



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV MATEMATIKY

INSTITUTE OF MATHEMATICS

TROJROZMĚRNÁ KINEMATIKA OČNÍCH POHYBŮ

THREE-DIMENSIONAL KINEMATICS OF EYE MOVEMENTS

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Marek Stodola

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

doc. Mgr. Jaroslav Hrdina, Ph.D.

BRNO 2017

Zadání bakalářské práce

Ústav:	Ústav matematiky
Student:	Marek Stodola
Studijní program:	Aplikované vědy v inženýrství
Studijní obor:	Matematické inženýrství
Vedoucí práce:	doc. Mgr. Jaroslav Hrdina, Ph.D.
Akademický rok:	2016/17

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Trojrozměrná kinematika očních pohybů

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Pohyb oka mezi fixací dvou objektů jde popsat pomocí takzvaného šroubového pohybu. Jedná se o současnou rotaci a translaci ve směru rotace. Tato transformace je prvkem grupy afinních transformací a je možné ji popsat příslušnou Cliffordovou algebrou.

Cíle bakalářské práce:

Nastudovat základy kinematiky lidského oka. Zvládnout řešit problémy analytické geometrie použitím aparátu Cliffordových algeber. Znalosti použít pro popis konkrétního očního pohybu.

Seznam doporučené literatury:

DORST, Leendert, Daniel H. F. FONTIJNE and Stephen MANN. Geometric algebra for computer science: an object-oriented approach to geometry. Amsterdam: Elsevier, c2007. Morgan Kaufmann series in computer graphics. ISBN 978-0-12-369465-2.

BAYRO CORROCHANO, Eduardo and Garret SOBCZYK. Geometric algebra with applications in science and engineering. Boston: Birkhauser, c2001. ISBN 08-176-4199-8.

SELIG, Jon M. Geometric Fundamentals of Robotics. 2. New York: Springer, 2004. ISBN 978-0-3-7-27274-0.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2016/17

V Brně, dne

L. S.

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc.
ředitel ústavu

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.
děkan fakulty

Abstrakt

Cílem práce je popsat oční pohyby a obecnou pozici očí aparátem geometrických algeber. Úvodní část obsahuje teorii, týkající se příslušné geometrické algebry. Dále je uvedena klasifikace očních pohybů a pojmy, které jsou při popisu těchto pohybů používány. Následují odvození, pomocí kterých je vyjádřena pozice očí v závislosti na bodu, který pozorují, nejdříve při sledování vzdálených objektů, dále při sledování blízkých objektů. Vyjádřeny jsou i přípustné pohyby očí pomocí os, kolem kterých oko může v obecné pozici rotovat. Výpočty se opírají o medicínsky vypořizovaná pravidla Dondersovo a Listingovo.

Abstract

The goal of this thesis is to describe eye movements and general eye position using apparatus of geometric algebra. The introduction covers the theory about the appropriate geometric algebra, followed by the classifications of the eye movements and the terms used to describe these movements. Following this, the calculations that describe eye position derived from a single observed point are listed, for distant and close points. In addition, the possible eye movements in respect to the axis in which an eye can rotate is described, for any general position. All the calculations are based on Donders' law and Listing's law.

klíčová slova

Cliffordova algebra, geometrická algebra, rotace, oční pohyby, Dondersovo pravidlo, Listingovo pravidlo, binokulární vidění

keywords

Clifford algebra, geometric algebra, rotation, eye movements, Donders' law, Listing's law, binocular vision

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci *Trojrozměrná kinematika očních pohybů* vypracoval samostatně pod vedením doc. Mgr. Jaroslava Hrdiny, Ph.D. s použitím materiálů uvedených v seznamu literatury.

Marek Stodola

Děkuji vedoucímu práce doc. Mgr. Jaroslavu Hrdinovi, Ph.D. za velmi vstřícný přístup při vedení mé práce.

Marek Stodola

Obsah

Úvod	12
1 Geometrická algebra \mathbb{G}_3	13
1.1 Základní definice	13
1.2 Rotory a jejich vlastnosti	15
1.3 Rotace ve 3D	18
2 Oko a oční pohyby	24
2.1 Základní pojmy a definice	24
2.2 Klasifikace očních pohybů	24
2.3 Souřadné systémy a značení	25
3 Dondersovo pravidlo a Listingovo pravidlo	28
3.1 Vyjádření polohy oka	28
3.2 Odvození tvaru Listingovy roviny oka v obecné pozici	31
4 Listingovo pravidlo pro binokulární vidění	34
4.1 Výpočet množiny bodů sledovaných pod stejným úhlem	35
4.2 Vyjádření polohy očí při pohledu na konkrétní bod	36
4.3 Odvození tvaru Listingových rovin v obecné poloze očí	40
Závěr	44
Seznam použitých zdrojů	45
Seznam použitých symbolů a zkratk	46

Úvod

Úkolem této práce je popsat kinematiku očních pohybů aparátem Cliffordových neboli geometrických algeber [8, 11, 3, 9, 2]. Zabývat se budeme především sakadickými a disjunktními očními pohyby [12].

Sakadické oční pohyby jsou velmi rychlé rotační pohyby, které slouží k prohlížení zorného pole. Jsou vůlí ovlivnitelné, ale zároveň je vykonáváme i nevědomky. Následují za sebou vždy s odstupem 150 ms , tuto dobu mozek potřebuje k vyhodnocení obrazu. Při binokulárním vidění (sledování objektů oběma očima) jsou sakadické pohyby obou očí na sobě závislé. Jedná se vlastně o nejzákladnější oční pohyby, především k těmto pohybům se vztahují výpočty v této práci.

Disjunktční oční pohyb slouží k zaostření na nějaký bod. Tento bod je pak sledován pod úhlem α . Úhel α se nazývá vergenční. Pokud oči sledují bod pod vergenčním úhlem α a provedou na sobě závislé sakadické pohyby a začnou pozorovat jiný bod, opět ho sledují pod vergenčním úhlem α [14]. Aby byl vergenční úhel změněn, je potřeba vykonat další disjunktční pohyb. Oproti sakadickým pohybům jsou disjunktční pohyby pomalejší a více náročné z hlediska svalového zatížení.

Základní teorie, týkající se očí a očních pohybů, se nachází v kapitole 2 a v [12].

Z oční kinematiky se zabýváme hlavně tím, na jakých faktorech závisí obecná poloha oka (například jestli závisí na předešlé pozici oka nebo na směru pohledu atd.), a na základě čeho ji jsme schopni kvantitativně určit.

O obecné poloze oka hovoří medicínsky vypořádaná pravidla Dondersova a Listingova [1, 5, 14]. Z Dondersova pravidla plyne, že poloha očí závisí na směrech jejich pohledů resp. na bodu, který pozorují. Listingovo pravidlo hovoří o tom, kolem kterých os může oko vykonávat sakadické rotační pohyby. Oko totiž nemůže vykonat rotační pohyb kolem libovolné osy, procházející jeho centrem otáčení, ale pouze kolem os, které leží v tzv. Listingově rovině. Přesné formulace pravidel Dondersova a Listingova jsou uvedeny pro sledování vzdálených objektů v úvodu kapitoly 3, rozšířené formulace těchto pravidel pro binokulární vidění a sledování blízkých objektů jsou uvedené v úvodu kapitoly 4.

Hlavním cílem práce je na základě Dondersova pravidla a Listingova pravidla vyjádřit polohu očí v závislosti na směrech jejich pohledů a dále vyjádřit, kolem kterých os mohou oči rotovat, jsou-li v obecné poloze - vypočítat, jak vypadá Listingova rovina v závislosti na směru pohledu. Výpočty se nejdříve týkají sledování vzdálených objektů (kapitola 3), dále jsou rozšířeny na binokulární vidění a sledování blízkých objektů (kapitola 4).

Pro výpočet výše zmíněných cílů používáme tzv. geometrickou algebru \mathbb{G}_3 [9], pomocí které lze ve vektorovém prostoru \mathbb{R}^3 , generovaném ortonormální bází, snadno a efektivně analyticky vyjádřit rotaci vektoru resp. bodu kolem libovolné osy, procházející počátkem soustavy souřadnic, o libovolný úhel. K tomu slouží tzv. rotory - prvky z \mathbb{G}_3 . Jedná se o čtyřrozměrné vektory, kde první souřadnice jednoznačně určuje úhel, o který chceme rotovat, a další tři souřadnice určují osu rotace. Matematická teorie, týkající se geometrické algebry \mathbb{G}_3 , je rozebrána v kapitole 1.

1 Geometrická algebra \mathbb{G}_3

Poznámka 1.1. Definice základních pojmů z lineární algebry, používaných v této kapitole, nalezneme v [6], případně v [7].

1.1 Základní definice

Mějme 8-dimenzionální vektorový prostor nad tělesem \mathbb{R} , generovaný lineárními kombinacemi prvků z množiny $B = \{1, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_2\sigma_3, \sigma_3\sigma_1, \sigma_1\sigma_2, \sigma_1\sigma_2\sigma_3\}$, který označíme $\overline{\mathbb{G}}_3$.

Zavedme notaci:

$$\sigma_{ij} = \sigma_i\sigma_j, \quad (1.1)$$

$$\sigma_{ijk} = \sigma_i\sigma_j\sigma_k, \quad i, j, k \in \{1, 2, 3\}. \quad (1.2)$$

Libovolný prvek $g \in \overline{\mathbb{G}}_3$ budeme zapisovat ve tvaru:

$$g = a_0 + a_1\sigma_1 + a_2\sigma_2 + a_3\sigma_3 + a_4\sigma_{23} + a_5\sigma_{31} + a_6\sigma_{12} + a_7\sigma_{123}, \quad (1.3)$$

kde $a_i \in \mathbb{R}$, $i \in \{0, 1, \dots, 7\}$.

Nechť $h \in \overline{\mathbb{G}}_3$ je libovolný prvek ve tvaru:

$$h = b_0 + b_1\sigma_1 + b_2\sigma_2 + b_3\sigma_3 + b_4\sigma_{23} + b_5\sigma_{31} + b_6\sigma_{12} + b_7\sigma_{123}, \quad (1.4)$$

kde $b_i \in \mathbb{R}$, $i \in \{0, 1, \dots, 7\}$, potom vektorový součet na $\overline{\mathbb{G}}_3$ je definován pomocí prvků (1.3) a (1.4) jako

$$\begin{aligned} g + h &= a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)\sigma_1 + (a_2 + b_2)\sigma_2 + (a_3 + b_3)\sigma_3 + (a_4 + b_4)\sigma_{23} \\ &+ (a_5 + b_5)\sigma_{31} + (a_6 + b_6)\sigma_{12} + (a_7 + b_7)\sigma_{123}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Nechť $c \in \mathbb{R}$ je libovolné reálné číslo a $g \in \overline{\mathbb{G}}_3$ prvek ve tvaru (1.3). Násobení skalárem je na $\overline{\mathbb{G}}_3$ definováno jako

$$cg = ca_0 + ca_1\sigma_1 + ca_2\sigma_2 + ca_3\sigma_3 + ca_4\sigma_{23} + ca_5\sigma_{31} + ca_6\sigma_{12} + ca_7\sigma_{123}. \quad (1.6)$$

Definujme mezi prvky (1.3) a (1.4) součin následujícím způsobem:

$$\begin{aligned} gh &= a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 - a_4b_4 - a_5b_5 - a_6b_6 - a_7b_7 \\ &+ (a_1b_0 + a_0b_1 + a_6b_2 - a_5b_3 - a_7b_4 + a_3b_5 - a_2b_6 - a_4b_7)\sigma_1 \\ &+ (a_2b_0 - a_6b_1 + a_0b_2 + a_4b_3 - a_3b_4 - a_7b_5 + a_1b_6 - a_5b_7)\sigma_2 \\ &+ (a_3b_0 + a_5b_1 - a_4b_2 + a_0b_3 + a_2b_4 - a_1b_5 - a_7b_6 - a_6b_7)\sigma_3 \\ &+ (a_4b_0 + a_7b_1 - a_3b_2 + a_2b_3 + a_0b_4 + a_6b_5 - a_5b_6 + a_1b_7)\sigma_{23} \\ &+ (a_5b_0 + a_3b_1 + a_7b_2 - a_1b_3 - a_6b_4 + a_0b_5 + a_4b_6 + a_2b_7)\sigma_{31} \\ &+ (a_6b_0 - a_2b_1 + a_1b_2 + a_7b_3 + a_5b_4 - a_4b_5 + a_0b_6 + a_3b_7)\sigma_{12} \\ &+ (a_7b_0 + a_4b_1 + a_5b_2 + a_6b_3 + a_1b_4 + a_2b_5 + a_3b_6 + a_0b_7)\sigma_{123}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Poznámka 1.2. Součin je definován tak, aby platilo

$$\sigma_i^2 = 1,$$

$$\sigma_i \sigma_j = -\sigma_j \sigma_i, \quad i, j \in \{1, 2, 3\}, \quad i \neq j. \quad (1.8)$$

Tyto identity můžeme při výpočtu používat.

Podobnou situaci si můžeme představit například u komplexních čísel. Máme-li dvě komplexní čísla $[a_1, a_2]$ a $[b_1, b_2]$, formálně je součin mezi nimi zaveden jako $[a_1 b_1 - a_2 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1]$, avšak lze na ně pohlížet tak, že $[a_1, a_2] = a_1 + a_2 i$ a $[b_1, b_2] = b_1 + b_2 i$, kde $i^2 = -1$.

Vraťme se ale zpět k naší struktuře. Chceme například vypočítat součin mezi $g = (\sigma_2 + 2\sigma_3 + 3\sigma_{123})$ a $h = (1 + 4\sigma_{31})$.

$$\begin{aligned} gh &= (\sigma_2 + 2\sigma_3 + 3\sigma_{123})(1 + 4\sigma_{31}) = \sigma_2 + 2\sigma_3 + 3\sigma_{123} + 4\sigma_2\sigma_{31} + 8\sigma_3\sigma_{31} + 12\sigma_{123}\sigma_{31} \\ &= \sigma_2 + 2\sigma_3 + 3\sigma_{123} + 4\sigma_{123} + 8\sigma_1 - 12\sigma_2 = 8\sigma_1 - 11\sigma_2 + 2\sigma_3 + 7\sigma_{123}. \end{aligned}$$

Místo formální definice (1.7) zkrátka můžeme roznásobit každý člen s každým a používat vztahy (1.1), (1.2) a (1.8). (Pozor, násobení je nekomutativní, je potřeba dodržovat pořadí).

Poznámka 1.3. Necht' $f, g, h \in \overline{\mathbb{G}}_3$ jsou libovolné prvky. Z (1.7) a (1.5) lze přímo dokázat následující vlastnosti součinu (1.7):

1. Je asociativní, takže platí

$$(fg)h = f(gh). \quad (1.9)$$

2. Platí levá a pravá distributivita vzhledem k operaci $+$ (vektorový součet), tedy:

$$\begin{aligned} f(g+h) &= fg + fh, \\ (g+h)f &= gf + hf. \end{aligned}$$

3. Je nekomutativní, nelze tedy o libovolných prvcích prohlásit, že $gh = hg$, například

$$\sigma_1\sigma_2 = -\sigma_2\sigma_1 \neq \sigma_2\sigma_1.$$

4. Není antikomutativní, nelze tedy o libovolných prvcích prohlásit, že $gh = -hg$, například

$$\sigma_1\sigma_1 = 1 \neq -\sigma_1\sigma_1 = -1.$$

Definice 1.4. Vektorový prostor $\overline{\mathbb{G}}_3$ se zavedeným součinem (1.7) nazveme *geometrickou algebrou Eukleidovského 3D prostoru*, kterou budeme dále označovat \mathbb{G}_3 .

Poznámka 1.5. Alternativní definici geometrické algebry \mathbb{G}_3 a matematickou teorii, týkající se jí, lze nalézt v [9].

Definice 1.6. Necht' $g \in \mathbb{G}_3$ je libovolný prvek ve tvaru (1.3), potom zobrazení $\| \cdot \| : \mathbb{G}_3 \rightarrow \mathbb{R}^+$, pro které platí:

$$\|g\| = \sqrt{\sum_{i=0}^7 a_i^2}, \quad (1.10)$$

nazveme *normou* prvku g .

Poznámka 1.7. Jedná se o eukleidovskou normu 8-dimenzionálního vektorového prostoru, značení $\| \cdot \|$ budeme používat i pro eukleidovskou normu prostoru \mathbb{R}^3 .

Definice 1.8. Necht' $g \in \mathbb{G}_3$ je libovolný prvek ve tvaru (1.3), potom prvek ve tvaru

$$\bar{g} = a_0 - a_1\sigma_1 - a_2\sigma_2 - a_3\sigma_3 - a_4\sigma_{23} - a_5\sigma_{31} - a_6\sigma_{12} - a_7\sigma_{123} \quad (1.11)$$

nazveme *konjugovaným prvkem* k prvku g .

1.2 Rotory a jejich vlastnosti

Definice 1.9. Nechť $R \in \mathbb{G}_3$ je prvek, pro který platí:

$$\begin{aligned} R &= a_0 + a_1\sigma_{23} + a_2\sigma_{31} + a_3\sigma_{12}, \\ \|R\| &= \sqrt{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = 1, \end{aligned} \quad (1.12)$$

kde $a_i \in \mathbb{R}$, $i \in \{0, 1, 2, 3\}$, pak prvek R nazveme *rotorem* v geometrické algebře \mathbb{G}_3 (dále jen *rotorem*).

Poznámka 1.10. Je-li $R \in \mathbb{G}_3$ rotorem, pak k němu konjugovaný prvek \bar{R} je také rotorem.

Věta 1.11. *Množina všech rotorů se součinem (1.7) tvoří nekomutativní grupu. Neutrální prvek je $1 \in \mathbb{G}_3$, takže pro libovolný rotor R platí $1R = R1 = R$. Inverzní prvek k libovolnému rotoru R je k němu konjugovaný rotor \bar{R} , takže platí $R\bar{R} = \bar{R}R = 1$.*

Důkaz. Nejdříve ukážeme uzavřenost součinu na množině rotorů. Mějme libovolné rotory $R_1, R_2 \in \mathbb{G}_3$, kde $R_1 = a_0 + a_1\sigma_{23} + a_2\sigma_{31} + a_3\sigma_{12}$ a $R_2 = b_0 + b_1\sigma_{23} + b_2\sigma_{31} + b_3\sigma_{12}$, potom součin mezi nimi je dle definice (1.7) roven:

$$\begin{aligned} R_1R_2 &= (a_0 + a_1\sigma_{23} + a_2\sigma_{31} + a_3\sigma_{12})(b_0 + b_1\sigma_{23} + b_2\sigma_{31} + b_3\sigma_{12}) \\ &= a_0b_0 - a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3 + (a_1b_0 + a_0b_1 + a_3b_2 - a_2b_3)\sigma_{23} \\ &\quad + (a_2b_0 - a_3b_1 + a_0b_2 + a_1b_3)\sigma_{31} + (a_3b_0 + a_2b_1 - a_1b_2 + a_0b_3)\sigma_{12}. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Výsledný prvek je tedy, stejně jako rotory, generovaný bází $\{1, \sigma_2\sigma_3, \sigma_3\sigma_1, \sigma_1\sigma_2\}$.

Dále je potřeba ukázat, že $\|R_1R_2\| = 1$.

$$\begin{aligned} \|R_1R_2\|^2 &= (a_0b_0 - a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3)^2 + (a_1b_0 + a_0b_1 + a_3b_2 - a_2b_3)^2 \\ &\quad + (a_2b_0 - a_3b_1 + a_0b_2 + a_1b_3)^2 + (a_3b_0 + a_2b_1 - a_1b_2 + a_0b_3)^2 \\ &= a_0^2b_0^2 - 2a_0b_0a_1b_1 - 2a_0b_0a_2b_2 - 2a_0b_0a_3b_3 + a_1^2b_1^2 + 2a_1b_1a_2b_2 + 2a_1b_1a_3b_3 \\ &\quad + a_2^2b_2^2 + 2a_2b_2a_3b_3 + a_3^2b_3^2 + a_1^2b_0^2 + 2a_1b_0a_0b_1 + 2a_1b_0a_3b_2 - 2a_1b_0a_2b_3 \\ &\quad + a_0^2b_1^2 + 2a_0b_1a_3b_2 - 2a_0b_1a_2b_3 + a_3^2b_2^2 - 2a_3b_2a_2b_3 + a_2^2b_3^2 + a_2^2b_0^2 \\ &\quad - 2a_2b_0a_3b_1 + 2a_2b_0a_0b_2 + 2a_2b_0a_1b_3 + a_3^2b_1^2 - 2a_3b_1a_0b_2 - 2a_3b_1a_1b_3 \\ &\quad + a_0^2b_2^2 + 2a_0b_2a_1b_3 + a_1^2b_3^2 + a_3^2b_0^2 + 2a_3b_0a_2b_1 - 2a_3b_0a_1b_2 + 2a_3b_0a_0b_3 \\ &\quad + a_2^2b_1^2 - 2a_2b_1a_1b_2 + 2a_2b_1a_0b_3 + a_1^2b_2^2 - 2a_1b_2a_0b_3 + a_0^2b_3^2 \\ &= a_0^2b_0^2 + a_1^2b_1^2 + a_2^2b_2^2 + a_3^2b_3^2 \\ &\quad + a_1^2b_0^2 + a_0^2b_1^2 + a_3^2b_2^2 + a_2^2b_3^2 \\ &\quad + a_2^2b_0^2 + a_3^2b_1^2 + a_0^2b_2^2 + a_1^2b_3^2 \\ &\quad + a_3^2b_0^2 + a_2^2b_1^2 + a_1^2b_2^2 + a_0^2b_3^2. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Vytkneme-li u příslušných členů prvek b_i^2 , kde $i \in \{0, 1, 2, 3\}$, a využijeme vlastnosti $a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$, která plyne z definice rotoru, získáme výraz

$$b_0^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2,$$

o kterém víme, že je také roven 1. Ukázali jsme, že $\|R_1R_2\|^2 = 1$ resp. $\|R_1R_2\| = 1$. Operace násobení je tedy na množině rotorů uzavřená.

Asociativita násobení je zmíněna výše u vlastností součinu (viz (1.9)).

Dále je potřeba určit neutrální prvek. To je zřejmě $1 \in \mathbb{G}_3$, neboť tento prvek odpovídá definici rotoru a pro libovolný rotor R platí $1R = R1 = R$.

Dále ukážeme, že inverzní prvek R^{-1} k rotoru R je jeho konjugovaným prvkem, tedy $R^{-1} = \overline{R}$. Mějme rotor $R = a_0 + a_1\sigma_{23} + a_2\sigma_{31} + a_3\sigma_{12}$ a k němu konjugovaný rotor $\overline{R} = a_0 - a_1\sigma_{23} - a_2\sigma_{31} - a_3\sigma_{12}$ a provedme mezi nimi součin:

$$\begin{aligned}
R\overline{R} &= (a_0 + a_1\sigma_{23} + a_2\sigma_{31} + a_3\sigma_{12})(a_0 - a_1\sigma_{23} - a_2\sigma_{31} - a_3\sigma_{12}) \\
&= a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \\
&\quad + (a_1a_0 - a_0a_1 + a_3a_2 - a_2a_3)\sigma_{23} \\
&\quad + (a_2a_0 + a_3a_1 - a_0a_2 - a_1a_3)\sigma_{31} \\
&\quad + (a_3a_0 - a_2a_1 + a_1a_2 - a_0a_3)\sigma_{12} \\
&= a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1.
\end{aligned} \tag{1.15}$$

Analogicky vypočteme, že $\overline{R}R = 1$. Ukázali jsme tedy, že $\overline{R} = R^{-1}$. Tím je dokázáno, že se jedná o grupu.

Zbývá ukázat, že jde o grupu nekomutativní, to ukážeme na protipříkladu. Mějme rotory $R_1 = \sigma_{23}$ a $R_2 = \sigma_{31}$. Potom $R_1R_2 = \sigma_{23}\sigma_{31} = \sigma_{21} = -\sigma_{12}$. Obráceně $R_2R_1 = \sigma_{31}\sigma_{23} = \sigma_{12} \neq -\sigma_{12}$, takže součin na množině rotorů není komutativní. Tím je věta zcela dokázána. \square

Poznámka 1.12. Tato grupa je izomorfní spinové grupě $Spin(2)$ [4].

Důsledek 1.13. *Vynásobíme-li spolu dva libovolné rotory, získáme opět rotor.*

Příklad 1.14. Mějme rotory $R_1 = 0,6 + 0,8\sigma_{23}$ a $R_2 = 0,7 + 0,5\sigma_{23} + 0,4\sigma_{31} + \sqrt{0,1}\sigma_{12}$. Jejich vynásobením získáme:

$$\begin{aligned}
R_1R_2 &= (0,6 + 0,8\sigma_{23})(0,7 + 0,5\sigma_{23} + 0,4\sigma_{31} + \sqrt{0,1}\sigma_{12}) \\
&= 0,42 + 0,36\sigma_{23} + 0,24\sigma_{31} + 0,6\sqrt{0,1}\sigma_{12} + 0,56\sigma_{23} \\
&\quad - 0,4 - 0,32\sigma_{12} + 0,8\sqrt{0,1}\sigma_{31} \\
&= 0,02 + 0,86\sigma_{23} + (0,24 + 0,8\sqrt{0,1})\sigma_{31} + (0,6\sqrt{0,1} - 0,32)\sigma_{12}. \\
\|R_1R_2\| &= \sqrt{0,02^2 + 0,86^2 + (0,24 + 0,8\sqrt{0,1})^2 + (0,6\sqrt{0,1} - 0,32)^2} = 1.
\end{aligned}$$

Součinem dvou rotorů jsme získali opět rotor, neboť je generován bází $\{1, \sigma_2\sigma_3, \sigma_3\sigma_1, \sigma_1\sigma_2\}$ a jeho norma je rovna jedné.

Důsledek 1.15. *Pro libovolné rotory R_1, R_2 platí:*

$$\overline{R_1R_2} = \overline{R_2}R_1. \tag{1.16}$$

Důkaz. Tuto vlastnost splňují invertibilní prvky v grupě:

$$\begin{aligned}
AB(AB)^{-1} &= (AB)^{-1}AB = 1, \\
ABB^{-1}A^{-1} &= B^{-1}A^{-1}AB = 1,
\end{aligned}$$

takže

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

\square

Příklad 1.16. V minulém příkladu jsme měli rotory $R_1 = 0,6 + 0,8\sigma_{23}$, $R_2 = 0,7 + 0,5\sigma_{23} + 0,4\sigma_{31} + \sqrt{0,1}\sigma_{12}$ a jejich součin $R_1R_2 = 0,02 + 0,86\sigma_{23} + (0,24 + 0,8\sqrt{0,1})\sigma_{31} + (0,6\sqrt{0,1} - 0,32)\sigma_{12}$. Pro konjungovaný součin tedy platí

$$\overline{R_1R_2} = 0,02 - 0,86\sigma_{23} - (0,24 + 0,8\sqrt{0,1})\sigma_{31} - (0,6\sqrt{0,1} - 0,32)\sigma_{12}.$$

Dále spočteme $\overline{R_2R_1}$:

$$\begin{aligned} \overline{R_2R_1} &= (0,7 - 0,5\sigma_{23} - 0,4\sigma_{31} - \sqrt{0,1}\sigma_{12})(0,6 - 0,8\sigma_{23}) \\ &= 0,42 - 0,56\sigma_{23} - 0,3\sigma_{23} - 0,4 - 0,24\sigma_{31} + 0,32\sigma_{12} \\ &\quad - 0,6\sqrt{0,1}\sigma_{12} - 0,8\sqrt{0,1}\sigma_{31} \\ &= 0,02 - 0,86\sigma_{23} - (0,24 + 0,8\sqrt{0,1})\sigma_{31} - (0,6\sqrt{0,1} - 0,32)\sigma_{12} = \overline{R_1R_2}. \end{aligned}$$

Definice 1.17. Máme-li rotor R ve tvaru (1.12), potom prvek a_0 nazveme *skalární částí* rotoru R a budeme ji dále značit $S(R)$. Vektor (a_1, a_2, a_3) nazveme *vektorovou částí* rotoru R a budeme ji dále značit $\vec{V}(R)$. Rotor R je vyjádřen pomocí skalární a vektorové části takto:

$$R = S(R) + \vec{V}(R) \begin{pmatrix} \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix}. \quad (1.17)$$

Věta 1.18. Mějme rotory R_1, R_2 , kde $R_1 = S(R_1) + \vec{V}(R_1) \begin{pmatrix} \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix}$ a $R_2 = S(R_2) + \vec{V}(R_2) \begin{pmatrix} \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix}$, potom jejich součin lze vyjádřit ve tvaru:

$$\begin{aligned} R_1R_2 &= S(R_1)S(R_2) - \vec{V}(R_1) \cdot \vec{V}(R_2) + S(R_1)\vec{V}(R_2) \begin{pmatrix} \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} \\ &\quad + S(R_2)\vec{V}(R_1) \begin{pmatrix} \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} + (\vec{V}(R_2) \times \vec{V}(R_1)) \begin{pmatrix} \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Důkaz. Mějme rotory R_1 a R_2 , kde $R_1 = a_0 + a_1\sigma_{23} + a_2\sigma_{31} + a_3\sigma_{12}$ a $R_2 = b_0 + b_1\sigma_{23} + b_2\sigma_{31} + b_3\sigma_{12}$. Jejich součin (viz (1.13)) R_1R_2 je vyjádřen ve tvaru

$$\begin{aligned} R_1R_2 &= a_0b_0 - a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3 + (a_1b_0 + a_0b_1 + a_3b_2 - a_2b_3)\sigma_{23} \\ &\quad + (a_2b_0 - a_3b_1 + a_0b_2 + a_1b_3)\sigma_{31} + (a_3b_0 + a_2b_1 - a_1b_2 + a_0b_3)\sigma_{12}, \end{aligned}$$

což lze upravit na tvar

$$\begin{aligned} R_1R_2 &= a_0b_0 - a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3 \\ &\quad + a_1b_0\sigma_{23} + a_0b_1\sigma_{23} + (a_3b_2 - a_2b_3)\sigma_{23} \\ &\quad + a_2b_0\sigma_{31} + a_0b_2\sigma_{31} + (a_1b_3 - a_3b_1)\sigma_{31} \\ &\quad + a_3b_0\sigma_{12} + a_0b_3\sigma_{12} + (a_2b_1 - a_1b_2)\sigma_{12} \\ &= a_0b_0 - a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + b_0(a_1, a_2, a_3) \begin{pmatrix} \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} + a_0(b_1, b_2, b_3) \begin{pmatrix} \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} \\
& + (a_3b_2 - a_2b_3, a_1b_3 - a_3b_1, a_2b_1 - a_1b_2) \begin{pmatrix} \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Nyní je snadno vidět, že když a_0 resp. b_0 nahradíme $S(R_1)$ resp. $S(R_2)$ a (a_1, a_2, a_3) resp. (b_1, b_2, b_3) nahradíme $\vec{V}(R_1)$ resp. $\vec{V}(R_2)$, získáme tvar (1.18). \square

Definice 1.19. Rotor $R = a_0 + a_1\sigma_{23} + a_2\sigma_{31} + a_3\sigma_{12}$, lze vyjádřit ve tvaru:

$$R = \cos \frac{\theta}{2} + N \sin \frac{\theta}{2}, \quad (1.19)$$

kde

$$\theta = 2 \arccos a_0, \quad (1.20)$$

$$N = \frac{a_1\sigma_{23} + a_2\sigma_{31} + a_3\sigma_{12}}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}, \quad \text{pro } R \neq 1, \quad (1.21)$$

$$N = 0, \quad \text{pro } R = 1.$$

Toto vyjádření budeme dále označovat jako *goniometrický tvar* rotoru R .

Poznámka 1.20. Máme-li rotor R ve tvaru (1.19), potom k němu konjugovaný rotor \bar{R} je ve tvaru:

$$\bar{R} = \cos \frac{\theta}{2} - N \sin \frac{\theta}{2}. \quad (1.22)$$

1.3 Rotace ve 3D

Zavedme nyní zobrazení $\Psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{G}_3$ a zobrazení $\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{G}_3$, pro která platí:

$$\Psi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\sigma_1 + y\sigma_2 + z\sigma_3, \quad (1.23)$$

$$\Phi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\sigma_{23} + y\sigma_{31} + z\sigma_{13}, \quad (1.24)$$

kde $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Věta 1.21. Mějme rotor $R \in \mathbb{G}_3$ ve tvaru (1.12) resp. v goniometrickém tvaru (1.19) a k němu konjugovaný rotor \bar{R} . Máme tedy

$$\begin{aligned}
R & = a_0 + a_1\sigma_{23} + a_2\sigma_{31} + a_3\sigma_{12} = \cos \frac{\theta}{2} + N \sin \frac{\theta}{2}, \\
\bar{R} & = a_0 - a_1\sigma_{23} - a_2\sigma_{31} - a_3\sigma_{12} = \cos \frac{\theta}{2} - N \sin \frac{\theta}{2},
\end{aligned}$$

kde

$$\theta = 2 \arccos a_0,$$

$$N = \frac{a_1\sigma_{23} + a_2\sigma_{31} + a_3\sigma_{12}}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}, \quad \text{pro } R \neq 1,$$

$$N = 0, \quad \text{pro } R = 1.$$

Dále mějme prvek $U \in \mathbb{G}_3$ ve tvaru $U = u_1\sigma_1 + u_2\sigma_2 + u_3\sigma_3$. Potom výpočtem

$$RU\bar{R} = \tilde{U} = \tilde{u}_1\sigma_1 + \tilde{u}_2\sigma_2 + \tilde{u}_3\sigma_3 \quad (1.25)$$

získáme vektor $\vec{\tilde{u}} = \Psi^{-1}(\tilde{U}) = \begin{pmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_2 \\ \tilde{u}_3 \end{pmatrix}$, který vznikne rotací kolem vektoru $\vec{n} =$

$$\Phi^{-1}(N) = \frac{1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \text{ o úhel } \theta \text{ v kladném směru v prostoru } \mathbb{R}^3.$$

Důkaz. Viz [9]. □

Poznámka 1.22. Kladným směrem rotace je myšleno, že když jdeme prsty pravé ruky od vektoru \vec{u} (vektor, který chceme rotovat) k vektoru \vec{n} (vektor určující osu rotace), palec ukazuje směr rotace. Pokud bychom chtěli rotovat opačným směrem, stačí místo $RU\bar{R}$ vypočítat $\bar{R}UR$ resp. změnit znaménko u členu $N \sin \frac{\theta}{2}$.

Tvrzení 1.21 demonstrujeme na příkladu:

Příklad 1.23. Mějme prostor \mathbb{R}^3 . Chceme například provést rotaci vektoru $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \Psi^{-1}(\sigma_2)$ kolem osy x o úhel θ . Odpovídající rotor R je ve tvaru $R = \cos \frac{\theta}{2} + \sigma_{23} \sin \frac{\theta}{2}$, takže $N = \sigma_{23} = \Phi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Máme tedy

$$\begin{aligned} RU\bar{R} &= (\cos \frac{\theta}{2} + \sigma_{23} \sin \frac{\theta}{2})\sigma_2(\cos \frac{\theta}{2} - \sigma_{23} \sin \frac{\theta}{2}) \\ &= (\sigma_2 \cos \frac{\theta}{2} - \sigma_3 \sin \frac{\theta}{2})(\cos \frac{\theta}{2} - \sigma_{23} \sin \frac{\theta}{2}) \\ &= \sigma_2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - \sigma_3 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} - \sigma_3 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} - \sigma_2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \\ &= \sigma_2 \cos \theta - \sigma_3 \sin \theta = \Psi \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \theta \\ -\sin \theta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Získali jsme vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ \cos \theta \\ -\sin \theta \end{pmatrix}$, který odpovídá rotaci vektoru $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ kolem osy x o úhel θ . Pokud bychom chtěli rotovat opačným směrem, stačilo by otočit znaménko u prvku N , odpovídající rotor by pak byl ve tvaru $R = \cos \frac{\theta}{2} - \sigma_{23} \sin \frac{\theta}{2}$. Analogickým výpočtem bychom potom získali vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$, který odpovídá rotaci vektoru $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ kolem osy x o úhel θ opačným směrem.

Rotor je tedy čtyřrozměrný prvek, který konkrétně určuje osu (procházející počátkem soustavy souřadnic), kolem které je prováděna rotace ve 3D prostoru, úhel, o který je provedena, i směr rotace.

V předchozí podkapitole jsou uvedena tři různá vyjádření rotoru R (viz (1.12), (1.17) a (1.19)), takže

$$R = a_0 + a_1\sigma_{23} + a_2\sigma_{31} + a_3\sigma_{12} = S(R) + \vec{V}(R) \begin{pmatrix} \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \cos \frac{\theta}{2} + N \sin \frac{\theta}{2}.$$

Osu rotace určuje vektor $(a_1, a_2, a_3) = \vec{V}(R)$ resp. vektor $\vec{n} = \Phi^{-1}(N)$ (\vec{n} je vlastně k -násobkem $(a_1, a_2, a_3) = \vec{V}(R)$). Úhel rotace θ je pak vyjádřen pomocí členu $a_0 = S(R)$ a to tak, že $\theta = 2 \arccos a_0$ resp. $\theta = 2 \arccos S(R)$. Rotor v goniometrickém tvaru je přímo vyjádřen pomocí úhlu rotace θ .

Poznámka 1.24. Když se omezíme na rotace o úhel $\theta \in \langle 0, 2\pi \rangle$, potom $\sin \frac{\theta}{2} \geq 0$ a vektor \vec{n} je kladným k -násobkem vektoru $(a_1, a_2, a_3) = \vec{V}(R)$. Můžeme tedy prohlásit, že pokud jdeme prsty pravé ruky od vektoru \vec{u} (vektor, který chceme rotovat), k vektoru $(a_1, a_2, a_3) = \vec{V}(R)$ (vektor, kolem kterého provádíme rotaci), palec určuje směr rotace. Tím jsme rozšířili poznámku 1.22.

Definice 1.25. Mějme rotor R ve tvaru $R = a_0 + a_1\sigma_{23} + a_2\sigma_{31} + a_3\sigma_{12}$, $a_0 \neq 0$, potom výpočtem

$$\vec{r} = \frac{(a_1, a_2, a_3)}{a_0} \quad (1.26)$$

definujeme *vektor rotace* $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$.

Poznámka 1.26. Pokud je rotor R zapsán pomocí skalární a vektorové části (viz (1.17)), potom lze vektor rotace vyjádřit takto:

$$\vec{r} = \frac{\vec{V}(R)}{S(R)}. \quad (1.27)$$

Pokud je rotor R v goniometrickém tvaru (1.19), potom lze vektor rotace vyjádřit takto:

$$\vec{r}^T = \Phi^{-1} \left(N \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta}{2}} \right) = \Phi^{-1} \left(N \tan \frac{\theta}{2} \right) = \frac{1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \tan \frac{\theta}{2}. \quad (1.28)$$

Definovali jsme trojrozměrný prvek - vektor ve 3D prostoru, vyjádřený pomocí koeficientů rotoru. Tento prvek, stejně jako rotor, jednoznačně určuje rotaci (osu, úhel, směr). Rotace je provedena kolem osy, na které vektor leží, tangens poloviny úhlu je roven normě (velikosti) vektoru:

$$\tan \frac{\theta}{2} = \|\vec{r}\|. \quad (1.29)$$

Poznámka 1.27. Z (1.29) plyne, že $\tan \frac{\theta}{2} \geq 0$ a $\theta \in \langle 0, \pi \rangle$. Chceme-li vyjádřit rotaci o větší úhel resp. rotovat na druhou stranu, stačí vektoru \vec{r} otočit znaménko (bude mířit opačným směrem). Pro rotace o π nejsou vektory rotace definovány.

Nyní tedy můžeme konkrétní rotaci vyjádřit pomocí vektoru ve 3D. Je-li rotace zadána pomocí vektoru rotace $\vec{r} = (r_1, r_2, r_3)$ potom k němu odpovídající rotor (vyjadřující stejnou rotaci) získáme pro $\|\vec{r}\| \neq 0$ vztahem

$$R = \cos[\arctan(\|\vec{r}\|)] + \frac{r_1\sigma_{23} + r_2\sigma_{31} + r_3\sigma_{12}}{\|\vec{r}\|} \sin[\arctan(\|\vec{r}\|)], \quad (1.30)$$

$$R = \pm 1, \quad \text{pro } \|\vec{r}\| = 0.$$

Příklad 1.28. V předešlém příkladě byla provedena rotace kolem osy x o úhel θ . Odpovídající rotor byl ve tvaru $R = \cos \frac{\theta}{2} + \sigma_{23} \sin \frac{\theta}{2}$. Vyjádření vektoru rotace získáme výpočtem

$$\vec{r}^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta}{2}} = \begin{pmatrix} \tan \frac{\theta}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že vektor rotace leží na ose x , tedy na ose, kolem které rotujeme. Dále vidíme, že pro různé úhly θ je různá norma vektoru $\|\vec{r}\|$. Například pro $\theta = 0$ je $\|\vec{r}\| = 0$, pro $\theta = \frac{\pi}{2}$ je $\|\vec{r}\| = 1$. Když $\theta \rightarrow \pi$, pak $\|\vec{r}\| \rightarrow \infty$ atd.

Příklad 1.29. Mějme vektor rotace $\vec{r} = (4, 3, 0)$, potom odpovídající rotor vypočteme pomocí vztahu (1.30). $\|\vec{r}\| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$, takže

$$R = \cos[\arctan(5)] + \frac{4\sigma_{23} + 3\sigma_{31}}{5} \sin[\arctan(5)].$$

Rotujeme tedy kolem osy $(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, 0) \sim (4, 3, 0)$ o úhel $\theta = 2 \arctan(5)$.

Věta 1.30. Máme-li dvě po sobě jdoucí rotace, získané pomocí po řadě jdoucích rotorů R_1 a R_2 , pak k nim ekvivalentní rotaci získáme pomocí rotoru $R = R_2 R_1$, tedy

$$R_2(R_1 U \bar{R}_1) \bar{R}_2 = (R_2 R_1) U (\bar{R}_1 \bar{R}_2) = (R_2 R_1) U (\bar{R}_2 \bar{R}_1) = R U \bar{R}. \quad (1.31)$$

Důkaz. Výpočet (1.31) lze provést díky asociativitě násobení, uzavřenosti násobení na množině rotorů a vlastnosti konjugovaných prvků $\bar{R}_1 \bar{R}_2 = \bar{R}_2 \bar{R}_1$ (viz věta 1.11 a důsledek 1.15). \square

Poznámka 1.31. U složené rotace, která je vyjádřena pomocí více rotorů, záleží na jejich pořadí, protože násobení na množině rotorů není komutativní operace ($R_1 R_2 \neq R_2 R_1$).

Příklad 1.32. Rotujme vektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \Psi^{-1}(\sigma_2)$ kolem osy x o úhel $\frac{\pi}{2}$ a následně

kolem osy y o úhel $\frac{\pi}{2}$. Lze si snadno představit, že výsledný vektor bude ve tvaru $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, k tomuto výsledku však nyní dojdeme pomocí složené rotace:

$$R_1 = \cos \frac{\pi}{4} + \sigma_{23} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \sigma_{23} \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$R_2 = \cos \frac{\pi}{4} + \sigma_{31} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \sigma_{31} \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\begin{aligned}
R &= R_2 R_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \sigma_{31} \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \sigma_{23} \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sigma_{31} + \frac{1}{2}\sigma_{23} + \frac{1}{2}\sigma_{31}\sigma_{23} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sigma_{31} + \frac{1}{2}\sigma_{23} + \frac{1}{2}\sigma_{12}.
\end{aligned}$$

Ekvivalentní rotace tedy vznikne kolem osy $\vec{V}(R) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ o úhel $2 \arccos \frac{1}{2} = \frac{2}{3}\pi$.

$$\begin{aligned}
R\sigma_2\bar{R} &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sigma_{31} + \frac{1}{2}\sigma_{23} + \frac{1}{2}\sigma_{12}\right)\sigma_2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sigma_{31} - \frac{1}{2}\sigma_{23} - \frac{1}{2}\sigma_{12}\right) \\
&= \left(\frac{1}{2}\sigma_2 + \frac{1}{2}\sigma_{123} - \frac{1}{2}\sigma_3 + \frac{1}{2}\sigma_1\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sigma_{31} - \frac{1}{2}\sigma_{23} - \frac{1}{2}\sigma_{12}\right) \\
&= \sigma_1 = \Psi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Získali jsme požadovaný vektor. Kdybychom vyměnili pořadí rotorů R_1 a R_2 , získali bychom $R = R_1 R_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sigma_{31} + \frac{1}{2}\sigma_{23} - \frac{1}{2}\sigma_{12}$ a analogickým výpočtem výsledný vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, který je odlišný.

Věta 1.33. Máme-li dvě po sobě jdoucí rotace, získané pomocí po řadě jdoucích vektorů rotace r_1 a r_2 , pak k nim ekvivalentní rotaci získáme pomocí vektoru rotace \vec{r} , vyjádřeného vztahem:

$$\vec{r} = \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_1 \times \vec{r}_2}{1 - \vec{r}_2 \cdot \vec{r}_1}, \quad (1.32)$$

kde \times je vektorový součin a \cdot skalární součin dvou vektorů.

Důkaz. Mějme dva vektory rotace ve tvaru $\vec{r}_1 = \frac{\vec{V}(R_1)}{S(R_1)}$ a $\vec{r}_2 = \frac{\vec{V}(R_2)}{S(R_2)}$, potom k nim

příslušné rotory (které vyjadřují stejnou rotaci) jsou ve tvaru $R_1 = S(R_1) + \vec{V}(R_1) \begin{pmatrix} \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix}$,

$R_2 = S(R_2) + \vec{V}(R_2) \begin{pmatrix} \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix}$. Vyjádříme-li jejich součin pomocí jejich skalárních a vektorových částí (viz 1.18), získáme tvar:

$$\begin{aligned}
R_2 R_1 &= S(R_2)S(R_1) - \vec{V}(R_2) \cdot \vec{V}(R_1) + S(R_2)\vec{V}(R_1) \begin{pmatrix} \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} \\
&+ S(R_1)\vec{V}(R_2) \begin{pmatrix} \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} + (\vec{V}(R_1) \times \vec{V}(R_2)) \begin{pmatrix} \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Z tohoto tvaru nyní vyjádříme vektor rotace:

$$\vec{r} = \frac{S(R_2)\vec{V}(R_1) + S(R_1)\vec{V}(R_2) + \vec{V}(R_1) \times \vec{V}(R_2)}{S(R_2)S(R_1) - \vec{V}(R_2) \cdot \vec{V}(R_1)}. \quad (1.33)$$

Nyní stačí zlomek rozšířit výrazem $\frac{1}{S(R_2)S(R_1)}$. Protože mezi skalární částí rotoru, vektorovou částí rotoru a vektorem rotace platí vztah (1.27), obdržíme:

$$\vec{r} = \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_1 \times \vec{r}_2}{1 - \vec{r}_2 \cdot \vec{r}_1}, \quad (1.34)$$

což je požadovaný tvar. □

Definice 1.34. Pro skládání vektorů rotace \vec{r}_1 a \vec{r}_2 lze tedy zavést novou operaci, pro kterou budeme používat symbol \circ . Dále budeme psát:

$$\vec{r}_2 \circ \vec{r}_1 = \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_1 \times \vec{r}_2}{1 - \vec{r}_2 \cdot \vec{r}_1}. \quad (1.35)$$

Poznámka 1.35. Skládání vektorů rotace je nekomutativní operace, toho si lze všimnout na první pohled, protože je vyjádřena pomocí vektorového součinu, který je také nekomutativní.

Příklad 1.36. Chceme například určit vektor rotace \vec{r} , který vyjadřuje ekvivalentní rotaci, jako po řadě jdoucí vektory rotace $\vec{r}_1 = (1, 0, 0)$ a $\vec{r}_2 = (0, 1, 0)$. $\|\vec{r}_1\| = \|\vec{r}_2\| = 1 \Rightarrow$ oba vektory vyjadřují rotaci o úhel $\theta = \frac{\pi}{2}$ (první kolem osy x , druhý kolem osy y). Vektory \vec{r}_1 a \vec{r}_2 tedy vyjadřují stejné rotace, jako rotory R_1 a R_2 v příkladu 1.32, takže výsledný vektor rotace \vec{r} musí vyjadřovat stejnou rotaci, jako rotor R , který vyjadřoval ekvivalentní rotaci k rotaci vyjádřené pomocí po řadě jdoucích rotorů R_1 a R_2 v příkladu 1.32. $\vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = (0, 0, 1)$, $\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 = 0$, takže ekvivalentní vektor rotace získáme výpočtem:

$$\vec{r} = \vec{r}_2 \circ \vec{r}_1 = (1, 0, 0) + (0, 1, 0) + (0, 0, 1) = (1, 1, 1).$$

Dále $\|\vec{r}\| = \sqrt{3}$, $\theta = 2 \arctan \sqrt{3} = \frac{2}{3}\pi$ (viz (1.29)), osu rotace určuje vektor $(1, 1, 1) \sim (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, z toho vyplývá, že vektor rotace \vec{r} vyjadřuje stejnou rotaci jako rotor R v příkladu 1.32.

Poznámka 1.37. Pro popis očních pohybů se vektory rotace používají například v [1] nebo [5].

2 Oko a oční pohyby

2.1 Základní pojmy a definice

Oční bulva je kulovitého tvaru o průměru přibližně $2,4\text{ cm}$ [12]. V této práci na ni budeme pohlížet jako na kouli o jednotkovém poloměru. Jednotková velikost tedy odpovídá $1,2\text{ cm}$.

Definice 2.1. Pokud je hlava vzpřímená a oči se dívají přímo vpřed, potom řekneme, že se nachází v *primární pozici* (viz obrázek 1 vlevo) [1, 5].

Poznámka 2.2. Dle definice 2.1 existuje teoreticky nekonečně mnoho primárních pozic, v každé z nich se oči dívají přímo vpřed, ale jsou jinak torzně stočeny. V kapitole 3 je však uvedeno tzv. Dondersovo pravidlo [1, 5, 14], které říká, že pokud oči sledují vzdálené objekty (dívají se rovnoběžně), pak pro konkrétní směr pohledu existuje pouze jedna pozice oka. Primární pozice oka je tedy jedna jediná.

Definice 2.3. Ve středu oka se nachází bod, kterým prochází všechny osy, kolem kterých oko může rotovat. Tento bod budeme dále nazývat *centrum otáčení oka*. Centrum otáčení levého oka resp. pravého oka budeme značit C_L resp. C_R .

Poznámka 2.4. Centrum otáčení ve skutečnosti není přímo ve středu oka, ale je mírně vychýleno [12]. Toto vychýlení zanedbáme.

Poznámka 2.5. Vzdálenost bodů C_L a C_R vyjadřuje vzdálenost očí od sebe, ta je u člověka přibližně $6,5\text{ cm}$ [12]. V této práci ji budeme brát jako parametr, jeho poloviční velikost budeme označovat písmenem d , celková vzdálenost očí je tedy $2d$, $d > 0$ (viz obrázek 2 nebo obrázek 3).

Poznámka 2.6. V textu bude často používán pojem *binokulární vidění*, tím budeme mít na mysli sledování objektů (bodů) v prostoru oběma očima.

Definice 2.7. Při binokulárním vidění sledují oči objekt (bod) pod nějakým úhlem. Tento úhel budeme dále nazývat *vergenční úhel* a budeme ho značit písmenem α .

2.2 Klasifikace očních pohybů

V této části čerpáme ze zdroje [12].

Sakády - velmi rychlé rotační pohyby, mohou být vůlí ovlivnitelné, ale provádíme je i nevědomky. Jsou to vlastně nejzákladnější oční pohyby, které slouží k prohlížení zorného pole. Následují za sebou s odstupem 150 ms - čas potřebný k vizuálnímu zpracování obrazu. Provedené sakadické pohyby levého a pravého oka jsou na sobě závislé, z výpočtů v kapitolách 3 a 4 vyplyne, jakým způsobem.

Sledovací oční pohyby - vůlí neovlivnitelné, nastávají ve chvíli, když se v zorném poli začne nějaký předmět pohybovat resp. když se při fixaci očí na nějaký předmět začne pohybovat hlava. Sledovací pohyby slouží k tomu, aby byly oči na tento předmět stále fixované.

Disjunktní pohyby - vůlí ovlivnitelné, nastávají ve chvíli, kdy očima zaostříme na nějaký bod v prostoru - začneme ho sledovat pod vergenčním úhlem α . Provedou-li oči, pozorující bod pod vergenčním úhlem α , na sobě závislé sakadické pohyby, začnou sledovat jiný bod pod stejným vergenčním úhlem α [14]. Pro změnu vergenčního úhlu musí oči

vykonat další disjunktní pohyb. Disjunktní pohyby jsou pomalejší, než pohyby sakadické, a také náročnější z hlediska svalového zatížení.

Sakády, sledovací oční pohyby a disjunktní pohyby patří do kategorie velkých očních pohybů.

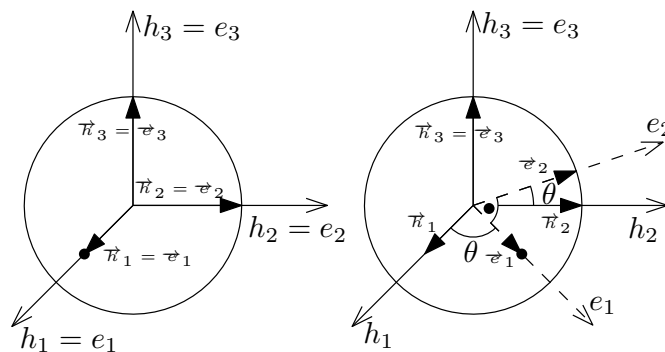
Při fixaci na nějaký bod oko vykonává malé oční pohyby, mezi které patří mikrosakády, klouzavé pohyby a oční třes. O jejich parametrech a významu je více napsáno v [12], v této práci se jimi dále nebudeme zabývat.

2.3 Souřadné systémy a značení

Definice 2.8. Definujme souřadný systém $H : h_1, h_2, h_3$ fixovaný k hlavě, počátkem soustavy souřadnic je centrum otáčení oka, při vzpřímené hlavě osa h_1 splývá s předozadní osou, je orientována vpřed, h_2 s horizontální osou, je orientována doleva, h_3 s vertikální osou, je orientována vzhůru (viz obrázek 1).

Definice 2.9. Dále definujme souřadný systém $E : e_1, e_2, e_3$ fixovaný k oku s počátkem soustavy souřadnic v centru otáčení oka. Je-li oko v primární poloze, potom, e_1 splývá s h_1 a je orientována stejným směrem, e_2 s h_2 a e_3 s h_3 , jinými slovy pro oko v primární poloze jsou souřadné systémy H a E totožné (viz obrázek 1).

Poznámka 2.10. Označením $\vec{h}_1, \vec{h}_2, \vec{h}_3, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ budeme mít na mysli jednotkové vektory v kladném směru příslušné osy (viz obrázek 1), velkým písmenem pak jejich obraz v \mathbb{G}_3 např. $E_1 = \Psi(\vec{e}_1)$. Polohu oka pak budeme vyjadřovat pomocí vektorů $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ v souřadném systému H . Vyjádření vektoru \vec{e}_1 v souřadném systému H určuje směr pohledu oka, vyjádření vektoru $\vec{h}_1 = (1, 0, 0)$ určuje směr pohledu oka v primární pozici (viz obrázek 1).

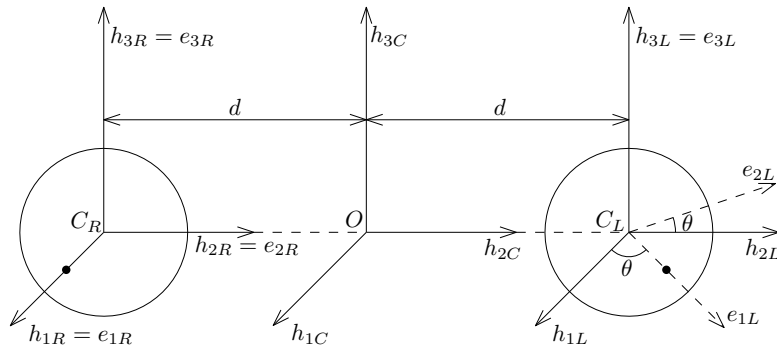


Obrázek 1: Vlevo se oko nachází v primární pozici, vpravo je oko otočené kolem osy h_3 o úhel θ .

Definice 2.11. Pro binokulární vidění zavedme souřadné systémy $H_C : h_{1C}, h_{2C}, h_{3C}$, $H_L : h_{1L}, h_{2L}, h_{3L}$ a $H_R : h_{1R}, h_{2R}, h_{3R}$, fixované k hlavě, lišící se pouze počátkem soustavy souřadnic. Počátek souřadného systému H_L je v centru otáčení levého oka, počátek H_R v centru otáčení pravého oka, počátek H_C ve středu úsečky, spojující centra otáčení levého a pravého oka, tento střed budeme značit písmenem O . Při vzpřímené hlavě jsou směry a orientace os stejné jako v souřadném systému H (viz definice 2.8), např. h_{1C}, h_{1L}, h_{1R} jsou předozadní osy orientované vpřed atd. (viz obrázek 2).

Poznámka 2.12. Přepočítání souřadnic mezi systémy H_C , H_L a H_R spočívá jen v posunutí druhé souřadnice o vzdálenost center otáčení očí $2d$ resp. o poloviční vzdálenost d (viz obrázek 2).

Definice 2.13. Pro úplnost definujme pro binokulární vidění systémy $E_L : e_{1L}, e_{2L}, e_{3L}$ a $E_R : e_{1R}, e_{2R}, e_{3R}$, fixované k oku s počátkem soustavy souřadnic v centru otáčení levého resp. pravého oka. Jsou-li oči v primární pozici, potom E_L splývá s H_L a E_R s H_R , e_{1R} tedy např. splývá s h_{1R} a je orientována stejným směrem atd. (viz obrázek 2).



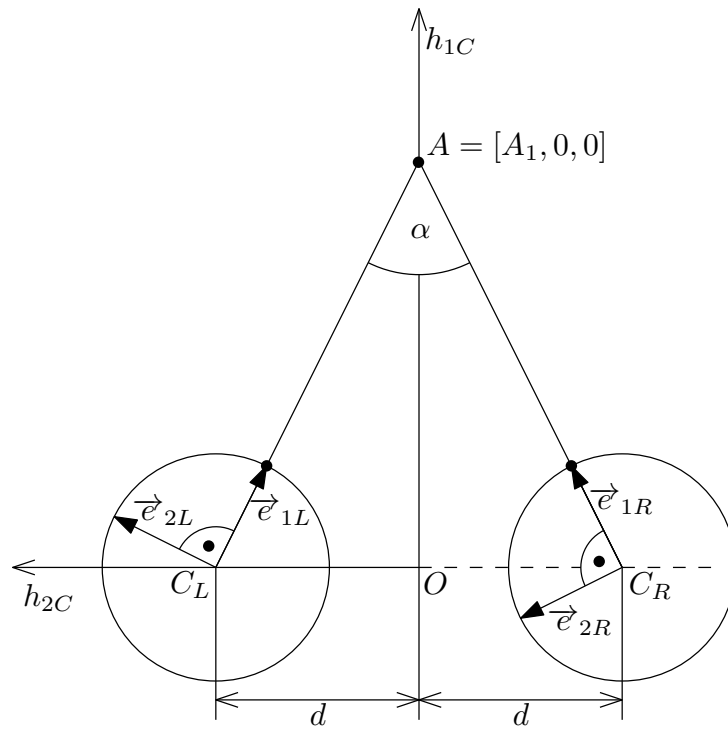
Obrázek 2: Souřadné systémy H_R, H_C, H_L s počátkem v C_R resp. v O resp. v C_L , pravé oko se dívá přímo vpřed, levé oko je otočené kolem osy h_{3L} o úhel θ .

Poznámka 2.14. Označením $\vec{e}_{1L}, \vec{e}_{2L}, \vec{e}_{1R}$ atd. budeme opět označovat jednotkové vektory v kladném směru příslušných os a pomocí nich vyjadřovat polohu očí v souřadném systému H_L resp. H_R resp. H_C . Vektor \vec{e}_{1L} resp. \vec{e}_{1R} určuje směr vidění levého resp. pravého oka.

Poznámka 2.15. Všechny nadefinované souřadné systémy jsou pravotočivé.

Definice 2.16. Buďme v souřadném systému H_C . Oči jsou v takové poloze, že pozorují pevně zvolený bod $A = [A_1, 0, 0]$, ležící na ose h_{1C} . V této pozici spolu vektory \vec{e}_{1L} a \vec{e}_{1R} svírají vergenční úhel α . Tuto polohu očí budeme dále nazývat *primární α pozicí* (viz obrázek 3).

Poznámka 2.17. Dle definice 2.16 existuje pro konkrétní α nekonečně mnoho primárních α pozic, které se navzájem liší torzním stočením kolem osy e_{1L} resp. e_{1R} . Pokud se však očima díváme přímo vpřed a provedeme disjunktní pohyb takový, že očima zaostříme na bod v rovině $h_{3C} = 0$, k torznímu pohybu oka (rotaci kolem osy e_{1L} resp. e_{1R}) nedochází (dochází k ní až v případě, kdy se podíváme nahoru nebo dolů) [14]. Z tohoto důvodu je primární α pozice pro konkrétní α jedna jediná. Vektory $\vec{e}_{1L}, \vec{e}_{2L}, \vec{e}_{1R}, \vec{e}_{2R}$ pak zůstávají ležet v rovině $h_{3C} = 0$ (viz obrázek 3). Vektor \vec{e}_{3L} resp. \vec{e}_{3R} se nezmění a leží na ose h_{3L} resp. h_{3R} .



Obrázek 3: Oči znázorněné v primární α pozici, sledují bod A , ležící na ose h_{1C} , pod úhlem α .

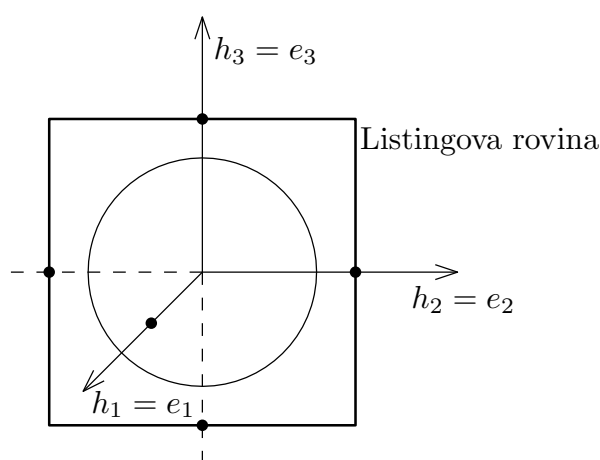
3 Dondersovo pravidlo a Listingovo pravidlo

Dále se budeme zabývat tím, jestli pro konkrétní směr pohledu oko zaujímá jednu konkrétní pozici nebo jestli je pozice závislá na předešlé pozici, potom by pro konkrétní směr pohledu existovalo více pozic, navzájem se lišících otočením kolem osy e_1 .

Předpokládejme, že oči sledují objekty, jejichž vzdálenost se limitně blíží nekonečnu (jinými slovy směry pohledu obou očí jsou rovnoběžné). Za tohoto předpokladu formulujeme následující pravidla:

Dondersovo pravidlo: Pro konkrétní směr pohledu oko zaujímá jednu konkrétní pozici [1, 5, 14].

Listingovo pravidlo: Všechny osy, kolem kterých může oko z primární polohy (viz definice 2.1) rotovat, leží v jedné rovině. Tato rovina se nazývá *Listingova rovina*. Listingova rovina je kolmá na směr pohledu oka v primární poloze (viz obrázek 4) [1, 5, 14].



Obrázek 4: Znázornění Listingovy roviny v souřadném systému H , když je oko v primární pozici.

Poznámka 3.1. Obecný tvar Listingovy roviny v souřadném systému H je

$$h_1 = 0. \quad (3.1)$$

Poznámka 3.2. Pravidla Dondersovo a Listingovo jsou medicínsky vypořádána [5]. Obě jsou aproximací reality. Listingova rovina se může například pro rotace oka o větší úhly určitým způsobem zakřivovat [1], toto zakřivení v této práci zanedbáme. Neuvažujeme ani omezení úhlů, o které oko může rotovat.

Poznámka 3.3. Jelikož jsou při sledování vzdálených objektů směry pohledů obou očí rovnoběžné a jejich pozice tedy shodné (viz Dondersovo pravidlo), následující odvození provádíme pouze pro jedno oko.

3.1 Vyjádření polohy oka

Buďme v souřadném systému H . V této části vyjádříme polohu oka v závislosti na směru pohledu $\vec{e}_1 = (p_1, p_2, p_3)^T$.

Obecný tvar Listingovy roviny je $h_1 = 0$. Rotory, jejichž vektorová část leží v Listingově rovině (viz (3.1) nebo obrázek 4), jsou ve tvaru $R = a_0 + a_2\sigma_{31} + a_3\sigma_{12}$, pomocí takového rotoru tedy lze vyjádřit rotaci oka z primární pozice. Z Dondersova pravidla vyplývá, že polohu oka jednoznačně určuje vektor \vec{e}_1 (směr pohledu), díky Listingovu pravidlu jsme schopni ze souřadnic vektoru \vec{e}_1 určit vektory \vec{e}_2 a \vec{e}_3 (zmíněné v poznámce 2.10), nyní ukážeme jak. Mějme oko v primární pozici, potom $\vec{e}_1 = \vec{h}_1$ a $\vec{e}_3 = \vec{h}_3$ (viz obrázek 1). Provedme rotaci vektorů \vec{e}_1 a \vec{e}_3 (resp. oka z primární pozice) rotorem $R = a_0 + a_2\sigma_{31} + a_3\sigma_{12}$:

$$\begin{aligned}
E_1 = RH_1\bar{R} &= (a_0 + a_2\sigma_{31} + a_3\sigma_{12})\sigma_1(a_0 - a_2\sigma_{31} - a_3\sigma_{12}) \\
&= (a_0\sigma_1 + a_2\sigma_3 - a_3\sigma_2)(a_0 - a_2\sigma_{31} - a_3\sigma_{12}) \\
&= a_0^2\sigma_1 + a_0a_2\sigma_3 - a_0a_3\sigma_2 + a_0a_2\sigma_3 - a_2^2\sigma_1 \\
&\quad - a_2a_3\sigma_{123} - a_0a_3\sigma_2 - a_2a_3\sigma_{123} - a_3^2\sigma_1 \\
&= (a_0^2 - a_2^2 - a_3^2)\sigma_1 - 2a_0a_3\sigma_2 + 2a_0a_2\sigma_3. \\
\vec{e}_1 &= \Psi^{-1}(E_1) = \begin{pmatrix} a_0^2 - a_2^2 - a_3^2 \\ -2a_0a_3 \\ 2a_0a_2 \end{pmatrix}. \tag{3.2}
\end{aligned}$$

Analogicky vyjádříme \vec{e}_3 .

$$\begin{aligned}
E_3 = RH_3\bar{R} &= -2a_0a_2\sigma_1 + 2a_2a_3\sigma_2 + (a_0^2 - a_2^2 + a_3^2)\sigma_3. \\
\vec{e}_3 &= \Psi^{-1}(E_3) = \begin{pmatrix} -2a_0a_2 \\ -2a_2a_3 \\ a_0^2 - a_2^2 + a_3^2 \end{pmatrix}. \tag{3.3}
\end{aligned}$$

Poznámka. E_1, E_3, H_1, H_3 jsou obrazy příslušných vektorů $\vec{e}_1, \vec{e}_3, \vec{h}_1, \vec{h}_3$ v \mathbb{G}_3 (viz poznámka 2.10).

Dále mějme $\vec{e}_1 = (p_1, p_2, p_3)^T$, $\vec{e}_3 = (x_1, x_2, x_3)^T$, kde p_1, p_2, p_3 definujeme jako parametry a x_1, x_2, x_3 jsou neznámé, které pomocí nich chceme vyjádřit. Z rovnic (3.2) a (3.3) vyplývá, že $x_1 = -p_3$. Dále víme, že \vec{e}_1 a \vec{e}_3 jsou na sebe kolmé a že leží na jednotkové sféře, takže platí:

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 = -p_1p_3 + p_2x_2 + p_3x_3 = 0, \tag{3.4}$$

$$p_3^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1. \tag{3.5}$$

Vyřešením soustavy rovnic (3.4), (3.5) získáme vyjádření vektoru \vec{e}_3 v závislosti na \vec{e}_1 .

Pro $p_2 \neq 0$ vyjádříme x_2 z (3.4) a dosadíme do (3.5):

$$x_2 = \frac{p_1p_3 - p_3x_3}{p_2}, \tag{3.6}$$

$$p_3^2 + \frac{p_1^2p_3^2 - 2p_1p_3^2x_3 + p_3^2x_3^2}{p_2^2} + x_3^2 = 1 \tag{3.7}$$

rovnici (3.7) upravíme na tvar

$$\left(\frac{p_3^2}{p_2^2} + 1\right)x_3^2 - \frac{2p_1p_3^2}{p_2^2}x_3 + \frac{p_1^2p_3^2}{p_2^2} + p_3^2 - 1 = 0 \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned}
D &= \frac{4p_1^2 p_3^4}{p_2^4} - 4\left(\frac{p_3^2}{p_2^2} + 1\right)\left(\frac{p_1^2 p_3^2}{p_2^2} + p_3^2 - 1\right) \\
&= -4\left[\frac{p_3^2}{p_2^2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 - 1) - 1\right] = 4, \\
x_{3_{1,2}} &= \frac{\frac{2p_1 p_3^2}{p_2^2} \pm 2}{\frac{2p_3^2}{p_2^2} + 2} = \frac{\frac{p_1 p_3^2}{p_2^2} \pm 1}{\frac{p_3^2}{p_2^2} + 1} = \frac{p_1 p_3^2 \pm p_2^2}{p_2^2 + p_3^2}.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Dosazením (3.9) do (3.6) získáme

$$x_{2_{1,2}} = \frac{p_1 p_3}{p_2} - p_3 \frac{\frac{p_1 p_3^2}{p_2^2} \pm 1}{\frac{p_3^2}{p_2^2} + p_2} = \frac{p_1 p_3}{p_2} - \frac{p_1 p_3^3 \pm p_2^2 p_3}{p_2 p_3^2 + p_2^3}. \tag{3.10}$$

Poznámka. Je snadno vidět, že všechny jmenovatele výrazů (3.9), (3.10) jsou různé od nuly.

Nyní máme dvě řešení pro x_2 a x_3 , vektor \vec{e}_3 je však určen jednoznačně. Dosadíme-li za p_1, p_2, p_3 výrazy z (3.2) a za x_2, x_3 výrazy z (3.3), zjistíme, že souřadnicemi vektoru \vec{e}_3 jsou

$$x_3 = \frac{\frac{p_1 p_3^2}{p_2^2} + 1}{\frac{p_3^2}{p_2^2} + 1} = \frac{p_1 p_3^2 + p_2^2}{p_2^2 + p_3^2}, \tag{3.11}$$

$$x_2 = \frac{p_1 p_3}{p_2} - p_3 \frac{\frac{p_1 p_3^2}{p_2^2} + 1}{\frac{p_3^2}{p_2^2} + p_2} = \frac{p_1 p_3}{p_2} - \frac{p_1 p_3^3 + p_2^2 p_3}{p_2 p_3^2 + p_2^3}. \tag{3.12}$$

Nyní můžeme prohlásit, že pokud je vektor \vec{e}_1 ve tvaru $\vec{e}_1 = (p_1, p_2, p_3)^T$, potom vektor \vec{e}_3 je ve tvaru

$$\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} -p_3 \\ \frac{p_1 p_3}{p_2} - \frac{p_1 p_3^3 + p_2^2 p_3}{p_2 p_3^2 + p_2^3} \\ \frac{p_1 p_3^2 + p_2^2}{p_2^2 + p_3^2} \end{pmatrix}, \quad \text{pro } p_2 \neq 0. \tag{3.13}$$

Pro $p_2 = 0$ z rovnic (3.4), (3.5) zjistíme, že

$$\begin{aligned}
x_1 &= -p_3, \quad x_3 = p_1, \quad x_2 = \sqrt{1 - p_1^2 - p_3^2} = p_2 = 0, \quad \text{pro } p_2 = 0, \quad p_3 \neq 0, \\
x_1 &= 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 1, \quad \text{pro } p_1 = 1, \quad p_2 = 0, \quad p_3 = 0, \\
x_1 &= 0, \quad x_2 = \sqrt{1 - x_3^2}, \quad x_3 \in \langle -1; 1 \rangle \quad \text{pro } p_1 = -1, \quad p_2 = 0, \quad p_3 = 0.
\end{aligned}$$

Poznámka 3.4. Pro $p_1 = 1$ je oko v primární pozici. Pro $p_1 = -1$ nastává tzv. gimbal lock effect [13], do této pozice se oko může dostat libovolnou cestou, Listingovo pravidlo ji jednoznačně neurčuje.

Pro $p_2 = 0$ tedy získáme vektor \vec{e}_3 ve tvaru

$$\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} -p_3 \\ 0 \\ p_1 \end{pmatrix}, \quad \text{pro } p_1 \neq -1, \tag{3.14}$$

$$\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{1-x_3^2} \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad x_3 \in \langle -1; 1 \rangle, \quad \text{pro } p_1 = -1. \quad (3.15)$$

Ukázali jsme, jak vypadá vektor \vec{e}_3 , když známe směr pohledu $\vec{e}_1 = (p_1, p_2, p_3)^T$. Tím máme jednoznačně určenou polohu oka v závislosti na směru pohledu (kromě rotace z primární polohy o π (3.15), tu však lidské oko vykonat nedokáže). Vektor \vec{e}_2 lze vyjádřit jako $\vec{e}_3 \times \vec{e}_1$.

3.2 Odvození tvaru Listingovy roviny oka v obecné pozici

Z Listingova pravidla (viz začátek kapitoly 3) víme, kolem kterých os může oko rotovat z primární polohy. Dále budeme řešit, kolem kterých os může oko rotovat, je-li v libovolné pozici, určené směrem pohledu $\vec{e}_1 = (p_1, p_2, p_3)^T$. Oko se může dostat do libovolné polohy A rotací z primární polohy rotorem $R = a_0 + a_2\sigma_{31} + a_3\sigma_{12}$, neboť jeho vektorová část leží v Listingově rovině (viz (3.1) nebo obrázek 4). Pokud se však oko do polohy A dostane jinou cestou, bude stále stejně natočeno (viz Dondersovo pravidlo, uvedené na začátku kapitoly 3). Uvažujme, že se do polohy A dostane rotací z primární polohy pomocí po řadě jdoucích rotorů R_1 a R_2 , přičemž vektorová část rotoru R_1 leží v Listingově rovině (3.1), protože se jedná o rotaci oka z primární polohy. Tento rotor zapisujeme ve tvaru $R_1 = b_0 + b_2\sigma_{31} + b_3\sigma_{12}$. Z rovnice (1.31) víme, že ekvivalentní rotor získáme výpočtem R_2R_1 , a protože se pomocí tohoto rotoru dostane do stejné polohy jako pomocí rotoru R , musí platit $R = R_2R_1$. Nyní vyjádříme R_2 pomocí R a R_1 .

$$\begin{aligned} R_2 &= R\bar{R}_1 = (a_0 + a_2\sigma_{31} + a_3\sigma_{12})(b_0 - b_2\sigma_{31} - b_3\sigma_{12}) \\ &= a_0b_0 - a_0b_2\sigma_{31} - a_0b_3\sigma_{12} + a_2b_0\sigma_{31} + a_2b_2 + a_2b_3\sigma_{23} + a_3b_0\sigma_{12} - a_3b_2\sigma_{23} + a_3b_3 \\ &= a_0b_0 + a_2b_2 + a_3b_3 + (-a_3b_2 + a_2b_3)\sigma_{23} + (a_2b_0 - a_0b_2)\sigma_{31} + (a_3b_0 - a_0b_3)\sigma_{12}. \end{aligned}$$

Získali jsme vyjádření rotoru R_2 pomocí rotorů R a R_1 . Jeho vektorová část je ve tvaru $\vec{V}(R_2) = (-a_3b_2 + a_2b_3, a_2b_0 - a_0b_2, a_3b_0 - a_0b_3)$. Zvolme pevně koeficienty b_0, b_2, b_3 rotoru R_1 a koeficienty a_0, a_2, a_3 rotoru R berme jako parametry. Výpočtem

$$\begin{aligned} h_1 &= -a_3b_2 + a_2b_3 \quad /b_0 \\ h_2 &= a_2b_0 - a_0b_2 \\ h_3 &= a_3b_0 - a_0b_3 \quad /b_2 \\ &-- \\ b_0h_1 + b_2h_3 &= -a_0b_2b_3 + a_2b_0b_3 \\ h_2 &= -a_0b_2 + a_2b_0 \quad /(-b_3) \\ &-- \\ 0 &= b_0h_1 - b_3h_2 + b_2h_3 \end{aligned} \quad (3.16)$$

získáme obecný tvar roviny, vyjádřené pomocí koeficientů rotoru R_1 . Pro každou pozici tedy existuje rovina, ve které leží všechny osy, kolem kterých může oko rotovat. Tato rovina se v anglicky psaných člancích označuje termínem 'displacement plane' [5] nebo 'velocity plane' [14]. My ji budeme nazývat Listingovou rovinou v obecné poloze oka.

Dále budeme chtít obecný tvar roviny (3.16) vyjádřit pomocí koeficientů p_1, p_2, p_3 , tím získáme tvar Listingovy roviny v obecné pozici, závislý na směru pohledu $\vec{e}_1 =$

$(p_1, p_2, p_3)^T$. Rotuje-li oko z primární polohy pomocí rotoru $R_1 = b_0 + b_2\sigma_{31} + b_3\sigma_{12}$, vektor \vec{e}_1 je pak ve tvaru $\vec{e}_1 = (b_0^2 - b_2^2 - b_3^2, -2b_0b_3, 2b_0b_2)^T$ (viz (3.2)), takže platí:

$$\begin{aligned} b_0^2 - b_2^2 - b_3^2 &= p_1, \\ -2b_0b_3 &= p_2, \\ 2b_0b_2 &= p_3. \end{aligned}$$

Z toho vyjádříme:

$$\begin{aligned} b_0 &= \sqrt{\frac{p_1}{2} + \frac{1}{2}}, \\ b_2 &= \frac{p_3}{2\sqrt{\frac{p_1}{2} + \frac{1}{2}}}, \\ b_3 &= -\frac{p_2}{2\sqrt{\frac{p_1}{2} + \frac{1}{2}}}, \quad \text{pro } b_0 \neq 0, p_1 \neq -1. \end{aligned}$$

Poznámka. $b_0 = 0 \Leftrightarrow p_1 = -1$. Jedná se o rotaci oka z primární polohy o π , do které se oko dostat nemůže.

Vypočítali jsme, že pokud je poloha oka určena vektorem $\vec{e}_1 = (p_1, p_2, p_3)^T$, $p_1 \neq -1$, potom všechny osy, kolem kterých může oko z této polohy rotovat, leží v rovině

$$\sqrt{\frac{p_1}{2} + \frac{1}{2}}h_1 + \frac{p_2}{2\sqrt{\frac{p_1}{2} + \frac{1}{2}}}h_2 + \frac{p_3}{2\sqrt{\frac{p_1}{2} + \frac{1}{2}}}h_3 = 0.$$

Po roznásobení členem $2\sqrt{\frac{p_1}{2} + \frac{1}{2}}$ získáváme tvar

$$(p_1 + 1)h_1 + p_2h_2 + p_3h_3 = 0. \quad (3.17)$$

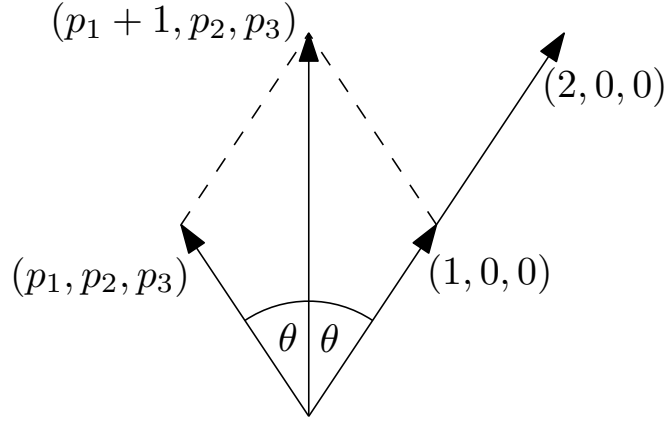
Ze vztahu (3.17) lze odvodit v medicínských člancích (například v [14]) často zmiňovaný důsledek pravidel Dondersova a Listingova:

Věta 3.5. *Rotuje-li oko z primární polohy o úhel 2θ , Listingova rovina se orotuje o úhel θ kolem stejné osy ve stejném směru.*

Důkaz. V primární pozici se oko dívá směrem $\vec{h}_1 = (1, 0, 0)^T$, normálový vektor Listingovy roviny je dle (3.17) ve tvaru $(2, 0, 0)^T$. Po rotaci o úhel 2θ se oko dívá směrem $\vec{e}_1 = (p_1, p_2, p_3)^T$ a normálový vektor Listingovy roviny v obecné pozici je dle (3.17) ve tvaru $(p_1 + 1, p_2, p_3)^T$. Platí, že

$$(p_1 + 1, p_2, p_3)^T = (1, 0, 0)^T + (p_1, p_2, p_3)^T.$$

Normálový vektor Listingovy roviny v obecné pozici je tedy vektorovým součtem vektorů \vec{h}_1 a \vec{e}_1 . Protože vektory \vec{h}_1 a \vec{e}_1 mají stejnou velikost, vymezují kosočtverec, jehož úhlopříčkou je vektor $(p_1 + 1, p_2, p_3)^T$, tato úhlopříčka rozděluje úhel 2θ mezi vektory \vec{h}_1 a \vec{e}_1 na dva poloviční úhly o velikosti θ (viz obrázek 5). \square



Obrázek 5: Rotuje-li oko z primární pozice o 2θ , Listingova rovina (resp. její normálový vektor) se orotuje o θ .

Náznak důkazu tvrzení 3.5 je uveden v [1] pomocí vektorů rotace (viz definice 1.25). Naznačme tuto myšlenku i zde. Pro jednoduchost rotujme z primární pozice kolem osy h_2 o úhel 2θ . Tuto rotaci vyjadřuje vektor rotace $\vec{r}_1 = (0, \tan \theta, 0)$ (protože musí ležet na ose h_2 a musí platit (1.29)). Dále rotujme obecný vektor z Listingovy roviny v primární pozici ve tvaru $\vec{r}_2 = (0, y, z)$ kolem osy h_2 o poloviční úhel, tedy o úhel θ . Tu vyjadřuje rotor $R = \cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} \sigma_{31}$.

$$R\Psi(\vec{r}_2^T)\bar{R} = -z \sin \theta \sigma_1 + y \sigma_2 + z \cos \theta \sigma_3.$$

Získali jsme vektor $\widetilde{\vec{r}}_2 = (-z \sin \theta, y, z \cos \theta)$. Dále vyjádříme vektor rotace, získaný složením vektorů rotace \vec{r}_1 a $\widetilde{\vec{r}}_2$ (viz (1.35)):

$$\begin{aligned} \widetilde{\vec{r}}_2 \circ \vec{r}_1 &= \frac{(0, \tan \theta, 0) + (-z \sin \theta, y, z \cos \theta) + (z \tan \theta \cos \theta, 0, z \tan \theta \sin \theta)}{1 - y \tan \theta} \\ &= \frac{(0, y + \tan \theta, z \cos \theta + z \sin \theta)}{1 - y \tan \theta}. \end{aligned}$$

Zjistili jsme, že výsledný vektor rotace opět leží v původní Listingově rovině, tím jsme naznačili důkaz tvrzení 3.5 podobným způsobem, jako v článku [1].

4 Listingovo pravidlo pro binokulární vidění

V úvodu předchozí kapitoly byla uvedena pravidla Dondersovo a Listingovo za předpokladu, že oči sledují vzdálené objekty. Nyní tato pravidla rozšíříme pro sledování blízkých objektů.

Dondersovo pravidlo pro binokulární vidění: Při pohledu na konkrétní bod zaujmají oči jednu konkrétní polohu [14].

Listingovo pravidlo pro binokulární vidění: Mějme oči v primární α pozici (viz definice 2.16 nebo obrázek 3), kde α je vergenční úhel, potom levé oko může vykonávat sakadické rotační pohyby (viz podkapitola 2.2) kolem os ležících v rovině

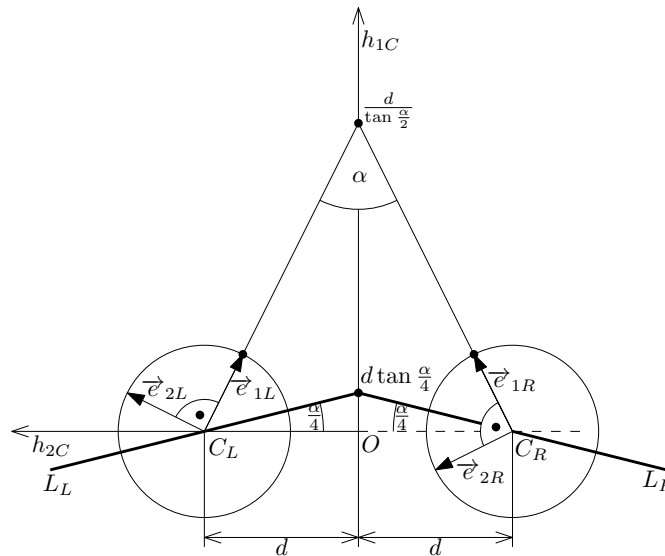
$$L_L : \left(h_{1C} + \cotg\left(\frac{\alpha}{4}\right)h_{2C} - d \tan\left(\frac{\alpha}{4}\right) \right)_{H_C} = 0, \quad (4.1)$$

a pravé oko kolem os ležících v rovině

$$L_R : \left(h_{1C} - \cotg\left(\frac{\alpha}{4}\right)h_{2C} - d \tan\left(\frac{\alpha}{4}\right) \right)_{H_C} = 0, \quad (4.2)$$

kde $2d$ vyjadřuje vzdálenost středů očí. Sakády obou očí jsou na sobě závislé, po jejich provedení oči opět sledují objekt pod úhlem α [14].

Listingovy roviny L_L a L_R v primární α pozici jsou znázorněny na obrázku 6 v souřadném systému H_C .



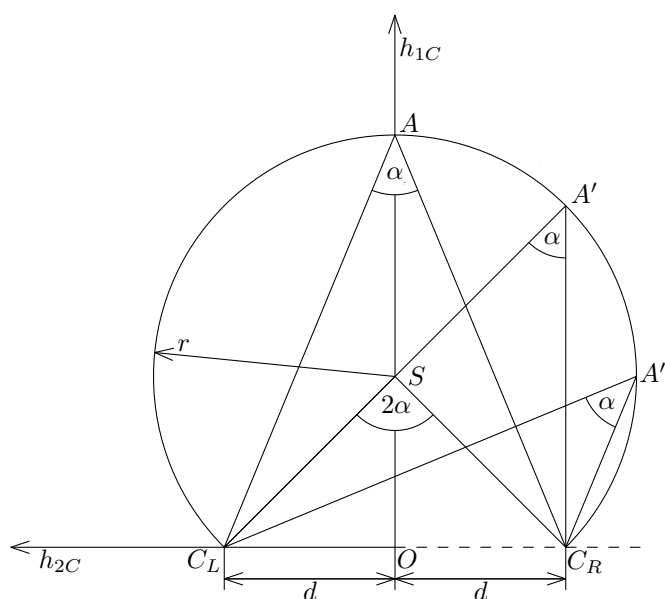
Obrázek 6: Znázornění Listingových rovin L_L a L_R v souřadném systému H_C , když se oči nachází v primární α pozici. Listingovy roviny jsou pak natočeny o $\frac{\alpha}{4}$ vůči původní poloze.

Poznámka 4.1. Pro následující výpočty používáme tři různé souřadné systémy - H_C , H_L a H_R (viz definice 2.11 a obrázek 2) - lišících se posunutím druhé souřadnice. H_L budeme používat při výpočtech vztahujících se k levému oku, H_R při výpočtech vztahujících se k pravému oku a H_C při výpočtech vztahujících se k oběma očím.

4.1 Výpočet množiny bodů sledovaných pod stejným úhlem

Buďme v souřadném systému H_C . Nejdříve odvodíme tvar plochy, na které leží body, které oči pozorují pod stejným úhlem α . V jedné polorovině se jedná o body ležící na oblouku kružnice, která protíná centra otáčení očí (ty vymezují oblouk) a jejíž střed oči sledují pod dvojnásobným úhlem 2α [10] (viz obrázek 7). V polorovině $h_{3C} = 0, h_{1C} \geq 0$ se jedná o body ležící na oblouku kružnice, jejíž poloměr $r = \frac{d}{\sin \alpha}$. Její střed leží na ose h_{1C} a má souřadnice $S = [\frac{d}{\tan \alpha}, 0, 0]$ (viz obrázek 7). Oblouk kružnice má pak následující parametrické vyjádření:

$$\begin{aligned} h_{1C} &= \frac{d}{\sin \alpha} \sin \beta + \frac{d}{\tan \alpha}, \\ h_{2C} &= -\frac{d}{\sin \alpha} \cos \beta, \quad \beta \in (\alpha - \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi - \alpha). \end{aligned}$$



Obrázek 7: Množina všech bodů, které vidíme pod stejným úhlem α , tvoří v jedné polorovině oblouk kružnice, jejíž střed vidíme pod úhlem 2α .

Proveďme rotaci tohoto oblouku kolem osy h_{2C} o úhel θ . K tomu využijeme rotor $R = \cos \frac{\theta}{2} + \sigma_{31} \sin \frac{\theta}{2}$, jehož vektorová část na této ose leží. Obecný bod B tohoto oblouku je v \mathbb{G}_3 vyjádřen takto: $\Psi(B) = (\frac{d}{\sin \alpha} \sin \beta + \frac{d}{\tan \alpha})\sigma_1 - \frac{d}{\sin \alpha} \cos \beta \sigma_2$.

$$\begin{aligned} R\Psi(B)\bar{R} &= (\cos \frac{\theta}{2} + \sigma_{31} \sin \frac{\theta}{2})((\frac{d}{\sin \alpha} \sin \beta + \frac{d}{\tan \alpha})\sigma_1 - \frac{d}{\sin \alpha} \cos \beta \sigma_2)(\cos \frac{\theta}{2} \\ &\quad - \sigma_{31} \sin \frac{\theta}{2}) = \cos \theta (\frac{d}{\sin \alpha} \sin \beta + \frac{d}{\tan \alpha})\sigma_1 - \frac{d}{\sin \alpha} \cos \beta \sigma_2 + \sin \theta (\frac{d}{\sin \alpha} \sin \beta \\ &\quad + \frac{d}{\tan \alpha})\sigma_3. \end{aligned}$$

Výpočtem jsme získali parametrické vyjádření plochy

$$h_{1C} = \cos \theta (\frac{d}{\sin \alpha} \sin \beta + \frac{d}{\tan \alpha})$$

$$\begin{aligned}
h_{2C} &= -\frac{d}{\sin \alpha} \cos \beta \\
h_{3C} &= \sin \theta \left(\frac{d}{\sin \alpha} \sin \beta + \frac{d}{\tan \alpha} \right), \quad \beta \in \left(\alpha - \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi - \alpha \right), \quad \theta \in \langle 0, 2\pi \rangle, \quad (4.3)
\end{aligned}$$

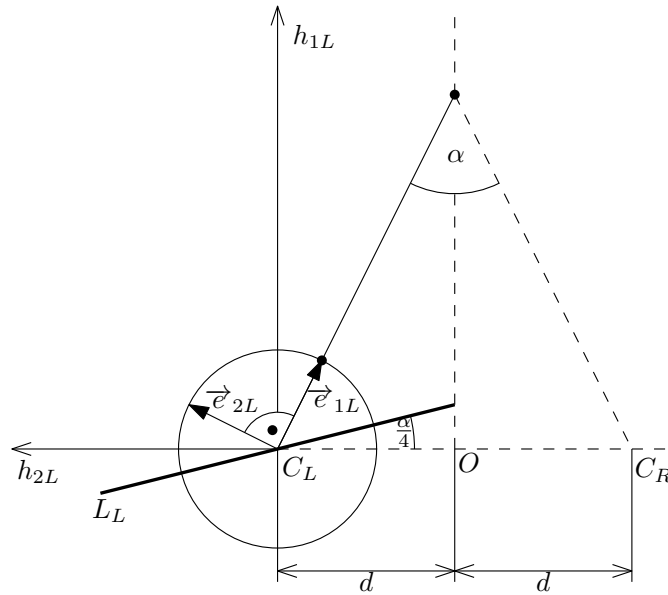
v souřadném systému H_C , která vyjadřuje množinu všech bodů v prostoru, které oči pozorují pod úhlem α . Pozorují-li oči nějaký bod pod úhlem α a provedou na sobě závislé sakadické pohyby, budou pozorovat jiný bod, také pod úhlem α [14], tedy bod z plochy (4.3).

4.2 Vyjádření polohy očí při pohledu na konkrétní bod

V této části chceme vypočítat pozici očí vyjádřenou v závislosti na bodu, který pozorují. Postup výpočtu je velmi podobný postupu v podkapitole 3.1.

Nejdříve vypočítáme polohu levého oka v závislosti na směru pohledu a vergenčním úhlu α .

Poznámka 4.2. V této a následující podkapitole bude vektor \vec{e}_{1L} resp. \vec{e}_{1R} značit směr pohledu oka v primární α pozici (viz definice 2.16 nebo obrázek 3). Směr pohledu v obecné pozici bude vyjadřovat vektor \vec{e}_{1L} resp. \vec{e}_{1R} . S vlnkou budou po rotaci značeny i ostatní bazické vektory fixované k oku, bez vlnky, když oko bude v primární α pozici.



Obrázek 8: Znázornění levé Listingovy roviny L_L v souřadném systému H_L , když se oči nacházejí v primární α pozici.

Buďme v souřadném systému H_L . Mějme oči v primární α pozici (viz definice 2.16 a obrázek 3), sledují tedy bod $A = \left[\frac{d}{\tan \frac{\alpha}{2}}, -d, 0 \right]$, takže levé oko se dívá směrem $\vec{e}_{1L} = \left(\cos \frac{\alpha}{2}, -\sin \frac{\alpha}{2}, 0 \right)$, další vektory, určující jeho polohu, jsou ve tvaru $\vec{e}_{2L} = \left(\sin \frac{\alpha}{2}, \cos \frac{\alpha}{2}, 0 \right)$ a $\vec{e}_{3L} = (0, 0, 1)$. Vzhledem k Listingovu pravidlu pro binokulární vidění lze rotaci oka z primární α pozice vyjádřit pomocí rotoru

$$R_L = a_0 + a_1 \sigma_{23} - a_1 \cotg \frac{\alpha}{4} \sigma_{31} + a_3 \sigma_{12}, \quad (4.4)$$

neboť jeho vektorová část leží v rovině L_L (viz 4.1 a obrázek 8).

Poznámka. Tvar roviny (4.1) je vyjádřen v jiném souřadném systému než rotor R_L .

$$\begin{aligned}
\widetilde{E}_{1L} = R_L E_{1L} \overline{R}_L &= (a_0 + a_1 \sigma_{23} - a_1 \cotg \frac{\alpha}{4} \sigma_{31} + a_3 \sigma_{12}) (\cos \frac{\alpha}{2} \sigma_1 - \sin \frac{\alpha}{2} \sigma_2) (a_0 - a_1 \sigma_{23} \\
&+ a_1 \cotg \frac{\alpha}{4} \sigma_{31} - a_3 \sigma_{12}) \\
&= (-2a_0 a_3 \sin \frac{\alpha}{2} + a_0^2 \cos \frac{\alpha}{2} + 2a_1^2 \cotg \frac{\alpha}{4} \sin \frac{\alpha}{2} + a_1^2 \cos \frac{\alpha}{2} \\
&- a_1^2 (\cotg \frac{\alpha}{4})^2 \cos \frac{\alpha}{2} - a_3^2 \cos \frac{\alpha}{2}) \sigma_1 + (-a_0^2 \sin \frac{\alpha}{2} - 2a_0 a_3 \cos \frac{\alpha}{2} \\
&+ a_1^2 \sin \frac{\alpha}{2} - 2a_1^2 \cotg \frac{\alpha}{4} \cos \frac{\alpha}{2} - a_1^2 (\cotg \frac{\alpha}{4})^2 \sin \frac{\alpha}{2} + a_3^2 \sin \frac{\alpha}{2}) \sigma_2 \\
&+ (-2a_0 a_1 \cotg \frac{\alpha}{4} \cos \frac{\alpha}{2} + 2a_0 a_1 \sin \frac{\alpha}{2} + 2a_1 a_3 \cos \frac{\alpha}{2} \\
&+ 2a_1 a_3 \cotg \frac{\alpha}{4} \sin \frac{\alpha}{2}) \sigma_3, \tag{4.5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{E}_{2L} = R_L E_{2L} \overline{R}_L &= (a_0 + a_1 \sigma_{23} - a_1 \cotg \frac{\alpha}{4} \sigma_{31} + a_3 \sigma_{12}) (\sin \frac{\alpha}{2} \sigma_1 + \cos \frac{\alpha}{2} \sigma_2) (a_0 - a_1 \sigma_{23} \\
&+ a_1 \cotg \frac{\alpha}{4} \sigma_{31} - a_3 \sigma_{12}) \\
&= (2a_0 a_3 \cos \frac{\alpha}{2} + a_0^2 \sin \frac{\alpha}{2} - 2a_1^2 \cotg \frac{\alpha}{4} \cos \frac{\alpha}{2} + a_1^2 \sin \frac{\alpha}{2} \\
&- a_1^2 (\cotg \frac{\alpha}{4})^2 \sin \frac{\alpha}{2} - a_3^2 \sin \frac{\alpha}{2}) \sigma_1 + (a_0^2 \cos \frac{\alpha}{2} - 2a_0 a_3 \sin \frac{\alpha}{2} \\
&- a_1^2 \cos \frac{\alpha}{2} - 2a_1^2 \cotg \frac{\alpha}{4} \sin \frac{\alpha}{2} + a_1^2 (\cotg \frac{\alpha}{4})^2 \cos \frac{\alpha}{2} - a_3^2 \cos \frac{\alpha}{2}) \sigma_2 \\
&+ (-2a_0 a_1 \cotg \frac{\alpha}{4} \sin \frac{\alpha}{2} - 2a_0 a_1 \cos \frac{\alpha}{2} + 2a_1 a_3 \sin \frac{\alpha}{2} \\
&- 2a_1 a_3 \cotg \frac{\alpha}{4} \cos \frac{\alpha}{2}) \sigma_3. \tag{4.6}
\end{aligned}$$

Získali jsme vyjádření vektorů \widetilde{e}_{1L} a \widetilde{e}_{2L} v souřadném systému H_L po rotaci oka, vyjádřené pomocí koeficientů rotoru $R_L = a_0 + a_1 \sigma_{23} - a_1 \cotg \frac{\alpha}{4} \sigma_{31} + a_3 \sigma_{12}$.

Dále chceme vyjádřit vektor $\widetilde{e}_{2L} = (x_1, x_2, x_3)$ v závislosti na směru pohledu $\widetilde{e}_{1L} = (p_1, p_2, p_3)$ a vergenčním úhlu α . Z (4.5) a (4.6) lze vyjádřit x_1 resp. x_2 pomocí známého koeficientu p_2 resp. p_1 , dále pomocí známého koeficientu α a neznámého koeficientu a_1 :

$$x_1 = -p_2 - 2a_1^2 \left(-\sin \frac{\alpha}{2} + 2 \cotg \frac{\alpha}{4} \cos \frac{\alpha}{2} + (\cotg \frac{\alpha}{4})^2 \sin \frac{\alpha}{2} \right), \tag{4.7}$$

$$x_2 = p_1 - 2a_1^2 \left(\cos \frac{\alpha}{2} + 2 \cotg \frac{\alpha}{4} \sin \frac{\alpha}{2} - (\cotg \frac{\alpha}{4})^2 \cos \frac{\alpha}{2} \right). \tag{4.8}$$

Protože \widetilde{e}_{1L} a \widetilde{e}_{2L} jsou na sebe kolmé, je jejich skalární součin roven nule, takže platí

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 = 0. \tag{4.9}$$

Pro $p_3 \neq 0$ dosadíme výraz (4.7) za x_1 , výraz (4.8) za x_2 do (4.9) a vyjádříme x_3 :

$$x_3 = + \frac{2p_1 a_1^2 \left(-\sin \frac{\alpha}{2} + 2 \cotg \frac{\alpha}{4} \cos \frac{\alpha}{2} + (\cotg \frac{\alpha}{4})^2 \sin \frac{\alpha}{2} \right)}{p_3}$$

$$+ \frac{2p_2 a_1^2 (\cos \frac{\alpha}{2} + 2 \cotg \frac{\alpha}{4} \sin \frac{\alpha}{2} - (\cotg \frac{\alpha}{4})^2 \cos \frac{\alpha}{2})}{p_3}, \quad \text{pro } p_3 \neq 0. \quad (4.10)$$

Tím máme vyjádřený vektor $\widetilde{\vec{e}}_{2L} = (x_1, x_2, x_3)$ v závislosti na známých parametrech p_1, p_2, p_3 a α a neznámém parametru a_1 .

Dále víme, že vektor $\widetilde{\vec{e}}_{2L}$ leží na jednotkové sféře, takže platí

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1. \quad (4.11)$$

Dosazením výrazů (4.7), (4.8) a (4.10) do (4.11) získáme kvadratickou rovnici, kde neznámá je $2a_1^2$. Po jejím vyřešení už jsme schopni vyjádřit vektor $\widetilde{\vec{e}}_{2L} = (x_1, x_2, x_3)$ v závislosti na vektoru $\widetilde{\vec{e}}_{1L} = (p_1, p_2, p_3)$ a vergenčním úhlu α .

Pro $p_3 \neq 0$ získáváme řešení:

$$\begin{aligned} x_1 &= -p_2 - \frac{-2p_2 X_L + 2p_1 Y_L + \sqrt{(2p_2 X_L - 2p_1 Y_L)^2 + 4p_3^2 (X_L^2 + Y_L^2 + Z_L^2)}}{2(X_L^2 + Y_L^2 + Z_L^2)} X_L, \\ x_2 &= p_1 - \frac{-2p_2 X_L + 2p_1 Y_L + \sqrt{(2p_2 X_L - 2p_1 Y_L)^2 + 4p_3^2 (X_L^2 + Y_L^2 + Z_L^2)}}{2(X_L^2 + Y_L^2 + Z_L^2)} Y_L, \\ x_3 &= \frac{-2p_2 X_L + 2p_1 Y_L + \sqrt{(2p_2 X_L - 2p_1 Y_L)^2 + 4p_3^2 (X_L^2 + Y_L^2 + Z_L^2)}}{2(X_L^2 + Y_L^2 + Z_L^2)} Z_L, \end{aligned} \quad (4.12)$$

kde

$$\begin{aligned} X_L &= -\sin \frac{\alpha}{2} + 2 \cotg \frac{\alpha}{4} \cos \frac{\alpha}{2} + (\cotg \frac{\alpha}{4})^2 \sin \frac{\alpha}{2}, \\ Y_L &= \cos \frac{\alpha}{2} + 2 \cotg \frac{\alpha}{4} \sin \frac{\alpha}{2} - (\cotg \frac{\alpha}{4})^2 \cos \frac{\alpha}{2}, \\ Z_L &= \frac{p_1 (-\sin \frac{\alpha}{2} + 2 \cotg \frac{\alpha}{4} \cos \frac{\alpha}{2} + (\cotg \frac{\alpha}{4})^2 \sin \frac{\alpha}{2})}{p_3} \\ &+ \frac{p_2 (\cos \frac{\alpha}{2} + 2 \cotg \frac{\alpha}{4} \sin \frac{\alpha}{2} - (\cotg \frac{\alpha}{4})^2 \cos \frac{\alpha}{2})}{p_3}. \end{aligned}$$

pro $p_3 = 0$ po dosazení výrazů (4.7) a (4.8) do (4.9) zjistíme, že

$$\begin{aligned} &2a_1^2 (p_1 (-\sin \frac{\alpha}{2} + 2 \cotg \frac{\alpha}{4} \cos \frac{\alpha}{2} + (\cotg \frac{\alpha}{4})^2 \sin \frac{\alpha}{2}) \\ &+ p_2 (\cos \frac{\alpha}{2} + 2 \cotg \frac{\alpha}{4} \sin \frac{\alpha}{2} - (\cotg \frac{\alpha}{4})^2 \cos \frac{\alpha}{2})) = 0. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Výraz nalevo rovnice (4.13) je roven nule, když $a_1 = 0$ nebo když výraz v závorce je roven nule.

Pro $a_1 = 0$ je rotor R_L (viz (4.4)) ve tvaru $R_L = a_3 \sigma_{12}$, rotace oka je tedy prováděna pouze kolem osy h_{3L} . Z (4.7) a (4.8) pak plyne, že $x_1 = -p_2$ a $x_2 = p_1$. A protože vektory $\widetilde{\vec{e}}_{1L} = (p_1, p_2, 0)$ a $\widetilde{\vec{e}}_{2L} = (x_1, x_2, x_3)$ jsou jednotkové, pak $x_3 = 0$. Zjistili jsme tedy, že

$$\widetilde{\vec{e}}_{2L} = (x_1, x_2, x_3) = (-p_2, p_1, 0), \quad \text{pro } p_3 = 0, a_1 = 0. \quad (4.14)$$

Pokud je ve výrazu levé strany rovnice (4.13) roven nule výraz v závorce, potom a_1 může být libovolný parametr. V tu chvíli nejsme schopni členy x_1, x_2 a x_3 jednoznačně určit - nastává gimbal lock efect [13]. Gimbal lock efect nastává ve chvíli, kdy

rovina souměrnosti původního bodu a bodu, do kterého chceme rotovat, splývá s Listingovou rovinou, pak se do této pozice můžeme dostat rotací kolem libovolné osy ležící v Listingově rovině. Pro konkrétní α gimbal lock effect nastává, když vektor (resp. bod) $\vec{e}_{1L} = (\cos \frac{\alpha}{2}, -\sin \frac{\alpha}{2}, 0)$ chceme rotovat z primární α pozice do pozice (resp. bodu) $\vec{e}_{1L} = (-\cos \alpha, -\sin \alpha, 0)$ (lze odvodit geometricky nebo aparátem \mathbb{G}_3).

Tím máme jednoznačně určenou polohu levého oka v závislosti na směru jeho pohledu $\vec{e}_{1L} = (p_1, p_2, p_3)$ a vergenčním úhlu α v souřadném systému H_L - známe vyjádření vektoru $\vec{e}_{2L} = (x_1, x_2, x_3)$ pomocí koeficientů p_1, p_2, p_3 a α (viz rovnice (4.12) a (4.14)) (kromě bodu, ve kterém nastává gimbal lock effect).

Buďme v souřadném systému H_R . Chceme vypočítat polohu pravého oka v závislosti na směru jeho pohledu a vergenčním úhlu α . Mějme oči v primární α pozici, sledují tedy bod $A = [\frac{d}{\tan \frac{\alpha}{2}}, d, 0]$, $\vec{e}_{1R} = (\cos \frac{\alpha}{2}, \sin \frac{\alpha}{2}, 0)$, $\vec{e}_{2R} = (-\sin \frac{\alpha}{2}, \cos \frac{\alpha}{2}, 0)$. Rotace pravého oka lze vyjádřit pomocí rotoru R_R , kde

$$R_R = b_0 + b_1 \sigma_{23} + b_1 \cotg \frac{\alpha}{4} \sigma_{31} + b_3 \sigma_{12}, \quad (4.15)$$

neboť jeho vektorová část leží v rovině (4.2). Po rotaci rotorem R_R se dívá oko směrem $\vec{e}_{1R} = (q_1, q_2, q_3)$. V závislosti na něm a na vergenčním úhlu α chceme vyjádřit vektor $\vec{e}_{2R} = (y_1, y_2, y_3)$.

Analogickým postupem, jako u levého oka, získáváme pro $q_3 \neq 0$ následující řešení:

$$\begin{aligned} y_1 &= -q_2 + \frac{2q_2 X_R + 2q_1 Y_R + \sqrt{(2q_2 X_R + 2q_1 Y_R)^2 + 4q_3^2 (X_R^2 + Y_R^2 + Z_R^2)}}{2(X_R^2 + Y_R^2 + Z_R^2)} X_R, \\ y_2 &= q_1 - \frac{2q_2 X_R + 2q_1 Y_R + \sqrt{(2q_2 X_R + 2q_1 Y_R)^2 + 4q_3^2 (X_R^2 + Y_R^2 + Z_R^2)}}{2(X_R^2 + Y_R^2 + Z_R^2)} Y_R, \\ y_3 &= -\frac{2q_2 X_R + 2q_1 Y_R + \sqrt{(2q_2 X_R + 2q_1 Y_R)^2 + 4q_3^2 (X_R^2 + Y_R^2 + Z_R^2)}}{2(X_R^2 + Y_R^2 + Z_R^2)} Z_R, \end{aligned} \quad (4.16)$$

kde

$$\begin{aligned} X_R &= -\sin \frac{\alpha}{2} + 2 \cotg \frac{\alpha}{4} \cos \frac{\alpha}{2} + (\cotg \frac{\alpha}{4})^2 \sin \frac{\alpha}{2}, \\ Y_R &= \cos \frac{\alpha}{2} + 2 \cotg \frac{\alpha}{4} \sin \frac{\alpha}{2} - (\cotg \frac{\alpha}{4})^2 \cos \frac{\alpha}{2}, \\ Z_R &= \frac{q_1 (-\sin \frac{\alpha}{2} + 2 \cotg \frac{\alpha}{4} \cos \frac{\alpha}{2} + (\cotg \frac{\alpha}{4})^2 \sin \frac{\alpha}{2})}{q_3} \\ &\quad + \frac{q_2 (-\cos \frac{\alpha}{2} - 2 \cotg \frac{\alpha}{4} \sin \frac{\alpha}{2} + (\cotg \frac{\alpha}{4})^2 \cos \frac{\alpha}{2})}{q_3}. \end{aligned}$$

Pro $q_3 = 0$, když nenastane gimbal lock effect:

$$\vec{e}_{2R} = (y_1, y_2, y_3) = (-q_2, q_1, 0), \quad \text{pro } q_3 = 0, b_1 = 0. \quad (4.17)$$

Gimbal lock effect nastane, když chceme rotovat do polohy $\vec{e}_{1R} = (-\cos \alpha, \sin \alpha, 0)$. Potom vektor \vec{e}_{2R} bude závislý na parametru b_1 .

Tím známe polohu pravého oka pro konkrétní směr pohledu $\vec{e}_{1R} = (q_1, q_2, q_3)$ a vergenční úhel α v souřadném systému H_R - máme pomocí těchto koeficientů vyjádřený tvar

vektoru $\vec{e}_{2R} = (y_1, y_2, y_3)$ (viz rovnice (4.16) a (4.17)) (kromě polohy, ve které nastává gimbal lock efekt).

Buďme v souřadném systému H_C . Zbývá určit závislost polohy očí na bodu $B = [B_1, B_2, B_3]$, který pozorují. Pomocí bodu B určíme vektory \vec{e}_{1L} , \vec{e}_{1R} a vergenční úhel α .

$$\alpha = \arccos \frac{(B - C_L) \cdot (B - C_R)}{\|B - C_L\| \|B - C_R\|}, \quad (4.18)$$

kde $C_L = [0, d, 0]$, $C_R = [0, -d, 0]$ jsou centra otáčení jednotlivých očí, $2d$ jejich vzdálenost od sebe.

$$\alpha = \arccos \frac{B_1^2 + B_2^2 - d^2 + B_3^2}{\sqrt{(B_1^2 + (B_2 - d)^2 + B_3^2)(B_1^2 + (B_2 + d)^2 + B_3^2)}}, \quad (4.19)$$

$$\vec{e}_{1L} = \frac{B - C_L}{\|B - C_L\|} = \frac{[B_1, B_2 - d, B_3]}{\sqrt{(B_1^2 + (B_2 - d)^2 + B_3^2)}}, \quad (4.20)$$

$$\vec{e}_{1R} = \frac{B - C_R}{\|B - C_R\|} = \frac{[B_1, B_2 + d, B_3]}{\sqrt{(B_1^2 + (B_2 + d)^2 + B_3^2)}}. \quad (4.21)$$

Převedením výrazu (4.20) resp. (4.21) do souřadného systému H_L resp. H_R a následným dosazením do (4.12) za (p_1, p_2, p_3) resp. do (4.16) za (q_1, q_2, q_3) , včetně dosazení (4.19) za α , získáme vyjádření polohy očí v závislosti na bodu B , který oči pozorují, v příslušném souřadném systému.

Poznámka 4.3. Neuvažujeme směry pohledů očí ve tvaru $(0, t, 0)$, $t \in \mathbb{R}$, potom by bod B ležel na ose h_{2C} . Takový bod není elementem plochy (4.3).

4.3 Odvození tvaru Listingových rovin v obecné poloze očí

V této části na základě Dondersova a Listingova pravidla pro binokulární vidění [14] (viz úvod kapitoly 4) vypočteme, kolem kterých os mohou oči provádět sakadické rotační pohyby, pozorují-li v prostoru obecný bod. Postup odvození je podobný postupu v podkapitole 3.2.

Buďme v souřadném systému H_L . Mějme oči v primární α pozici. Vzhledem k Listingovu pravidlu pro binokulární vidění se levé oko může z primární α pozice dostat do obecné pozice A rotorem $R = a_0 + a_1\sigma_{23} - a_1\cotg \frac{\alpha}{4}\sigma_{31} + a_3\sigma_{12}$, neboť jeho vektorová část leží v rovině L_L (viz (4.1) a obrázek 8).

Poznámka. Rotor R je vyjádřen v jiném souřadném systému, než rovina L_L .

Dále uvažujme, že se levé oko dostane z primární α pozice do pozice B pomocí rotoru $R_1 = b_0 + b_1\sigma_{23} - b_1\cotg \frac{\alpha}{4}\sigma_{31} + b_3\sigma_{12}$, jehož vektorová část také leží v rovině (4.1), a následně z pozice B do pozice C pomocí rotoru R_2 , ze které se dívá stejným směrem, jako z pozice A . Z rovnice (1.31) vyplývá, že ekvivalentní rotor, vyjadřující stejnou rotaci jako po sobě jdoucí rotory R_1 a R_2 , získáme výpočtem R_2R_1 . S ohledem na Dondersovo pravidlo pro binokulární vidění jsou pozice A a C totožné, takže platí $R = R_2R_1$.

Nyní vyjádříme rotor R_2 pomocí rotorů R a R_1 :

$$\begin{aligned} R_2 &= R\bar{R}_1 = (a_0 + a_1\sigma_{23} - a_1\cotg \frac{\alpha}{4}\sigma_{31} + a_3\sigma_{12})(b_0 - b_1\sigma_{23} + b_1\cotg \frac{\alpha}{4}\sigma_{31} - b_3\sigma_{12}) \\ &= a_0b_0 + a_1b_1 + a_1b_1(\cotg \frac{\alpha}{4})^2 + a_3b_3 + (a_1b_0 - a_0b_1 + a_3b_1\cotg \frac{\alpha}{4}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - a_1 b_3 \cotg \frac{\alpha}{4} \sigma_{23} + (-a_3 b_0 \cotg \frac{\alpha}{4} + a_3 b_1 + a_0 b_1 \cotg \frac{\alpha}{4} - a_1 b_3) \sigma_{31} + (a_3 b_0 \\
& - a_0 b_3) \sigma_{12}.
\end{aligned}$$

Vyjádření souřadnic jeho vektorové části $\vec{V}(R_2)$ v H_L je

$$h_{1L} = a_1 b_0 - a_0 b_1 + a_3 b_1 \cotg \frac{\alpha}{4} - a_1 b_3 \cotg \frac{\alpha}{4}, \quad (4.22)$$

$$h_{2L} = -a_3 b_0 \cotg \frac{\alpha}{4} + a_3 b_1 + a_0 b_1 \cotg \frac{\alpha}{4} - a_1 b_3, \quad (4.23)$$

$$h_{3L} = a_3 b_0 - a_0 b_3. \quad (4.24)$$

Uvažujme, že koeficienty b_0, b_1, b_3 jsou pevně zvoleny, koeficienty a_0, a_1, a_3 jsou parametry. Pokud rovnici (4.22) roznásobíme výrazem $-b_3 - b_0 \cotg \frac{\alpha}{4}$, rovnici (4.23) výrazem $-b_0 + b_3 \cotg \frac{\alpha}{4}$, rovnici (4.24) výrazem $b_1((\cotg \frac{\alpha}{4})^2 + 1)$ a následně rovnice (4.22), (4.23) a (4.24) sečteme, získáme rovnici

$$(-b_3 - b_0 \cotg \frac{\alpha}{4})h_{1L} + (-b_0 + b_3 \cotg \frac{\alpha}{4})h_{2L} + b_1((\cotg \frac{\alpha}{4})^2 + 1)h_{3L} = 0, \quad (4.25)$$

která vyjadřuje obecný tvar Listingovy roviny levého oka v obecné pozici B , vyjádřené pomocí koeficientů rotoru $R_1 = b_0 + b_1 \sigma_{23} - b_1 \cotg \frac{\alpha}{4} \sigma_{31} + b_3 \sigma_{12}$, který vyjadřuje rotaci levého oka z primární α pozice do pozice B .

Dále uvažujme, že známe směr vidění $\vec{e}_{1L} = (p_1, p_2, p_3)$ oka v pozici B , a chceme vyjádřit Listingovu rovinu pro pozici B pomocí koeficientů p_1, p_2, p_3 a α . V primární α pozici se oko dívá směrem $\vec{e}_{1L} = (\cos \frac{\alpha}{2}, -\sin \frac{\alpha}{2}, 0)$, neznámý je tedy rotor $R_1 = b_0 + b_1 \sigma_{23} - b_1 \cotg \frac{\alpha}{4} \sigma_{31} + b_3 \sigma_{12}$. Dále budeme odvozovat jeho goniometrický tvar (viz (1.19)).

Geometricky lze snadno odvodit, že pokud se z bodu X dostaneme do bodu Y rotací kolem osy o , potom osa rotace o musí ležet v rovině souměrnosti bodů X a Y (množině všech bodů, které mají od X a Y stejnou vzdálenost). Rotace je totiž pohyb po kružnici a rovina souměrnosti bodů X a Y tvoří množinu středů kružnic, po kterých se můžeme z bodu X dostat do bodu Y .

Rovina souměrnosti bodů $[p_1, p_2, p_3]$ a $[\cos \frac{\alpha}{2}, -\sin \frac{\alpha}{2}, 0]$, ležících na jednotkové sféře, má obecný tvar $(p_1 - \cos \frac{\alpha}{2})h_{1L} + (p_2 + \sin \frac{\alpha}{2})h_{2L} + p_3 h_{3L} = 0$. Průnikem roviny souměrnosti a Listingovy roviny pro primární α pozici získáváme osu rotace

$$\begin{aligned}
h_{1L} &= p_3 t, \\
h_{2L} &= -p_3 \cotg \frac{\alpha}{4} t, \\
h_{3L} &= (-p_1 + \cos \frac{\alpha}{2} + p_2 \cotg \frac{\alpha}{4} + 2(\cos \frac{\alpha}{4})^2) t, \quad t \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Jednotkový vektor, ležící na ose rotace, pomocí kterého vyjádříme goniometrický tvar rotoru R_1 , je ve tvaru:

$$\vec{n} = (n_1, n_2, n_3) = \frac{(p_3, -p_3 \cotg \frac{\alpha}{4}, -p_1 + \cos \frac{\alpha}{2} + p_2 \cotg \frac{\alpha}{4} + 2(\cos \frac{\alpha}{4})^2)}{\sqrt{p_3^2 + p_3^2 (\cotg \frac{\alpha}{4})^2 + (-p_1 + \cos \frac{\alpha}{2} + p_2 \cotg \frac{\alpha}{4} + 2(\cos \frac{\alpha}{4})^2)^2}}. \quad (4.26)$$

V rotoru $R_1 = b_0 + b_1 \sigma_{23} - b_1 \cotg \frac{\alpha}{4} \sigma_{31} + b_3 \sigma_{12} = \cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} \vec{n} \begin{pmatrix} \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix}$ zbývá určit úhel

θ , o který rotujeme, resp. členy $\cos \frac{\theta}{2}$ a $\sin \frac{\theta}{2}$. Ty získáme z rovnice

$$R_1(\cos \frac{\alpha}{2} \sigma_1 - \sin \frac{\alpha}{2} \sigma_2) \bar{R}_1 = p_1 \sigma_1 + p_2 \sigma_2 + p_3 \sigma_3. \quad (4.27)$$

Po úpravě z (4.27) dostáváme, že

$$\begin{aligned}\cos \frac{\theta}{2} &= \pm \sqrt{1 - \frac{p_1 \cos \frac{\alpha}{2} - p_2 \sin \frac{\alpha}{2} - 1}{2(n_1^2 - 1 - n_1^2(\sin \frac{\alpha}{2})^2 + n_2^2(\sin \frac{\alpha}{2})^2 - n_1 n_2 \sin \alpha)}}, \\ \sin \frac{\theta}{2} &= \pm \sqrt{\frac{p_1 \cos \frac{\alpha}{2} - p_2 \sin \frac{\alpha}{2} - 1}{2(n_1^2 - 1 - n_1^2(\sin \frac{\alpha}{2})^2 + n_2^2(\sin \frac{\alpha}{2})^2 - n_1 n_2 \sin \alpha)}}.\end{aligned}$$

Zbývá jednoznačně určit znaménka u členů $\cos \frac{\theta}{2}$ a $\sin \frac{\theta}{2}$. Uvažujme, že oko se dostane z primární α pozice do pozice B rotací kolem osy \vec{n} o úhel $\theta \in \langle -\pi, \pi \rangle$. Potom $\cos \frac{\theta}{2} \geq 0$ má kladné znaménko. Pokud jdeme prsty pravé ruky od vektoru, který chceme rotovat, k vektoru \vec{n} , kolem kterého rotujeme, palec určuje směr rotace, jinými slovy rotace je provedena v kladném směru (viz věta 1.21). S ohledem na toto tvrzení určíme znaménko členu $\sin \frac{\alpha}{2}$ jako $\text{sgn}((\vec{e}_{1L} \times \vec{n}) \cdot \widetilde{\vec{e}}_{1L})$, kde $\vec{e}_{1L} = (\cos \frac{\alpha}{2}, -\sin \frac{\alpha}{2}, 0)$, $\widetilde{\vec{e}}_{1L} = (p_1, p_2, p_3)$. Jednoznačné vyjádření členů $\cos \frac{\theta}{2}$ a $\sin \frac{\theta}{2}$ tedy je

$$\begin{aligned}\cos \frac{\theta}{2} &= \sqrt{1 - \frac{p_1 \cos \frac{\alpha}{2} - p_2 \sin \frac{\alpha}{2} - 1}{2(n_1^2 - 1 - n_1^2(\sin \frac{\alpha}{2})^2 + n_2^2(\sin \frac{\alpha}{2})^2 - n_1 n_2 \sin \alpha)}}, \\ \sin \frac{\theta}{2} &= \text{sgn}((\vec{e}_{1L} \times \vec{n}) \cdot \widetilde{\vec{e}}_{1L}) \sqrt{\frac{p_1 \cos \frac{\alpha}{2} - p_2 \sin \frac{\alpha}{2} - 1}{2(n_1^2 - 1 - n_1^2(\sin \frac{\alpha}{2})^2 + n_2^2(\sin \frac{\alpha}{2})^2 - n_1 n_2 \sin \alpha)}}, \\ &\quad \text{pro } (\vec{e}_{1L} \times \vec{n}) \cdot \widetilde{\vec{e}}_{1L} \neq 0, \\ \sin \frac{\theta}{2} &= \pm 1, \quad \text{pro } (\vec{e}_{1L} \times \vec{n}) \cdot \widetilde{\vec{e}}_{1L} = 0.\end{aligned}\tag{4.28}$$

Poznámka. Pro $(\vec{e}_{1L} \times \vec{n}) \cdot \widetilde{\vec{e}}_{1L} = 0$ znaménko u členu $\sin \frac{\theta}{2}$ neovlivní celkový výpočet.

Nyní už známe $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$, $\cos \frac{\theta}{2}$ i $\sin \frac{\theta}{2}$. Koeficienty rotoru $R_1 = b_0 + b_1 \sigma_{23} - b_1 \cotg \frac{\alpha}{4} \sigma_{31} + b_3 \sigma_{12}$ vyjádříme jako $b_0 = \cos \frac{\theta}{2}$, $b_1 = n_1 \sin \frac{\theta}{2}$ a $b_3 = n_3 \sin \frac{\theta}{2}$, jejich dosazením do (4.25) získáváme

$$\begin{aligned}(-n_3 \sin \frac{\theta}{2} - \cos \frac{\theta}{2} \cotg \frac{\alpha}{4})h_{1L} + (-\cos \frac{\theta}{2} + n_3 \sin \frac{\theta}{2} \cotg \frac{\alpha}{4})h_{2L} + n_1 \sin \frac{\theta}{2} ((\cotg \frac{\alpha}{4})^2 \\ + 1)h_{3L} = 0,\end{aligned}\tag{4.29}$$

kde členy $\cos \frac{\theta}{2}$ a $\sin \frac{\theta}{2}$ jsou vyjádřené v (4.28) a členy n_1, n_2, n_3 jsou vyjádřené v (4.26). Tím jsme jednoznačně získali obecný tvar Listingovy roviny levého oka v obecné pozici v závislosti na směru pohledu $\widetilde{\vec{e}}_{1L} = (p_1, p_2, p_3)$ a vergenčním úhlu α v souřadném systému H_L .

Buďme v souřadném systému H_R . Mějme pravé oko v obecné pozici, ze které se dívá směrem $\widetilde{\vec{e}}_{1R} = (q_1, q_2, q_3)$. Analogickým postupem, jako pro levé oko, získáváme Listingovu rovinu v závislosti na směru pohledu $\widetilde{\vec{e}}_{1R} = (q_1, q_2, q_3)$ a vergenčním úhlu α ve tvaru

$$\begin{aligned}(-m_3 \sin \frac{\phi}{2} + \cos \frac{\phi}{2} \cotg \frac{\alpha}{4})h_{1R} + (-\cos \frac{\phi}{2} - m_3 \sin \frac{\phi}{2} \cotg \frac{\alpha}{4})h_{2R} + m_1 \sin \frac{\phi}{2} ((\cotg \frac{\alpha}{4})^2 \\ + 1)h_{3R} = 0,\end{aligned}\tag{4.30}$$

kde

$$\begin{aligned}\cos \frac{\phi}{2} &= \sqrt{1 - \frac{q_1 \cos \frac{\alpha}{2} + q_2 \sin \frac{\alpha}{2} - 1}{2(m_1^2 - 1 - m_1^2(\sin \frac{\alpha}{2})^2 + m_2^2(\sin \frac{\alpha}{2})^2 + m_1 m_2 \sin \alpha)}}, \\ \sin \frac{\phi}{2} &= \operatorname{sgn}((\vec{e}_{1R} \times \vec{m}) \cdot \widetilde{\vec{e}}_{1R}) \sqrt{\frac{q_1 \cos \frac{\alpha}{2} + q_2 \sin \frac{\alpha}{2} - 1}{2(m_1^2 - 1 - m_1^2(\sin \frac{\alpha}{2})^2 + m_2^2(\sin \frac{\alpha}{2})^2 + m_1 m_2 \sin \alpha)}}, \\ &\quad \text{pro } (\vec{e}_{1R} \times \vec{m}) \cdot \widetilde{\vec{e}}_{1R} \neq 0, \\ \sin \frac{\phi}{2} &= \pm 1, \quad \text{pro } (\vec{e}_{1R} \times \vec{m}) \cdot \widetilde{\vec{e}}_{1R} = 0,\end{aligned}\tag{4.31}$$

$$\vec{m} = (m_1, m_2, m_3) = \frac{(q_3, q_3 \cotg \frac{\alpha}{4}, -q_1 + \cos \frac{\alpha}{2} - q_2 \cotg \frac{\alpha}{4} + 2(\cos \frac{\alpha}{4})^2)}{\sqrt{q_3^2 + q_3^2(\cotg \frac{\alpha}{4})^2 + (-q_1 + \cos \frac{\alpha}{2} - q_2 \cotg \frac{\alpha}{4} + 2(\cos \frac{\alpha}{4})^2)^2}},\tag{4.32}$$

$$\vec{e}_{1R} = (\cos \frac{\alpha}{2}, \sin \frac{\alpha}{2}, 0) \text{ a } \widetilde{\vec{e}}_{1R} = (q_1, q_2, q_3).$$

Buďme v souřadném systému H_C . Chceme vyjádřit tvar Listingových rovin (4.29) a (4.30) v závislosti na obecném bodu $B = [B_1, B_2, B_3]$, který oči pozorují.

V H_C jsou pomocí bodu B vektory $\widetilde{\vec{e}}_{1L}$, $\widetilde{\vec{e}}_{1R}$ a vergenční úhel α vyjádřeny v (4.20) (4.21) a (4.19). Přepočtením výrazu (4.20) resp. (4.21) do souřadného systému H_L resp. H_R a dosazením do (4.29) za (p_1, p_2, p_3) resp. dosazením do (4.30) za (q_1, q_2, q_3) , včetně dosazení (4.19) za α , získáme tvar Listingových rovin v vyjádřených v závislosti na bodu B , který oči pozorují, v příslušném souřadném systému.

Závěr

V této práci jsme se zabývali popisem očních pohybů aparátem geometrických algeber.

V úvodní části byla rozebrána matematická teorie, týkající se geometrické algebry \mathbb{G}_3 . V této algebře jsme definovali tzv. rotory. Dokázali jsme, že rotory spolu tvoří grupu, předvedli jsme jejich různé způsoby reprezentace - zápis pomocí skalární a vektorové části, goniometrický tvar. Dále jsme uvedli, jak pomocí rotorů vyjádřit ve 3D prostoru rotaci vektoru kolem libovolné osy, procházející počátkem soustavy souřadnic, o libovolný úhel. Ukázali jsme také, jakým způsobem lze složenou rotaci, vyjádřenou více rotory, nahradit jednoduchou rotací, vyjádřenou jedním ekvivalentním rotorem. Tento aparát byl dále použit k odvozování vztahů v dalších kapitolách.

Další část byla věnována klasifikaci očních pohybů, popsali jsme především pohyby sakadické, sloužící k prohlížení zorného pole, a pohyby disjunktní, sloužící k zaostření na blízký bod. Blízký bod je pak sledován pod vergenčním úhlem α . Uvedeny jsou také definice souřadných systémů, používaných v práci.

Následovala odvození, opírající se o medicínsky vypořádaná pravidla Dondersova a Listingova. Formulace těchto pravidel a z nich vycházející vztahy byly uvedeny nejdříve pro sledování vzdálených objektů. Vypočítali jsme, v jaké se oko nachází poloze v závislosti na směru, kterým se dívá. Také jsme odvodili tvar roviny, ve které leží všechny osy, kolem kterých může oko rotovat, je-li v obecné poloze. Tato rovina je také vyjádřena v závislosti na směru pohledu.

V závěrečné části byly formulace pravidel Dondersova a Listingova rozšířeny pro binokulární vidění a sledování blízkých objektů. Vypočítali jsme, v jaké se oči nachází pozici v závislosti na bodu, který pozorují. V závislosti na tomto bodu jsme odvodili také tvary rovin (pro levé a pravé oko), ve kterých leží všechny osy, kolem kterých oči mohou vykonávat sakadické rotační pohyby.

Pro lepší osvojení si kalkulu založeného na geometrických algebrách jsme při výpočtech nevyužívali specializovaný software. Tato geometrická algebra se ukázala jako vhodný aparát pro odvození vlastností očí, sledujících vzdálené objekty. V kapitole 3, kde s tímto předpokladem pracujeme, je odvozování efektivní a poměrně jednoduché.

Obtížnější bylo nalezení vztahů v kapitole 4, kde jsme předpokládali, že oči sledují blízké objekty, ačkoliv postup odvození byl velmi podobný, jako v kapitole 3. Vhodnější by zde zřejmě bylo použít nějakou vyšší geometrickou algebru, například $G_{3,0,1}$ [1], pomocí které lze vyjádřit rotaci bodu kolem libovolné osy, nejen kolem osy, procházející počátkem. Pak bychom například při postupu nepotřebovali tři různé souřadné systémy, ale pouze jeden. Při použití vyšší geometrické algebry by ovšem bylo nejspíš nutné použít matematický software, protože algebraické úpravy už by byly příliš technicky náročné. Vše se však nakonec podařilo vyjádřit i bez počítače pomocí \mathbb{G}_3 .

Při navázání na tuto práci by bylo zřejmě dobré rozšířit Listingovo pravidlo pro rotaci očí o velké úhly, Listingova rovina se totiž pro velké úhly určitým způsobem zakřivuje [1]. K tomu je potřeba oční kinematiku popsat podrobněji, především uvést omezení úhlů, o které oči mohou rotovat. Také by nemuselo být špatné najít souvislost mezi Dondersovým pravidlem, Listingovým pravidlem a zpracováním obrazu, vytvořeném na sítnici, zde by bylo zřejmě potřeba nastudovat i anatomii lidského oka.

Seznam použitých zdrojů

- [1] BAYRO-CORROCHANO, Eduardo. *Modeling the 3D kinematics of the eye in the geometric algebra framework*. Pattern Recognition [online]. Elsevier, 2003, 36(12), 2993-3012 [cit. 2017-05-21]. DOI: 10.1016/S0031-3203(03)00180-8. ISSN 0031-3203.
- [2] BAYRO CORROCHANO, Eduardo a Garret SOBCZYK. *Geometric algebra with applications in science and engineering*. Boston: Birkha?user, c2001. ISBN 08-176-4199-8.
- [3] DORST, Leo, Daniel. FONTIJNE a Stephen MANN. *Geometric algebra for computer science: an object-oriented approach to geometry*. San Francisco: Morgan Kaufmann, 2007. Morgan Kaufman series in computer graphics and geometric modeling. ISBN 978-0-12-369465-2.
- [4] GALLIER, Jean. *Clifford Algebras, Clifford Groups, and a Generalization of the Quaternions*. [online]. 2008 [cit. 2017-05-22].
- [5] HASLWANTER, Thomas. *Mathematics of three-dimensional eye rotations*. Vision research [online]. 9506, 35(12), 1727 [cit. 2017-05-21]. DOI: 10.1016/0042-6989(94)00257-M. ISSN 0042-6989.
- [6] KARÁSEK, Jiří a Ladislav SKULA. *Lineární algebra: teoretická část*. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2005. ISBN 80-214-3100-8.
- [7] KARÁSEK, Jiří a Ladislav SKULA. *Obecná algebra*. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2008. ISBN 978-80-214-3794-4.
- [8] LOUNESTO, Pertti. *Clifford algebras and spinors*. 2nd ed. New York: Cambridge University Press, 2001. ISBN 978-0521005517.
- [9] MACDONALD, Alan. *Linear and geometric algebra*. Third printing, corrected and slightly revised. USA: [nakladatel není známý], 2010. ISBN 978-1-4538-5493-8.
- [10] POMYKALOVÁ, Eva. *Matematika pro gymnázia*. 5. vyd. Praha: Prometheus, 2008. ISBN 978-807-1963-585.
- [11] SELIG, J.M. *Geometric fundamentals of robotics* [online]. 2nd ed. New York: Springer, 2005 [cit. 2017-05-25]. ISBN 978-038-7272-740.
- [12] SYNEK, Svatopluk a Šárka SKORKOVSKÁ. *Fyziologie oka a vidění*. 2., dopl. a přeprac. vyd. Praha: Grada, 2014. ISBN 978-80-247-3992-2.
- [13] VASS, Gergely. *Avoiding Gimbal Lock*. Computer Graphics World [online]. 2009, 32(6), 10-11 [cit. 2017-05-22]. ISSN 0271-4159.
- [14] WONG, Agnes M.F. *Listing's law: clinical significance and implications for neural control*. Survey of Ophthalmology [online]. Elsevier, 2004, 49(6), 563-575 [cit. 2017-05-21]. DOI: 10.1016/j.survophthal.2004.08.002. ISSN 0039-6257.

Seznam použitých symbolů a zkratek

Souřadné systémy a jejich osy a báze:

H	Souřadný systém fixovaný k hlavě s počátkem ve středu oka
$\{\vec{h}_1, \vec{h}_2, \vec{h}_3\}$	Ortonormální báze souřadného systému H
h_1, h_2, h_3	Osy souřadného systému H
H_L	Souřadný systém fixovaný k hlavě s počátkem ve středu levého oka
h_{1L}, h_{2L}, h_{3L}	Osy souřadného systému H_L
H_R	Souřadný systém fixovaný k hlavě s počátkem ve středu pravého oka
h_{1R}, h_{2R}, h_{3R}	Osy souřadného systému H_R
H_C	Souřadný systém fixovaný k hlavě s počátkem ve středu spojnice očí
h_{1C}, h_{2C}, h_{3C}	Osy souřadného systému H_C
E	Souřadný systém fixovaný k oku s počátkem v jeho středu
$\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$	Ortonormální báze souřadného systému E , \vec{e}_1 - směr pohledu oka
E_L	Souřadný systém fixovaný k levému oku s počátkem v jeho středu
$\{\vec{e}_{1L}, \vec{e}_{2L}, \vec{e}_{3L}\}$	Ortonormální báze souřadného systému E_L , \vec{e}_{1L} - směr pohledu levého oka
E_R	Souřadný systém fixovaný k pravému oku s počátkem v jeho středu
$\{\vec{e}_{1R}, \vec{e}_{2R}, \vec{e}_{3R}\}$	Ortonormální báze souřadného systému E_R , \vec{e}_{1R} - směr pohledu pravého oka

Další použité symboly a matematické operátory:

C_L, C_R	Centrum otáčení levého resp. pravého oka
O	Střed úsečky spojující centra otáčení očí
d	Polovina vzdálenosti očí
α	vergenční úhel
L_L, L_R	Levá resp. pravá Listingova rovina v primární α pozici
\mathbb{R}	Množina reálných čísel
\mathbb{G}_3	Geometrická algebra, jejíž prvky jsou generovány bází $\{1, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_2\sigma_3, \sigma_3\sigma_1, \sigma_1\sigma_2, \sigma_1\sigma_2\sigma_3\}$
$\Psi(\vec{u})$	Obraz prvku $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ v \mathbb{G}_3 , generovaný bází $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$
$\Phi(\vec{u})$	Obraz prvku $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ v \mathbb{G}_3 , generovaný bází $\{\sigma_{23}, \sigma_{31}, \sigma_{12}\}$
R	Rotor
$S(R), \vec{V}(R)$	Skalární a vektorová část rotoru R
θ	Úhel, o který rotujeme
\vec{n}	Jednotkový vektor určující osu rotace
N	Obraz jednotkového vektoru \vec{n} v \mathbb{G}_3 , generovaný bází $\{\sigma_{23}, \sigma_{31}, \sigma_{12}\}$
\vec{r}	Vektor rotace
\bar{U}	Konjugovaný prvek k prvku U
\tilde{U}	Označení výsledného prvku po rotaci prvku U
\times, \cdot	Vektorový a skalární součin
\circ	Skládání vektorů rotace