \vec{p}))$$

pro každé $L(\vec{p}) \in \mathbb{LA}_n(T), \vec{p} \in \mathscr{R}_n^{\mathbb{F}}(\Omega)$ a $\vec{r} \in \mathcal{R}_n$. Pak $\mathbb{A}_{hm}$ je kvazi–multiautomat.

Důkaz. Ukážeme, že heterogenní součin kvazi–multiautomatů $\mathbb{A}_1$ a $\mathbb{A}_2$ je také kvazi–multiautomat $\mathbb{A}_{hm}$. Ověříme podmínku zobecněné smíšené asociativity

$$(\delta_1 \times \delta_2)(\vec{r}, (\delta_1 \times \delta_2)(\vec{s}, L(\vec{p}), \vec{q})) \in (\delta_1 \times \delta_2)(\vec{r} \bullet \vec{s}, L(\vec{p}), \vec{q}).$$

Vskutku,

$$(\delta_1 \times \delta_2)\,(\vec{r}, (\delta_1(\vec{s}, L(\vec{p})), \delta_2(\vec{s}, \vec{q})) =$$
$$(\delta_1 \times \delta_2)(\vec{r}, (L(s_0p_0, \dots, s_{n-1}p_{n-1})), (s_0q_0, \dots, s_{n-1}q_{n-1}))$$
$$(\delta_1(\vec{r}, L(\vec{s}\vec{p})), \delta_2(\vec{r}, \vec{s}\vec{q})) = (L(\vec{r}\vec{s}\vec{p}), \vec{r}\vec{s}\vec{q}) \in$$
$$\in \{L(\vec{t}\vec{p}), \vec{t}\vec{q}; t \in \{(u_0, \dots, u_{n-1}), u_k \geq r_k s_k, k = 0, \dots n-1\}\}$$

s ohledem na označení $\vec{t} = (r_0s_0, \dots, r_{n-1}s_{n-1})$.

Dále,

$$\{L(\vec{t}\vec{p}), \vec{t}\vec{q}; t \in \{(u_0, \dots, u_{n-1}), u_k \geq r_k s_k, k = 0, \dots n-1\}\} =$$
$$= \{(\delta_1(\vec{t}, L(\vec{p}))), \delta_2(\vec{t}\vec{q}); t \in \{(u_0, \dots, u_{n-1}), u_k \geq r_k s_k, k = 0, \dots n-1\}\}$$
$$\{\delta_1(\vec{t}, L(\vec{p})), \delta_2(\vec{t}, \vec{q}); \vec{t} \in \vec{r} \bullet \vec{s}\} = (\delta_1 \times \delta_2)(\vec{r} \bullet \vec{s}, (L(\vec{p}), \vec{q})),$$

tedy struktura $\mathbb{A}_{hm}$ je kvazi–multiautomat.

Poznámka 5.48 *Výše definovaný kvazi–multiautomat budeme nazývat homogenní direktní součin kvazi–multiautomatů $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2$ s označením $\mathbb{A}_{hm} = \mathbb{A}_1 \times \mathbb{A}_2$.*

Věta 5.49 *Uvažujme kvazi–multiautomat $\mathbb{A}_1 = ((\mathcal{R}_n, \bullet), \mathbb{LA}_n(T), \delta_1)$ a kvazi–multiautomat $\mathbb{A}_3 = ((\mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{R}_1^+), \circ), \mathscr{R}_n^{\mathbb{F}}(\Omega), \delta_3)$ s různými vstupními hypergrupami $(\mathcal{R}_n, \bullet)$ a $(\mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{R}_1^+); \circ)$. Definujme*

$$\mathbb{A}_{het} = ((\mathcal{R}_n, \bullet) \times (\mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{R}_1^+), \circ), \mathbb{LA}_n(T) \times \mathscr{R}_n^{\mathbb{F}}(\Omega), \delta_1 \otimes \delta_3),$$

kde

$$\delta_1 \otimes \delta_3((\vec{r}, \mathbf{A}), (L(\vec{p}), \vec{q})) =$$
$$= (\delta_1((r_0, \dots, r_{n-1}), (p_0, \dots, p_{n-1})), \delta_3((a_{ij}), (q_0, \dots, q_{n-1}))) =$$
$$= \left(L(\vec{r}\vec{p}), \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i1}q_{i1}, \dots, \sum_{i=1}^{n} a_{in}q_{i1} \right) \right),$$

pro všechna $L(\vec{p}) \in \mathbb{LA}_n(T), \vec{q} \in \mathscr{R}_n^{\mathbb{F}}(\Omega), \boldsymbol{A} \in \mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{R}_1^+)$ a $\vec{r} \in \mathcal{R}_n$. Pak $\mathbb{A}_{het}$ je kvazi–multiautomat.

Důkaz. Ověříme, že struktura $\mathbb{A}_{het}$ je kvazi–multiautomat splňující podmínku GMAC.

Platí

$$(\delta_1 \otimes \delta_3)\,((\vec{s}, \mathbf{B}), (\delta_1 \otimes \delta_3)((\vec{r}, \mathbf{A}), (L(\vec{p}), \vec{p})) \in$$
$$\in (\delta_1 \otimes \delta_3)\,((\vec{r}, \mathbf{A}) \diamond (\vec{s}, \mathbf{B}), (L(\vec{p}), \vec{q})) =$$
$$(\delta_1 \otimes \delta_3)((\vec{r} \bullet \vec{s}, \mathbf{A} \circ \mathbf{B}), (L(\vec{p}), \vec{q})).$$

Provedeme úpravu levé strany:

$$(\delta_1 \otimes \delta_3)\,((\vec{s}, \mathbf{B}), (\delta_1 \otimes \delta_3)((\vec{r}, \mathbf{A}), (L(\vec{p}), \vec{p}))) =$$
$$= (\delta_1 \otimes \delta_3) \left((\vec{s}, \mathbf{B}), \left(L(\vec{r}\vec{p}), \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i1}q_{i-1}, \dots, \sum_{i=1}^{n} a_{in}q_{i-1} \right) \right) \right) =$$
$$\left(L(\vec{s}\vec{r}\vec{p})), \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i1}q_{i-1}, \dots, \sum_{i=1}^{n} a_{in}q_{i-1} \right) \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix} \right) =$$

$$= \left(L(\vec{s}\vec{r}\vec{p}), \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i1}b_{11}q_{i-1} + \ldots + \sum_{i=1}^{n} a_{in}b_{n1}q_{i-1}, \ldots, \right.\right.$$
$$\left.\left. \sum_{i=1}^{n} a_{i1}b_{1n}q_{i-1} + \ldots + \sum_{i=1}^{n} a_{in}b_{nn}q_{i-1} \right)\right).$$

Následně upravíme pravou stranu:

$$(\delta_1 \otimes \delta_3)((\vec{r} \bullet \vec{s}, \mathbf{A} \circ \mathbf{B}), (L(\vec{p}), \vec{q})) =$$
$$= (\delta_1 \otimes \delta_3)\left(\left(\{(t_0, \ldots, t_{n-1}); t_k \geq r_k s_k, k = 0, 1, \ldots, n-1\},\right.\right.$$
$$\left.\left.\left\{ \begin{bmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n1} & \ldots & c_{nn} \end{bmatrix}; c_{ij} \geq \min\{a_{ij}, b_{ij}\}, i, j \in \mathbb{N}_n \right\}\right), (L(\vec{p}), \vec{q})\right) =$$
$$= \left(\{\delta_1((t_0, \ldots, t_{n-1}), L(\vec{p})); t_k \geq r_k s_k, k = 0, 1, \ldots, n-1\}, \right.$$
$$\left. \left\{ \delta_3\left(\begin{bmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n1} & \ldots & c_{nn} \end{bmatrix}, \vec{q} \right); c_{ij} \geq \min\{a_{ij}, b_{ij}\}, i, j \in \mathbb{N}_n \right\} \right) =$$
$$= \left(\{L(\vec{t}\vec{p}); t_k \geq r_k s_k, k = 0, 1, \ldots, n-1\}, \right.$$
$$\left. \left\{ (q_0, \ldots, q_{n-1}) \begin{bmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n1} & \ldots & c_{nn} \end{bmatrix}; c_{ij} \geq \min\{a_{ij}, b_{ij}\}, i, j \in \mathbb{N}_n \right\} \right) =$$

$$= (\{L(\vec{t}\vec{p}); t_k \geq r_k s_k, k = 0, 1, \ldots, n-1\},$$
$$\{(c_{11}q_0 + \ldots + c_{n1}q_{n-1}, \ldots, c_{1n}q_0 + \ldots + c_{nn}q_{n-1});$$
$$c_{ij} \geq \min\{a_{ij}, b_{ij}\}, i, j \in \mathbb{N}_n\}).$$

Stejně jako výše (v důkazu Věty 5.47) obdržíme, že pro $\vec{t} = (t_0, \ldots, t_{n-1}) = (r_0, \ldots, r_{n-1}) \cdot (s_0, \ldots, s_{n-1}) = \vec{r} \cdot \vec{s}$ a pro $c_{ij} = a_{ij}b_{ij}$ s libovolnými dvojicemi indexů $i, j = \{1, 2, \ldots, n\}$ platí

$$(\delta_1 \otimes \delta_3)\,((\vec{s}, \mathbf{B}), (\delta_1 \otimes \delta_3)((\vec{r}, \mathbf{A}), (L(\vec{p}), \vec{p}))) \in (\delta_1 \otimes \delta_3)((\vec{r} \bullet \vec{s}, \mathbf{A} \circ \mathbf{B}), (L(\vec{p}), \vec{q})).$$

Je tedy splněna podmínka GMAC.

Poznámka 5.50 *Výše definovaný kvazi–multiautomat nazveme direktní heterogenní součin kvazi–multiautomatů* $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_3$ *s označením* $\mathbb{A}_{het} = \mathbb{A}_1 \otimes \mathbb{A}_3$.

Lze konstatovat, že zobecnění těchto součinů na případy kvazi–multiautomatů sebou nenese žádné komplikované problémy. Tedy kvazi–multiautomaty se jeví jako vhodný aparát pro vytváření homogenních a heterogenních součinů.

5.3.3 Kartézská kompozice kvazi–multiautomatů

V této sekci se chystáme zobecnit Definici 3.13 Kartézského součinu dvou automatů zavedenou v [34] korespondující s definicemi uvedenými v monografii [7] na případ kvazi–multiautomatů, kterou jsme uvedli v kapitole 3.3 jako Definici 3.13.

Na tomto místě znovu připomeneme definici kvazi–multiautomatu, která je zde nezbytná pro naši další práci.

Definice 5.51 *Kvazi–multiautomat bez výstupu je trojice* $\mathbb{M} = (H, S, \delta)$*, kde* $(H, \cdot)$ *je polohypergrupa,* S *je neprázdná množina a* $\delta : \; A \times S \to S$ *je tranzitní funkce splňující podmínku:*

$$\textbf{\textit{(GMAC)}}\ \delta(b, \delta(a,\ s)) \ \in \ \delta(a \cdot b,\ s) \tag{76}$$

pro všechna $a,\ b\ \in A,\ s \in S$ *(podmínka zobecněné smíšené asociativity - GMAC (the Generalized Mixed Associativity Condition)). Množina* S *se nazývá stavová množina kvazi–multiautomatu* $\mathbb{M}$*, struktura* $(H, \cdot)$ *se nazývá vstupní (polo)–hypergrupa kvazi–automatu* $\mathbb{M}$ *a* δ *je tranzitní funkce. Prvky množiny* S *se nazývají stavy, prvky množiny* A *se nazývají vstupní symboly (nebo také slova).*

Podmínku GMAC (76) je vhodné použít při konstrukci klasických kvazi–multiautomatů nebo při konstrukci součinu homogenního a heterogenního kvazi–multiautomatu, jaké jsme sestavovali výše. Ovšem pro kartézskou kompozici podmínka (76) selhává. To můžeme jednoduše ukázat. Neaplikovatelnost podmínky GMAC demonstrujeme v Příkladu 5.57, který vychází z Definice 3.13 a je konstruován v další části textu.

K řešení problému, kdy podmínka (76) se stává neaplikovatelnou na případ kartézské kompozice, zavádíme dvě modifikace, jejichž terminologie se již v této práci vyskytly. Nyní si tedy představíme co chápeme pod pojmem E-GMCC a SE-GMAC. Pro úplnost poznamenejme, že „E”je odvozeno z anglického slova „extended”a „SE”je odvozeno ze sousloví „small extended”. Dále zaveďme úmluvu, že pro danou množinu I a stav s formulí $\delta(I, s)$ rozumíme množinu $\{\delta(a, s)$ pro všechna $a \in I\}$.

Definice 5.52 *Jestliže v Definici 5.51 změníme podmínku* (76) *na*

$$\delta(y, \delta(x, s)) \in \delta(x \cdot y, s) \cup \delta(I, s) \text{ pro všechna } x, y \in I, s \in S, \tag{77}$$

nazveme tuto podmínku E-GMAC a multiautomat $\mathbb{A}$ *e-kvazi-multiautomatem.*

Tradičně v konceptu multiautomatů nemusí být zahrnut „nulový stav”, který může, ale také nemusí vytvářet problémy v některých dalších úvahách. Protože nulové stavy jsou velmi důležité pro naše další úvahy, což představíme především v důkazu Věty 5.62. Proto zavedeme následující definici.

Definice 5.53 *Jestliže v Definici 5.51 změníme stavovou množinu na* $S \cup \{0\}$ *a podmínku* (76) *na*

$$\delta(y, \delta(x, s)) \in \delta(x \cdot y, s) \cup \{\delta(x, s), \delta(y, s)\} \text{ pro všechna } x, y \in I, s \in S, \tag{78}$$

nazveme tuto podmínku SE-GMAC a multiautomat $\mathbb{A}$ *se-kvazi-multiautomatem.*

Lemma 5.54 *Každý kvazi-multiautomat je e-kvazi-multiautomatem. Jestliže je stavová množina rozšířena o „nulový stav", pak každý kvazi-multiautomat je i se-kvazi-multiautomatem. Jednoduše platnost podmínky GMAC* (76) *implikuje platnost obou podmínek E-GMAC* (77) *a (po rozšíření stavové množiny o „nulový stav") podmínky SE-GMAC* (78).

Důkaz. Důkaz je zřejmý.

Nyní za použití podmínek E-GMAC a SE-GMAC definujeme kartézskou kompozici kvazi-multiautomatů.

Definice 5.55 *Nechť* $\mathbb{A} = (I, S, \delta), \mathbb{B} = (J, T, \sigma)$ *jsou e-kvazi-multiautomaty se vstupními hypergrupami* I, J *a s tranzitními zobrazeními* $\delta : I \times S \to S, \sigma : J \times T \to T$ *splňujícími podmínky*

$$\delta(y, \delta(x, s)) \in \delta(x \cdot y, s) \cup \delta(I, s) \text{ pro všechna } x, y \in I, s \in S, \tag{79}$$

$$\sigma(y, \sigma(x, t)) \in \sigma(x \cdot y, t) \cup \sigma(J, t) \text{ pro všechna } x, y \in I, t \in T. \tag{80}$$

Kartézskou kompozicí $\mathbb{A}$ *a* $\mathbb{B}$, *označenou jako* $\mathbb{A} \cdot_E \mathbb{B}$, *myslíme e-kvazi-multiautomat* $\mathbb{A} \cdot_E \mathbb{B} = (((I \cup J), \diamond), S \times T, \delta \cdot \sigma)$, *kde* $\delta \cdot \sigma$ *je pro všechna* $x \in I \cup J$, $s \in S$ *a* $t \in T$ *definovaná předpisem*

$$(\delta \cdot \sigma)(x, (s, t)) = \begin{cases} (\delta(x, s), t) & \text{když } x \in I, \\ (s, \sigma(x, t)) & \text{když } x \in J, \end{cases}$$

a $\diamond : (I \cup J) \times (I \cup J) \to \mathcal{P}^*(I \cup J)$ *je pro všechna* $x, y \in I \cup J$ *definovaná předpisem*

$$x \diamond y = \begin{cases} xy \subseteq I & \text{když } x, y \in I, \\ xy \subseteq J & \text{když } x, y \in J, \\ \{x, y\} & \text{když } x \in I, y \in J \text{ nebo } x \in J, y \in I \end{cases}$$

a $\delta \cdot \sigma : (I \cup J) \times (S \times T) \to (S \times T)$ *splňující podmínku:*

$$(\delta \cdot \sigma)(y, (\delta \cdot \sigma)(x, (s, t))) \in (\delta \cdot \sigma)(x \diamond y, (s, t)) \cup \{\delta(I, s) \times \sigma(J, t)\}. \tag{81}$$

Definice 5.56 *Jestliže v Definici 5.55 uvažujeme dva se-kvazi-multiautomaty a změníme podmínku* (81) *na*

$$(\delta \cdot \sigma)(y, (\delta \cdot \sigma)(x, (s, t))) \in (\delta \cdot \sigma)(x \diamond y, (s, t)) \cup \{(\delta(x, s), \sigma(y, t)), (\delta(y, s), \sigma(x, t))\}, \tag{82}$$

nazveme výsledek se-kvazi-multiautomat kartézské kompozice se-kvazi-multiautomatů $\mathbb{A}$ *a* $\mathbb{B}$ *s označením* $\mathbb{A} \cdot_{SE} \mathbb{B}$.

Příklad 5.57 demonstruje nedostatečnost podmínky GMAC.

Příklad 5.57 *Uvažujme strukturu* $A_G = A_1 \cdot A_3$ *řádu* $n = 2$ *s konkrétními vstupy* $X = (1, 2), Y = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ *binární hyperoperaci* $\triangle$ *a stavem* $(L(x^2, x), (x, 0))$, *pak struktura nesplňuje GMAC, a tedy není kartézskou kompozicí kvazi–multiautomatů. Vskutku*

$$(\delta_1 \cdot \delta_3)((1, 2), (\delta_1 \cdot \delta_3)(\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, (L(x^2, x), (x, 0)))) \notin$$

$$\notin (\delta_1 \cdot \delta_3)((1, 2) \triangle \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, (L(x^2, x), (x, 0))) =$$

$$\delta_1((1,2),(L(x^2,x),\delta_3(\begin{pmatrix}2 & 4\\ 3 & 1\end{pmatrix},(x,0))) \notin (\delta_1\cdot\delta_3)((1,2)\bigtriangleup\begin{pmatrix}2 & 4\\ 3 & 1\end{pmatrix}(L(x^2,x),(x,0))) =$$

$$\delta_1((1,2),(L(x^2,x),(2x,4x)) \notin (\delta_1\cdot\delta_3)(\{(1,2),\begin{pmatrix}2 & 4\\ 3 & 1\end{pmatrix}\}(L(x^2,x),(x,0))) =$$

$$(L(x^2,2x),(2x,4x)) \notin \{\delta_1((1,2),L(x^2,x))\}\cup\{\delta_3(\begin{pmatrix}2 & 4\\ 3 & 1\end{pmatrix},(x,0))\} =$$

$$(L(x^2,2x),(2x,4x)) \notin \{(L(x^2,2x),(x,0)),(L(x^2,x),(2x,4x))\}.$$

Na levé straně máme prvek, který je tvořen dvěma dvojicemi, ovšem tento prvek nenáleží dvouprvkové množině na straně pravé. Tedy podmínka GMAC není splněna.

Jednoduše můžeme ukázat, že obě modifikace podmínky GMAC řeší tento problém. Pro konkrétní ukázku jsme se rozhodli použít podmínku SE-GMAC a kompletní ukázku představíme v Příkladu 5.63. Ještě než uvedeme příklad, kde SE-GMAC je splněna, zkonstruujeme kartézskou kompozici e-kvazi–multiatutomatu a se-kvazi–multiautomatu. Protože modifikací podmínky GMAC (76) na podmínku E-GMAC (77) získáme na pravé straně poměrně bohatou množinu, můžeme si dovolit obecnější formulaci kvazi–multiautomatu $\mathbb{A}_3$, tím myslíme, že jako vstupní hypergrupu pro e-kvazi–multiautomat můžeme použít množinu $\mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{R}^+)$.

Věta 5.58 *Jestliže ve Větě 5.45 uvažujeme* $(\mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{R}^+),\circ)$ *namísto struktury* $(\mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{R}_1^+),\circ)$, *pak* $\mathbb{A}_4 = ((\mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{R}^+),\circ),\mathscr{R}_n^{\mathbb{F}}(\Omega),\delta_4)$, *kde* $\delta_4\equiv\delta_3$ *je e-kvazi-multiautomat.*

Důkaz. Důkaz na navazuje na důkaz Věty 5.45 a je mu poměrně podobný až na sjednocení pravé strany s množinou $\{\delta_3(\mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{R}^+),\vec{p})\}$, tj.

$$\left\{\delta_3\left(\begin{bmatrix}m_{11} & \dots & m_{1n}\\ \dots & \dots & \dots\\ m_{n1} & \dots & m_{nn}\end{bmatrix},(p_0,\dots,p_{n-1})\right);\text{pro všechna } \mathbf{M}=(m_{ij})\in\mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{R}^+)\right\} =$$

$$=\left\{\sum_{i=1}^{n} m_{i1}p_{i-1},\dots,\sum_{i=1}^{n} m_{in}p_{i-1}; m_{ij}\in\mathbb{R}^+\right\}.$$

Jestliže si uvědomíme, že pro libovolnou dvojici matic $\mathbf{A},\mathbf{B}\in\mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{R}^+)$ a libovolný vektor $\vec{p}\in\mathscr{R}_n^{\mathbb{F}}(\Omega)$ platí $(\vec{p}\cdot\mathbf{A})\cdot\mathbf{B}=\vec{p}\cdot(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})$, můžeme označit každou k-tou sumu $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}$ na levé straně jako $\sum\limits_{i=1}^{n} m_{i1}$ a platnost množinové inkluze požadované pro podmínku E-GMAC je zřejmá.

Tedy již máme zavedené veškeré objekty, které jsou nezbytné pro konstrukci kartézské kompozice dle Definice 5.55 a Definice 5.56. Nejprve začneme s konstrukcí pro E-GMAC.

Věta 5.59 *Uvažujme e–kvazi–multiautomaty* $\mathbb{A}_1$ *a* $\mathbb{A}_3$ *konstruované s použitím Věty 5.42 a Věty 5.58. Definujme*

$$(\delta_1\cdot\delta_3):(\mathcal{R}_n\cup\mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{R}^+))\times(\mathbb{LA}_n(T)\times\mathscr{R}_n^{\mathbb{F}}(\Omega))\to\mathbb{LA}_n(T)\times\mathscr{R}_n^{\mathbb{F}}(\Omega)$$

pravidlem

$$(\delta_1 \cdot \delta_3)(X, (L(\vec{p}), \vec{q})) = \begin{cases} (\delta_1(X, L(\vec{p})), \vec{q}) & \textit{když } X = \vec{r} \in \mathcal{R}_n, \\ (L(\vec{p}), \delta_3(X, \vec{q})) & \textit{když } X = \mathbf{A} \in \mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{R}^+). \end{cases} \tag{83}$$

Pak struktura $(((\mathcal{R}_n \cup \mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{R}^+)), \triangle), \mathbb{LA}_n(T) \times \mathscr{R}_n^{\mathbb{F}}(\Omega), \delta_1 \cdot \delta_3)$ *je kartézská kompozice* $\mathbb{A}_1 \cdot_E \mathbb{A}_3$.

Důkaz. Ukážeme, že struktura $(((\mathcal{R}_n \cup \mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{R}^+)), \triangle), \mathbb{LA}_n(T) \times \mathscr{R}_n^{\mathbb{F}}(\Omega), \delta_1 \cdot \delta_3)$ splňuje E–GMAG. Máme čtyři případy:

1) $X = \vec{r} \in \mathcal{R}_n$, $Y = \vec{s} \in \mathcal{R}_n$,

2) $X = \mathbf{A} \in \mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{R}^+)$, $Y = \mathbf{B} \in \mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{R}^+)$,

3) $X = \vec{r} \in \mathcal{R}_n$, $Y = \mathbf{A} \in \mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{R}^+)$,

4) $X = \mathbf{A} \in \mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{R}^+)$, $Y = \vec{r} \in \mathcal{R}_n$.

Musíme ukázat, že podmínka E-GMAG condition (81), tj.

$$\begin{aligned}(\delta_1 \cdot \delta_3)(X, (\delta_1 \cdot \delta_3)(Y, (L(\vec{p}), \vec{q}))) \in (\delta_1 \cdot \delta_3)(X \triangle Y, (L(\vec{p}), \vec{q})) \cup \\ \cup \{\delta_1(\mathcal{R}_n, L(\vec{p})) \times \delta_3(\mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{R}^+), \vec{q})\}\end{aligned} \tag{84}$$

je platná pro všechny případy.
ad 1) V (84) máme: úpravu levé strany:

$$\begin{aligned}(\delta_1 \cdot \delta_3)(X, (\delta_1 \cdot \delta_3)(Y, (L(\vec{p}), \vec{q}))) = (\delta_1(\vec{r}, (\delta_1(\vec{s}, L(\vec{p})), \vec{q}))) = \\ = (\delta_1(\vec{r}, (L(\vec{s}\vec{p}), \vec{q}))) = (L(\vec{r}\vec{s}\vec{p}), \vec{q}).\end{aligned}$$

Úprava pravé strany:

$$\begin{aligned}&(\delta_1 \cdot \delta_3)(X \triangle Y, (L(\vec{p}), \vec{q})) \cup \{\delta_1(\mathcal{R}_n, L(\vec{p})) \times \delta_3(\mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{R}^+), \vec{q})\} = \\ &= \delta_1(\vec{r} \bullet \vec{s}, (L(\vec{p}), \vec{q})) \cup \{\delta_1(\mathcal{R}_n, L(\vec{p})) \times \delta_3(\mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{R}^+), \vec{q})\} = \\ &= \bigcup_{\vec{t} \geq \vec{r}\vec{s}} \left(\delta_1\left(\vec{t}, L(\vec{p})\right), \vec{q}\right) \cup \left\{ \bigcup_{\vec{r} \in \mathcal{R}_n} \delta_1\left(\vec{r}, L(\vec{p})\right) \times \bigcup_{\mathbf{A} \in \mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{R}^+)} \delta_3\left(\vec{q}, \mathbf{A}\right) \right\} = \\ &= \{(L(\vec{t}\vec{p}), \vec{q}); \vec{t} \geq \vec{r}\vec{s}\} \cup \{(L(\vec{r}\vec{p}), \vec{\varphi}); \vec{r} \in \mathcal{R}_n, \vec{\varphi} \in \mathscr{R}_n^{\mathbb{F}}(\Omega)\}.\end{aligned}$$

Pro $\vec{t} = \vec{r}\vec{s}$ získáme

$$(L(r_0 s_0 p_0, \ldots, r_{n-1} s_{n-1} p_{n-1}), \vec{q}) = (L(t_0 p_0, \ldots, t_{n-1} p_{n-1}), \vec{q}),$$

kde $\vec{t} \in \mathcal{R}_n$. Tedy

$$\begin{aligned}(L(r_0 s_0 p_0, \ldots, r_{n-1} s_{n-1} p_{n-1}), \vec{q}) \in \{(L(\vec{t}\vec{p}), \vec{q}); \vec{t} \geq \vec{r}\vec{s}\} \cup \\ \{(L(\vec{r}\vec{p}), \vec{\varphi}); \vec{r} \in \mathcal{R}_n, \vec{\varphi} \in \mathscr{R}_n^{\mathbb{F}}(\Omega)\}\end{aligned}$$

a podmínka E-GMAC je splněna.

ad 2) V předpisu (84) máme: Zjednodušení levé strany:

$$\delta_3(\mathbf{A},(L(\vec{p}),\delta_3(\mathbf{B},\vec{q}))) = \delta_3\left(\mathbf{A},\left(L(\vec{p}),(q_0,\dots,q_{n-1})\cdot\begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n}\\ \dots & \dots & \dots\\ b_{m1} & \dots & b_{mn}\end{bmatrix}\right)\right) =$$
$$= \delta_3\left(\mathbf{A},\left(L(\vec{p}),\left(\sum_{i=1}^{n} b_{i1}q_{i-1},\dots,\sum_{i=1}^{n} b_{in}q_{i-1}\right)\right)\right) =$$
$$= \left(L(\vec{p}),\delta_3\left(\mathbf{A},\left(\sum_{i=1}^{n} b_{i1}q_{i-1},\dots,\sum_{i=1}^{n} b_{in}q_{i-1})\right)\right)\right) =$$
$$= \left(L(\vec{p}),\left(\sum_{i=1}^{n} b_{i1}q_{i-1},\dots,\sum_{i=1}^{n} b_{in}q_{i-1})\right)\cdot\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n}\\ \dots & \dots & \dots\\ a_{m1} & \dots & a_{mn}\end{bmatrix}\right) =$$
$$= \left(L(\vec{p}),a_{11}\sum_{i=1}^{n} b_{i1}q_{i-1}+\ldots+a_{n1}\sum_{i=1}^{n} b_{in}q_{i-1},\dots,a_{1n}\sum_{i=1}^{n} b_{i1}q_{i-1}+\ldots+a_{nn}\sum_{i=1}^{n} b_{in}q_{i-1}\right).$$

Zjednodušením pravé strany: Získáme

$$\delta_3(\mathbf{A}\circ\mathbf{B},(L(\vec{p}),\vec{q}))\cup\{\delta_1(\mathcal{R}_n,L(\vec{p}))\times\delta_3(\mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{R}^+),\vec{q})\},$$

které je sjednocením dvou množin. Pro jednodušší manipulaci budeme upravovat obě množiny zvlášť.

První,

$$\delta_3(\mathbf{A}\circ\mathbf{B},(L(\vec{p}),\vec{q})) =$$
$$= \delta_3(\mathbf{C}=\{c_{ij};c_{ij}\leq\min\{a_{ij},b_{ij}\},i,j\in\mathbb{N}_n\},(L(\vec{p}),(\vec{q}))) =$$
$$= \{(L(\vec{p}),(\vec{q}\cdot\mathbf{C}=\{c_{ij};c_{ij}\leq\min\{a_{ij},b_{ij}\},i,j\in\mathbb{N}_n\})\} =$$

$$= \{(L(\vec{p}),c_{11}q_0+\cdots+c_{n1}q_{n-1},\cdots,c_{1n}q_0+\cdots+c_{nn}q_{n-1});$$
$$c_{ij}\leq\min\{a_{ij},b_{ij}\},i,j\in\mathbb{N}_n\}.$$

Chceme ukázat, že dvojice na levé straně je obsažená v množině na straně pravé. Protože první komponenty jsou stejné, musíme se soustředit na druhou komponentu. Levou stranu můžeme rozepsat a první komponentu vektoru přepsat na formu

$$q_0(a_{11}b_{11}+a_{21}b_{12}+\ldots+a_{n1}b_{1n})+q_1(a_{11}b_{21}+a_{21}b_{22}+\ldots+a_{n1}b_{2n})+$$
$$+\ldots q_{n-1}(\ldots). \quad (85)$$

Označme součet i-té závorky jako S_i. Musíme porovnat výraz (85) a součet

$$c_{11}q_0+\cdots+c_{n1}q_{n-1}. \quad (86)$$

Je zřejmé, že $a_{ij},b_{ij}\geq 1$ pro všechna $i,j\in\mathbb{N}_n$, tj. uvažujeme $\mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{R}_1^+)$ namísto $\mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{R}^+)$. Rozepsání (85) je prvek generovaný hlavním koncem prvku (86), tj. je větší nebo roven prvku (85). Důkaz pro ostatní komponenty je analogický.

Druhá,

$$\{\delta_1(\mathcal{R}_n, L(\vec{p})) \times \delta_3(\mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{R}^+), \vec{q})\} =$$

$$= \left\{ \bigcup_{\vec{r}\in\mathcal{R}_n} \delta_1(\vec{r}, L(\vec{p})) \times \bigcup_{\mathbf{A}\in\mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{R}^+)} \delta_3(\vec{q}, \mathbf{A}) \right\} = \{(L(\vec{r}\vec{p}), \vec{\varphi}); \vec{r} \in \mathcal{R}_n, \vec{\varphi} \in \mathscr{R}_n^{\mathbb{F}}(\Omega)\}.$$

Pro $\vec{r} = (1, \cdots, 1)$ a

$$\vec{\varphi} = a_{11}\sum_{i=1}^{n} b_{i1}q_{i-1} + \ldots + a_{n1}\sum_{i=1}^{n} b_{in}q_{i-1}, \ldots, a_{1n}\sum_{i=1}^{n} b_{i1}q_{i-1} + \ldots + a_{nn}\sum_{i=1}^{n} b_{in}q_{i-1}$$

máme

$$\{(L(\vec{p}), c_{11}q_0 + \cdots + c_{n1}q_{n-1}, \cdots, c_{1n}q_0 + \cdots + c_{nn}q_{n-1}); \\ c_{ij} \leq \min\{a_{ij}, b_{ij}\}, i, j \in \mathbb{N}_n)\} = (L(\vec{r}\vec{p}), \vec{\varphi}).$$

Tedy podmínka E-GMAC je splněna, a to i v případech, kde $a_{ij}, b_{ij} \in \langle 0, 1)$ pro nějaké $i, j \in \mathbb{N}_n$. (záporné hodnoty nejsou obsaženy v definici $\mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{R}^+)$.)
ad 3) V (84) máme: Výpočet levé strany:

$$(\delta_1 \cdot \delta_3)(\vec{r}, (\delta_1 \cdot \delta_3)(\mathbf{A}, (L(\vec{p}), \vec{q}))) = (\delta_1(\vec{r}, (\delta_3(\mathbf{A}, L(\vec{p})), \vec{q}))) = \\ = (\delta_1(\vec{r}, (L(\vec{p}), \vec{\varphi}))) = (L(\vec{r}\vec{p}), \vec{\varphi}).$$

Výpočet pravé strany:

$$(\delta_1 \cdot \delta_3)(\vec{r} \triangle \mathbf{A}, (L(\vec{p}), \vec{q})) \cup \{\delta_1(\mathcal{R}_n, L(\vec{p})) \times \delta_3(\mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{R}^+), \vec{q})\} = \\ = (\delta_1 \cdot \delta_3)(\{\vec{r}, \mathbf{A}\}, (L(\vec{p}), \vec{q})) \cup \{\delta_1(\mathcal{R}_n, L(\vec{p})) \times \delta_3(\mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{R}^+), \vec{q})\} =$$

$$= \delta_1(\vec{r}, (L(\vec{p}), \vec{q})) \cup \delta_3(\mathbf{A}, L(\vec{p}), \vec{q}) \cup \left\{ \bigcup_{\vec{r}\in\mathcal{R}_n} \delta_1(\vec{r}, L(\vec{p})) \times \bigcup_{\mathbf{A}\in\mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{R}^+)} \delta_3(\vec{q}, \mathbf{A}) \right\} =$$

$$= \{(L(\vec{r}\vec{p}), \vec{q}); \vec{r} \in \mathcal{R}_n\} \cup \{(L(\vec{p}), \vec{\varphi}); \vec{\varphi} \in \mathscr{R}_n^{\mathbb{F}}(\Omega)\} \\ \cup \{(L(\vec{r}\vec{p}), \vec{\varphi}); \vec{r} \in \mathcal{R}_n, \vec{\varphi} \in \mathscr{R}_n^{\mathbb{F}}(\Omega)\}.$$

Tedy prvek $(L(\vec{r}\vec{p}), \vec{\varphi})$ na levé straně je zahrnut v rozšířené množině $\{(L(\vec{r}\vec{p}), \vec{\varphi}); \vec{r} \in \mathcal{R}_n, \vec{\varphi} \in \mathscr{R}_n^{\mathbb{F}}(\Omega)\}$ a podmínka E-GMAC je splněna i v tomto případě.
ad 4 V (84) máme: Úprava levé strany:

$$(\delta_1 \cdot \delta_3)(\mathbf{A}, (\delta_1 \cdot \delta_3)(\vec{r}, (L(\vec{p}), \vec{q}))) = (\delta_3(\mathbf{A}, (\delta_1(\vec{r}, L(\vec{p})), \vec{q}))) = \\ = (\delta_3(\mathbf{A}, (L(\vec{r}\vec{p}), \vec{q}))) = (L(\vec{r}\vec{p}), \vec{\varphi}).$$

Úprava na straně pravé:

$$(\delta_1 \cdot \delta_3)(\mathbf{A} \triangle \vec{r}, (L(\vec{p}), \vec{q})) \cup \{\delta_1(\mathcal{R}_n, L(\vec{p})) \times \delta_3(\mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{R}^+), \vec{q})\} = \\ = (\delta_1 \cdot \delta_3)(\{\mathbf{A}, \vec{r}\}, (L(\vec{p}), \vec{q})) \cup \{\delta_1(\mathcal{R}_n, L(\vec{p})) \times \delta_3(\mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{R}^+), \vec{q})\} =$$

$$= \delta_3(\mathbf{A}, (L(\vec{p}), \vec{q})) \cup \delta_1(\vec{r}, L(\vec{p}), \vec{q}) \cup \left\{ \bigcup_{\vec{r}\in\mathcal{R}_n} \delta_1(\vec{r}, L(\vec{p})) \times \bigcup_{\mathbf{A}\in\mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{R}^+)} \delta_3(\vec{q}, \mathbf{A}) \right\} =$$

$$= \{(L(\vec{p}),\vec{\varphi});\vec{\varphi}\in\mathscr{R}_n^{\mathbb{F}}(\Omega)\}\cup\{(L(\vec{r}\vec{p}),\vec{q});\vec{r}\in\mathcal{R}_n\} \cup\{(L(\vec{r}\vec{p}),\vec{\varphi});\vec{r}\in\mathcal{R}_n,\vec{\varphi}\in\mathscr{R}_n^{\mathbb{F}}(\Omega)\}.$$

Tedy prvek $(L(\vec{r}\vec{p}),\vec{\varphi})$ na levé straně je obsažen v rozšířené množině $\{(L(\vec{r}\vec{p}),\vec{\varphi});\vec{r}\in\mathcal{R}_n,\vec{\varphi}\in\mathscr{R}_n^{\mathbb{F}}(\Omega)\}$ a podmínka E-GMAC je splněna.

Pro všechny možnosti podmínka E-GMAC platí, tedy struktura

$$((\mathcal{R}_n\cup\mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{R}^+)),\mathbb{LA}_n(T)\times\mathscr{R}_n^{\mathbb{F}}(\Omega),\delta_1\cdot\delta_3)$$

je e–kvazi–multiautomat.

Poznámka 5.60 *Všimněme si, že v případě "ad 1)" důkazu výše by bylo použití podmínky GMAC naprosto dostačující.*

Následující příklad je zařezen pro lepší pochopení výpočtu v části „ad 2)" důkazu Věty 5.59 uvedeného výše. Zejména si můžeme všimnout, že jisté podobnosti s Příkladem 5.46, kde bylo mutné omezení koeficientu, tj. vstupní struktura byla $(\mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{R}_1^+),\circ)$. Dále tento příklad můžeme porovnat s částí důkazu Věty 5.62, kde můžeme vidět jistou souvislost právě s omezením koeficientů.

Příklad 5.61 *Předpokládejme kartézskou kompozici e–kvazi–multiautomatů $\mathbb{A}_1$ a $\mathbb{A}_4$ se specifickými prvky vstupů a stavů, kde $L(\vec{p})=L(x^2,\mathrm{e}^x)$, $\vec{q}=(1,1)$ a $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0.8&0.1\\0.3&0.4\end{bmatrix}$ a $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}0.7&0.1\\0.1&0.3\end{bmatrix}$. Pak podmínka E-GMAC (81) je tvaru*

$$\delta_3\left(\begin{bmatrix}0.8&0.1\\0.3&0.04\end{bmatrix},\delta_3\left(\begin{bmatrix}0.7&0.1\\0.1&0.3\end{bmatrix},(L(x^2,\mathrm{e}^x),(1,1))\right)\right)\in$$
$$\in\delta_3\left(\begin{bmatrix}0.8&0.1\\0.3&0.04\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix}0.7&0.1\\0.1&0.3\end{bmatrix},(L(x^2,\mathrm{e}^x),(1,1))\right)\cup$$
$$\cup\left\{\delta_1(\mathcal{R}_2,L(x^2,\mathrm{e}^x))\times\delta_3(\mathbb{M}_{2,2}(\mathbb{R}^+),(1,1))\right\},$$

tj.

$$\delta_3\left(L(x^2,\mathrm{e}^x),\left(\begin{bmatrix}0.8&0.1\\0.3&0.04\end{bmatrix},(0.8,0.4)\right)\right)\in$$
$$\in\delta_3\left(L(x^2,\mathrm{e}^x),\left(\left\{\begin{bmatrix}c_{11}&c_{12}\\c_{21}&c_{22}\end{bmatrix};c_{11}\geq 0.7,c_{12}\geq 0.1,c_{21}\geq 0.1,c_{22}\geq 0.3\right\},(1,1)\right)\right)\cup$$
$$\cup\left\{\{L(r_0x^2,r_1\mathrm{e}^x);r_0,r_1\in\mathcal{R}_2\}\times\{(\varphi_0,\varphi_1);\varphi_0,\varphi_1\in\mathscr{R}_2^{\mathbb{F}}(\Omega)\}\right\},$$

tj.

$$\left(L(x^2,\mathrm{e}^x),(0.652,0.096)\right)\in$$
$$\in\left\{(L(x^2,\mathrm{e}^x),(c_{11}+c_{21},c_{12}+c_{22}));c_{11}+c_{21}\geq 0.8,c_{12}+c_{22}\geq 0.4\right\}\cup$$
$$\cup\left\{(L(r_0x^2,r_1\mathrm{e}^x),(\varphi_0,\varphi_1));r_0,r_1\in\mathcal{R}_2,\varphi_0,\varphi_1\in\mathscr{R}_2^{\mathbb{F}}(\Omega)\right\}.$$

V tomto posledním sjednocení označíme první množinu X a druhou Y. Podmínka E-GMAC (81) *platí díky množině Y. Za účelem zajištění platnosti GMAC* (76)*, která je reprezentovaná pouze mmožinou X, bychom byli nuceni stanovit omezení $a_{ij}, b_{ij} \geq 1$ pro všechna $i, j \in \{1, 2\}$ na prvcích matic $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{M}_{2,2}(\mathbb{R}^+)$. Poznamenejme, že tato podmínka je dostačující, ale není nutná.*

V níže uvedené Větě 5.62 si všimněme, že „nulový stav"je zásadní v důkazu věty ve spojení s $\delta_2(\vec{s}, \vec{q})$, kde zobrazení δ_2 není definováno pro $\vec{s}$ a pro $\vec{q}$. Nulový stav pro množinu $\mathscr{R}_n^{\mathbb{F}}(\Omega)$ je vektor ϱ, v němž každá n-tá komponenta je rovna nule, tj. $(0, \ldots, 0)$, pro možinu $\mathbb{LA}_n(T)$ je to operátor $L(0, \ldots, 0)$, který koresponduje s diferenciální rovnicí $y^{(n)}(t) = 0$.

Věta 5.62 *Uvažujme se-kvazi-multiautomaty $\mathbb{A}_1$ a $\mathbb{A}_3$ konstruované ve Větě 5.42 a Větě 5.45 v daném pořadí. Definujme*

$$(\delta_1 \cdot \delta_2) : (\mathcal{R}_n \cup \mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{R}_1^+)) \times (\mathbb{LA}_n(T) \times \mathscr{R}_n^{\mathbb{F}}(\Omega)) \to \mathbb{LA}_n(T) \times \mathscr{R}_n^{\mathbb{F}}(\Omega)$$

pravidlem

$$(\delta_1 \cdot \delta_2)(X, (L(\vec{p}), \vec{q})) = \begin{cases} (\delta_1(X, L(\vec{p})), \vec{q}) & \textit{if } X = \vec{r} \in \mathcal{R}_n, \\ (L(\vec{p}), \delta_2(X, \vec{q})) & \textit{if } X = \mathbf{A} \in \mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{R}_1^+), \\ \delta_1(X, L(\vec{p})) = 0 & \textit{if } X = \mathbf{A} \in \mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{R}_1^+), \\ \delta_2(X, \vec{q}) = 0 & \textit{if } X = \vec{r} \in \mathcal{R}_n, \end{cases} \tag{87}$$

Pak struktura $(((\mathcal{R}_n \cup \mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{R}_1^+)), \triangle_1), \mathbb{LA}_n(T) \times \mathscr{R}_n^{\mathbb{F}}(\Omega), \delta_1 \cdot \delta_2)$, kde $\triangle_1$ je zúžené zobrazení $\triangle$ (75) *na množinu $\mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{R}_1^+)$, je kartézská kompozice $\mathbb{A}_1 \cdot_{SE} \mathbb{A}_2$.*

Důkaz. Ukážeme, že struktura $(((\mathcal{R}_n \cup \mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{R}_1^+)), \triangle_1), \mathbb{LA}_n(T) \times \mathscr{R}_n^{\mathbb{F}}(\Omega), \delta_1 \cdot \delta_2)$ splňuje podmínku SE-GMAC. Poznamenejme, že důkaz do jisté míry kopíruje důkaz Věty 5.59. Ve všech případech 1) – 4) jsou levé strany výrazů identické jako u důkazu Věty 5.59. Z tohoto důvodů je nezahrnujeme. Opět platí, že máme čtyři případy:

1) $X = \vec{r} \in \mathcal{R}_n$, $Y = \vec{s} \in \mathcal{R}_n$,

2) $X = \mathbf{A} \in \mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{R}_1^+)$, $Y = \mathbf{B} \in \mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{R}_1^+)$,

3) $X = \vec{r} \in \mathcal{R}_n$, $Y = \mathbf{A} \in \mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{R}_1^+)$,

4) $X = \mathbf{A} \in \mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{R}_1^+)$, $Y = \vec{r} \in \mathcal{R}_n$.

Ukážeme, že podmínka SE-GMAG

$$\begin{aligned}(\delta_1 \cdot \delta_2)(X, (\delta_1 \cdot \delta_2)(Y, (L(\vec{p}), \vec{q}))) \in (\delta_1 \cdot \delta_2)(X \triangle_1 Y, (L(\vec{p}), \vec{q})) \cup \\ \cup \{(\delta_1(X, L(\vec{p})), \delta_2(Y, \vec{q})), (\delta_1(Y, L(\vec{p})), \delta_2(X, \vec{q}))\}\end{aligned} \tag{88}$$

je splněna pro všechny čtyři případy. Pro jednodušší manipulaci definujeme

$$\vec{q} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} = \vec{\varphi}.$$

ad 1) V (88) máme: Výpočet levé strany najdeme v důkazu Věty 5.59. Výpočet pravé strany:

$$\begin{aligned}
&\delta_1(\vec{r} \bullet \vec{s}, (L(\vec{p}), \vec{q})) \cup \{(\delta_1(\vec{r}, L(\vec{p})), \delta_2(\vec{s}, \vec{q})), (\delta_1(\vec{s}, L(\vec{p})), \delta_2(\vec{r}, \vec{q}))\} = \\
&= \bigcup_{\vec{t} \geq \vec{r}\vec{s}} \left(\delta_1\left(\vec{t}, L(\vec{p})\right), \vec{q}\right) \cup \{(L(\vec{r}\vec{p}), 0), (L(\vec{s}\vec{p}), 0)\} = \\
&= \{(L(\vec{t}\vec{p}), \vec{q}); \vec{t} \geq \vec{r}\vec{s}\} \cup \{(L(\vec{r}\vec{p}), 0), (L(\vec{s}\vec{p}), 0)\}.
\end{aligned}$$

Pro $\vec{t} = \vec{r}\vec{s}$ máme

$$(L(r_0 s_0 p_0, \ldots, r_{n-1} s_{n-1} p_{n-1}), \vec{q}) = (L(t_0 p_0, \ldots, t_{n-1} p_{n-1}), \vec{q}),$$

kde $t \in \mathcal{R}_n$. Tedy

$$(L(r_0 s_0 p_0, \ldots, r_{n-1} s_{n-1} p_{n-1}), \vec{q}) \in \{(L(\vec{t}\vec{p}), \vec{q}); \vec{t} \geq \vec{r}\vec{s}\} \cup \{(L(\vec{r}\vec{p}), 0), (L(\vec{s}\vec{p}), 0)\}$$

a podmínka SE-GMAC platí.
ad 2) V (88) máme: Úpravu levé strany najdeme v důkazu Věty 5.59. Úprava pravé strany:

$$\begin{aligned}
(\delta_1 \cdot \delta_2)(\mathbf{A} \triangle \mathbf{B}, (L(\vec{p}), \vec{q})) \cup \{(\delta_1(\mathbf{A}, L(\vec{p})), \delta_2(\mathbf{B}, \vec{q})), (\delta_1(\mathbf{B}, L(\vec{p})), \delta_2(\mathbf{A}, \vec{q}))\} = \\
= \delta_2(\mathbf{A} \triangle \mathbf{B}, (L(\vec{p}), \vec{q})) \cup \{(0, \delta_2(\mathbf{A}, \vec{q})), (0, \delta_2(\mathbf{B}, \vec{q}))\} = \\
= \{(L(\vec{p}), \vec{q} \cdot \mathbf{C}); \mathbf{C} = (c_{ij}); c_{ij} \geq \min\{a_{ij}, b_{ij}\}, i, j \in \mathbb{N}_n\} \cup \\
\cup \{(0, \delta_2(\mathbf{A}, \vec{q})), (0, \delta_2(\mathbf{A}, \vec{q}))\}
\end{aligned}$$

V tomto bodě vzpomeňme důkaz Věty 5.59, část “ad 2)”. Znovu máme sjednocení dvou množin. Prvek na levé straně nemůže být nikdy obsažen v druhé množině na straně pravé. Proto podmínka SE-GMAC může být splněna jen, když prvek nalevo je obsažen v

$$\{(L(\vec{p}), \vec{q} \cdot \mathbf{C}); \mathbf{C} = (c_{ij}); c_{ij} \geq \min\{a_{ij}, b_{ij}\}, i, j \in \mathbb{N}_n\}.$$

Avšak jak jsme již ukázali v důkazu Věty 5.59 v části “ad 2)”, platnost tohoto tvrzení, tj. na *postačující* podmínce $a_{ij}, b_{ij} \geq 1$ pro všechna $i, j \in \mathbb{N}_n$.
ad 3) V (88) máme: Přepis levé strany najdeme v důkazu Věty 5.59. Pravou stranu přepíšeme do tvaru:

$$\begin{aligned}
(\delta_1 \cdot \delta_2)(\vec{r} \triangle \mathbf{A}, (L(\vec{p}), \vec{q})) \cup \{(\delta_1(\vec{r}, L(\vec{p})), \delta_2(\mathbf{A}, \vec{q})), (\delta_1(\mathbf{A}, L(\vec{p})), \delta_2(\vec{r}, \vec{q}))\} = \\
= (\delta_1 \cdot \delta_2)(\{\vec{r}, \mathbf{A}\}, (L(\vec{p}), \vec{q})) \cup \{(L(\vec{r}\vec{p}), \vec{\varphi}), (0, 0)\} = \\
= \delta_1(\vec{r}, (L(\vec{p}), \vec{q})) \cup \delta_2(\mathbf{A}, (L(\vec{p}), \vec{q})) \cup \{(L(\vec{r}\vec{p}), \vec{\varphi}), (0, 0)\} = \\
= \{(L(\vec{r}\vec{p}), \vec{q}); \vec{r} \in \mathcal{R}_n\} \cup \{(L(\vec{p}), \vec{\varphi}); \vec{\varphi} \in \mathscr{R}_n^{\mathbb{F}}(\Omega)\} \cup \{(L(\vec{r}\vec{p}), \vec{\varphi}), (0, 0)\}.
\end{aligned}$$

Tedy prvek $(L(\vec{r}\vec{p}), \vec{\varphi})$ levé strany je přímo zahrnutv rozšířené množině $\{(L(\vec{r}\vec{p}), \vec{\varphi}), (0, 0)\}$ a podmínka SE–GMAC platí i pro tento případ.
ad 4) V (88) máme: Úpravu levé strany najdeme v důkazu Věty 5.59. Úprava pravé strany:

$$\begin{aligned}
(\delta_1 \cdot \delta_2)(\{\mathbf{A}, \vec{r}\}, (L(\vec{p}), \vec{q})) \cup \{(\delta_1(\mathbf{A}, L(\vec{p})), \delta_2(\vec{r}, \vec{q})), (\delta_1(\vec{r}, L(\vec{p})), \delta_2(\mathbf{A}, \vec{q}))\} = \\
= \delta_2(\mathbf{A}, (L(\vec{p}), \vec{q})) \cup \delta_1((\vec{r}, L(\vec{p})), \vec{q}) \cup \{(0, 0), (L(\vec{r}\vec{p}), \vec{\varphi})\} = \\
= \{(L(\vec{p}), \vec{\varphi}); \vec{\varphi} \in \mathscr{R}_n^{\mathbb{F}}(\Omega)\} \cup \{(L(\vec{r}\vec{p}), \vec{q}); \vec{r} \in \mathcal{R}_n\} \cup \{(0, 0), (L(\vec{r}\vec{p}), \vec{\varphi})\}.
\end{aligned}$$

Tedy prvek $(L(\vec{r}\vec{p}), \vec{\varphi})$ levé strany je přímo zahrnut v rozšířené množině $\{(0,0), (L(\vec{r}\vec{p}), \vec{\varphi})\}$ a podmínka SE-GMAC je splněna.

Vzhledem k tomu, že pro všechny možné případy podmínka SE-GMAC platí, struktura

$$((\mathcal{R}_n \cup \mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{R}_1^+)), \mathbb{LA}_n(T) \times \mathscr{R}_n^{\mathbb{F}}(\Omega), \delta_1 \cdot \delta_2)$$

je se–kvazi–multiautomat.

Příklad 5.63 *Příklad 5.57 ukazuje, že originální podmínka GMAC nestačí pro konstrukci kartézské kompozice kvazi–multiautomatů* $\mathbb{A}_1$ *and* $\mathbb{A}_3$. *Nicméně jestliže uvažujeme podmínku SE-GMAC* (82) *v kontextu Příkladu 5.57, pak pravá strana počítaná ve formuli* (5.57) *je prodloužena o*

$$\left\{\left(\delta_1\left(\begin{bmatrix}2 & 4\\ 3 & 1\end{bmatrix}, L(x^2,x)\right), \delta_3((1,2),(x,0))\right),\right.$$
$$\left.\left(\delta_1((1,2), L(x^2,x)), \delta_3\left(\begin{bmatrix}2 & 4\\ 3 & 1\end{bmatrix}, (x,0)\right)\right)\right\},$$

tj. sjednocení s množinou $\{(0,0), (L(x^2,2x), (2x,4x))\}$, *která zabezpečuje platnost podmínky.*

Poznámka 5.64 *Koncept kartézské kompozice automatů - uvedený Dörflerem [34] jako nový produkt automatů - je zkoumán v [34] s respektem na souvislost, komutativitu, perfektnost, endomorfní transformace, kongruenci, cyklycitu a další důležité vlastnosti. Studium těchto vlastností v kontextu kvazi–multiautomatů a kartézské kompozice konstruované za použití E-GMAC nebo SE-GMAC by bylo zajímavým předmětem výzkumu. Jak je zřejmé díky speciálnímu zahrnutí „nulového stavu", budou vlastnosti* $\mathbb{A}_i \cdot_E \mathbb{A}_j$ *a* $\mathbb{A}_i \cdot_{SE} \mathbb{A}_j$ *rozdílné. Je také vhodné poznamenat, že musíme diskutovat komutativitu kompozice v pojetí Dörflera [34], tj.* $\mathbb{A}_i \cdot \mathbb{A}_j = \mathbb{A}_j \cdot \mathbb{A}_i$, *a komutativitu s respektem na podmínku GMAC, tj.* $\delta(s, x \cdot y) = \delta(s, y \cdot x)$.

5.4 Systémy tvořené kvazi–multiautomaty

Jak již bylo zmíněno výše, je známý fakt, že algebraická teorie automatů je velmi důležitá a použitelná disciplína v oblasti, ve které se používají různé modifikace automatů [2, 7, 34]. V případě automatů bez výstupu můžeme z volného monoidu nebo grupy získat akci na neprázdné množině. Tyto struktury stejně jako v případě kvazi–multiautomatů mohou tvořit základní kostru dynamických systémů typu vstup–výstup. Následně se pokusíme uvést některé typy příkladů, jak z kvazi–multiautomatů získáme obecný systém vstup-výstup.

Systém vstup–výstup z kvazi–multiautomatů lze získat tak , že ke každému kvazi–multiuatomatu přiřadíme výstup. Můžeme nalézt více variant, jak z kvazi–multiautomatu utvořit systém vstup–výstup. Proto vždy vybereme jeden konkrétní kvazi–multiautomat a představíme na této struktuře, jak můžeme utvořit takovýto systém. Pro jinou variantu přiřazení výstupu použijeme zase jinou konstrukci kvazi–multiautomatu.

Jednou z méně náročných variant je přidání výstupní množiny, která je rovna množině stavů, tj. $S = Y$, kde S je množina stavů a Y je množina výstupní. Pak by systém vstup–výstup tvořený kvazi–multiautomatem z Věty 5.42 měl následující podobu.

Věta 5.65 *Jestliže struktuře* $\mathbb{A}_1 = ((\mathcal{R}_n, \bullet), \mathbb{LA}_n(T), \delta_1)$ *z Věty 5.42 s tranzitní funkcí* $\delta_1 : \mathcal{R}_n \times \mathbb{LA}_n(T) \to \mathbb{LA}_n(T)$ *definovanou předpisem*

$$\delta_1(\vec{r}, L(\vec{p})) = (\vec{r} \cdot L(\vec{p})) = L(r_0 p_0, \ldots, r_{n-1} p_{n-1})$$

přidáme výstupní množinu $\mathbb{LA}_n(T)_Y$ *a výstupní funkci* $\xi_1 : \mathcal{R}_n \times \mathbb{LA}_n(T) \to \mathbb{LA}_n(T)_y$ *definovanou předpisem*

$$\xi_1(\vec{r}, L(\vec{p})) = (\vec{r} \cdot L(\vec{p})) = L(r_0 p_0, \ldots, r_{n-1} p_{n-1}),$$

pak struktura $\mathbb{A}_1 = ((\mathcal{R}_n, \bullet), \mathbb{LA}_n(T), \mathbb{LA}_n(T)_Y, \delta_1, \xi_1)$ *je systém se vstupní strukturou* $(\mathcal{R}_n, \bullet)$ *a s výstupní množinou* $\mathbb{LA}_n(T)_Y$.

Důkaz. Důkaz je spíše zřejmý. Stejně jako v důkazu Věty 5.42 máme splňenou podmínku GMAC, neboť přidání výstupu nemá vliv na platnost podmínky GMAC. Tedy máme vstupní strukturu $(\mathcal{R}_n, \bullet)$ a výstupní množinu $\mathbb{LA}_n(T)_Y$ a relaci reprezentovanou funkcemi δ_1, ξ_1. Tedy $\mathbb{A}_1 = ((\mathcal{R}_n, \bullet), \mathbb{LA}_n(T), \mathbb{LA}_n(T)_Y, \delta_1, \xi_1)$ je systém vstup–výstup.

Další ukázku, jak utvořit systém z kvazi–multiautomatu, budeme demonstrovat pouze na následujícím příkladě. Na rozdíl od předchozí Věty 5.65 přidáme výstup, který je různý od stavové možiny.

Příklad 5.66 *Uvažujme konkrétní kvazi–multiautomat* $\mathbb{G}_2 = ((\mathcal{R}_2, \bullet), \mathbb{JA}_2(T), \delta_1)$ *z Příkladu 5.44. Se zobrazením* $\delta_1 : (\mathcal{R}_2, \bullet) \times \mathbb{JA}_2(T) \to \mathbb{JA}_2(T)$ *definovaným*

$$\delta_1((r_1, r_0), L(0, \Psi(a, t))) = ((r_1, r_0) \cdot L(0, \Psi(a, t))) = L(0, \Psi(r_o \cdot a, t)).$$

To znamená, že po aplikaci vstupu (r_1, r_0) *na stav* $L(0, \Psi(a, t)$ *kvazi–multiautomat přejde do stavu* $\Psi(r_o \cdot a, t)$. *Jestliže zavedeme zobrazení* $\xi_1 : (\mathcal{R}_2, \bullet) \times \mathbb{JA}_2(T) \to M_{mf}$, *kde* M_{mf} *je množina všech modelovacích funkcí Gaussových pulzů zavedené formulí* (20), *pak výstup je dán*

$$\xi_1((r_1, r_0), L(0, \Psi(a, t))) = ((r_1, r_0) \cdot L(0, \Psi(a, t))) = L(0, \Psi(r_o \cdot a, t)) = r_o \cdot a \exp(-2\pi t^2).$$

Tedy struktura $\mathbb{S}_2 = ((\mathcal{R}_2, \bullet), \mathbb{JA}_2(T), M_{mf}, \delta_1, \xi_1)$ *je systém, kde vstupní struktura je* $(\mathcal{R}_2, \bullet)$ *a množina výstupní je* M_{mf}.

Příklad 5.67 *Modifikovali jsme Příklad 2.1 z první části práce a naznačili jsme, jak by mohla být nahrazena matice impedancí za hyperstrukturu formovanou svazem. Tuto modifikaci jsme provedli v Příkladu 5.36. Jestliže připomeneme maticovou rovnost*

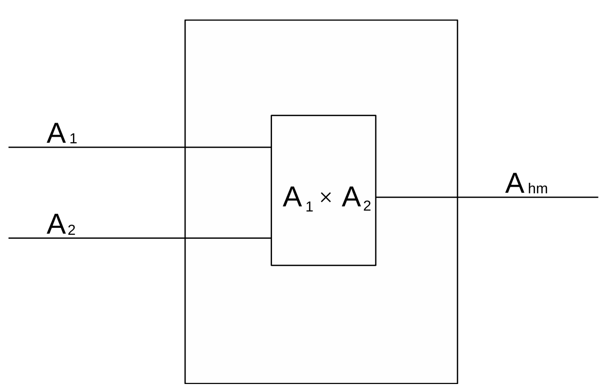
$$\begin{bmatrix} (R_1 + R_2) & -R_2 \\ -R_2 & (R_2 + R_3) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_A \\ I_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{89}$$

kde hodnoty odporů jsou z intervalu dle minimální a maximální hodnoty teplot, pak tento obvod je systém se vstupní hyperstrukturou matic a výstupní množinou proudů. Tedy označme vstupní hypergrupu matic $(\mathbb{M}_{2,2}(R^+), \odot)$*, kde hyperoperace je definovaná předpisem* (71) *a je zúžena na množinu* $\mathbb{M}_{2,2}(R^+)$*,(tvrzení, že se jedná o hypergrupu je zřejmé, to plyne z Důsledku 5.37). Dále označme množinu stavu* $\mathfrak{U}$*, která je tvořena jednou dvojicí prvků* $\mathfrak{U} = \{10; 0\}$*, množinu výstupů* I*, jejímiž prvky jsou dvojice* (I_A, I_B)*. Zaveďme přechodovou funkci* $\delta_S : (\mathbb{M}_{2,2}(R^+), \odot) \times \mathfrak{U} \to \mathfrak{U}$*, která je v tomto příkladě triviální a splňuje podmínku GMAC (platnost je zde zřejmá). Jestliže definujeme výstupní funkci* $\xi_S : (\mathbb{M}_{2,2}(R^+), \odot) \times \mathfrak{U} \to I$ *předpisem* (89)*, pak získáme kvazi–multiautomat s výstupem, což je de facto systém vstup–výstup.*

Je mnoho dalších variant, jak přiřadit takovým kvazi–multiatutomatům výstupní množinu s definovaným výstupním zobrazením, například bychom mohli uvažovat výstup, který je částí stavové množiny, tj. $Y \subset S$. Dále bychom mohli různě modifikovat zobrazení ξ_1, které by mohlo být určeno např. derivací nebo logaritmem.

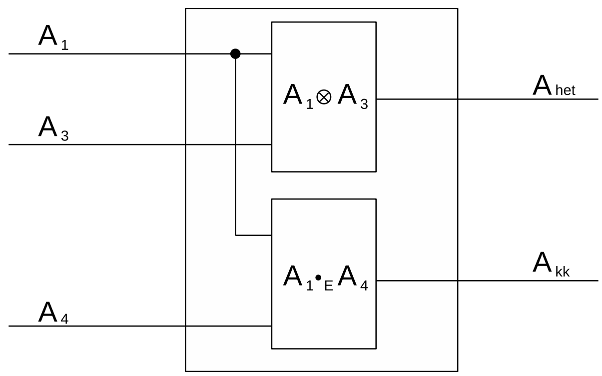
Ovšem zásadní úlohu v této disertační práci hrají součiny automatů zobecněné na případy kvazi–multiautomatů. Pro konstrukce systémů můžeme postupovat jednak způsobem, který byl krátce představen výše, nebo ještě zajímavěji můžeme systémy tvořit jako obecné součiny kvazi–multiautomatů. Tedy kvazi–multiautomaty budou uvažovány jako vstupy systému a výstupem bude některý ze součinů tj. homogenní součin , heterogenní součnin nebo kartézská kompozice. Systémy tvořené součiny kvazi–multiautomatů budeme demonstrovat na několika příkladech.

Příklad 5.68 *Stejně jako ve Větě 5.47 uvažujme dva kvazi–multiautomaty* $\mathbb{A}_1 = ((\mathcal{R}_n, \bullet), \mathbb{LA}_n(T), \delta_1)$ *a* $\mathbb{A}_2 = ((\mathcal{R}_n, \bullet), \mathscr{R}_n^{\mathbb{F}}(\Omega), \delta_2)$ *jako vstupy systému* $\mathbb{S}_{hm}$*. Jestliže přechodová relace* R *systému* $\mathbb{S}_{hm}$ *přesně odpovídá definovanému součinu* $\times$ *ve Větě 5.47, pak kvazi–multiautomat* $\mathbb{A}_{hm}$ *je jednoprvková množina, která je výstupem systému* $\mathbb{S}_{hm}$*. Celý případ demonstrujeme na následujícím obrázku.*



V příkladě 5.68 jsme jednoduše získali systém z homogenního součinu dvou kvazi–multiautomatů. Stejným způsobem lze takto přímo získat systémy z ostatních dvou součinů konstruovaných ve Větě 5.49 a ve Větě 5.59 nebo ve Větě 5.62. Další zajímavější případy systémů motivovaných systémy budeme demonstrovat na následujících příkladech.

Příklad 5.69 *Uvažujme tři kvazi–multiautomaty $\mathbb{A}_1$, $\mathbb{A}_3$ a $\mathbb{A}_4$, které jsem zkonstruovali ve Větách 5.42, 5.45 a 5.58 v daném pořadí. Tyto kvazi–multiautomaty chápeme jako vstupní symboly systému $\mathbb{S}_D$. Jestliže přechodová relace odpovídá součinům „$\otimes$"a „$\cdot_E$"z Věty 5.49 a Definice 5.52, pak jako výstup systému chápeme dvouprvkovou množinu $\{\mathbb{A}_{het}, \mathbb{A}_{kk}\}$. Systém $\mathbb{S}_D$ je znázorněn na následujícím obrázku.*



V dosud uvedených příkladech této kapitoly (5.65, 5.66, 5.67, 5.68, 5.69) jsme formulovali systém v pojetí M. Mesaroviće a Y. Takaharyho, kde přechodová relace mezi vstupem a výstupem systému je formulovaná pomocí přechodových funkcí, které jsou definovány pro konkrétný kvazi–multiautomaty, jenž jsou konstrukčními elementy systému.

Uvedeme další příklad systému, kde konstrukční elementy jsou námi zkonstruované kvazi–multiautomaty, a popíšeme vazby mezi těmito kvazi–multiautomaty pomocí matice, tak jak tuto problematiku představuje Sadovskij.

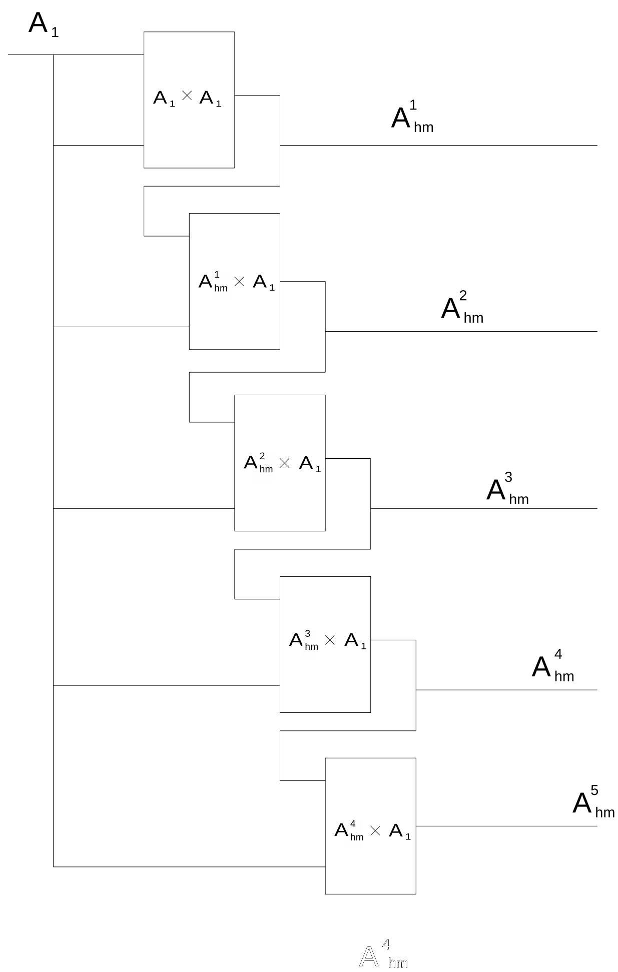
Příklad 5.70 *Uvažujme kvazi–multiautomat $\mathbb{A}_1$ formulovaný ve Větě 5.42. Jestliže uvažujeme homogenní součin kvazi–multiautomatů $\mathbb{A}_1 \times \mathbb{A}_1$, pak podmínka GMAC je splňena, to můžeme jednoduše ukázat. Pro kvazi–multiautomat $\mathbb{A}_1$ sestavíme kaskádový systém $\mathbb{S}_{Kas}$, který je znázorněn na Obrázku 14. Vstupem kaskádového systému $\mathbb{S}_{Kas}$ je právě kvazi–multiautomat $\mathbb{A}_1$ a výstupem je množina $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}$, kde složky výstupů jsou*

$$\begin{aligned}
y_1 &= A^1_{hm} = \mathbb{A}_1 \times \mathbb{A}_1,\\
y_2 &= A^2_{hm} = (\mathbb{A}_1 \times \mathbb{A}_1) \times \mathbb{A}_1,\\
y_3 &= A^3_{hm} = ((\mathbb{A}_1 \times \mathbb{A}_1) \times \mathbb{A}_1) \times \mathbb{A}_1,\\
y_4 &= A^4_{hm} = (((\mathbb{A}_1 \times \mathbb{A}_1) \times \mathbb{A}_1) \times \mathbb{A}_1) \times \mathbb{A}_1,\\
y_5 &= A^5_{hm} = ((((\mathbb{A}_1 \times \mathbb{A}_1) \times \mathbb{A}_1) \times \mathbb{A}_1) \times \mathbb{A}_1) \times \mathbb{A}_1.
\end{aligned}$$

Pro takto formulovaný kaskádový systém $\mathbb{S}_{Kas}$ znázorněný diagramem na Obrázlu 14, má maticová struktura systému tvar:

$$\boldsymbol{M}(\mathbb{S})_{Kas} \begin{bmatrix} 0 & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ 0 & 0 & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{34} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{56} \end{bmatrix}. \tag{90}$$

Sestavením maticové struktury systému se zde zabývat nebudeme, to jsme poměrně podrobně popsali v části 3.4.



Obrázek 14: Kaskádový systém $\mathbb{S}_{Kas}$

V minulosti se automaty považovali za systémy, které sloužili pro přenos informací jistého typu. Tato kapitola je věnována systémům vstup–výstup, které jsou vytvářeny kvazi–multiautomaty, jež jsou zobecněním klasických algebraických automatů. Motivaci pro tyto speciální systémy nalézáme v práci profesora Borůvky, který ve svých studiích využíval algebraizace a geometrizace k řešení analytických problémů. Tedy v tomto smyslu zde formalizujeme systémy časových procesů, které jsme představili v části 3.1, a ve zbytku práce jsme se zabývali algebraizací takovýchto signálů.

6 Závěr

Disertační práce na téma Strukturované multisystémy a multiautomaty indukované časovými procesy je z jedné části věnována konstrukcím hyperstruktur lineárních diferenciálních operátorů, které tvoří levé strany diferenciálních rovnic motivovaných časovými procesy používanými často v technických oborech. Tyto struktury jsou následně vyšetřovány z hlediska klasických algebraických vlastností teorie multistruktur, kde jsme dosahli zajímavých výsledků. Významnou tématikou z této oblasti, která přináší nové poznatky, je popis souvislostí mezi strukturami matic formovanými svazy a mezi hyperstrukturami. Ukazali jsme zde jak z kvazi–uspořádáné komutativní pologrupy, která není grupou získat komutativní hypergrupu.

V další čásí sudujeme kvazi–multiautomaty, které jsou opatřeny vstupní (polo-)hypergrupou lineárních diferenciálních operátorů. V kontextu hyperstruktur se zaměřujeme na konstrukce kvazi–multiautomatů, které jsou vhodným zobecněním klasických automatů bez výstupu. V práci se nám podařilo ukázat i jednoduché aplikace těchto multi–automatů, které by mohli sloužit pro popis nejednoznačných dějů v elektronických obvodech. Ve smyslu součnů automatů zavedených W. Dörfelrem se náp podařilo zobecnit tyto součiny na případy kvazi–multiautomatů. Pro seciální případ součinu nazývaný karézská kompozice ovšem selhávaly klasycké postupy, proto jsme představili dvě řešení, které umožňují použít kartézkou kompozici i pro případy kvazi–multiautomatů.

Na konci práce jsme se věnovali systémům vstup–výstup. V minulosti se automaty považovali za systémy, které sloužili pro přenos informací specifického typu. Představili jsme koncepty, podle kterých lze z kvazi–multiautomatů a nebo právě z jejich součinů vytvořit systémy vstup-výstup s popisem vnitřních vazeb. Jako nejzajímavější konstrukce se jeví kaskádová konstrukce, pro kterou lze použít popis vnitřních vazeb, stejně jako množinově relační popis.

Práce je zaměřena především na zobecněné kvazi–multiautomaty a řada z nich je rozvíjena v rámci teorie hyperstruktur. Dále lze studovat homomorfismy uvedených struktur, zejména multi-automatů a vlastnosti pologrup endomorfismů multi-automatů a stejně tak vlastnosti grup automorfismů multi-automatů. Stejně tak by bylo užitečné vyjasnit vztahy mezi vlastnostmi homogenních a lineárních diferenciálních rovnic a algebraickými vlastnostmi hypergrup zkonstruovaných z lineárních diferenciálních operátorů vytvářejících levé strany těchto rovnic.

Reference

[1] ASHRAFI, A. R., MADANSHEKAF, A.: Generalized action of a hypergroup on a set, *Italian J. Pure and Appl. Math.*, 15(3) 1998, s. 127-135. ISSN: 2239-0227.

[2] BAVEL, Z.: The source as a tool in automata. *Information and Control.* 18: 1971, s.140-155. ISSN: 0019-9958.

[3] BERÁNEK, J., CHVALINA, J.: Invariantní podgrupy grup obyčejných lineárních diferenciálních operátorů druhého řádu, *Acta Mathematica 13*, Fac. Nat. Sci. Univ. Nitra 2010, s. 43-47. ISBN: 978-80-8094-781-1.

[4] BERÁNEK, J., CHVALINA, J.: On a certain group of linear second-order differential operators of the Hill-type. *In Acta Mathematica,* Nitra: Faculty of Natural Sci. Constantine the Philosopher University Nitra, 2014, s. 23-27. ISBN: 978-80-558-0613-6.

[5] BERÁNEK, J., CHVALINA, J.: Struktury a multistruktury vytvářené prostory řešení lineárních homogenních diferenciálních rovnic n-tého řádu. *In Acta Mathematica 12, Faculty of natural Sciences, Constantine the Philosopher University*, Nitra: Acta Mathematica 12, Faculty of natural Sciences, Constantine the Philosopher University, 2009, s. 25-32. ISBN: 978-80-8094-614-2.

[6] BERÁNEK, J., CHVALINA, J.: From groups of linear functions to noncommutative transposition hypergroups. *In Department of Mathematics, Report Series*, 7. České Budějovice: Univesity of South Bohemia, 2001. ISBN: 80-7040-392- 6.

[7] BIRKHOFF, G., LIPSON, J. D.: Heterogeneous Algebras, *Journal Combinatorial Theory*, 8 1970, s. 115-133. ISSN: 0097-3165.

[8] BORZOOEI, R. A., VARASTEH, H. R., HASANKHANI, A.: $\mathcal{F}$-Multiautomata on join spaces induced by differential operators, *Appl. Math. (Irvine)*, 5 2014, s. 1386-1391. ISSN: 2152-7385.

[9] CHVALINA, J.: Infinite multiautomata with phase hypergroups of various operators. In *Proc. 10th International Congress on Algebraic Hyperstructures and Applications*, Hošková, Š., Ed.; University of Defense: Brno, 2009, s. 57-69. ISBN: 978-80-7231-688-5.

[10] CHVALINA, J.: *Functional Graphs, Quasi-ordered Sets and Commutative Hypergroups*, Masaryk University, Brno 1995, s. 205. ISBN: 80-210-1148-3.

[11] CHVALINA, J., CHVALINOVÁ, L.: Join space of linear ordinary differential operators of the second order, *Folia Fac. Sci. Nat. Univ. Masarykianae Brunesis, Mathematica*, 13 2003, s. 77-86 (Colloqium on Differential and Difference Equations, CDDE 2003). ISBN: 80-210-3149-2.

[12] CHVALINA, J., HOŠKOVÁ-MAYEROVÁ, Š.: On certain proximities and preorderings on the transposition hypergroups of linear first-order partial differential operators, *An. Şt. Univ. Ovidius Constanţa.* 22(1) 2014, s. 85-103. ISSN: 1224-1784.

[13] CHVALINA, J., HOŠKOVÁ-MAYEROVÁ, Š., NEZHAD, A.D.: General actions of hyperstructures and some applications, *An. Şt. Univ. Ovidius Constanţa*, 21(1) (2013), 59-82. ISSN: 1224-1784.

[14] CHVALINA, J., HOŠKOVÁ-MAYEROVÁ, Š.: General ω-hyperstructures and certain applications of those, *Ratio Math.*, 23 2012, s. 55 - 72. ISSN: 1592-7415.

[15] CHVALINA, J., KŘEHLÍK, Š.: Kompaktnost intervalů reálných čísel a invertibilita jistých hyperstruktur, *Internat. Colloq. On the Management of Educational Process, Proceedings*, University of Defence, Brno 2013. s. 64-69. ISBN: 978-80-7231-924-4.

[16] CHVALINA, J., KŘEHLÍK, Š.: Normal subhypergroups of hypergroups of ordinary linear second-order differential operators, *South Bohemia Math. Letters* 2012, č. 1, s. 1-9. ISSN: 1804-1450.

[17] CHVALINA, J., KŘEHLÍK, Š., SVOBODA, Z., VÍTOVEC, J.: Matematika 2 (Biomedicínská technika a bioinformatika). Brno: Vysoké učení technické v Brně, 2014. s. 1-233. (Skripta).

[18] CHVALINA, J., MOUČKA, J.: Actions of join spaces of continuous functions on hypergroups of second-order linear differential operators, In *6th Workshop*, Fac. of Civil Engin. Brno University of Technology, Brno (2003), s. 9. ISBN: 80-214-2741- 8.

[19] CHVALINA, J., MOUČKA , J.: On a certain product of multiautomata induced by the cascade product of automata. *In Proc. of the XXXII. Internat. Colloquium, Univ. of Defence, Brno.*Brno: UNOB, 2014. s. 1-7. ISBN: 978-80-7231-958-9.

[20] CHVALINA, J., MOUČKA , J.: Actions of Join Spaces of Continuous Functions on Hypergroups of Second Order Linear Differential Operators. *In 6. matematický workshop.* Brno: FAST VUT, 2007. s. 1-10. ISBN: 80-214-2741- 8.

[21] CHVALINA, J., MOUČKA , J.: Modelování hyperstruktur elementy uspořádaných algebraických struktur zahrnující izomorfní typy poloautomatů. *In XX.kolokvium o řízení osvojovacího procesu, sborník příspěvků.* Vyškov: VVŠ PV Vyškov, 2002. s. 149. ISBN: 80-7231-090- 9.

[22] CHVALINA, J., MOUČKA, J.: *Aplikované Struktury a Multistruktury pro Modelování Procesů.* Brno: UNOB, 2009. s. 1-133. ISBN: 978-80-7231-549- 9.

[23] CHVALINA, J., MOUČKA , J., NOVÁK, M.: Actions of Centralizer Semihypergroups of Certain Transformation Operators on Ring of Function of a Complex Variable. *In XXV Internat. Colloquium on the Management of Educational process (CD-ROM).* Brn: Univ. of Defence, Faculty of Economic and Management, 2007, s.177-190. ISBN: 978-80-7231-228-3.

[24] CHVALINA, J., MOUČKA, J., VÉMOLOVÁ, R.: Functorial passage from quasiautomata to multi-automata, In *XXIV. Internat. Colloquium on the Acquisition Proces Management, Proc. of Contributions*; University of Defense: Brno, 2006. ISBN: 80-7231-139-5

[25] CHVALINA, J., RAČKOVÁ, P.: Join spaces of smooth functions and their actions on transposition hypergroups of second order linear differential operators, In *Aplimat - Journal of Applied Math* (2008), No. 1, p. 55-63. ISBN 978-80-89313-03-7.

[26] CORSINI, P.: *Prolegomena of Hypergroup Theory*, Aviani Editore Tricesimo 1993. ISBN: 88-7772-025-5.

[27] CORSINI, P., LEOREANU, V.: *Applications of Hyperstructure Theory*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2003. ISBN: 1-4020-1222-5.

[28] CRISTEA, I.: Several aspects on the hypergroups associated with n-ary relations, An. Şt. Univ. Ovidius Constanta, **17**(3) (2009), 99-110. ISBN: 1224-1784.

[29] DAVVAZ, B.: *Polygroup Theory and Related Systems.* World Scientific, New Jersey - London - Singapore - Shanghai - Hong Kong 2013. ISBN: 978-9814425308.

[30] DAVVAZ, B., LEOREANU–FOTEA, V.: *Applications of Hyperring Theory*, International Academic Press, Palm Harbor, 2007.

[31] DAVVAZ, B., LEOREANU FOTEA, V.: *Hyperring Theory and Applications.* Hadronic Press, Palm Harbor, Fl. U.S.A 2008. ISBN: 978-80-7231-779.

[32] DAVVAZ, B., VOUGIOUKLIS, T.: n-ary hypergroups, Iran. J. Sci. Tech-nol. Trans. A-Sci., 30(A2), 2006. ISSN: 2228-6187.

[33] DIBLÍK, J., KLIMEK, J.: Řešení sériového obvodu RLC. Elektrorevue - Internetový časopis (http://www.elektrorevue.cz), 2007, roč. 2007, č. 6, s. 22- 1 (s.) ISSN: 1213-1539.

[34] DÖRFLER, W.: The cartesian composition of automata, *Math. System Theory* 11 (1978), s. 239-257. ISSN: 1433-0490.

[35] DRESHER, M., ORE, O.: Theory of multigroups. *Amer. J. Math.* 60 (1938), p. 705 - 733.

[36] GÉCSEG, F., PEÁK, I.: *Algebraic Theory of Automata*, Budapest, Akadémia Kiadó, 1972.

[37] HEIDARI, D., DAVVAZ, B.: *On ordered hyperstructures*, U.P.B. Sci. Bull. Series A, **73**(2) (2011), s. 85–96. ISSN: 1454-2331.

[38] HOŠKOVÁ, Š., CHVALINA, J.: Discrete transformation hypergroups and transformation hypergroups with phase tolerance space, *Discrete Math.* 308(18) (2008), s. 4133-4143. ISSN: 0012-365X.

[39] Š. HOŠKOVÁ, Š., CHVALINA, J., RAČKOVÁ, P.: Transposition hypergroups of Fredholm integral operators and related hyperstructures. Part I, *Journal of Basic Science*, **4**(1) (2008), s. 43–54. ISSN: 1735-0611.

[40] JANTOSCIAK, J.: Transposition in hypergroups. *Sixt Internat. Congress on AHA*, 1996. Democritus Univ. of Thrace Press, Greece, p. 77 - 84. ISBN: 9608568714.

[41] Jantociak, J. (1997) Transposition hypergroups: Noncommutative join spaces, *J. Algebra* 187, s. 97–119. ISSN: 0021-8693.

[42] KŘEHLÍK, Š.: Hypergroups of second-order differential operators in the Jacobi form and multi-quasiautomata. *EEICT, Proc. 18th Conf.* Vol. 3(2012), p. 268-272. ISBN: 978-80-214-4462- 1.

[43] KŘEHLÍK, Š.: Quasi–automata formed by continuous function and by second–order linear differential operators in the Jacobi form. *EEICT, Proc. 19th Conf.* Vol. 3(2013), p. 149-153. ISBN: 978-80-214-4695-3.

[44] KŘEHLÍK, Š. Relations between hypergroups of linear differential operators in the Jacobi form. In STUDENT EEICT. 2014. s. 155-159. ISBN: 978-80-214-4924- 4.

[45] KŘEHLÍK, Š. Hypergroups of Differential Operators Motivated by a Function Describing a Certain General System. In XXXII International Colloquium on the Management of Educational Process. 2014. s. 93-98. ISBN: 978-80-7231-957- 2.

[46] LEOREANU-FOTEA, V., DAVVAZ, B.: Join n–space and lattice, *J. Mult.-Valued Log. Soft Comput.*, **15** (2009) s. 421-432. ISSN: 1542-3980.

[47] LEOREANU-FOTEA, V., DAVVAZ, B.: n–hypergroups and binary relations, *European J. Combin.*, **29** (2008), s. 1207–1218. ISSN: 0195-6698

[48] LEOREANU-FOTEA, V., DAVVAZ, B., FENG, F., CHIPER, C.: Join spaces, soft join spaces and lattices, *An. Şt. Univ. Ovidius Constanţa*, **22**(1) (2014), s. 155-167. ISSN: 1224-1784.

[49] LEOREANU-FOTEA, V., ROSENBERG, I. G.: Hypergroupoids determined by lattices, *European J. Combin.* **31**(2010), s. 925–931. ISSN: 0195-6698.

[50] LEOREANU-FOTEA, V., ROSENBERG, I. G.: Join spaces determined by lattices, *J. Mult.-Valued Log. Soft Comput.*, **16**(1-2) (2009), s. 421–432. ISSN: 1542-3980.

[51] MALIK, D. S., MORDENSON, J. N., SEN, M. K.: The cartesian composition of fuzzy finite state machines, *Kybernetics*, 24 (1995), s. 98-110.

[52] MARTY, F.: Sur une généralization de la notion de groupe. *Huitie'me congre's des mathématiciens scandinaves*, Stockholm (1934), s. 45 - 49.

[53] MASSOUROS, G. G.: Hypercompositional structures in the theory of languages and automata. *An. Şt. Univ. A.I. Çuza Iaşi, Sect. Inform.*, III (1994), s. 65-73. ISSN: 0379-7864.

[54] MASSOUROS, Ch. G., MASSOUROS, G. G.: The transposition axiom in hypercompositional structures, *Ratio Mathematica*, **21** (2011), s. 75–90. ISSN: 2282-8214.

[55] MASSOUROS, G. G., MITTAS, J.: Languages, Automata and Hypercompositional Structures, In *Proceedings of the 4th International Congress on Algebraic Hyperstructures and Applications, Xanthi 1990*; World Scientific, 1991. ISBN: 981-02-0479-5.

[56] MESAROVIĆ, M.D.– TAKAHARA, Y.: *General System Theory. A Mathematical Foundations.* Academic Press, New York 1975. ISBN: 0-12-491540-X.

[57] MORDENSON, J. N., MALIK, D. S.: *Fuzzy Automata and Languages – Theory and Applications*, Chapman & Hall CRC Press, 2002. ISBN: 978-158-48822-51.

[58] NEUMAN, F.: Distribution of zeros of solutions of y" = q(t)y in relation to their behavior in large. *Studia Sci. Math. Hungar.* Vol.8, (1973), S. 177 - 185. ISSN:0081-6906.

[59] NEUMAN, F.: Global theory of ordinary linear differential homogeneous equations in the real domain. *Math. Inst. Czechoslovakian Academy of Sciences, Branch* Brno (1987), s. 50.

[60] NEUMAN, F.: *Global Properties of Linear Ordinary Differential Equations*. Academia - Praha, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht /Boston / London, 1991. ISBN 80-200-0423-8.

[61] NEUMAN, F.: On a representations of linear differential equations. *Mathematical and Computer Modelling* Vol.52, (2010), s. 355 - 360. ISSN: 0895-7177.

[62] NOVÁK, M.: Potential of the "Ends lemma" to create ring-like hyper-structures from quasi-ordered (semi)hypergroups. *South Bohemia Math. Letters* Vol.17, No 1, (2009), p. 39 - 50. ISSN: 1804- 1450.

[63] NOVÁK, M.: The notion of "Ends lemma" based hyper-structures. *Aplimat - Journal of Applied Math.* Vol.3, (2010), p. 237 - 247. ISBN: 978-80-89313-47- 1.

[64] NOVÁK, M.: Some basic properties of *EL*-hyperstructures. *European J. of Combinatorics* Vol.34, (2013), p. 446 - 459. ISSN: 0195- 6698.

[65] NOVÁK, M. On EL-semihypergroups, *European J. Combin.* 44 Part B (2015), s. 274–286. ISSN: 01956698.

[66] NOVÁK, M.: *n–ary hyperstructures constructed from binary quasi–ordered semigroups*, An. Şt. Univ. Ovidius Constanţa, **22**(3) (2014), s. 147-168. ISSN: 1224-1784.

[67] PIVOŇKA, P.: Optimalizace regulátorů, Brno: Vysoké učení technické v Brně, 2005. s. 1-112. (Skripta)

[68] PRENOWITZ, W., JANTOSCIAK, J.: Geometries and join spaces. *J. Reine Angew. Math*, Vol.257, (1972), s. 100-128. Titel–Nr.3 10 9001 014. ISSN:1435-5345.

[69] RAČKOVÁ, P.: Properties of generalized multiautomata, In *12th International AHA Conference. Xanthi, 2014.* (Prijato)

[70] RAČKOVÁ, P.: Hypergroups of symmetric relations. *10th Internat. Congress on Algebraic Hyperstructures and Appl. Proc. of Contributions* Univ. of Defence Brno (2008), p. 267-272. ISBN 978-80-7231-688-5.

[71] RAIDA, Z., LUKEŠ, Z., LÁČÍK, J., et al. *Analýza Mikrovlnných Struktur v Časové Oblasti (Time-domain analysis of microwave structures)*. Brno: VUTIUM Publishing, 2003, s. 232. ISBN: 802-14-25410-5

[72] REED, J. H.: *An Introduction to Ultra Wideband Communication Systems.* [s.l.] : Prentice Hall PTR, 2005. 672 s. ISBN 0-13-148103-7.

[73] RICHARDS, F. J. A flexible growth function for empirical use. *Journal of experimental Botany*, 1959, 10.2, s. 290-301. ISSN: 8-0214-2541-5.

[74] SADOVSKIJ, V. N.: *Základy Všeobecnej Teórie Systémov: Logicko-metodologická Analýza*, 1. vyd. Bratislava: Pravda, 1979.

[75] SIEBERT, W. McC.: *Circuits, Signals, and Systems.* The MIT Press, McGraw-Hill Book Company, New York- San Francisco - Montreal - Toronto, 1986. ISBN:0-262-19229-2.

[76] SUBRMANIYAN, S., RAJASEKAR, M.: Cartesian composition in bipolar fuzzy finite state machines, *International Journal of Computer Applications* 92(11) (2014), s. 1-7. ISSN: 0952-8091.

[77] VARLET, J. V.: *Remarks on distributive lattices*, Bull. de l'Acad. Polonnaise des Sciences, Serie des Sciences Math., Astr. et Phys., **23** (1975) 1143-1147.

[78] VOUGIOUKLIS, T.: Hypermatrix representations: The problem and open problems, in: 10^{th} *International Congress of Algebraic Hyperstructures and Applications, Proceedings of AHA 2008*, University of Defence, Brno, 2009, 17–31. ISBN: 978-80-7231-688-5.

[79] VOUGIOUKLIS, T.: On H_v–rings and H_v–representations, *Discrete Math.* **208/209** (1999), s. 615–620. ISSN: 0012-365X.

[80] VOUGIOUKLIS, T.: The fundamental relation in hyperrings, The general hyperfield, in: 4^{th} *AHA, Xanthi 1990*, Worlds Scientific (1991), 203–211. ISBN: 981-02-0479-5.

[81] VOUGIOUKLIS, T.: Representations of hypergroups by generalized permutations. *Algebra Universalis*, Vol.29, (1992), S. 172- 183. ISSN: 1420-8911.

[82] VOUGIOUKLIS, T.: *Hyperstructures and their Representations.* Monographs, Hadronic Press, Palm Harbor, Fl. U.S.A. 1994. ISBN 0-91176-86-X.

[83] ZHAN, J., MOUSAVI, S. SH., JAFARPOUR, M.: "On hyperactions of hypergroups," University of Bucharest. Scientific Bulletin A, vol. 73, no. 1, 2011, s. 117–128. ISSN: 1454-2331.