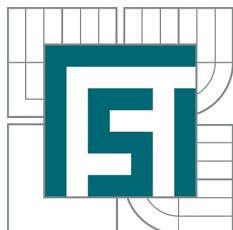


VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ  
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ  
ÚSTAV MATEMATIKY  
FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING  
INSTITUTE OF MATHEMATICS

# MODELOVANIE ROTAČNÉHO POHYBU PEVNÉHO TELESA V PRIESTORE

MODELING OF RIGID BODY ROTATION MOVEMENT IN SPACE

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE  
BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE  
AUTHOR

LUCIA MARTINCOVÁ

VEDOUCÍ PRÁCE  
SUPERVISOR

prof. RNDr. JAN FRANČŮ, CSc.

BRNO 2014

Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství

Ústav matematiky

Akademický rok: 2013/2014

## **ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE**

student(ka): Lucia Martincová

který/která studuje v **bakalářském studijním programu**

obor: **Matematické inženýrství (3901R021)**

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

### **Modelování rotačního pohybu pevného tělesa v prostoru**

v anglickém jazyce:

### **Modeling of rigid body rotation movement in space**

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Pohyb pevného tělesa v prostoru lze rozložit na translaci a rotaci. Matematické modelování rotace využívá řadu netriviálních matematických prostředků, zejména grupu rotací.

Cíle bakalářské práce:

Popis matematických prostředků popisujících translační a hlavně rotační pohyb pevného tělesa a jejich aplikace při modelování jevů v technice, zejména různých setrvačníků.

Provést numerické experimenty.

Seznam odborné literatury:

Josef Kvasnica: Mechanika, Academia, Praha 1988,

Jiří Bayer: Mechanika 2, nakladatelství Vladimír Chlup, Olomouc, 2008.

Vedoucí bakalářské práce: prof. RNDr. Jan Franců, CSc.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2013/2014.

V Brně, dne 22.11.2013

L.S.

---

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc.  
Ředitel ústavu

---

prof. RNDr. Miroslav Doupovec, CSc., dr. h. c.  
Děkan fakulty

## **Abstrakt**

Bakalárská práca je zameraná na rotáciu tuhého telesa v priestore. Bližšie popisuje rotačné matice a ich vlastnosti. Ďalej sa venuje reprezentácií natočenia v priestore pomocou Eulerových uhlov a odvodzuje Eulerove kinematické a dynamické rovnice. Následne uvádza numerické aj analytické riešenie týchto pohybových rovníc pre špeciálne typy zotrvačníc.

## **Summary**

This bachelor thesis is focused on rotation movement of rigid body in space. It is described rotation matrices and their characteristics. It is devoted to Euler angles representation of rotation in space and introduced Euler kinematic and dynamic equations. Moreover, it indicates the numerical and analytical method for solving these equations for special types of flywheels.

## **Klíčová slova**

Eulerove uhly, pohybové rovnice, rotačná matica, zotrvačníc

## **Keywords**

Euler angles, equations of motion, rotation matrix, flywheel

MARTINCOVÁ, L. *Modelovanie rotačného pohybu pevného telesa v priestore*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2014. 24 s. Vedoucí prof. RNDr. Jan Franců, CSc.

Prehlasujem, že som bakalársku prácu *Modelovanie rotačného pohybu pevného telesa v priestore* vypracovala samostatne pod vedením prof. RNDr. Jan Franců, CSc. s použitím materiálov uvedených v zozname literatúry.

Lucia Martincová

Chcem sa poďakovať vedúcemu prof. RNDr. Janovi Francú, CSc. za odborné vedenie mojej bakalárskej práce, za trpezlivosť a ochotu pri riešení problémov.

Lucia Martincová

# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Kinematika a dynamika tuhého telesa v priestore</b>	<b>3</b>
2.1	Základné fyzikálne vlastnosti tuhého telesa . . . . .	3
2.2	Tenzor zotrvačnosti . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Natočenie tuhého telesa v priestore</b>	<b>6</b>
3.1	Rotačná matica . . . . .	6
3.1.1	Rotačná matica v rovine . . . . .	6
3.1.2	Rotačná matica v priestore . . . . .	7
3.1.3	Vlastnosti rotačnej matice . . . . .	8
3.1.4	Lieova grupa . . . . .	9
3.2	Orientácia telesa pomocou Eulerových uhlov . . . . .	10
<b>4</b>	<b>Sférický pohyb telesa</b>	<b>12</b>
4.1	Lagrangeova metóda . . . . .	12
4.2	Pohybové rovnice zotrvačníkov . . . . .	15
4.3	Voľný zotrvačník . . . . .	16
4.4	Ťažký zotrvačník . . . . .	17
<b>5</b>	<b>Ilustračné príklady</b>	<b>17</b>
5.1	Pseudoregulárna precesia asymetrického zotrvačníku . . . . .	17
5.2	Riešenie ťažkého zotrvačníku s pevným bodom . . . . .	21
<b>6</b>	<b>Záver</b>	<b>22</b>
<b>7</b>	<b>Literatúra</b>	<b>23</b>
<b>8</b>	<b>Zoznam použitých symbolov</b>	<b>24</b>

# 1 Úvod

Mechanika parí k najstarším častiam fyziky a už od počiatku bola spojená s rôznymi technickými aplikáciami. Pokiaľ sa zaoberáme podmienkami rovnováhy telies, použijeme metódy statiky. Ak sa však zaujímame popisom pohybu telies bez toho, aby sme sa zaoberali príčinami jeho zmien, použijeme metódy kinematiky. Na najvyššom vrchole mechaniky však stojí dynamika, pomocou ktorej vyšetříme súvislosť medzi pohybom telies, silami a ich momentami, ktoré na telesá pôsobia.

Táto bakalárska práca sa sústreďuje na kinematiku a dynamiku tuhého telesa. Zaoberáme sa obecným priestorovým pohybom telies s 3 a 6 stupňami voľnosti. Popis tohto pohybu je veľmi zložitý a využíva radu matematických prostriedkov. Narazíme na vektorovú algebru, tenzorové veličiny a sústavy až šiestich diferenciálnych rovníc. Práca čerpá z viacerých zdrojov, ale ťažiskové sú [1],[3] a [5]. V prvej kapitole zavádzame základne fyzikálne vlastnosti telies a tenzor zotrvačnosti.

V druhej kapitole sa už venujeme popisu orientácie telesa v priestore pomocou rotačných matíc a Eulerových uhlov. Na záver kapitoly zájdeme aj do teórie grúp, konkrétne si definujeme Lieovu grupu, ktorá sa používa k popisu priestorovej kinematiky. Ukážeme, že rotačný pohyb v priestore sa dá popísať práve uvedenou grupou v trojdimenzionálnom priestore.

Tretia kapitola sa už konkrétne venuje rotačnému pohybu zotvačníc v priestore. Odvodíme pohybové rovnice pre jednotlivé typy zotvačníc a Lagrangeovu funkciu, pomocou ktorej budeme numericky riešiť rotačný pohyb. V poslednej kapitole uvádzame riešenie pohybových rovníc zotvačníc. Obmedzíme sa však len na zjednodušené typy, pretože problém je ťažko riešiteľný. K riešeniu a vykresleniu grafov využívam softvér Mathematica.



## 2 Kinematika a dynamika tuhého telesa v priestore

### 2.1 Základné fyzikálne vlastnosti tuhého telesa

Tuhé teleso je definované ako teleso, u ktorého sa vzájomná vzdialenosť jednotlivých bodov nemení pôsobením ľubovoľných síl. Zachováva sa tvar a rozloženie hmotnosti reálneho telesa. Tento abstraktný pojem reálneho telesa nám umožní riešiť otázky spojené s rotáciou telesa, zvlášť zotrvačnikov. Obecný pohyb telesa môžeme rozložiť na dva prípady:

- **Postupný pohyb** alebo **translácia** - pohyb, pri ktorom v každom okamžiku všetky body telesa majú rovnaký vektor rýchlosti  $\vec{v} = \vec{v}_0(t)$ .
- **Rotačný pohyb**
  - Rotačný pohyb okolo pevnej osi - jedinou časovo premennou veličinou je uhol  $\varphi$ . Pohyb má jeden stupeň voľnosti.

$$\varphi = \varphi(t)$$

- Rotačný pohyb okolo pevného bodu - jeden bod telesa zachováva po celú dobu stálu polohu. Pohyb má tri stupne voľnosti.

Je možné dokázať, že otáčanie tuhého telesa okolo pevného bodu sa v každom okamžiku dá vyjadriť ako otáčanie tuhého telesa okolo pevnej osi. S časom sa však mení poloha osi otáčania v telese, aj veľkosť rýchlosti otáčania okolo osi. Túto rýchlosť môžeme vyjadriť vzťahom  $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ . Avšak pri uhlovej rýchlosti sa mení s časom aj jej smer, preto obecné je funkciou času

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}(t).$$

Najskôr budeme uvažovať obecný pohyb tuhého telesa a pre tento pohyb si zavedieme základné fyzikálne vlastnosti.[2]

#### Kinetická energia

Uvažujme, že všetky body telesa sa môžu pohybovať. Pre rýchlosť ľubovoľného bodu A telesa platí:

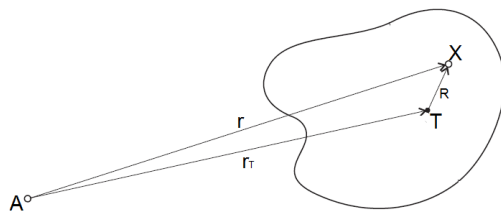
$$\vec{v} = \vec{v}_T + \vec{V}, \quad (2.1)$$

kde  $\vec{v}_T$  je rýchlosť ťažiska telesa a  $\vec{V}$  je rýchlosť bodu A telesa vzhľadom k ťažisku. Kinetická energia telesa je definovaná ako integrál

$$T = \int \frac{1}{2} v^2 dm. \quad (2.2)$$

Ďalej zavedieme moment hybnosti  $\vec{L}$  telesa vzhľadom k obecnému bodu A:

$$\vec{L} = \int \vec{r} \times \vec{v} dm. \quad (2.3)$$



Obr. 1: Poloha bodu A vzhľadom k ťažisku T [12]

Podľa obrázku 1 vidíme, že  $\vec{r} = \vec{r}_T + \vec{R}$  a po dosadení (2.1) dostaneme

$$\vec{L} = \vec{r}_T \times \vec{p} + \vec{L}_T, \quad (2.4)$$

kde  $\vec{r}$  je polohový vektor,  $\vec{p}$  je celková hybnosť telesa definovaná ako  $\vec{p} = m\vec{v}_T$  a  $\vec{L}_T$  je moment hybnosti telesa vzhľadom k ťažisku.[1]

## Pohybové rovnice

Prejdeme k popisu pohybu sústavy hmotných bodov. Uvažujme sústavu hmotných bodov, ktorá nie je izolovaná. Pre popis pohybu sústavy hmotných bodov je treba zaviesť prvú a druhú vetu impluzovú. Všetky zákony, ktoré platia pre sústavu hmotných bodov, platia aj pre tuhé teleso.

### Prvá veta impulzová

Časová derivácia celkovej hybnosti sústavy sa rovná výslednici vonkajších síl pôsobiacich na sústavu. Matematicky zapíšeme ako

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}^E. \quad (2.5)$$

### Druhá veta impulzová

Časová derivácia celkového momentu hybnosti sústavy hmotných bodov sa rovná výslednému momentu vonkajších síl pôsobiacich na sústavu. Podmienkou rovnosti je, že momenty sa počítajú k rovnakému pevnému bodu. Matematicky zapíšeme ako

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^E. \quad (2.6)$$

## Moment zotrvačnosti

Moment zotrvačnosti určuje rotačné zotrvačné vlastnosti telesa. Rastie so vzdialenosťou hmoty od osi otáčania. Moment zotrvačnosti obecného telesa spočítame ako integrál cez celú hmotnosť

$$J = \int r^2 dm, \quad (2.7)$$

kde  $r$  je vzdialenosť elementu  $dm$  od osi otáčania.

## 2.2 Tenzor zotrvačnosti

Uvažujme obecný bod tuhého telesa, ktorý sa pohybuje obecnou rýchlosťou  $\vec{v}(t)$  a koná rotáciu obecnou uhlovou rýchlosťou  $\vec{\omega}(t)$ . Potom platí známy vzťah

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \quad (2.8)$$

Moment hybnosti môžeme zapísať ako

$$\vec{L} = \int \vec{r} \times \vec{v} dm = \int \vec{r} \times (\vec{v} \times \vec{r}) dm.$$

Ďalej použijeme vetu o dvojitom vektorovom súčine.

DEFINÍCIA 1 *Dvojitý vektorový súčin je definovaný ako*

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}. \quad (2.9)$$

V našom prípade je ľahké ukázať, že  $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{a}) = a^2\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{a})\vec{a}$ . Dostaneme potom

$$\vec{L} = \int [r^2\vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{r})\vec{r}] dm.$$

Dosadíme za  $\vec{\omega}$  výraz  $\vec{\omega} = \mathcal{I} \cdot \vec{\omega}$ , kde  $\mathcal{I}$  je tenzor identity. Využijeme vlastností Kroneckerova delta

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{ak } i = k \\ 0 & \text{ak } i \neq k \end{cases} \quad (2.10)$$

a pre zložky symetrického tenzoru identity musí platiť  $I_{ik} = \delta_{ik}$ .

Teraz môžeme  $\omega$  vytknúť a dostaneme

$$L_i = \vec{\omega} \int (r^2\mathcal{I} - \vec{r}\vec{r}) dm \quad (2.11)$$

pričom výraz

$$\mathcal{J} = \int (r^2\mathcal{I} - \vec{r}\vec{r}) dm \quad (2.12)$$

nazveme *tenzorom zotrvačnosti*. Všetky informácie o zotrvačných vlastnostiach telesa vzhľadom k rôznym osám sú ukryté v zložkách tenzoru zotrvačnosti. Jeho zložky môžeme zapísať takto

$$\mathcal{J}_{ik} = \int (r^2\delta_{ik} - x_k x_i) dm. \quad (2.13)$$

Tieto zložky zapíšeme aj pomocou matice

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} \int (y^2 + z^2) dm & - \int xy dm & - \int xz dm \\ - \int xy dm & \int (x^2 + z^2) dm & - \int yz dm \\ - \int xz dm & - \int yz dm & \int (x^2 + y^2) dm \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

Diagonálne členy tenzoru zotrvačnosti  $J_x, J_y, J_z$  nazývame momenty zotrvačnosti vzhľadom k osám  $x, y, z$ , nediagonálne prvky nazývame *deviačné momenty*.

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} J_x & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{xy} & J_y & J_{yz} \\ J_{xz} & J_{yz} & J_z \end{pmatrix}$$

Z tohto zápisu vidíme, že tenzor zotrvačnosti je symetrickým tenzorom. Každý symetrický tenzor môžeme diagonalizovať, tj. nájsť také smery os súradníc, že tenzor bude mať tvar

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{pmatrix}.$$

Potom  $J_1, J_2, J_3$  sú *hlavné momenty zotrvačnosti* a takto zvolené osi *hlavné osi zotrvačnosti*  $x_1, y_2, z_3$ . Z definície momentu zotrvačnosti vidíme, že platí aj vzťah

$$\vec{L} = \mathcal{J} \cdot \vec{\omega}. \quad (2.15)$$

Podobne vyjadríme vzťah pre kinetickú energiu rotačného telesa

$$T = \frac{1}{2} \omega^2 \mathcal{J}(\vec{e}), \quad (2.16)$$

kde  $\vec{e}$  je jednotkový vektor ľubovoľnej osi. [1][12]

## 3 Natočenie tuhého telesa v priestore

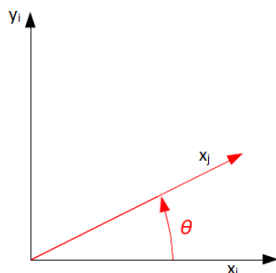
### 3.1 Rotačná matica

Pomocou rotačnej matice môžeme transformovať súradnice vektoru z jedného súradnicového systému do druhého za predpokladu, že oba systémy sú ortogonálne a pravotočivé. Preto ju nazývame aj transformačná matica. Pre lepšiu názornosť odvodíme najprv rotačnú maticu  $\mathbf{R}$  v rovine a až potom v priestore.

#### 3.1.1 Rotačná matica v rovine

Uvažujme dve rôzne súradnicové sústavy  $F_i(O, x_i, y_i)$  a  $F_j(O, x_j, y_j)$ . Potom vektor  $\mathbf{r}_i$  je vyjadrenie vektoru v súradnicovej sústave  $F_i$  a vektor  $\mathbf{r}_j$  vyjadrenie vektoru v súradnicovej sústave  $F_j$ . Všetky transformácie uvažujeme k bodu  $O = (0,0,0)$ . Podľa obrázku 2 môžeme vektor  $\mathbf{r}_i$  v systéme  $F_j$  zapísať takto:

$$\mathbf{r}_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_j \\ y_j \end{pmatrix} = \mathbf{R}_{ji} \mathbf{r}_j \quad (3.17)$$



Obr. 2: Otočenie vektoru o uhol  $\theta$

Matica  $\mathbf{R}_{ji}$  je rotačná matica zo systému  $j$  do  $i$ . V literatúre sa nazýva aj matica smerových kosínov alebo smerová matica.[3]

### 3.1.2 Rotačná matica v priestore

V priestore  $\mathbb{R}^3$  je natočenie telesa oveľa zložitejšie ako v rovine. Orientácia telesa v rovine je daná len jedným uhlom, zatiaľ čo v priestore troma uhlami. Ako sme ukázali v rovinnom prípade, platí formálne rovnaký vzťah aj v priestore:

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{R}_{ji}\mathbf{r}_j \quad (3.18)$$

$$\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{ji} & \mathbf{y}_{ji} & \mathbf{z}_{ji} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_j \\ y_j \\ z_j \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

Stĺpcové vektory  $\mathbf{x}_{ji}, \mathbf{y}_{ji}, \mathbf{z}_{ji} \in \mathbf{R}^{3 \times 1}$  majú význam súradnicového systému  $j$  videného v systéme  $i$ . Tieto vektory sú ortonormálne.

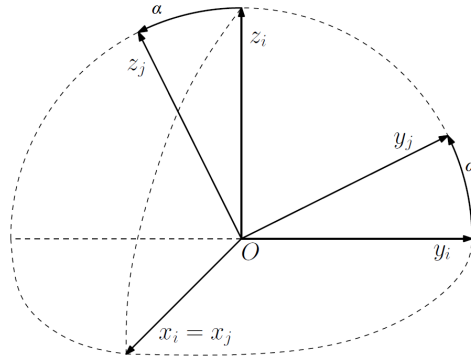
Ďalej si uvedieme rotačné matice pre elementárne otočenie okolo jednotlivých súradnicových os  $x_i, y_i, z_i$  o uhly  $\alpha, \beta, \gamma$ . Podľa obázku 3 vidíme, že transformačná matica  $\mathbf{R}_x$  predstavuje otočenie okolo osi  $x_i$  o uhol  $\alpha$ .

$$\mathbf{R}_x(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

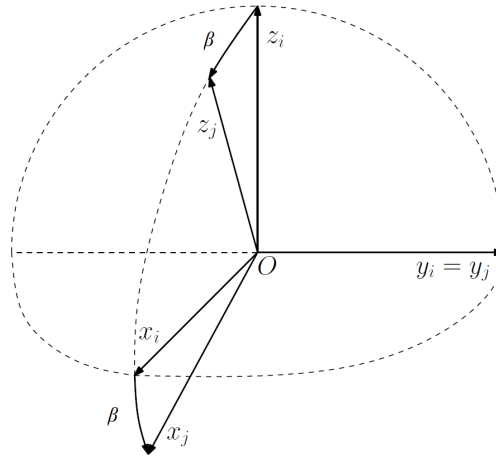
Matica  $\mathbf{R}_y$  predstavuje otočenie okolo osi  $y_i$  o uhol  $\beta$ .

$$\mathbf{R}_y(\beta) = \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

A nakoniec matica  $\mathbf{R}_z$ , ktorá predstavuje otočenie okolo osi  $z_i$  o uhol  $\gamma$ .



Obr. 3: Elementárne otočenie okolo osi  $x_i$   
[4]



Obr. 4: Elementárne otočenie okolo osi  $y_i$   
[4]

$$\mathbf{R}_{\mathbf{z}}(\gamma) = \begin{pmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

V prípade obcej rotácie telesa okolo všetkých troch os sú všetky prvky matice  $\mathbf{R}$  nenulové.[3][4]

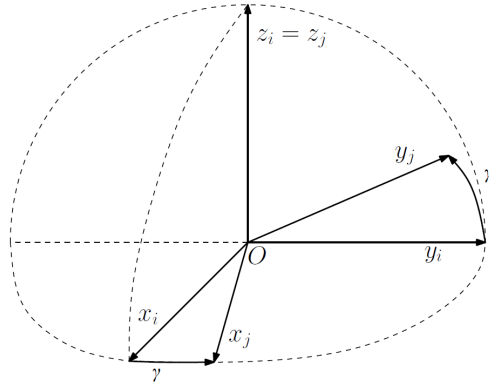
### 3.1.3 Vlastnosti rotačnej matice

Teraz si uvedieme dôležité vlastnosti rotačnej matice v  $\mathbb{R}^3$ .

- Rotačná matica je ortonormálna, teda:

$$\mathbf{R}_{ji} \mathbf{R}_{ji}^T = \mathbf{I} \quad (3.23)$$

$$\mathbf{R}_{ji}^{-1} = \mathbf{R}_{ji}^T \quad (3.24)$$



Obr. 5: Elementárne otočenie okolo osi  $z_i$   
[4]

kde  $\mathbf{I}$  je jednotková matica.

- Rotačná matica má determinant  $+1$ .
- Násobením vektoru s  $\mathbf{R}_{ij}$  sa zachováva norma vektoru.
- Rotačná matica je ortogonálna. Ukážeme si to na opačnej transformácii, teda zo systému  $i$  do  $j$ .

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{R}_{ji}\mathbf{r}_j \quad (3.25)$$

$$\mathbf{R}_{ji}^{-1}\mathbf{r}_i = \mathbf{R}_{ji}^{-1}\mathbf{R}_{ji}\mathbf{r}_j \quad (3.26)$$

$$\mathbf{R}_{ji}^{-1}\mathbf{r}_i = \mathbf{R}_{ji}^T\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_j = \mathbf{R}_{ij} \quad (3.27)$$

$$\mathbf{R}_{ij} = \mathbf{R}_{ji}^T \quad (3.28)$$

- Skladaním rotácií vzniká zase rotácia.  
Uvažujme ďalší systém  $F_k(O, x_k, y_k)$ , ktorý je natočený voči  $F_j(O, x_j, y_j)$  a ten zase voči  $F_i(O, x_i, y_i)$ . Platí

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{R}_{ji}\mathbf{r}_j$$

a

$$\mathbf{r}_j = \mathbf{R}_{kj}\mathbf{r}_k$$

pričom prvý výraz predstavuje transformáciu  $F_j \rightarrow F_i$ , druhý výraz  $F_k \rightarrow F_j$ . Po dosadení dostaneme

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{R}_{ji}\mathbf{r}_j = \mathbf{R}_{ji}\mathbf{R}_{kj}\mathbf{r}_k = \mathbf{R}_{ki}\mathbf{r}_k, \quad (3.29)$$

čo predstavuje transformáciu  $F_k \rightarrow F_i$ . [3]

### 3.1.4 Lieova grupa

Uvedme najkôr definíciu Lieovej grupy. [6]

DEFINÍCIA 2 Množina  $G$  sa nazýva Lieova grupa, ak platí:

1.  $G$  je grupa,
2.  $G$  je analytická varieta
3. zobrazenie  $G \times G \rightarrow G: (g_1, g_2) \rightarrow (g_1, g_2)$  je analytické.

DEFINÍCIA 3  $G$  sa nazýva analytická varieta, ak transformácie súradníc sú v každom svojom bode reálne analytické funkcie.

POZNÁMKA 1 Funkcia  $f(x^1, \dots, x^n)$  je reálne analytická v bode  $A = [x_0^1, \dots, x_0^n] \in E^n$  ak existuje také sférické okolie bodu  $A$ , že na ňom Taylorov rozvoj funkcie  $f$  v bode  $A$  konverguje k hodnotám tejto funkcie.

VETA 1 Buď  $f(x^1, x^2, x^3)$  funkcia troch premenných v  $\mathbb{R}^3$ , ktorá má všetky parciálne derivácie. Nech rovnica  $f(x^1, x^2, x^3) = 0$  má aspoň jedno riešenie a nech žiadny bod z riešenia tejto rovnice nie je singulárny. Potom množina všetkých bodov v  $\mathbb{R}^3$ , ktoré splňujú rovnicu  $f(x^1, x^2, x^3) = 0$ , je diferencovatelná varieta dimenzie 2.

Potom sa dá ukázať, že grupa  $\mathbb{R}^3$  je Lieova grupa, taktiež aj priestor rotačných matic tvorí Lieovu grupu. Podrobné dôkazy v [6].

### 3.2 Orientácia telesa pomocou Eulerových uhlov

Eulerove uhly sú ďalšie prostriedky, ktoré popisujú priestorovú orientáciu tuhého telesa. Pre lepšie pochopenie si najprv zavedieme nový súradnicový systém  $G(0, x, y, z)$ , pevne spojený s telesom v počiatku  $O$ . Tento systém budeme postupne otáčať, až získame konečnú polohu telesa v systéme  $G'(x', y', z')$ . Najprv si predstavme, že oba systémy majú spoločnú počiatočnú polohu, ako vidíme na obrázku 6.

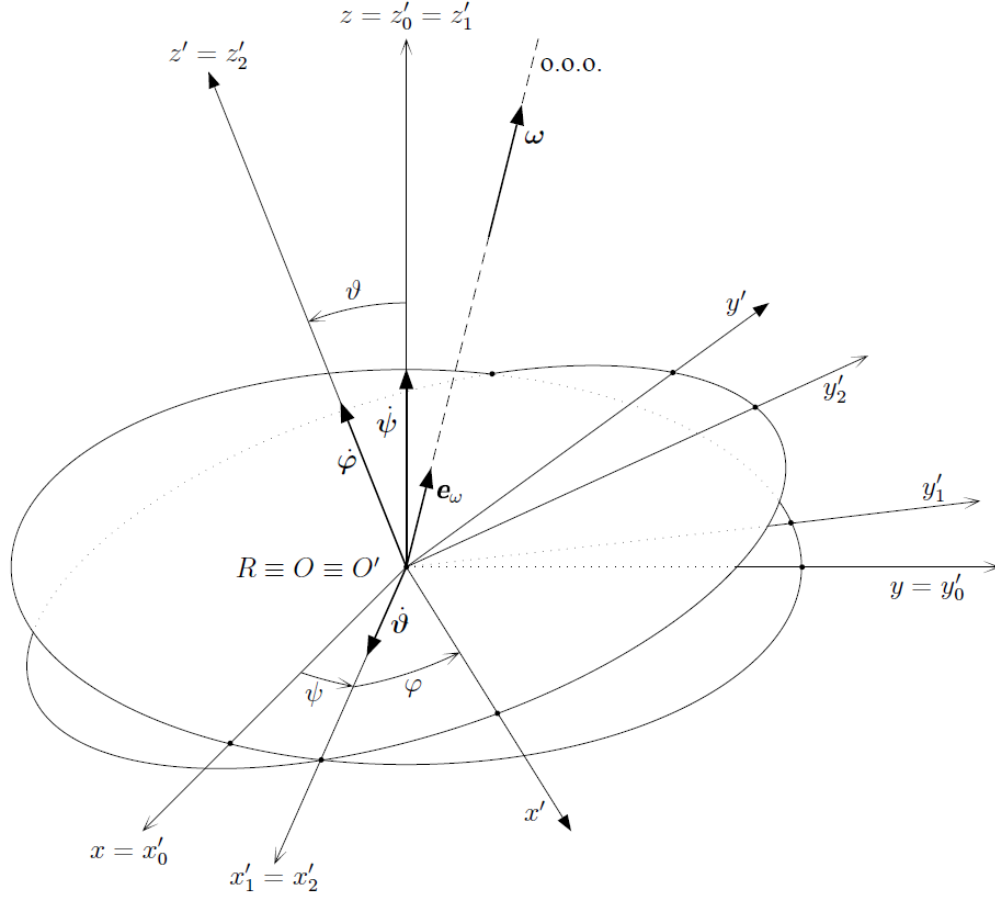
1. Prevedieme otočenie okolo spoločnej osi  $z$  o uhol  $\psi$  v kladnom zmysle a dostaneme novú polohu systému  $G'_1(0, x'_1, y'_1, z'_1)$ .
2. Ďalej otočíme nový systém  $G'_1(0, x'_1, y'_1, z'_1)$  okolo osi  $x'_1$  v kladnom zmysle o uhol  $\vartheta$ . Týmto dostaneme ďalší pomocný systém  $G'_2(0, x'_2, y'_2, z'_2)$ .
3. Nakoniec otočíme systém  $G'_2(0, x'_2, y'_2, z'_2)$  okolo osi  $z'_2$  o uhol  $\varphi$  a získame konečnú polohu systému  $G'(x', y', z')$ .

Jednotlivé kroky popíšeme čiastočnými rotačnými maticami  $\mathbf{R}_\psi, \mathbf{R}_\vartheta$  a  $\mathbf{R}_\varphi$ .

$$\mathbf{R}_\psi = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.30)$$

$$\mathbf{R}_\vartheta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ 0 & \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix} \quad (3.31)$$





Obr. 6: Eulerove uhly [12]

$$\mathbf{R}_\varphi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.32)$$

Výsledná rotácia vznikne vynásobením čiastočných rotačných matíc. V tomto kroku záleží na poradí násobenia. My zvolíme postupnú rotáciu okolo os, ako sme popísali vyššie, avšak celkovo existuje 12 možností postupností rotácií.[12][3][6]

$$\mathbf{R}_{\psi\vartheta\varphi} = \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \cos \vartheta \sin \varphi & -\cos \psi \sin \varphi - \sin \psi \cos \vartheta \cos \varphi & \sin \psi \sin \vartheta \\ \sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \cos \vartheta \sin \varphi & -\sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \cos \vartheta \cos \varphi & -\cos \psi \sin \vartheta \\ \sin \vartheta \sin \varphi & \sin \vartheta \cos \varphi & \cos \vartheta \end{pmatrix} \quad (3.33)$$

Eulerove uhly  $\psi, \vartheta, \varphi$  sú ďalšie 3 parametry popisujúce rotačný pohyb telesa okolo pevného bodu. K popisu tohto pohybu potrebujeme ešte vyjadriť uhlovú rýchlosť pomocou Eulerových uhlov. Prevedieme nekonečne malé otočenie  $d\varphi$  za dobu  $dt$ . Potom

$$\vec{\omega} = \frac{d\varphi}{dt} = \omega \mathbf{e}_\omega = \dot{\varphi} \mathbf{e}_\omega.$$

Uhlové rychlosti sú taktiež vyznačené v obrázku 6 a  $\mathbf{e}_\omega$  je tzv. *okamžitá os otáčania*. Takto postupne zavedieme vzťahy pre jednotlivé zložky uhlovej rýchlosti.

$$\begin{aligned}\vec{\omega}'_\varphi &= (0, 0, \dot{\varphi}) \\ \vec{\omega}'_\vartheta &= (\cos \vartheta, -\sin \vartheta, 0)\dot{\vartheta} \\ \vec{\omega}'_\psi &= (\sin \vartheta \sin \varphi, \sin \vartheta \cos \varphi, \cos \vartheta)\dot{\psi}\end{aligned}\tag{3.34}$$

Zložením všetkých troch rotácií  $\vec{\omega}' = \vec{\omega}'_\psi + \vec{\omega}'_\vartheta + \vec{\omega}'_\varphi$  dostaneme *Eulerove kinematické rovnice* pre náš systém  $G'(x', y', z')$ . [1]

$$\begin{aligned}\omega'_x &= \dot{\psi} \sin \vartheta \sin \varphi + \dot{\vartheta} \cos \varphi \\ \omega'_y &= \dot{\psi} \sin \vartheta \cos \varphi - \dot{\vartheta} \sin \varphi \\ \omega'_z &= \dot{\psi} \cos \vartheta + \dot{\varphi}\end{aligned}\tag{3.35}$$

## 4 Sférický pohyb telesa

Teleso, ktoré sa otáča okolo pevného bodu sa nazýva zotrvačníkom. V tejto kapitole sa budeme zaoberať pohybom zotrvačníkou pomocou rovníc, ktoré sme odvodili alebo uviedli v predchádzajúcich kapitolách. Ich analytické riešenia sú však veľmi obtiažne. My si uvedieme niektoré základné tvary a zoznámime sa s riešením pomocou Lagrangeovej metódy. Zotrvačníky môžeme rozdeliť podľa tvaru na

- *Asymetrický* zotrvačník má všetky tri hlavné momenty zotrvačnosti  $J_1, J_2, J_3$  rôzne.
- *Symetrickým* zotrvačníkom rozumieme taký, ktorý má dva z hlavných momentov zotrvačnosti rovnaké.
- Ak sú všetky tri momenty zotrvačnosti rovnaké, hovoríme o *guľovom* zotrvačníku.

Ďalej môžeme zotrvačníky rozlíšiť podľa síl, ktoré naň pôsobia.

- Na *voľný* alebo aj *bezsilový* zotrvačník nepôsobí žiadne vonkajšie silové pôsobenie.
- *Ťažký* zotrvačník je teleso, ktoré sa pohybuje v tiažovom poli, pôsobí naňho vonkajšia sila prípadne silový moment. [2] [11]

### 4.1 Lagrangeova metóda

Túto kapitolu spracovávame najmä zo zdrojov [1] a [12].

Majme sústavu  $n$  telies, ktorých pohyb je obmedzený  $r$  ideálnymi väzbami. Predstavme si, že sme každú väzbu uvoľnili a nahradili jednotlivými reakčnými silami  $\mathbf{K}_i^k$ . Polohu bodu je vhodné vyjadrovať v súradniciach popisujúcich prirodzene stupne voľnosti. Obecnú polohu bodu môžeme vyjadriť posunutím

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(q_k, t).$$

Súradnice  $q_k$  nazývame zobecnené súradnice. Pre *reálne posunutie* hmotného bodu platí

$$d\mathbf{x} = \sum_k \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} dt = \delta \mathbf{x} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} dt.$$

Reálna zmena teda predstavuje totálny diferenciál a *virtuálne posunutie*  $\delta \mathbf{x}$  obdržíme tak, že vypustíme člen úmerný časovej zmene. Pre virtuálne posunutie platí vzťah

$$\delta \mathbf{x} = \sum_k \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_k} \delta q_k$$

kde  $\delta q_k = dq_k$ .

Ďalej prejdeme k odvodeniu virtuálnej práce  $\delta \mathbf{A}$ . Ak je sústava v rovnováhe platí podmienka statickej rovnováhy pre každé teleso

$$\mathbf{F}_i + \sum_{k=1}^r \mathbf{K}_i^k = 0,$$

kde  $\mathbf{F}_i$  je výslednica všetkých vonkajších síl. Označenie pre výslednicu vonkajších síl sme zaviedli iné ako v prvej kapitole z dôvodu jednotného označenia ostatných veličín. V ďalšom kroku každému bodu udelíme virtuálne posunutie a tieto rovnice skalárne vynásobíme s virtuálnymi posunutiami  $\delta \mathbf{x}_i$ . Dostaneme

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{x}_i + \sum_{k=1}^r \sum_{i=1}^n \mathbf{K}_i^k \cdot \delta \mathbf{x}_i = 0.$$

Zavedieme pojem ideálnej väzby, pre ktorú platí

$$\sum_{k=1}^r \sum_{i=1}^n \mathbf{K}_i^k \cdot \delta \mathbf{x}_i = 0,$$

čo dosadíme do predchádzajúcej rovnice. Vidíme, že celková práca reakcií od väzieb je nulová. Druhý člen rovnice sa tak vynuluje a dostaneme *princíp virtuálnej práce* pre sústavy telies

$$\delta \mathbf{A} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{x}_i = 0.$$

Vyslovíme túto vetu ešte slovne: "Virtuálna práca vonkajších síl pri rovnováhe a pri ideálnych väzbách je rovna nule."

### D'Alembert-Lagrangeov princíp pre sústavu telies

Aby sme prešli od statiky k dynamike, potrebujeme ešte zaviesť d'Alembertov princíp. Napíšme pohybové rovnice pre všetky body telesa

$$\mathbf{F}_i - m_i \mathbf{a}_i + \sum_{k=1}^r \mathbf{K}_i^k = 0.$$

Teraz všetky skalárne vynásobíme virtuálnymi posunutiami  $\delta \mathbf{x}_i$  a dostaneme

$$\sum_{i=1}^n (\mathbf{F}_i - m_i \mathbf{a}_i) \cdot \delta \mathbf{x}_i + \sum_{k=1}^r \sum_{i=1}^n \mathbf{K}_i^k \cdot \delta \mathbf{x}_i = 0.$$

Podľa princípu virtuálnej práce platí

$$\sum_{i=1}^n (\mathbf{F}_i - m_i \mathbf{a}_i) \cdot \delta \mathbf{x}_i = 0,$$

čím sme odvodili d'Alembert-Lagrangeov princíp.

Pokiaľ sú jednotlivé virtuálne posunutia  $\delta \mathbf{x}_i$  nezávislé, môžeme ich vyjadriť pomocou menšieho počtu nezávislých parametrov  $\delta q_k$ . Zvolíme toľko nezávislých parametrov, koľko je stupňov voľnosti  $n$ . Takto zavedeným parametrom budeme hovoriť *zobecnené krivočiare súradnice*  $q_k$ . Polohu  $i$ -tého hmotného bodu určíme ako

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i(q_k, t).$$

Z d'Alembert-Lagrangeovho princípu môžeme rovno napísať

$$\sum_{i=1}^n (\mathbf{F}_i - m_i \mathbf{a}_i) \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_k} = 0$$

pre každé  $k = 1, 2, \dots, f$ , pričom  $f = 3n - r$ . Ďalej zavedieme zobecnenú silu  $Q_k$  ako

$$Q_k = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{a}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_k}$$

Platí tiež

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \frac{d\mathbf{x}_i}{dt} = \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial t}.$$

Z definície kinetickej energie (2.2) dostaneme

$$T = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{x}}_i^2$$

a platí

$$m_i \mathbf{a}_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{x}}_i}$$

Ďalšie odvodenie možno nájsť v [1]. Výsledkom sú *Lagrangeove rovnice druhého druhu*

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k. \quad (4.36)$$

Ďalej ich je možné zjednodušiť zavedením *Lagrangeovej funkcie*, v tvare

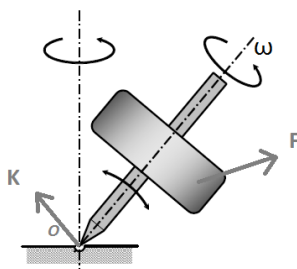
$$L = T - U, \quad (4.37)$$

kde  $U(t, q_k)$  je potenciálna energia telesa. Lagrangeova funkcia  $L(t, q_k, \dot{q}_k)$  a kinetická energia  $T(t, q_k, \dot{q}_k)$  sú funkciou zobecných súradníc, rýchlostí a času.

## 4.2 Pohybové rovnice zotrvačníc

Najprv spomenieme pohybové rovnice pre zotrvačníc upevnený v bode  $O$ , predstavme si otočný kĺb. Pre tento pohyb platia pohybové rovnice, a to prvá a druhá veta impulzová (2.5)(2.6). Celkovo dostaneme 6 rovníc, avšak zotrvačníc upevnený v bode má len 3 stupne voľnosti, preto nebudeme potrebovať všetkých 6 rovníc. Na teleso pôsobí vonkajšia sila  $\mathbf{F}$  a reakčná sila od kĺbu  $\mathbf{K}$ . Ak zbolíme bof  $O$  za referenčný bod, potom momenty silových reakcií sú nulové a z druhej vety impulzovej úplne vypadnú. Pohybovou rovnicou zotrvačníc s pevným bodom je teda druhá veta impulzová (2.6) a môžeme ju ešte prepísať ako

$$\frac{d}{dt}(\mathcal{J} \cdot \vec{\omega}) = \vec{M}^E. \quad (4.38)$$



Obr. 7: Sily pôsobiace na zotrvačníc [10]

Ak si uvedomíme, že  $\mathcal{J}$  je časovo nepremenný len voči nášmu systému  $G'$ , môžeme (4.29) písať ako

$$\frac{d}{dt}(\mathcal{J} \cdot \vec{\omega}) = \frac{d'}{dt}(\mathcal{J} \cdot \vec{\omega}) + \vec{\omega} \times \mathcal{J} \cdot \vec{\omega}, \quad (4.39)$$

kde  $\vec{\omega}$  je vektor uhlovej rýchlosti, ktorou sa otáča zotrvačníc vzhľadom k inerciálnej vzťažnej sústave a

$$\frac{d'}{dt}(\mathcal{J} \cdot \vec{\omega}),$$

predstavuje zmenu momentu hybnosti vzhľadom k neinerciálnej vzťažnej sústave pevne spojennej s rotujúcim zotrvačníc. Dostali sme tak *Eulerove dynamické rovnice*

$$\mathcal{J} \frac{d'}{dt} \vec{\omega} + \vec{\omega} \times \mathcal{J} \cdot \vec{\omega} = \vec{M}^E, \quad (4.40)$$

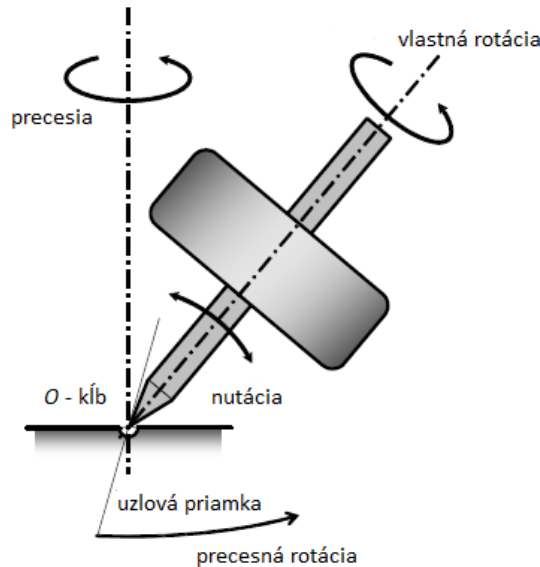
po zložkách rozpíšeme ako

$$J_1 \dot{\omega}_1 + (J_3 - J_2) \omega_2 \omega_3 = M_1 \quad (4.41)$$

$$J_2 \dot{\omega}_2 + (J_1 - J_3) \omega_1 \omega_3 = M_2 \quad (4.42)$$

$$J_3\dot{\omega}_3 + (J_2 - J_1)\omega_1\omega_2 = M_3. \quad (4.43)$$

Pre pohyb zotrvačníc sú však veľmi vhodné už odvodené Eulerove uhly. Uhol  $\psi$  predstavuje *precesný uhol*, *nutačný uhol*  $\vartheta$  zodpovedá rotácií okolo uzlovej priamky a *rotačný uhol*  $\varphi$  zodpovedá rotácií okolo osi  $z'$ . Uvedené pohyby vidíme na obrázku 8.[1][10]



Obr. 8: [10]

Pre ďalší popis jednotlivých zotrvačníc musíme ešte spomenúť rozloženie uhlovej rýchlosti do zložiek. Označme

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_\perp + \vec{\omega}_\parallel.$$

Vektor  $\vec{\omega}_\perp$  značí kolmú zložku uhlovej rýchlosti do smeru momentu hybnosti  $\vec{L}$  a  $\vec{\omega}_\parallel$  zložku rovnobežnú s momentom hybnosti  $\vec{L}$ .

### 4.3 Voľný zotrvačník

Voľný (bezsilový) zotrvačník je teleso, na ktoré nepôsobí žiadne vonkajšie sily, čiže celkový moment síl je nulový.

1. Ak roztočíme voľný zotrvačník okolo jeho hlavnej osi, bude okolo nej rotovať rovnomerne. V tomto prípade je  $\vec{\omega}_\perp = 0$ , z čoho plynie, že uhlová rýchlosť bude konštantná a rovnobežná s momentom hybnosti.
2. Ak je  $\vec{\omega}_\perp = \text{konšt}$ , ale  $\vec{\omega}$  nie je rovnobežná s  $\vec{L}$ , vtedy zotrvačník koná regulárnu precesiu okolo osi  $\vec{L}$ .

3. Ak  $\vec{\omega}_{\parallel}$  aj  $\vec{\omega}_{\perp}$  nie sú konštantné, zotrvačnik koná pseudoregulárnu precesiu.[1][2]

## 4.4 Ťažký zotrvačnik

Je už zrejmé, že ťažký zotrvačnik definujeme ako zotrvačnik, na ktorý pôsobí tiažová sila alebo iné vonkajšie sily, prípadne silový moment. Pohyb ťažkého zotrvačniku nie je vôbec rovnomerný. Skladá sa z precesie i nutácie. Tento pohyb predstavuje pseudoregulárnu precesiu, ktorá je veľmi náročná na riešenie. V práci sa budeme zaoberať riešením regulárnej precesie. Tá však spočíva len v aproximácii ťažkého zotrvačniku tzv. *rýchlym zotrvačnikom*, u ktorého predpokladáme, že kinetická energia je oveľa väčšia ako potenciálna energia. Precesia takého zotrvačniku je omnoho pomalejšia než nutácia, a neskôr sa napríklad pôsobením trenia, nutačný pohyb zastaví a zotrvačnik prejde do regulárnej precesie.[1][2]

## 5 Ilustračné príklady

### 5.1 Pseudoregulárna precesia asymetrického zotrvačniku

Predpoklady:

- Uvažujeme voľný zotrvačnik.
- Pre asymetrický zotrvačnik uvažujeme  $J_1 < J_2 < J_3$ .
- Pohyb sa skladá z precesie aj nutácie.

Platia rovnice (2.15) a (2.16), potom

$$L^2 = J_1^2 \omega_1^2 + J_2^2 \omega_2^2 + J_3^2 \omega_3^2$$

a

$$2T = J_1 \omega_1^2 + J_2 \omega_2^2 + J_3 \omega_3^2.$$

Odtiaľ vyjadríme  $\omega_1$  a  $\omega_3$  ako funkcie  $\omega_2$

$$\omega_1^2 = \frac{2T J_3 - L^2 - J_2 \omega_2^2 (J_3 - J_2)}{(J_3 - J_1) J_1},$$

$$\omega_3^2 = \frac{L^2 - 2T J_1 - J_2 \omega_2^2 (J_2 - J_1)}{(J_3 - J_1) J_3}$$

a dosasíme do druhej Eulerovej dynamickej rovnice (4.42)  $J_2 \dot{\omega}_2 + (J_1 - J_3) \omega_1 \omega_3 = 0$ . Vyjadríme  $\dot{\omega}_2$ , ako

$$\dot{\omega}_2 = c \sqrt{a^2 - \omega_2^2} \sqrt{b^2 - \omega_2^2},$$

kde  $a^2 = \frac{2T J_3 - L^2}{(J_3 - J_2) J_2}$ ,  $b^2 = \frac{L^2 - 2T J_1}{(J_2 - J_1) J_2}$  a  $c^2 = \frac{(J_3 - J_2)(J_2 - J_1)}{J_1 J_3}$ .

Dá sa ukázať, že platí  $2TJ_3 - L^2 \geq 0$  i  $L^2 - 2TJ_1 \geq 0$ , potom  $a^2 \geq 0$  aj  $b^2 \geq 0$ . Ďalej predpokladáme, že platí nerovnosť  $L^2 > 2TJ_2$ . Potom  $a < b$  a riešenie má tvar

$$\omega_2 = a \operatorname{sn} bct = \sqrt{\frac{2TJ_3 - L^2}{(J_3 - J_2)J_2}} \operatorname{sn} bct, \quad (5.44)$$

kde  $\operatorname{sn}$  je eliptická funkcia sínusamplituda a

$$k^2 = \frac{a^2}{b^2} = \frac{(J_2 - J_1)(2TJ_3 - L^2)}{(J_3 - J_2)(L^2 - 2TJ_1)} \leq 1 \quad (5.45)$$

je index eliptickej funkcie. Viac o eliptických funkciách v prameňoch [1] a [9].

Pre ďalšie rýchlosti platí

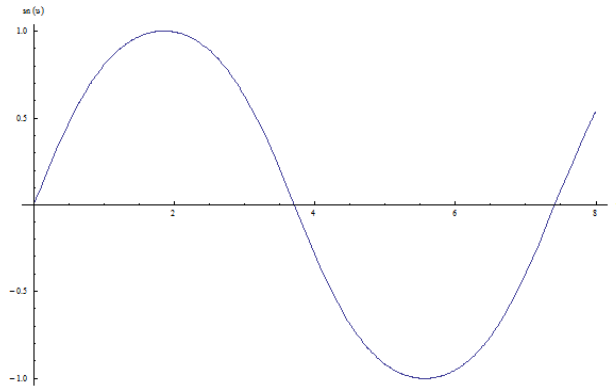
$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2TJ_3 - L^2}{(J_3 - J_1)J_1}} \operatorname{cn} bct,$$

kde  $\operatorname{cn}x$  je kosínusamplituda a

$$\omega_3 = \sqrt{\frac{L^2 - 2TJ_1}{(J_3 - J_1)J_3}} \operatorname{dn} bct,$$

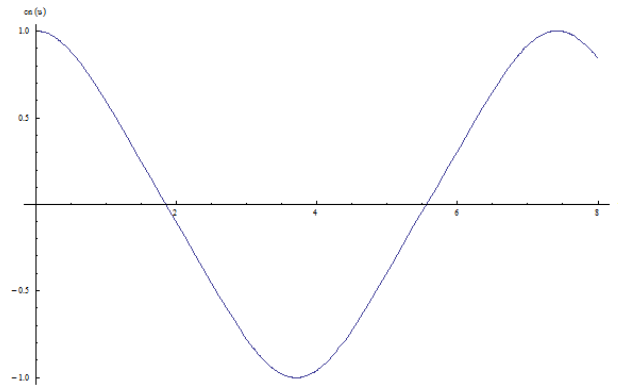
kde  $\operatorname{dn}x$  je deltaamplitúda.

Grafy eliptických funkcií sú na obrázkoch

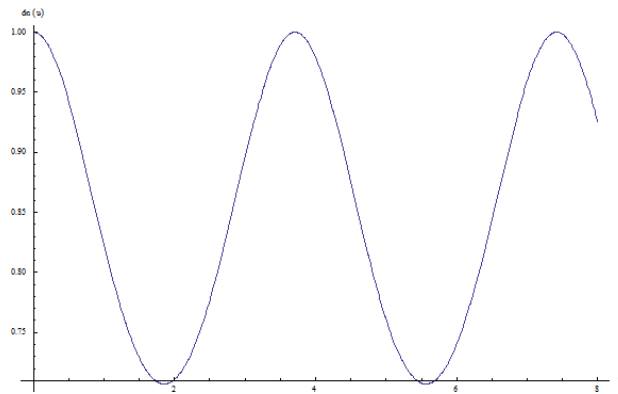


Obr. 9: Sínusamplituda pre index  $k^2 = \frac{1}{2}$

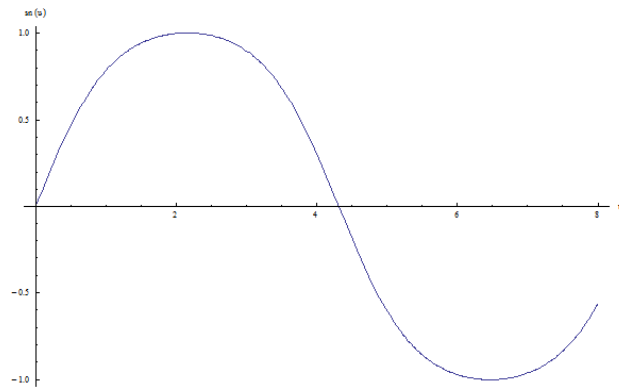




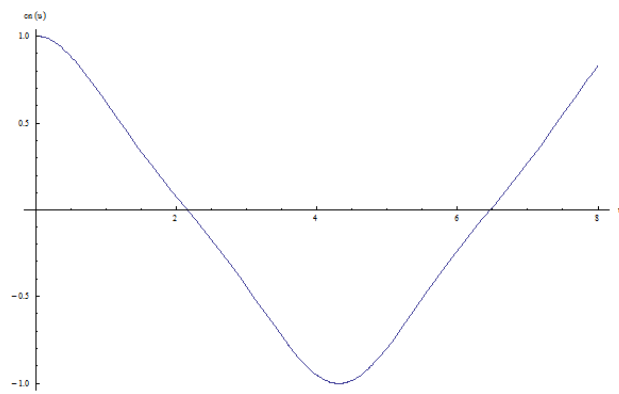
Obr. 10: Kosínusamplituda pre index  $k^2 = \frac{1}{2}$



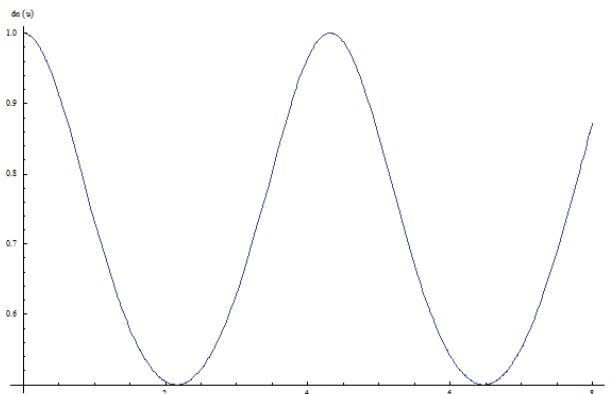
Obr. 11: Deltaamplituda pre index  $k^2 = \frac{1}{2}$



Obr. 12: Sínusamplituda pre index  $k^2 = \frac{3}{4}$



Obr. 13: Kosínusamplituda pre index  $k^2 = \frac{3}{4}$



Obr. 14: Deltaamplituda pre index  $k^2 = \frac{3}{4}$

## 5.2 Riešenie ťažkého zotrvačníku s pevným bodom

K riešeniu použijeme Lagrangeovu metódu, ktorú sme odvodili vo 4. kapitole. Predpoklady:

- Uvažujeme ťažký symetrický zotrvačník.
- Pre symetrický zotrvačník uvažujeme  $J_1 = J_2, J_3$ .
- Označme vzdialenosť ťažiska  $T$  od pevného bodu  $O$  ako  $\vec{a} = \overrightarrow{OT}$ . Potom tiaž zotrvačníku vytvára silový moment  $\vec{M} = \vec{a} \times m\vec{g}$ .

Zostavíme Lagrangeovu funkciu zotrvačníku  $L = T - U$  z rovnice (2.16) a potenciálnej energie  $U = mgz = mga \cos \vartheta$  ako funkciu zobecnených súradníc  $\vartheta, \varphi, \psi$ .

$$L = \frac{1}{2}J_1(\dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta + \dot{\vartheta}^2) + \frac{1}{2}J_3(\dot{\varphi} \cos \vartheta + \dot{\psi})^2 - mga \cos \vartheta$$

Pomocou Lagrangeových rovníc druhého druhu sa z Lagrangeovej funkcie zostavia pohybové rovnice pre jednotlivé Eulerove uhly.

$$J_3 \dot{\omega}_3 = 0$$

$$\sin \vartheta (J_1 \ddot{\varphi} \sin \vartheta + 2J_1 \dot{\varphi} \dot{\vartheta} \cos \vartheta - L_3 \dot{\vartheta}) = 0$$

$$J_1 \ddot{\vartheta} = (J_1 \dot{\varphi}^2 \cos \vartheta + mga - L_3 \dot{\varphi}) \sin \vartheta$$

Riešenie opäť vedie na eliptické funkcie. Podrobnejšie ho môžeme nájsť v [1].

## 6 Záver

Cieľom práce bolo popísať pohyb pevného telesa v priestore pomocou matematických prostriedkov a ich použítí pri modelovaní zotrvačníkov.

Pred samotným riešením tohto problému bolo treba naštudovať veľa literatúry z teoretickej mechaniky aj z rôznych odvetví matematiky. V práci sa stretávame s radou netriviálnych matematických prostriedkov. V závere práce sú načrtnuté aj obecné riešenia pre niektoré typy zotrvačníkov. Ďalej je pre každý výsledok vykreslený graf zodpovedajúcej eliptickej funkcie. Konkrétne riešenia sa hľadajú ťažko, avšak pre jednoduchšie prípady sa dajú eliptické funkcie spočítať pomocou softvéru. V práci som použila pre vykreslenie grafov softvér Mathematica. Reálne data však chýbajú.

Práca mi dala veľa nových poznatkov z oblasti teoretickej mechaniky. Počas štúdia som sa nestretla s predmetmi ako Kinematika a Dynamika, ktoré sa vyučujú na VUT FSI v Brne, preto bola práca pre mňa niečím novým. Tému považujem za náročnú a veľmi rozsiahlu. Moja práca je len slabý výpis toho, v čom sa dá téma rotačného pohybu telesa ďalej rozvíjať.

V prvom rade získať reálne data pre asymetrické zotrvačníky a konkrétne spočítať, a popísať pohyb voľného alebo ťažkého asymetrického zotrvačníku. Z technickej mechaniky môžeme aplikovať túto teóriu na veľa technických aplikácií, ako napr. gyroskopy alebo gyrokompas. Ďalšia z možností, ako by sa dalo v práci pokračovať, je rozvinutie kapitoly o Lieových grupách. Existuje veľa ďalších, zaujímavých poznatkov z tejto oblasti. Náročnejšou možnosťou pre rozvoj práce je aj vytvorenie programu, ktorý by počítal pohybové rovnice pre zotrvačníky.

## 7 Literatúra

### Literatúra

- [1] BAJER, Jiří. *Mechanika2*. 2. vydání. Olomouc: chlup.net, 2008. ISBN 978-80-903958-1-7.
- [2] KVASNICA, J., A. HAVRÁNEK, P. LUKÁČ a kol. *Mechanika*. 2. vydání. Praha: Academia, 2004. ISBN 80-200-1268-0.
- [3] GREPL, Robert. *Kinematika a dynamika mechatronických systémů*. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2007. ISBN 978-80-214-3530-8.
- [4] PREŠINSKÝ, J. *Modelovanie a simulácie v letectve*. Brno, 2013. Bakalářská práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav matematiky.
- [5] KVASNICA, J. *Matematický aparát fyziky*. 2. vydání. Praha: Academia, 1997. ISBN 80-200-0603-6.
- [6] KARGER, A. a J. NOVÁK. *Prostorová kinematika a Lieovy grupy*. Praha: SNTL - Nakladatelství technické literatury, 1978.
- [7] PŘIKRYL, Karel. *Kinematika*. 3. vydání. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2008. ISBN 978-80-214-3679-4.
- [8] KRATOCHVÍL, C. a J. SLAVÍK. *Mechanika těles- Dynamika*. 4. vydání. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2007. ISBN 978-80-214-3446-2
- [9] REKTORYS, K. Integrální počet funkcí jedné proměnné. In: *Přehled užité matematiky I*. 7. vydání. Praha: Nakladatelství Prometheus, 2000. Kapitola 13, s. 525-528. ISBN 978-80-7196-180-2.
- [10] PODEŠVA, Jiří. *Aplikovaná mechanika, 6. přednáška* [online].[cit. 2010-02-15]. Dostupné z: <http://www.337.vsb.cz/materialy/aplikovana-mechanika-cviceni/aplikovana-mechanika/Aplikovana-mechanika-06-prednaska.pdf>.
- [11] ŠTOLL, Ivan. *Mechanika tuhého tělesa* [online].[cit. leden 2001]. Dostupné z: <http://www.fjfi.cvut.cz/k402/skripta/mechanika/teleso.pdf>.
- [12] FIŠER, Kurt. *Teoretická mechanika* [online].[cit. 2003]. Dostupné z: <http://physics.ujep.cz/chomutov/tm1.pdf>.

## 8 Zoznam použitých symbolov

$\vec{v}$	celková rýchlosť
$\vec{v}_T$	rýchlosť ťažiska
$\vec{V}$	rýchlosť obecného bodu
$T$	kinetická energia
$T_r$	rotačná kinetická energia
$\vec{r}$	polohový vektor obecného bodu
$\vec{v}_T$	polohový vektor ťažiska T vzhľadom k bodu A
$\vec{R}$	polohový vektor obecného bodu vzhľadom k ťažisku T
$\vec{\omega}$	uhlová rýchlosť
$\vec{L}$	moment hybnosti
$\vec{p}$	hybnosť
$\vec{L}_T$	moment hybnosti vzhľadom k ťažisku T
$\vec{F}^E$	výslednica vonkajších síl
$\vec{M}^E$	výsledný moment
$J$	moment zotrvačnosti
$J_x, J_y, J_z$	momenty zotrvačnosti k osám $x, y, z$
$\delta_{ik}$	Kroneckerova delta
$\mathcal{J}$	tenzor zotrvačnosti
$\mathcal{I}$	tenzor identity
$J_1, J_2, J_3$	hlavné momenty zotrvačnosti
$\vec{e}$	jednotkový vektor
$\mathbf{R}$	rotačná (transformačná) matica
$\mathbf{R}_{ij}$	transformačná matica zo súradnicovej sústavy $F_j$ do $F_i$
$G$	Lieova grupa
$\psi, \vartheta, \varphi$	Eulerove uhly
$\mathbf{x}$	posunutie
$d\mathbf{x}$	reálne posunutie
$\delta\mathbf{x}$	virtuálne posunutie
$q_k$	zobecnené krivočiare súradnice
$\delta\mathbf{A}$	virtuálna práca
$\mathbf{K}_i^k$	reakčné sily
$\mathbf{F}_i$	výslednica vonkajších síl
$Q_k$	zobecnená sila
$\dot{\mathbf{x}}$	derivácia posunutia
$\vec{\omega}_\perp$	zložka kolmá do smeru $\vec{L}$
$\vec{\omega}_\parallel$	zložka rovnobežná s $\vec{L}$
$U$	potenciálna energia
$\text{sn}(u)$	Eliptická funkcia sínusamplituda
$\text{cn}(u)$	Eliptická funkcia kosínusamplituda
$\text{dn}(u)$	Eliptická funkcia deltaamplituda