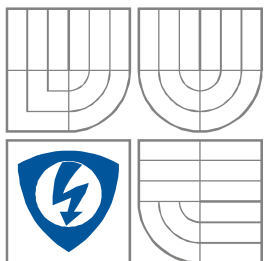


VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ  
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA ELEKTROTECHNIKY  
a KOMUNIKAČNÍCH  
TECHNOLOGIÍ  
ÚSTAV RADIOELEKTRONIKY

FACULTY OF ELECTRICAL ENGINEERING AND  
COMMUNICATION  
DEPARTMENT OF RADIO ELECTRONICS

## ČASOVĚ-FREKVENČNÍ ANALÝZA TIME-FREQUENCY ANALYSIS

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE  
BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE  
AUTHOR

David Tráge

VEDOUCÍ PRÁCE  
SUPERVISOR

Ing.Radek Kubásek, Ph.D.

BRNO,2009

# LICENČNÍ SMLOUVA POSKYTOVANÁ K VÝKONU PRÁVA UŽÍT ŠKOLNÍ DÍLO

uzavřená mezi smluvními stranami:

## 1. Pan/paní

Jméno a příjmení: David Tráge  
Bytem: Stamicova 5, 62300, Brno  
Narozen/a (datum a místo): 10.dubna 1987 v Brně

(dále jen „autor“)

a

## 2. Vysoké učení technické v Brně

Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií  
se sídlem Údolní 53, Brno, 602 00  
jejímž jménem jedná na základě písemného pověření děkanem fakulty:  
prof. Dr. Ing. Zbyněk Raida, předseda rady oboru Elektronika a sdělovací technika  
(dále jen „nabyvatel“)

## Čl. 1

### Specifikace školního díla

1. Předmětem této smlouvy je vysokoškolská kvalifikační práce (VŠKP):

- disertační práce
  - diplomová práce
  - bakalářská práce
  - jiná práce, jejíž druh je specifikován jako .....
- (dále jen VŠKP nebo dílo)

Název VŠKP: Časově – frekvenční analýza

Vedoucí/ školitel VŠKP: Ing. Radek Kubásek, Ph.D.

Ústav: Ústav radioelektroniky

Datum obhajoby VŠKP: \_\_\_\_\_

VŠKP odevzdal autor nabyvateli\*:

- v tištěné formě – počet exemplářů: 2
- v elektronické formě – počet exemplářů: 2

2. Autor prohlašuje, že vytvořil samostatnou vlastní tvůrčí činností dílo shora popsané a specifikované. Autor dále prohlašuje, že při zpracovávání díla se sám nedostal do rozporu s autorským zákonem a předpisy souvisejícími a že je dílo dílem původním.

3. Dílo je chráněno jako dílo dle autorského zákona v platném znění.

4. Autor potvrzuje, že listinná a elektronická verze díla je identická.

---

\* hodící se zaškrtněte

## Článek 2

### Udělení licenčního oprávnění

1. Autor touto smlouvou poskytuje nabyvateli oprávnění (licenci) k výkonu práva uvedené dílo nevýdělečně užít, archivovat a zpřístupnit ke studijním, výukovým a výzkumným účelům včetně pořizování výpisů, opisů a rozmnoženin.
2. Licence je poskytována celosvětově, pro celou dobu trvání autorských a majetkových práv k dílu.
3. Autor souhlasí se zveřejněním díla v databázi přístupné v mezinárodní síti
  - ihned po uzavření této smlouvy
  - 1 rok po uzavření této smlouvy
  - 3 roky po uzavření této smlouvy
  - 5 let po uzavření této smlouvy
  - 10 let po uzavření této smlouvy  
(z důvodu utajení v něm obsažených informací)
4. Nevýdělečné zveřejňování díla nabyvatelem v souladu s ustanovením § 47b zákona č. 111/ 1998 Sb., v platném znění, nevyžaduje licenci a nabyvatel je k němu povinen a oprávněn ze zákona.

## Článek 3

### Závěrečná ustanovení

1. Smlouva je sepsána ve třech vyhotoveních s platností originálu, přičemž po jednom vyhotovení obdrží autor a nabyvatel, další vyhotovení je vloženo do VŠKP.
2. Vztahy mezi smluvními stranami vzniklé a neupravené touto smlouvou se řídí autorským zákonem, občanským zákoníkem, vysokoškolským zákonem, zákonem o archivnictví, v platném znění a popř. dalšími právními předpisy.
3. Licenční smlouva byla uzavřena na základě svobodné a pravé vůle smluvních stran, s plným porozuměním jejímu textu i důsledkům, nikoliv v tísní a za nápadně nevýhodných podmínek.
4. Licenční smlouva nabývá platnosti a účinnosti dnem jejího podpisu oběma smluvními stranami.

V Brně dne: 5. června 2009

.....  
Nabyvatel

.....  
Autor

## **Anotace**

Cílem tohoto bakalářské práce je zjistit možnosti získání analýzy časové, frekvenční a jejich vzájemné kombinace, časově-frekvenční, různými metodami například Fourierovou transformací a Vlnkovou transformací. Během práce se seznámíme s jednotlivými transformacemi a vysvětlíme postup jejich výpočtu a především jejich výhody a nevýhody z pohledu přesnosti určení velikosti frekvence signálu v čase.

**Klíčová slova:** časově-frekvenční analýza, Fourierova transformace, Vlnková transformace

## **Annotation**

The aim of this bachelor`s thesis is to explore possibilities of solving time-, frequency analysis a their combination time-frequency analysis by different methods for example Fourier transform a Wavelet transform. Going through this project we will get know each transformation and we will make clear proceduce of their solving and first of all their advantages and disadvantages in view of accuracy of frequention`s mark in time.

**Keywords:** time-frequency analysis, Fourier transform, Wavelet transform

### **Bibliografická citace mé práce:**

TRÁGE, D. *Časově-frekvenční analýza*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií, 2009. 31 s. Vedoucí bakalářské práce Ing. Radek Kubásek, Ph.D.

## **Prohlášení**

Prohlašuji, že svou bakalářskou práci na téma Časově–frekvenční analýza jsem vypracoval samostatně pod vedením vedoucího semestrálního projektu a s použitím odborné literatury a dalších informačních zdrojů, které jsou všechny citovány v práci a uvedeny v seznamu literatury na konci práce.

Jako autor uvedené bakalářské práce dále prohlašuji, že v souvislosti s vytvořením této práce jsem neporušil autorská práva třetích osob, zejména jsem nezasáhl nedovoleným způsobem do cizích autorských práv osobnostních a jsem si plně vědom následků porušení ustanovení § 11 a následujících autorského zákona č. 121/2000 Sb., včetně možných trestněprávních důsledků vyplývajících z ustanovení § 152 trestního zákona č. 140/1961 Sb.

V Brně dne 25. května 2009

.....

podpis autora

## **Poděkování**

Děkuji vedoucímu bakalářské práce Ing.Radku Kubáskovi, Ph.D. za účinnou metodickou, pedagogickou a odbornou pomoc a další cenné rady při zpracování mého semestrálního projektu.

V Brně dne 25. května 2009

.....

podpis autora

## Obsah

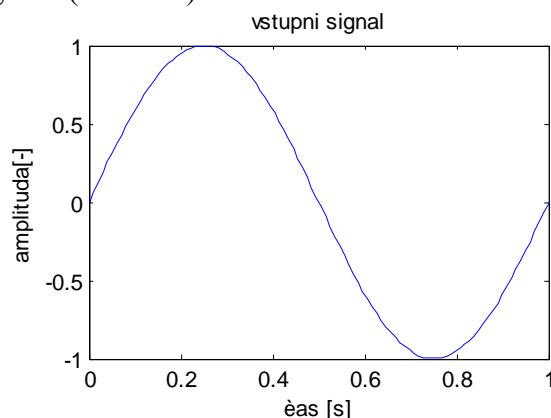
Anotace .....	2
Annotation.....	4
1. Úvod .....	7
1.1. Spojitý signál .....	7
1.2. Diskrétní signál.....	8
1.3. Okno.....	9
2. Transformace.....	11
2.1. Fourierova tranformace .....	11
2.1.1. Fourierovy řady.....	11
2.1.2. Fourierova transformace spojitého signálu (FT) .....	12
2.1.3. Diskrétní Fourierova transformace (DFT).....	13
2.2. Vlnková transformace .....	21
2.2.1. CWT – Spojitá vlnková transformace .....	23
2.2.2. DWT – Diskrétní vlnková transformace .....	24
2.3. Princip nejistoty .....	29
3. Závěr .....	32
4. Literatura.....	33

# 1.Úvod

Tato bakalářská práce se zabývá srovnáním různých metod k dosažení frekvenční analýzy signálů spojitéch i diskrétních. Frekvenční analýzou rozumíme odhad spektra jeho frekvenčních složek, tedy jednotlivé frekvence, ze kterých se původní signál skládá. Tyto složky charakterizuje jejich frekvence, amplituda, začátek a konec v čase. Při časové analýze se snažíme dosáhnout co možná největšího rozlišení časové osy, abychom dokázali přesně detekovat výskyt této složky. Naopak při frekvenční analýze hledáme největší rozlišení frekvenční osy spektra, abychom dokázali přesně určit velikost frekvence a amplitudu jednotlivých složek signálu. Těchto 2 kritérií, tedy časového a frekvenčního, nejsme schopni dosáhnout zároveň, avšak snažíme se vždy najít co možná nejvhodnější kompromis právě pro danou aplikaci. U některých transformací časové rozlišení zlepšovat nelze a jsou omezena například délkou vstupního signálu, dosahují však oproti ostatním mnohem lepších výsledků v jiných aspektech, u jiných transformací jsme si schopni „pomoci“ umělého prodloužení signálu, popř. delším výpočtem získat kvalitnější rozlišení žadané osy.

## 1.1.Spojité signál

Signál si můžeme představit jako informaci popsatelnou mnoha způsoby (například matematickou funkcí nebo zápisem vektoru hodnot). Základní vlastností spojitého signálu  $s(t)$  by měla být jeho návaznost. Neměl by obsahovat žádné mezery a v každém okamžiku by měl mít jasně definovanou amplitudu a fázi. Tohoto můžeme například v Matlabu dosáhnout i tak, že signál bude určen velkým počtem hodnot a jeho průběh bude mezi jednotlivými hodnotami aproximován. Pro výpočet frekvenčního spektra spojitého signálu nám může posloužit jakákoli transformace, avšak aplikovatelná na spojitý signál (CWT – spojitá vlnková transformace, Fourierova transformace, ...). Existují též spojitě komplexní signály, takové jsou definovány dvojicí signálu, z nichž jeden představuje jeho reálnou složku a druhý komplexní složku. u těchto signálů se bavíme o modulu a fázi. u vlnkové transformace počítáme spektrum komplexního signálu pomocí komplexních vlnek Gaussovských či Morletových. u Fourierovy transformace komplexní modulové spektrum má jiné vlastnosti, než spektra reálných signálů (viz. dále)



**Obr. 1:**Spojité signál

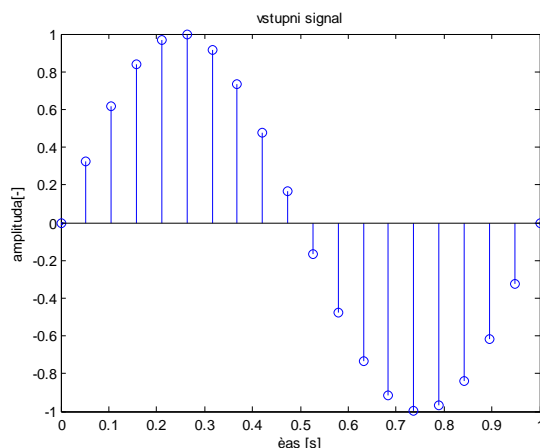
## 1.2. Diskrétní signál

Diskrétním signál označujeme  $s(n)$ . Diskrétním signálem rozumíme definovaným v časovém okamžiku a časově ohraničeném (s konečným počtem hodnot  $N_s$ ). Dále existují též signály diskrétní v čase, ty však neobsahují konečný počet vzorků a popisují např. funkci  $\sin(x)$ , která má nekonečně dlouhý definiční obor, tedy není časově ohraničená.

Diskrétní signál je složen z hodnot amplitud v čase, které získáme tzv. navzorkováním vstupního signálu  $s(t)$  pomocí A/D převodníku se vzorkovací frekvencí  $f_s$ . Pravidlem je, že vzorkovací frekvence  $f_s$  musí být nejméně 2x vyšší než je nejvyšší frekvence složky  $f$ , kterou chceme v diskrétním signálu zachovat. Toto se řídí Nyquist–Shannon vzorkovacím teorémem. Pokud bychom toto pravidlo nedodrželi, mohlo by dojít k tzv. antialiasingu, což je zkreslení frekvenčního spektra složkami, které původní signál vůbec neobsahoval.

$$f < \frac{f_s}{2}. \quad \text{[MHz]} \quad (1)$$

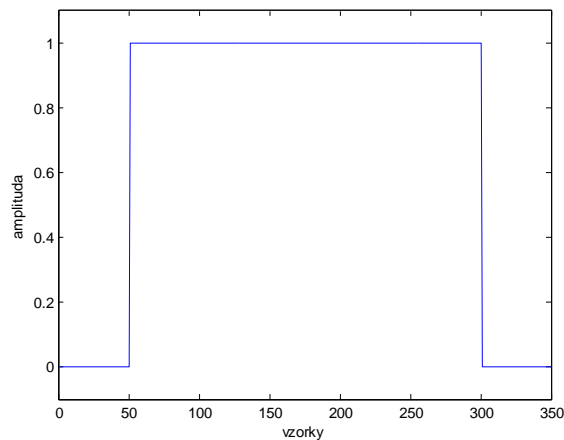
Při vzorkování užíváme ještě kvantování, tedy převedení přesné hodnoty signálu na diskrétní hodnotu, jejíž přesnost určuje přesnost užitého A/D převodníku. Při kvantování musíme počítat s jistou nepřesností velikosti amplitudy. Každý vzorek vstupního signálu je převeden s tzv. kvantovou chybou, tedy s rozdílem oproti skutečné velikosti amplitudy vstupního signálu. Její velikost se udává v toleranci  $\pm 1/2$  LSB, což představuje polovinu nejnižšího bitu číslicového A/D převodníku. Konečného počtu vzorků dosáhneme vynásobením vstupního signálu obdelníkovým oknem o amplitudě rovné 1 a konečné délce v čase. Dále zde musíme uvažovat časové zpoždění, které A/D převodník zavádí, tím se nám mění přesnost v časovém měřítku, avšak tuto nečnost v číslicové technice může napravit rekurzivní filtr, který jednoduše posune hodnoty na časové ose, aby nebyly zpožděny. Většina moderních přístrojů pracuje s diskrétním vyjádřením signálu např. digitální technika, protože je to méně časově náročné na výpočet. Samozřejmě, že tím myslíme, že práce programu počítá už pouze s diskrétními hodnotami, vstupním signálem však je většinou signál spojitý



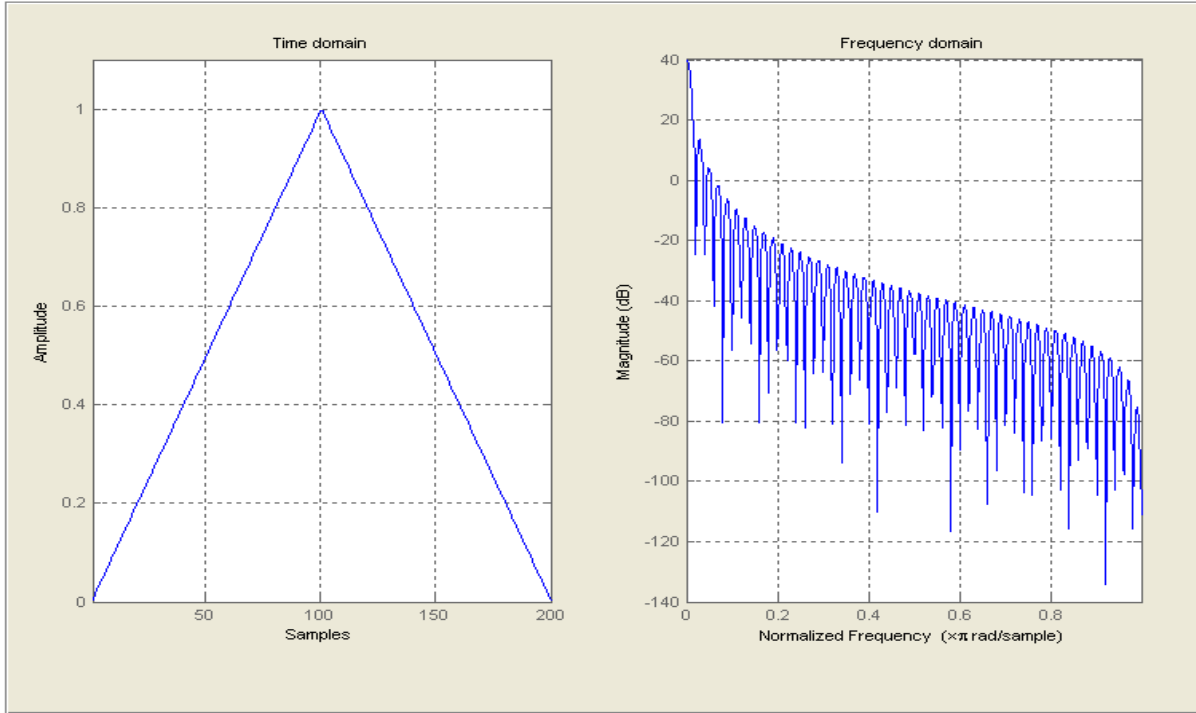
Obr. 2: Diskrétní signál

### 1.3. Okno

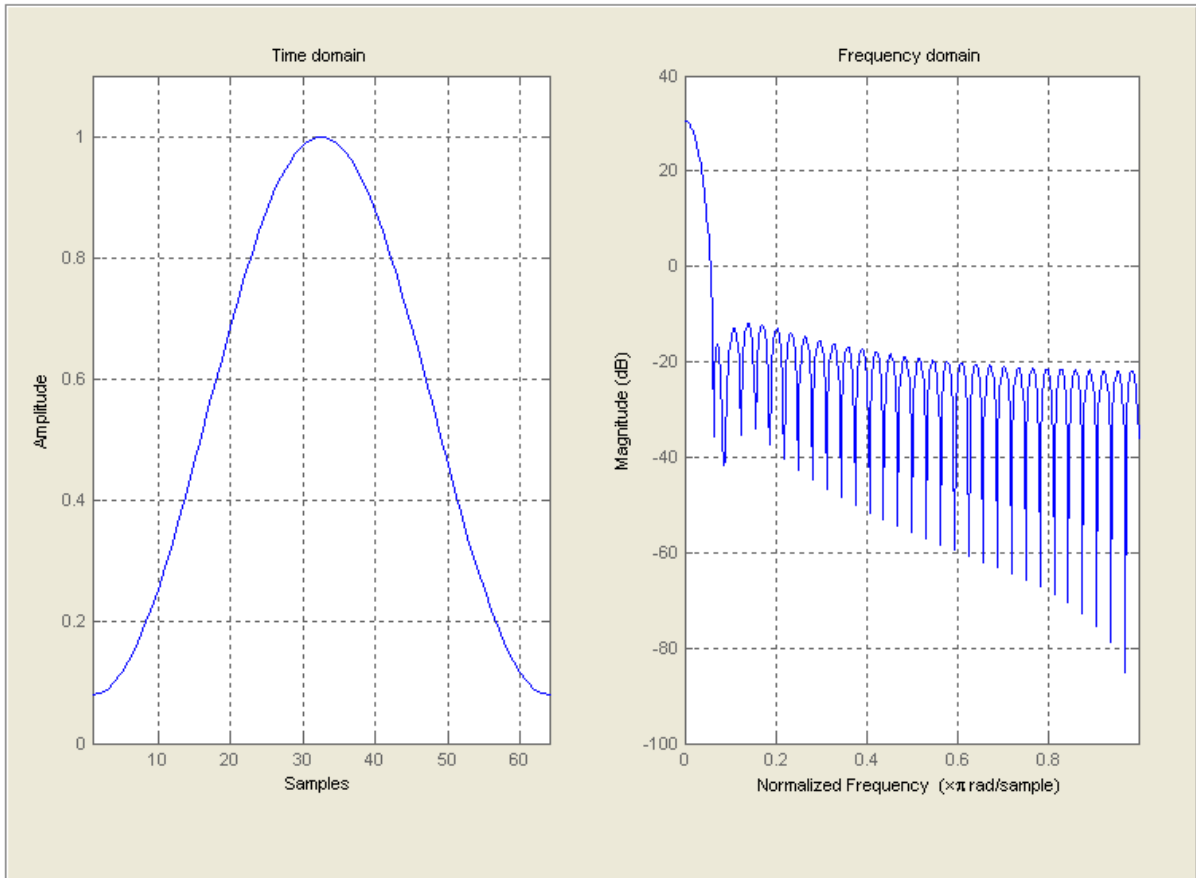
Ve většině přístrojů pracujeme s omezenou velikostí paměti, kam se mohou ukládat údaje o vstupním signálu. Z těchto důvodů se zavedly takzvaná okna, pomocí kterých diskretní signál rozdělíme na určité úseky a z těchto pak počítáme jednotlivá spektra. Okna dělíme dle jejich délky a také podle jejich váhy. Jedná se tedy o váhovaná okna. Nejběžnějšími typy takových oken jsou například okna trojúhelníková, obdelníková (Obr. 3), Hammingovo (Obr. 6), Hanovo (Obr. 5), apod. Kromě prvních dvou typů mají tyto okna převážně zvonovitý tvar. Pro výpočet je vhodnější použití zvonovitých tvarů, protože dosahují větších přesností při určení frekvence, pokud signál končí hodnotou amplitudy 1 a začíná hodnotou amplitudy -1 bude spektrum zkreslené a nebude z něj moci být původní signál zrekonstruován přesně. K tomuto zkreslení dochází mimo jiné i nelinearitou fáze jednotlivých koeficientů. Fáze by při výpočtu měla nárůstat s množstvím koeficientů lineárně. Tuto nechtost se snažíme eliminovat mimo jiné tak, že okno bude obsahovat celé periody signálu, pokud je signál periodický, neboť např. obraz Fourierovy transformace je periodický a kladením jednoho obrazu zpětné transformace za druhým by mohou vzniknout skoky na rozhraní obrazů. Tím bych samozřejmě zkreslili výstupní signál, který by pak neodpovídal signálu původnímu.



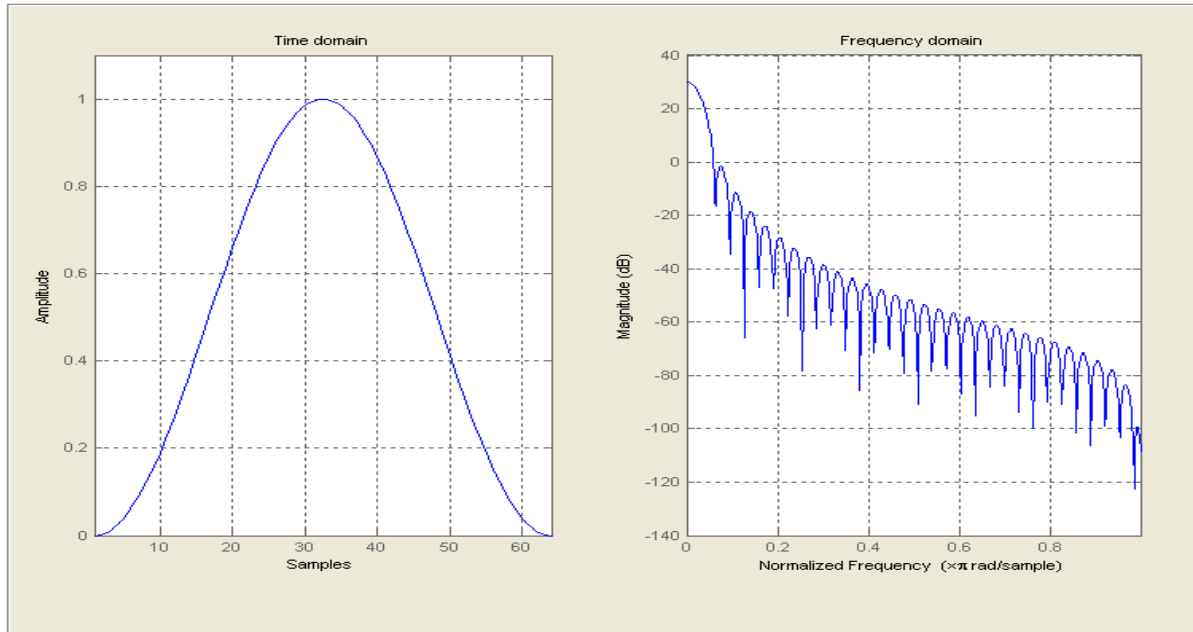
**Obr. 3:** – Obdelníkové okno



**Obr.4:** Trojúhelníkové okno a útlum v okolí středu jeho obrazu FT



**Obr.5:** Hannovo okno a útlum v okolí středu jeho obrazu FT



**Obr.6:** Hammingovo okno a útlum v okolí středu jeho obrazu FT

## 2. Transformace

Pokud chceme zjistit, jaké frekvenční složky signál obsahuje, využíváme určitého algoritmu, pomocí kterého vypočteme odhad frekvenčního modulového a fázového spektra. Jednotlivým složkám pak říkáme spektrální složky. Existuje několik způsobů, jak spektrum vypočítat, v této práci se však zaměříme na 2 nejpoužívanější, a těmi jsou Fourierova transformace a Vlnková transformace. Každá z těchto transformací má odlišný výsledek neboli obraz, ale pomocí několika jednoduchých vztahů, které si řekneme později, lze jejich výsledky srovnat.

### 2.1. Fourierova transformace

#### 2.1.1. Fourierovy řady

Užívá se pro analýzu periodických signálů. Reálný periodický signál  $s(t)$  o určité frekvenci  $f_s$  mohou zastupovat dvojice koeficientů  $c_k$  s opačnou fází.

$$c_1 = \frac{1}{2} C_1 \exp(j\varphi_1) \quad \text{a} \quad c_{-1} = \frac{1}{2} C_1 \exp(-j\varphi_1),$$

(2 a 3)

kde  $C_1$  je amplituda signálu  $s(t)$  a  $\varphi_1$  počáteční fáze tohoto signálu.

U komplexních signálů platí, že fáze ani amplitudy dvojice koeficientů nemusí být stejné, to znamená, že komplexní signál může být zastoupen i pouze jedním koeficientem, což nám může pomoci při některých praktických aplikacích (viz. dále).

Z těchto koeficientů pak můžeme získat výpočtem tzv. Fourierovu řadu (4.). Všechny reálné signály jsou zastoupeny ve spektru dvojicí komplexních koeficientů  $c_k$ , které jsou osově souměrné dle  $f_n$  tzv. Nyquistova kmitočtu. Toto však nemusí platit u komplexních signálů, pokud budeme brát v úvahu speciální případ takového komplexního signálu, jeho spektrum může mít pouze polovinu koeficientů oproti reálnému signálu. Toho se využívá např. v radiotechnice, kdy k přenosu užíváme reálný signál a při příjmu z něj využijeme pouze reálnou část, čímž dostaneme opět reálný signál.

Koeficient může mít však i nulovou amplitudu, čemuž odpovídá případ, kdy daná frekvenční složka nemusí být v původním signálu obsažena. Jednotlivé komplexní koeficienty  $c_k$  budou představovat spektrální složky, ze kterých lze spočítat příslušné frekvenční složky. Komplexní koeficienty mají modul a fázi.

$$c_k = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} s(t) \exp(-jk\omega_1 t) dt, \quad (4)$$

kde  $c_k$  je komplexní koeficient spektra signálu  $s(t)$  a  $T_1$  je perioda základní harmonické složky.

### 2.1.2. Fourierova transformace spojitého signálu (FT)

Obrazem Fourierovy transformace signálu  $s(t)$  je frekvenční modulové  $S(\omega)$  a argumentové  $S(\varphi)$  spektrum signálu, které vychází z rovnice (4). Na ose nezávisle proměnné jsou kmitočty  $0-f_s$ . V polovině se nachází tzv. Nyquistův kmitočet  $f_n$ , tedy  $\frac{f_s}{2}$ . U impulzů, nebo u signálů s velice dlouhou periodou by nám však vztah (4) příliš nepomohl, koeficienty  $c_k$  by byly velice blízko u sebe a to ve značné hustotě. Jejich amplitudy by v limitě pro  $T_1 = \infty$  dosáhly nuly. Proto jsme zavedli  $S(\omega)$  (5.). Při Fourierově transformaci se počítá spektrální funkci  $S(\omega)$  signálu  $s(t)$  která popisuje jeho harmonické složky. Matematicky si můžeme představit spektrální funkci jako obraz Fourierovy transformace. K výpočtu využíváme následující vztah

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \exp(-j\omega t) dt, \quad (5)$$

kde  $\omega$  je úhlový kmitočet a  $s(t)$  vstupní spojitý signál.

Jedná se o spojité spektrum signálu  $s(t)$ . Tento vztah lze odvodit ze vztahu (4) užitím limity  $T_1$  jdoucí k nekonečnu. Fourierova transformace je reverzní, tedy je možno z jejího obrazu odvodit původní signál  $s(t)$  a to pomocí vzorce

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \exp(j\omega t) d\omega. \quad (6)$$

### 2.1.3. Diskrétní Fourierova transformace (DFT)

V praxi se nejčastěji setkáme s diskrétními signály (např. v Matlabu). Vzorec pro výpočet Fourierovy transformace diskrétní v čase (DTFT – Discrete Time Fourier Transform) lze odvodit ze spektrální funkce a to

$$\tilde{S}(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n) \exp(-j\omega n). \quad (7)$$

Fourierova transformace však postupovala dál. Vyvinuly se mnohem výkonnější aparáty FT např. diskrétní Fourierova transformace DFT (Discrete Fourier Transform), která již pracuje s omezeným počtem vstupních vzorků; nebo Rychlá Fourierova transformace FFT (Fast Fourier Transform) která je dnes jednou z nejpoužívanějších metod k získání frekvenčního spektra. Pro přehlednost uvedeme vzorec DFT.

$$\tilde{S}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{s}(n) \exp(-j\omega_k n) \quad (8)$$

Vlnovkou je označena periodicitá spektra,  $\omega_k$  označuje normovaný kmitočet

$$\omega_k = \frac{2\pi}{N} k, \quad (9)$$

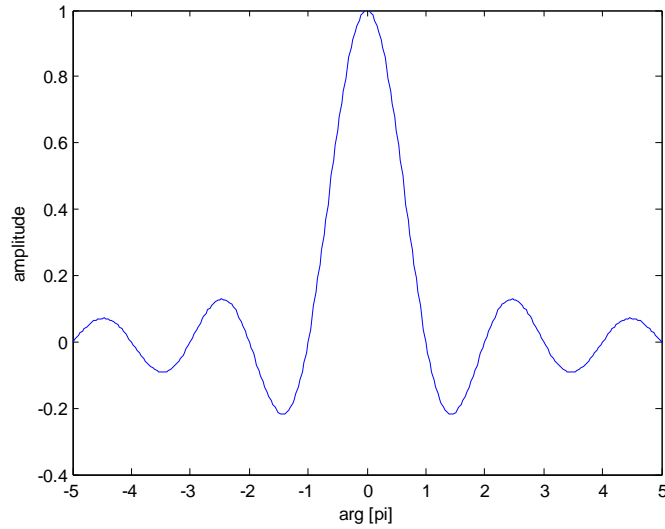
kde  $N$  označuje počet vzorků vstupního signálu. Pro DFT pak lze napsat

$$S(k) = R_N(k) \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{s}(n) \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} kn\right). \quad (10)$$

Z výpočetního hlediska je  $R_N$  výraz nadbytečný a proto se často vynechává, označuje průchod vstupních vzorků přes obdelníkové okno o amplitudě 1.

Tyto všechny výpočty slouží ke zjištění spektra, pokud budeme mít k dispozici celý signál od začátku až do konce, avšak v praxi se s tímto případem setkáme jen zřídka. Ve zbylých případech potřebujeme zjistit v signálu přítomnost nějaké složky a především bychom rádi určili její velikost modulu a fáze popř. velikost takové frekvence. Pak musíme spojit vše, co jsme si již řekli v jedno. Vstupní signál navzorkujeme, a určíme s kolika vzorky budeme pracovat, označme si tento počet  $N$ . Pak přejdeme k samotnému výpočtu DFT. Pokud bychom však použili jen prostého vyseknutí daného  $N$  vzorků, tedy užili bychom obdelníkového okna, zjistili bychom, že spektrum obsahuje možná náš signál, avšak odstup

takové spektrální složky od šumu, postranních laloků vlivem funkce  $\text{sinc}(x)$  (viz. dále), nebo od ostatních je velice malý. To je způsobeno tím, že spektrum obdelníkového okna je  $\text{sinc}(x)$



**Obr. 7:** Funkce  $\text{sinc}(x)$

Vidíme, že spektrum má velké postranní laloky. Při výpočtu DFT pak dochází vždy ke konvoluci tohoto spektra a spektra dané frekvenční složky, tedy

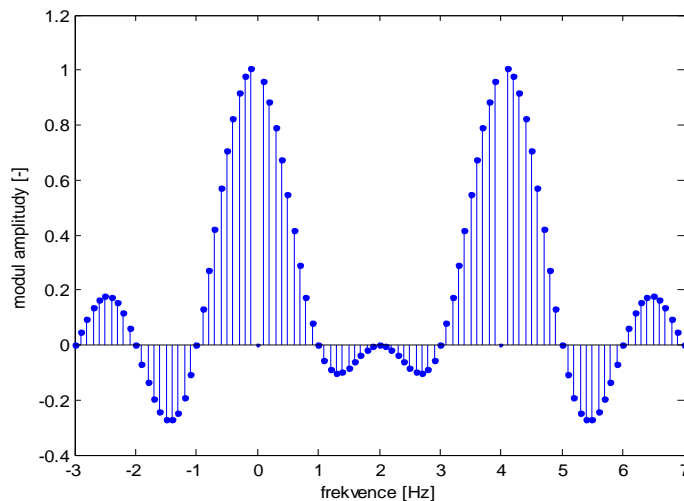
$$\tilde{S}(\omega) = S_o(\omega) * S(\omega),$$

(11)

kde  $S_o(\omega)$  je frekvenční spektrum okna a  $S(\omega)$  spektrum původního signálu.

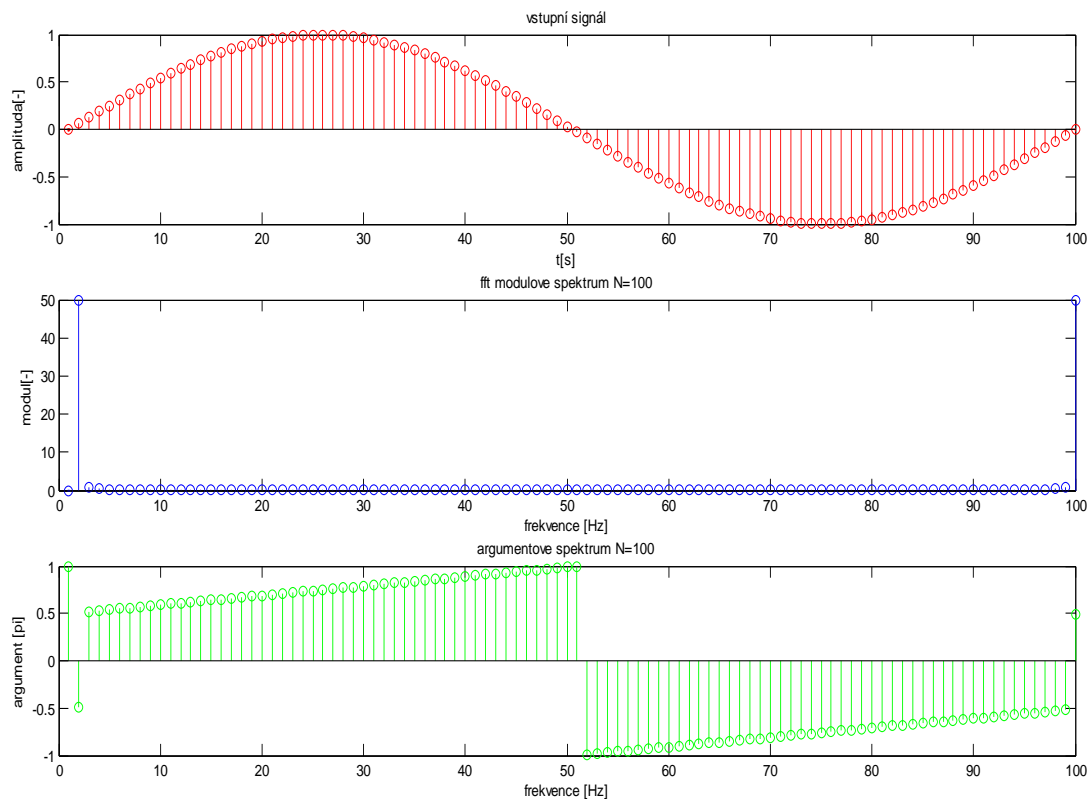
Pro jednu harmonickou složku je jím dvojice spektrálních čar daných koeficienty  $c_1$  a  $c_{-1}$ , jak jsme si již uvedli v předcházející kapitole).

Tedy pokud bude signál obsahovat 1 frekvenční složku, pak výsledné spektrum může vypadat následovně



**Obr. 8:** – DFT spektrum

Jelikož pomocí okna jednotlivé vzorky signálu váhujeme, říká se těmto signálům váhovaná okna. Vidíme, že při použití obdelníkového okna není příliš šťastné, proto byly vyvinuty další typy oken (viz. kap. 1.3). Pokud se snažíme detekovat určitý signál v čase, pak je nutné, co nejvíce eliminovat zpoždění výpočtu, načítání apod. Toho lze dosáhnout rychlým posunem okna v čase a pokud zajistíme, že počet vzorků  $N$  bude nízký, aby výpočet mohl proběhnout co nejrychleji. Avšak setkáváme se s nedostatečným rozlišením na frekvenční ose. Z výše uvedeného totiž jasně vyplývá, že DFT spočítá z daného počtu vstupních vzorků dané počet výstupních vzorků, kterým odpovídají dané frekvence 0 až  $f_s$ . Tohoto se však dá zbavit pomocí umělého prodloužení vstupních vzorků nulami. Pak výstupní spektrální složky budou s menšími rozestupy a tedy budeme moci přesněji určit danou frekvenci. Pokud nám však vstupní signál bude měnit frekvenci, bylo by na místě, abychom zajistili dostatečné časové rozlišení, toho lze dosáhnout překrýváním váhovaných okének a tím opakovanému částečnému propočtu s již použitými hodnotami, čímž se dostáváme k STFT (Short – time Fourier Transform). Pokud takováto spektra položíme na časovou osu, dostáváme časově-frekvenční analýzu.



**Obr. 9:** Diskrétní Fourierova transformace

Z hlediska přesnosti se lze ve DTFT ubírat dvěma směry. Rozlišení frekvenční  $R_f(DTFT)$  resp. nejmenší dílek na frekvenční ose je přímo úměrný  $N_{DTFT}$ , tedy počtu vzorků, ze kterých se v danou chvíli DTFT počítá, dále je přímo úměrné polovině vzorkovací frekvence  $f_s$ , avšak s tolerancí  $T_f(DTFT)$ .

$$R_f(DTFT) = \frac{f_s}{N_{DTFT}} \quad [\text{Hz}] \quad (12)$$

$$T_f(DTFT) = \pm \frac{R_f(DTFT)}{2} \quad [\text{Hz}] \quad (13)$$

Časové rozlišení, tedy nejmenší dílek na časové ose je nepřímo úměrný  $f_s$  násobený rozdílem  $N_{DTFT}$  a  $N_{overlay}$ , což představuje počet vzorků, které se budou ve dvou po sobě jdoucích vstupních posloupnostech, překrývat. Mohlo by se zdát, že vysokým počtem vstupních vzorků dostatečně zvětšíme frekvenční rozlišení, ovšem s je nutno brát ohled na dobu výpočtu a především zpoždění zavedené vlivem načítání vstupních vzorků.

$$R_\zeta(DTFT) = \frac{N_{DTFT} - N_{overlay}}{f_s} \quad [\text{s}] \quad (14)$$

$$T_\zeta(DTFT) = \pm \frac{R_\zeta(DTFT)}{2} \quad [\text{s}] \quad (15)$$

Popsané vztahy si můžeme názorně ukázat na příkladu vstupního sinusového vstupního signálu o frekvenci  $f_v = 1000\text{Hz}$ . Pro analýzu použijeme metodu Fourierovy transformace, vzorkovací frekvence  $f_s = 10000\text{Hz}$ , počet vzorků testovaného signálu  $N=5000$  (pro  $N=2500$  až  $N=2700$  nahrazeno nulami),  $N_{DTFT}=125$ ,  $N_{overlay}=0$ .

Rozlišení na frekvenční ose bude mít následující parametry: Velikost jednoho dílku

$$R_f(DTFT) = \frac{f_s}{N_{DTFT}} = \frac{10000}{125} = 80 \text{ Hz}$$

$$T_f(DTFT)_{max} = \pm \frac{R_\zeta(DTFT)}{2} = \pm \frac{80}{2} = \pm 40 \text{ Hz.}$$

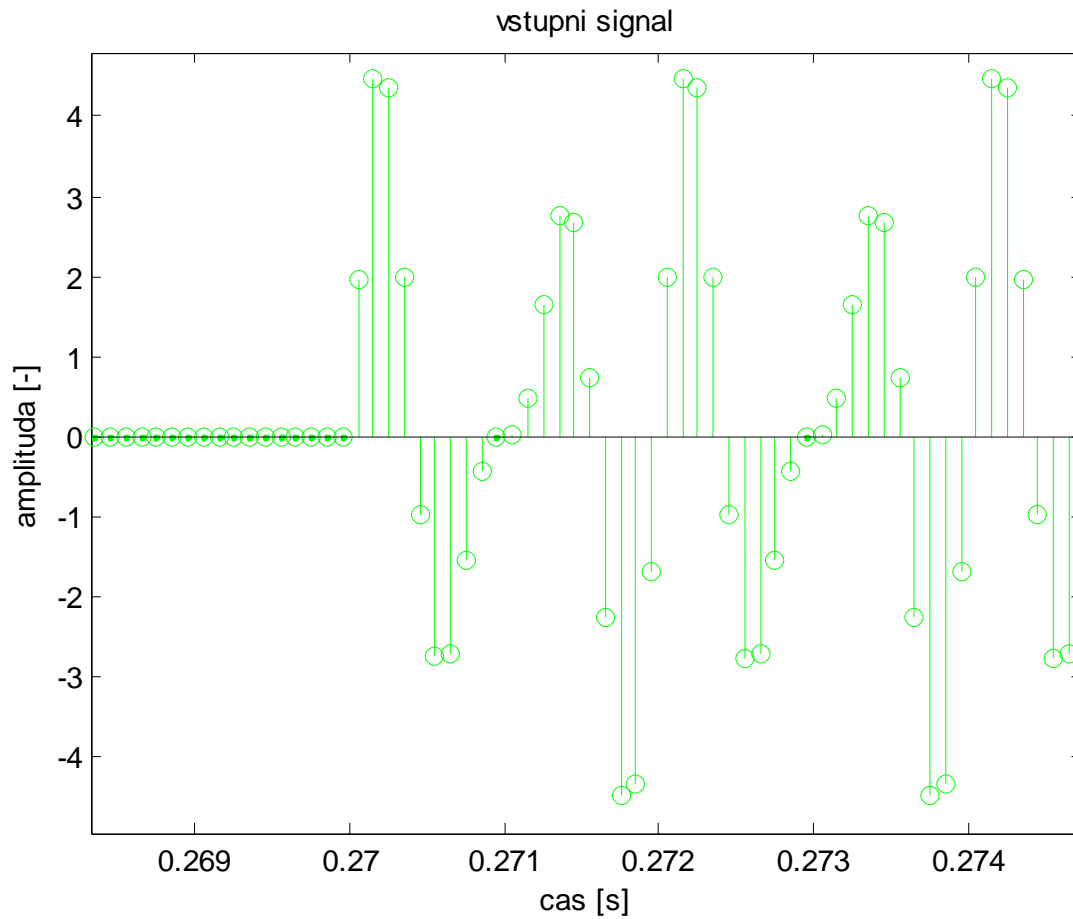
Frekvence 1000Hz se nalézá na frekvenční ose mezi diskrétními hodnotami 960 Hz a 1040 Hz.

Vzdálenost mezi dvěma nejbližšími hodnotami na frekvenční ose bude

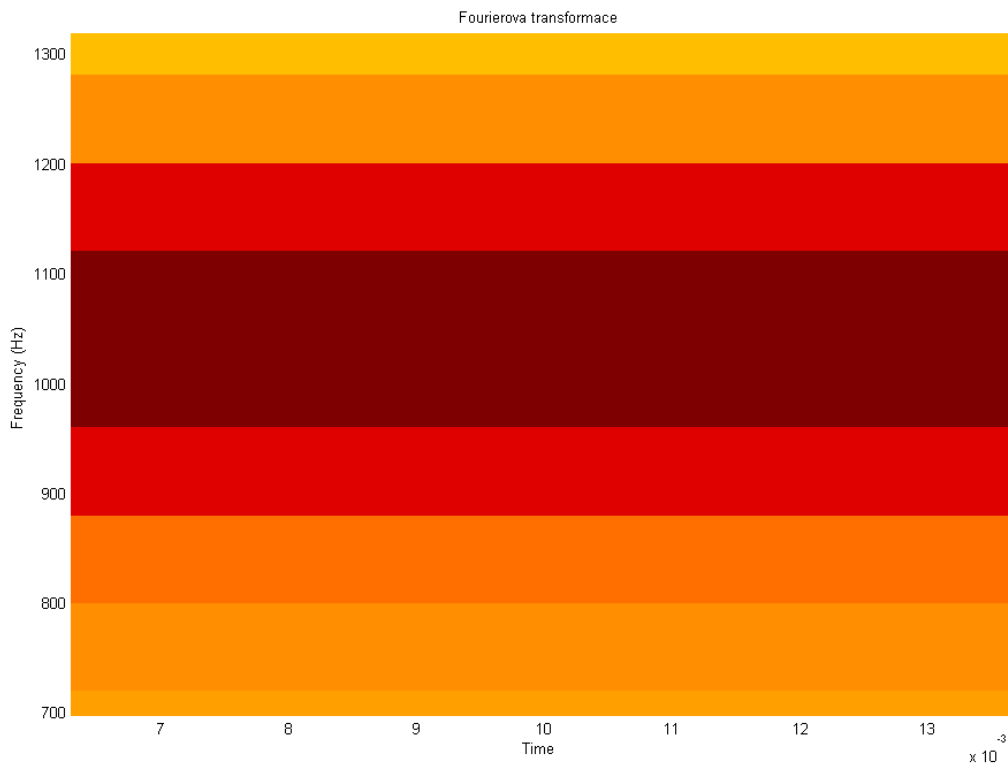
$$R_\zeta(DTFT) = \frac{N_{DTFT} - N_{overlay}}{f_s} = \frac{125 - 0}{10000} = 12,5\mu\text{s}$$

$$T_{\xi}(DTFT) = \pm \frac{R_{\xi}(DTFT)}{2} = \pm \frac{12,5 \cdot 10^{-3}}{2} = 6,25\mu s.$$

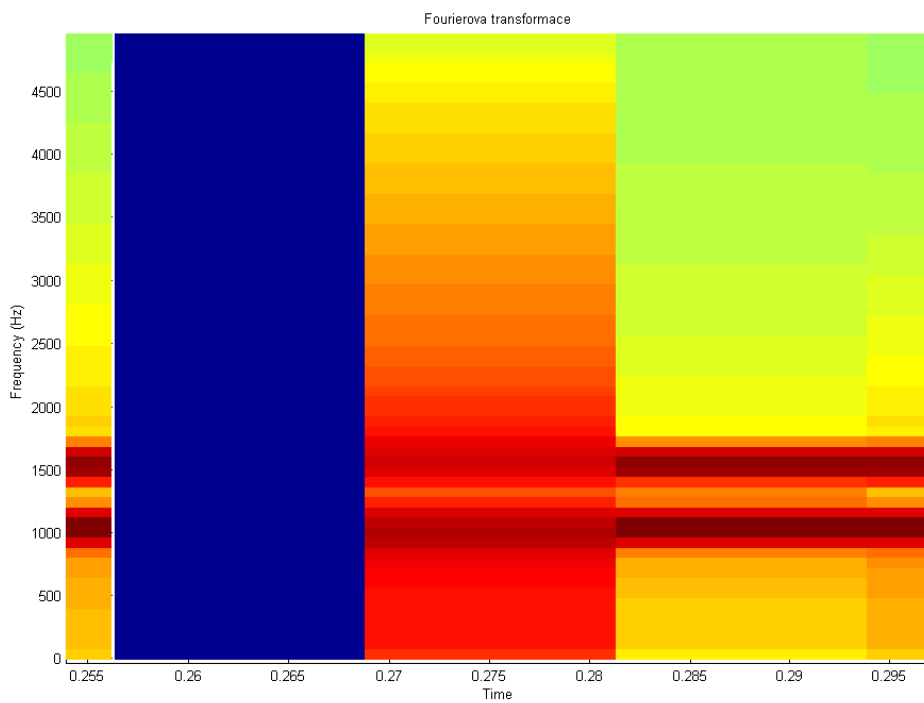
Ve výsledku transformace se pokles amplitudy frekvenčních složek na nulu projeví se zpožděním  $\frac{N_{DTFT}-N_{overlay}}{2}$  a to z důvodu tvaru obrazu užitého okna. Při skokové změně amplitudy (ze  $\sin(x)$  na nuly) však dojde k indikaci všech frekvencí a to z důvodu obrazu obdelníkové hrany. Tyto frekvence jsou detekovány již přesně v čase viz výše. Následující znázornění potvrzuji popsané vztahy:



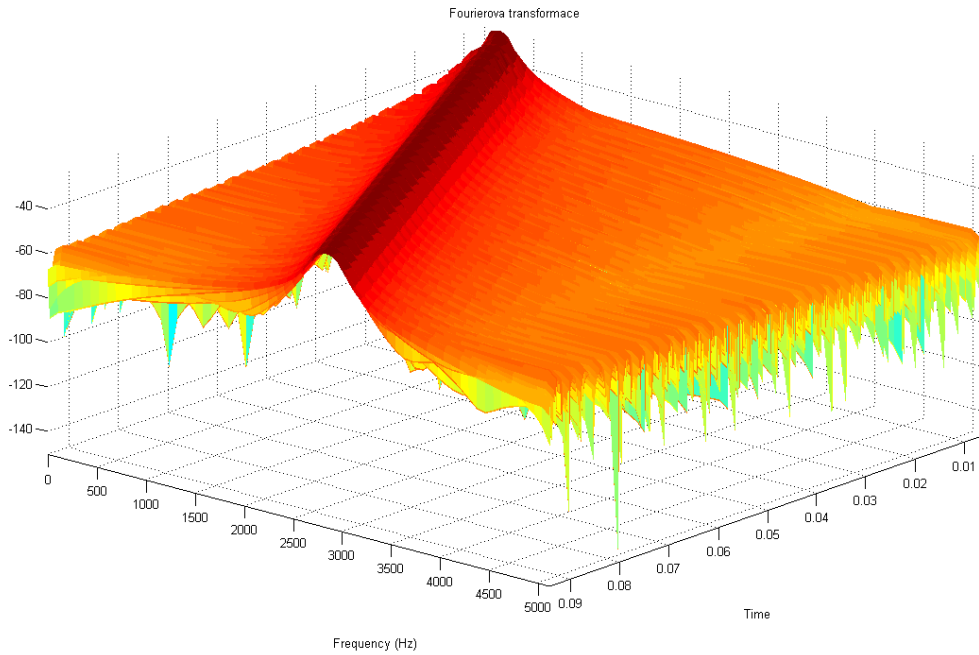
**Obr. 10:** Výřez vstupního signálu ( $f_v = 1000\text{Hz}$ ,  $f_s = 10000\text{Hz}$ ,)



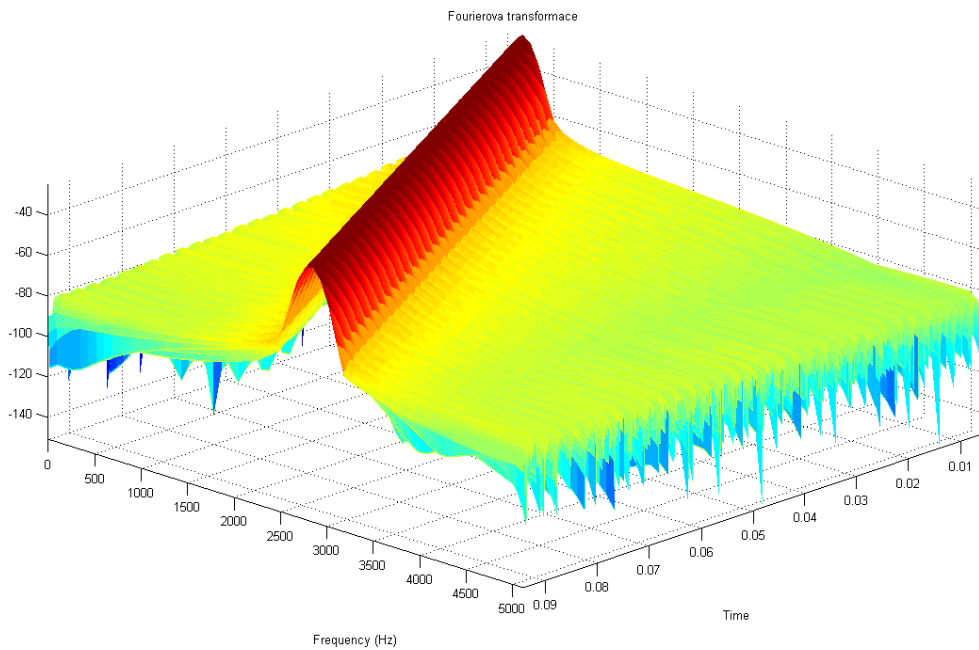
**Obr. 11:** Výřez časově frekvenční analýzy ( $N_{\text{DTFT}} = 125$ ,  $N_{\text{overlap}} = 0$ )



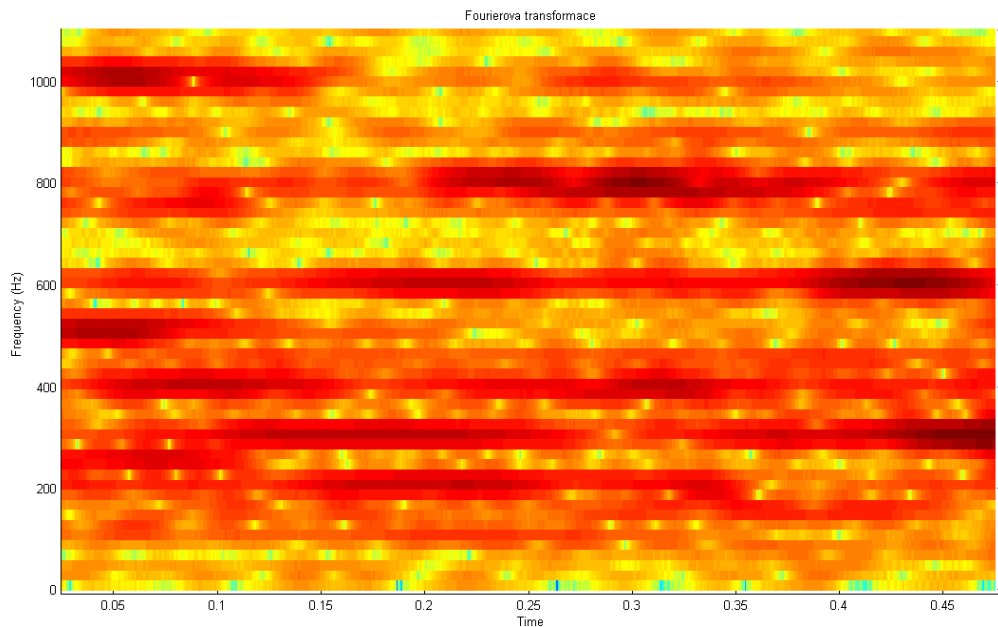
**Obr. 12:** Výřez časově frekvenční analýzy ( $N_{\text{DTFT}} = 125$ ,  $N_{\text{overlap}} = 0$ )



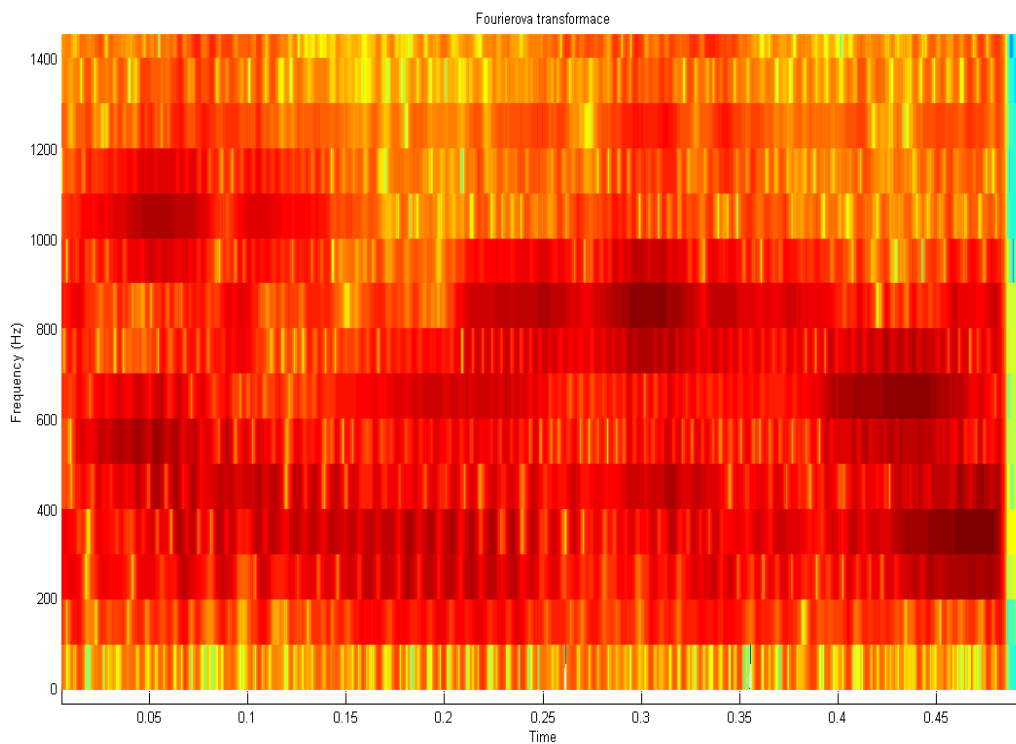
**Obr. 13:** Časově frekvenční analýza (Na vstupu rozmítaný sinusový signál od frekvence  $f_v = 0-3$  kHz, obdelníkové okno,  $N_{\text{DTFT}} = 120$ ,  $N_{\text{overlap}} = 119$ )



**Obr. 14:** Časově frekvenční analýza (Na vstupu rozmítaný sinusový signál od frekvence  $f_v = 0-3$  kHz, Gaussovo okno,  $N_{\text{DTFT}} = 120$ ,  $N_{\text{overlap}} = 119$ )



**Obr.15:** Analýza zvuku houslí FFT 1 ( $N=8000$ ,  $N_{DTFT} = 800$ ,  $N_{overlap} = 780$ )



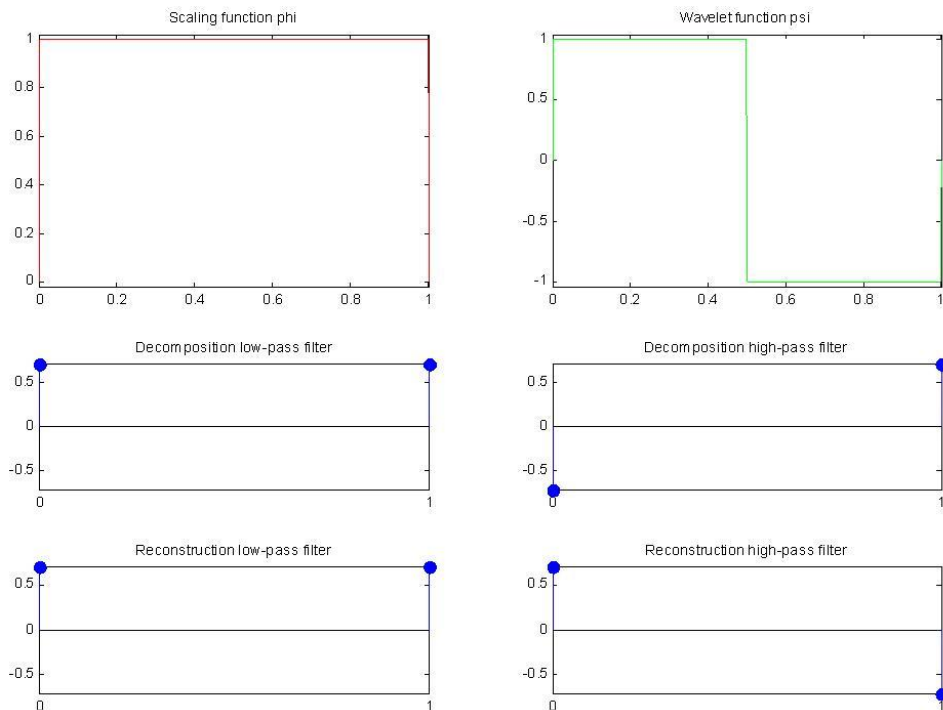
**Obr.16:** Analýza zvuku houslí FFT 2 ( $N=8000$ ,  $N_{DTFT} = 160$ ,  $N_{overlap} = 140$ )

Zlepšením frekvenčního rozlišení můžeme vyčíst ze spektra detailnější (přesnější) informace. Například 2 signály, jejichž frekvenční rozdíl je velice malý, mohou být ve špatně zvoleném

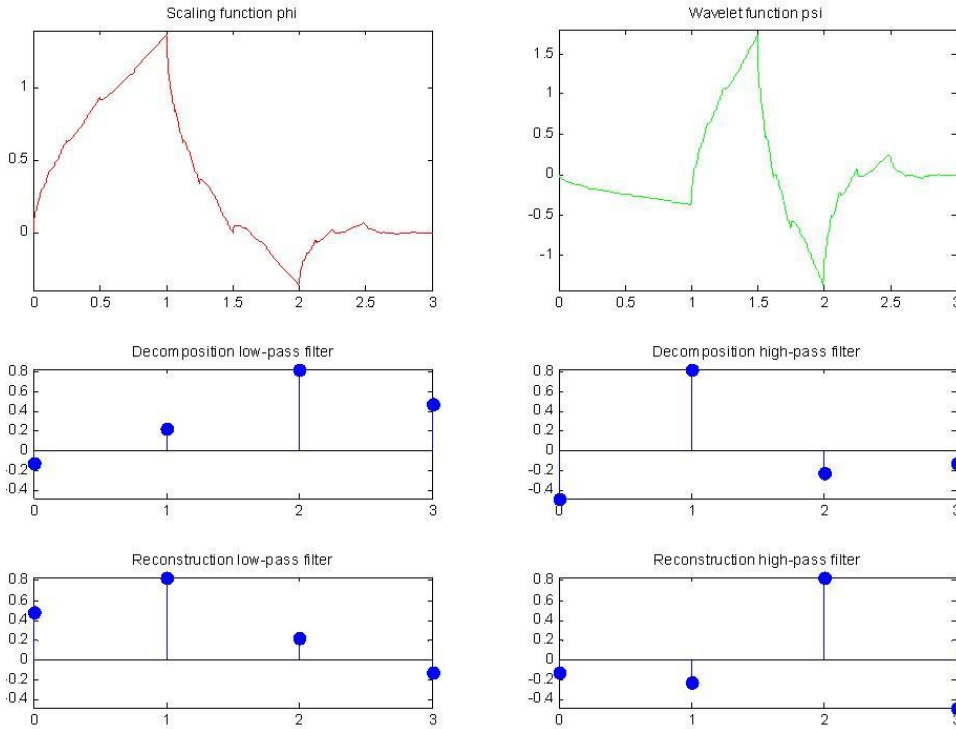
frekvenčním rozlišení zobrazeny jako 1 signál. Kvalitnějšího frekvenčního rozlišení můžeme docílit několika metodami: a) doplněním vstupního signálu nulami nebo b) zvětšením počtu vstupních vzorků signálu pro výpočet spektra. Kvalitnějšího časové rozlišení dosáhneme dostatečným překryvem jednotlivých spekter.

## 2.2. Vlnková transformace

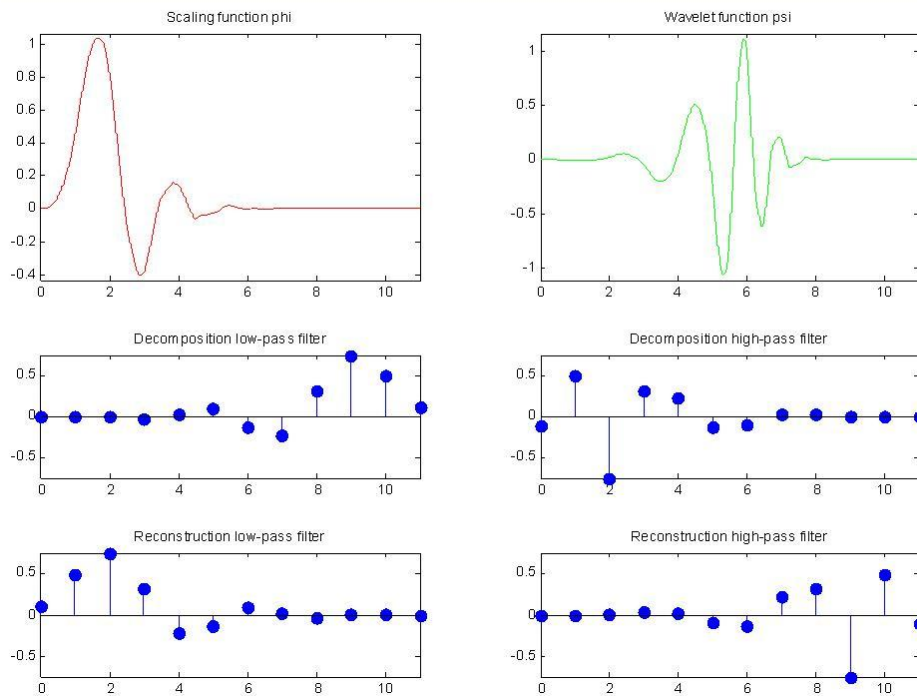
Mezi další často používané transformace patří již přes 10 let vlnková transformace. Jako jedna z mála má mnoho společného s Fourierovou transformací. V následujících kapitolách se ji pokusím přiblížit a ukázat její výhody a nevýhody oproti Fourierově transformaci. Vlnková (ang. wavelet) transformace se dělí podobně jako Fourierova transformace na CWT (Continuous Wavelet Transform) a DWT (Discrete Wavelet Transform), tedy na spojitou a diskrétní. Jejich základem je tzv. vlnka (ang. wavelet). Během několika let bylo vytvořeno několik typů vlnek např. Gaussova, Haarova a další. Na tvaru vlnky velice záleží. Strmost vlnky nepřímo ovlivňuje časovou přesnost transformace, čím větší strmost a méně koeficientů vlnky jejich rekonstrukčních resp. dekompozičních filtrů, tím přesnější časové určení signálu. Na obrázcích \*\*\* je uvedena jedna ze základních vlnek, tj. Daubechieova. S rostoucím řádem vlnky narůstá též počet koeficientů a zmenšuje se ostrost a strmost vlnky.



**Obr.17:** Daubechieova vlnka 1.řádu neboli Haarova (nahore), její dekompoziční filtr DP (uprostřed vlevo) resp. HP (uprostřed vpravo) a rekonstrukční filtr DP (vlevo dole) resp. HP (vpravo dole)



**Obr.18:** Daubechieova vlnka 2.řádu, její dekompoziční filtr DP (uprostřed vlevo) resp. HP (uprostřed vpravo) a rekonstrukční filtr DP (vlevo dole) resp. HP (vpravo dole)



**Obr.19:** Daubechieova vlnka 6.řádu, její dekompoziční filtr DP (uprostřed vlevo) resp. HP (uprostřed vpravo) a rekonstrukční filtr DP (vlevo dole) resp. HP (vpravo dole)

Základní myšlenkou je porovnání signálu s mateřskou vlnkou, míra podobnosti odpovídá hodnotě amplitudy při daném měřítku  $s$  (scale), pomocí něj je možné měnit její šířku (dilataci) a parametru  $\tau$  zvaným poloha, který mění umístění vlnky na časové ose (translaci). Výhodou vlnkové transformace je právě vztahovaný signál. Na rozdíl od Fourierovy transformace, kde posuzovaným signálem byla sinusovka bez časového ohraničení, zde posuzovacím signálem je vlnka s konečnou délkou, která umožňuje proto kvalitnější rozlišení v čase.

Prvotní formou tzv. Spojité vlnkové transformace byla tzv. Diadická, která využívá dělení na frekvenční a časové ose následujícím způsobem:

Nízkým kmitočtům přiřazuje delší časová okna a vysokým kmitočtům naopak okna kratší, tím se docílí přesnější časové polohy. Tato nerovnoměrnost v časovém měřítku je nadále vykompenzována nerovnoměrností v měřítku frekvenčním. Vzhledem k delším časovým oknům u nízkých frekvencí, je časové rozlišení u nízkých frekvencí menší (směrem k nižším frekvencím jsou časová měřítka násobky 2). Tedy u nejnižších kmitočtů je měřítko největší a směrem k vyšším kmitočtům klesá až ke 2. Odtud vyplývá také pravidlo, že vstupní signál musí být násobkem 2 ( $N=1024,2048,\dots$ ). Pokud budeme chtít zvýšit rozlišení na frekvenční ose, musíme jen zvýšit počet rozdělení  $2^n$  (64,128,256,...). Co se týče časové osy už tolik udělat nemůžeme. Na rozdíl od překrývání oken u Fourierovy transformace, zde je časové určení konečné. u vysokých frekvencí vlivem krátké vlnky můžeme očekávat rychlou reakci časově-frekvenční analýzy na změnu frekvenčních složek signálu, u nižších tomu bude právě naopak. u DWT (viz. dále) si ukážeme, že volbou *stromu* můžeme ovlivnit přesnost na obou osách právě v námi sledovaném úseku frekvencí.

### 2.2.1. CWT – Spojitá vlnková transformace

Transformace pracuje na systému popsaném výše, avšak vzhledem k tomu, že v čase se nemůžeme pohybovat spojitě, ale pouze po daných krocích je otázkou, zda CWT můžeme považovat za *spojitou*, tento problém způsobili matematici, kteří začali následujícímu vztahu říkat spojitá vlnková transformace, ale přitom si neuvědomili, že pokud mluvíme o spojité transformaci, předpokládáme spojitý posun v časovém měřítku. CWT pracuje se spojitými signály a její koeficienty lze vypočítat následujícím vztahem

$$W_f(s, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{s}} \psi_{(s,\tau)}(t) dt, \tag{16}$$

kde  $s$  je měřítko vlnky (míra roztažení v časovém měřítku pro porovnání),  $\psi_{(s,\tau)}$  mateřská vlnka v poloze  $\tau$  (v čase) a měřítku  $s$ ,  $f(t)$  je porovnávaný signál. Pak  $W_f(s, \tau)$  jsou koeficienty vlnkové transformace.

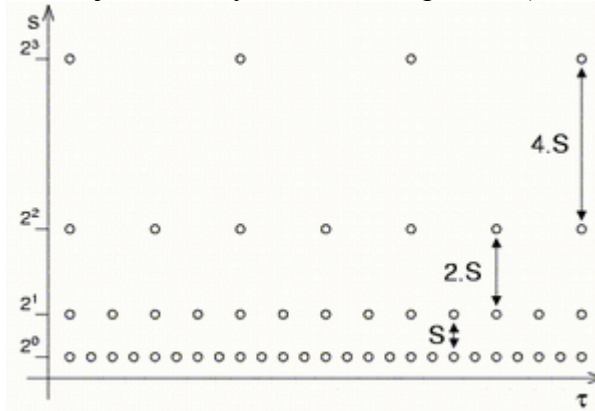
CWT užívá *stromu* popsaného výše. Vhodným signálem, ve kterém by CWT měla mít výhodu oproti Fourierově transformaci, jsou signály s body nespojitosti. Tyto body ve svém spektru obsahují mnoho vysokých frekvenčních složek a proto vlnková transformace bude moci přesněji časově určit jejich polohu právě díky diadickému dělení směrem k vyšším frekvencím. CWT na rozdíl od ostatních transformací je schopna také poskytnout informace, které ostatní transformace nemají např. trendy, body nespojitosti, tedy body s velkou derivací.

Především je schopna s daty pracovat. Může se využít pro odstanění šumu. Z vypočtených koeficientů  $W_f(s, \tau)$  jsme schopni původní signál zrekonstruovat.

## 2.2.2. DWT – Diskrétní vlnková transformace

Diskrétní vlnková transformace je v posledních letech velice oblíbenou metodou výpočtu frekvenčního spektra. Můžeme si ji představit jako speciálně vzorkovanou Spojitou vlnkovou transformaci. Tvoří ji série horních a dolních propustí. Na výstupu každého z těchto filtrů dochází k tzv. decimaci, což představuje vybrání každého druhého vzorku. S takto „zkráceným“ signálem pak počítáme dál. Výhodou této decimace je, že výsledný počet výstupních vzorků je shodný s počtem vstupních vzorků. Tato metoda též logicky šetří místo v paměti, kam se mezivýsledky transformace ukládají. Z výsledku jsme schopni zpětnou transformací získat opět původní signál. K syntéze se využívá tzv. rekonstrukčních FIR filtrů.

Diskrétní vlnková transformace využívá rychlého algoritmu, ve kterém ekvidistantně vzorkujeme signál v čase, avšak logaritmicky v měřítku. Toto nám umožňuje nestejně vzorkovat signál s ohledem na jeho časový a frekvenční průběh (viz. Obr. 20).



**Obr. 20:** Vzorkování CWT – vznik DWT

Řekli jsme si, že DWT využívá vždy dvojici filtrů dolní a horní propusti. Tyto filtry mají stejný dělicí kmitočet, jejich pásma na sebe tedy komplementárně navazují. Tím je zajištěno, aby se žádné frekvenční složky signálu neztrácely. Dolním propustem se říká *scaling filtry*, horním pak *wavelet filtry*. Základem DP je měřítkový filtr  $w$ , ze kterého normováním vzniknou koeficienty dolní propusti  $h$ . Pomocí HP pak dostaneme koeficienty horní propusti  $g$ . Výstupní vzorky těchto propustí jsou nadále podvzorkovány na polovinu (pokud bychom nevyužívaly decimace, dosáhli bychom většího rozlišení na frekvenční ose, avšak za cenu větších paměťových potřeb a nutnosti větší rychlosti výpočtů při zachování časového rozlišení). Každý výstup této dvojice filtrů je dvojicí složek vektorů  $cA$  a  $cD$ .  $cA$  představuje vektor koeficientů aproximace, jde o výstup dolní propusti,  $cD$  pak vektor detailních koeficientů.  $cD$  jsou nadále filtrovány přes HP a DP s lomovým kmitočtem  $f_{HP}/2$  (Obr. 21). Čím vyšší počet detailních koeficientů máme, tím kvalitnějšího rozlišení na frekvenční ose můžeme dosáhnout, až do vyčerpání informací vstupního signálu.

Je zřejmé, že pokud bychom nefiltrovali přes HP a DP pouze koeficienty  $g$ , ale i koeficienty  $h$ , tedy výstupy DP, dosáhli bychom lineárního rozložení frekvencí podél osy *scales*. Tomuto rozložení, kdy každý výstup filtru ať už HP či DP podrobujeme další analýze,

říkáme *uniformní* rozložení. Pokud bychom měli zájem zkoumat přesné okolí určité frekvence, museli bychom tomu přizpůsobit i rozložení stromu, pak v daném okolí získáme větší rozlišení v časovém měřítku i ve frekvenčním.

Při rozložení diadickým odpovídá libovolnému frekvenčnímu pásmu  $M$  spektra vlnkové transformace následující frekvenční rozsah

$$R_f(DWT) = (2^M - 2^{M-2}) \div (2^M + 2^{M-1}),$$

[Hz]  
(17)

kde  $M = (1,2,3,\dots)$  je pořadí frekvenčního pásma směrem od nejvyšších frekvencí k nižším,  $f_s$  je vzorkovací kmitočet a  $R_f(DWT)$  je frekvenční rozlišení. Naopak rozlišení časové, tedy velikost nejmenšího dílku na časové ose, lze popsat jako  $R_\zeta(DWT)$  a to

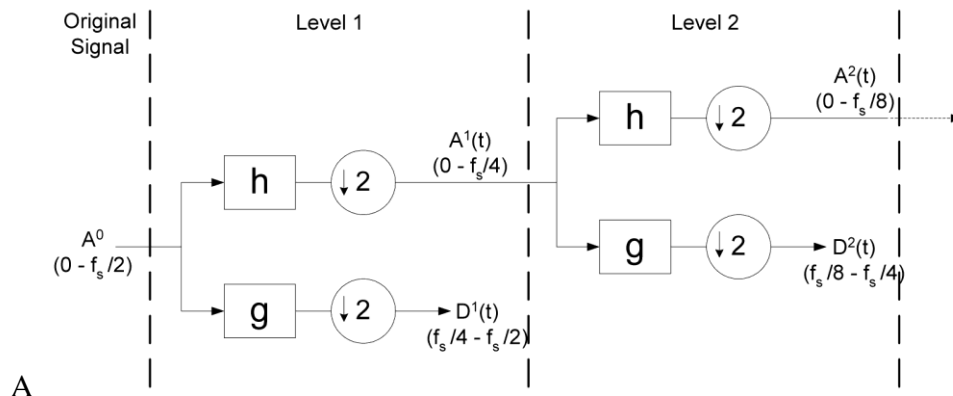
$$R_\zeta(DWT) = \frac{2^M}{f_s},$$

[s]  
(18)

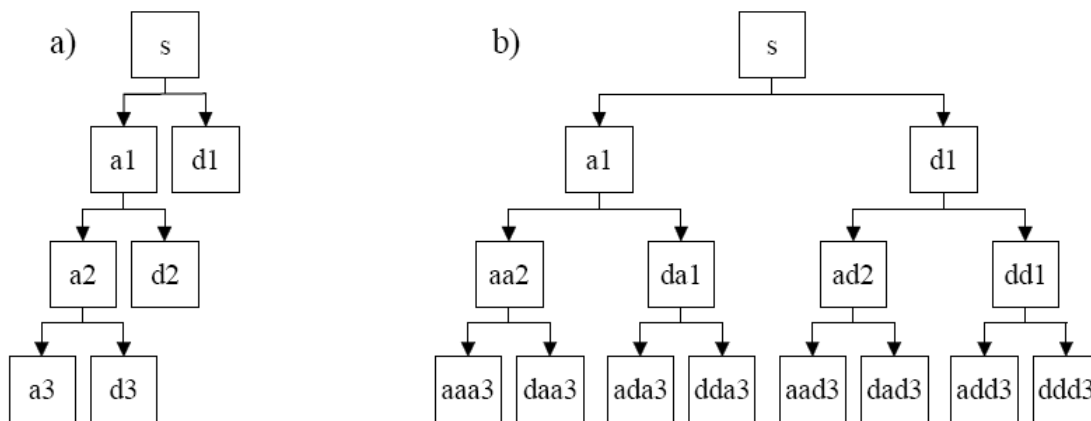
kde  $R_\zeta(DWT)$  je velikost nejmenšího dílku na časové ose pro  $M$ -té frekvenční pásmo počítáno od nejdelších porovnávacích vlnek, tedy od nejnižších frekvencí. V případě rozložení uniformního platí stejné frekvenční a časové rozlišení jako u DTFT.

Následně si ukážeme na testovacím signálu, který se skládá ze složek  $f_{v1}=256\text{Hz}$  a  $f_{v2}=1024\text{Hz}$ ,  $N=5000$ ,  $f_s=10\text{kHz}$ . Pro analýzu použijeme vlnkové transformace. Hodnota 256Hz odpovídá  $2^8$  a 1000Hz odpovídá přibližně  $2^{10}$ . Tyto signály se budou nacházet ve scales (frekvenčních pásmech) 8 a 10, což odpovídá frekvencím

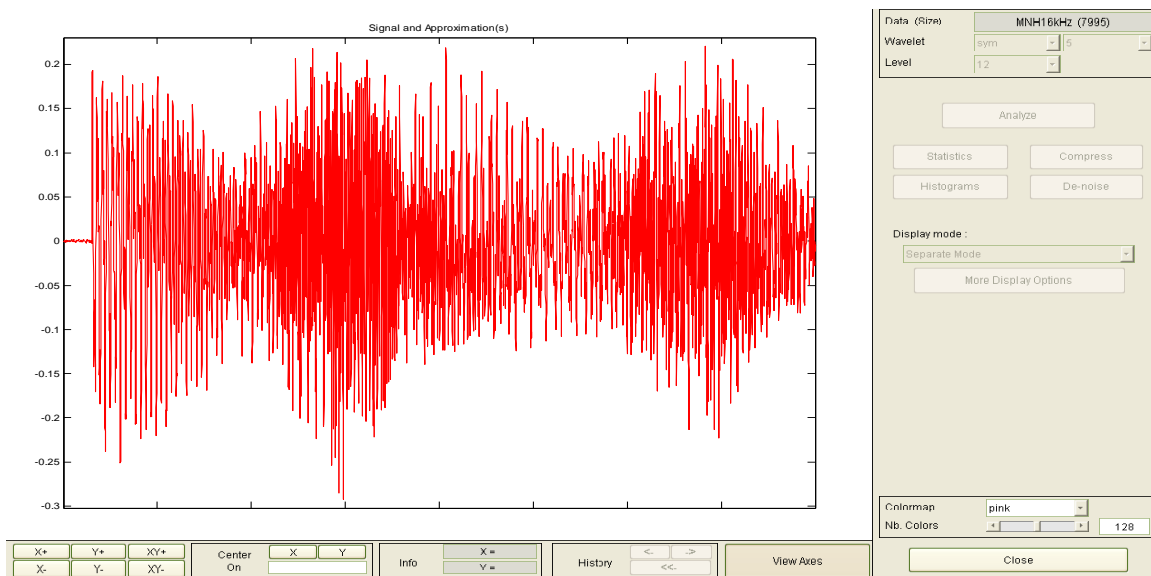
$$\begin{aligned} R_f(DWT) &= (2^M - 2^{M-2}) \div (2^M + 2^{M-1}) = (2^{10} - 2^{10-2}) \div (2^{10} + 2^{10-1}) = \\ &= 768 \div 1536 \text{ Hz} \\ R_f(DWT) &= (2^M - 2^{M-2}) \div (2^M + 2^{M-1}) = (2^8 - 2^{8-2}) \div (2^8 + 2^{8-1}) = \\ &= 192 \div 384 \text{ Hz.} \end{aligned}$$



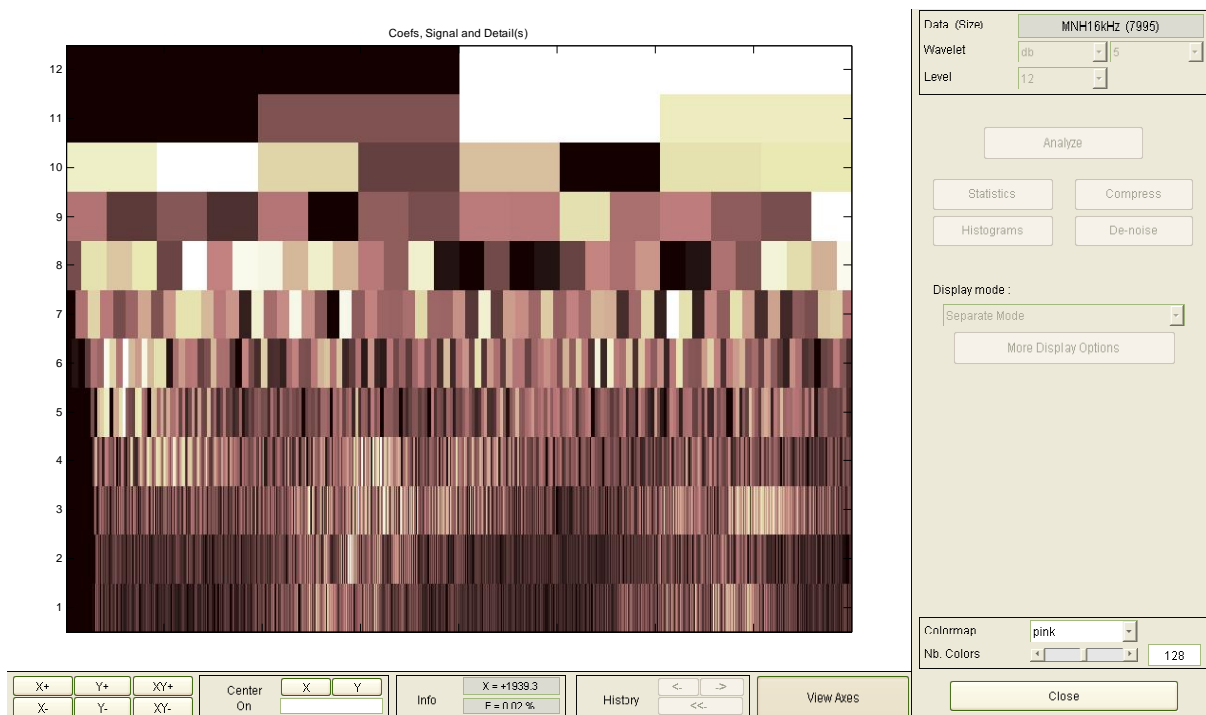
**Obr. 21:** Diadický rozklad s podvzorkováním na koeficienty  $h$  (aproximační) a  $g$  (detailové)



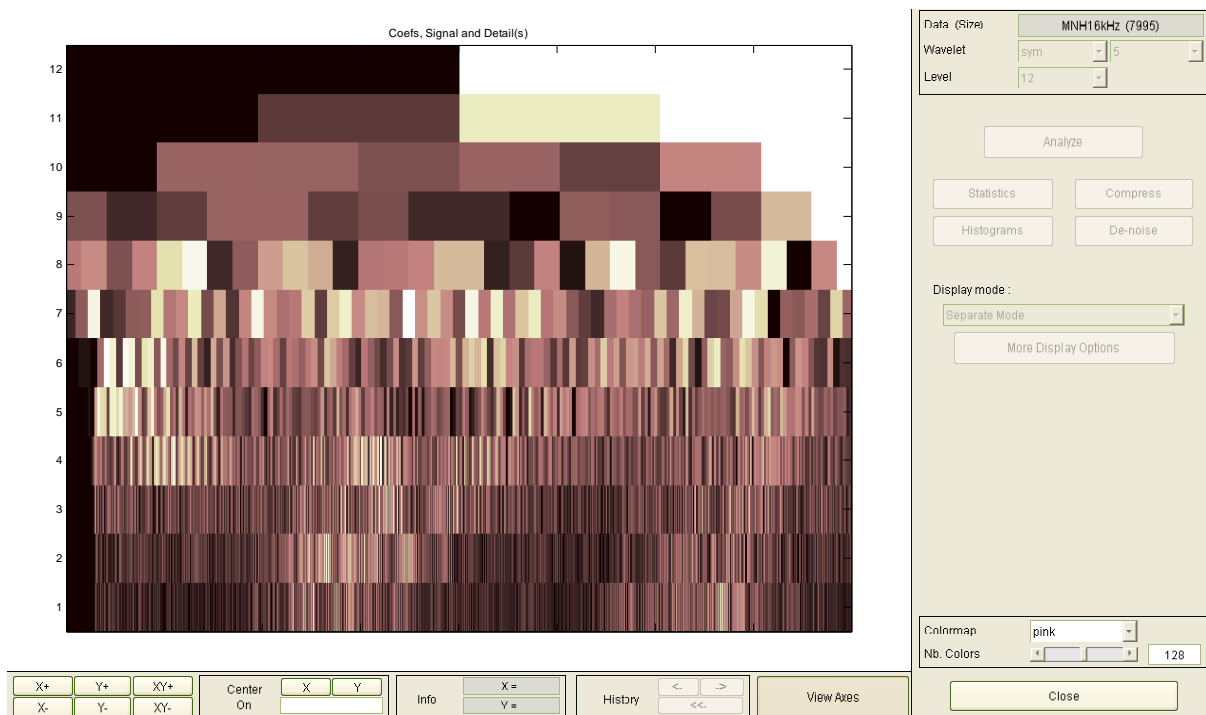
**Obr.22:** Rozkladový strom WT bez podvzorkování a) diadický, b) uniformní na koeficienty aproximační a detailové [5]



**Obr.23:** Originální signál houslí



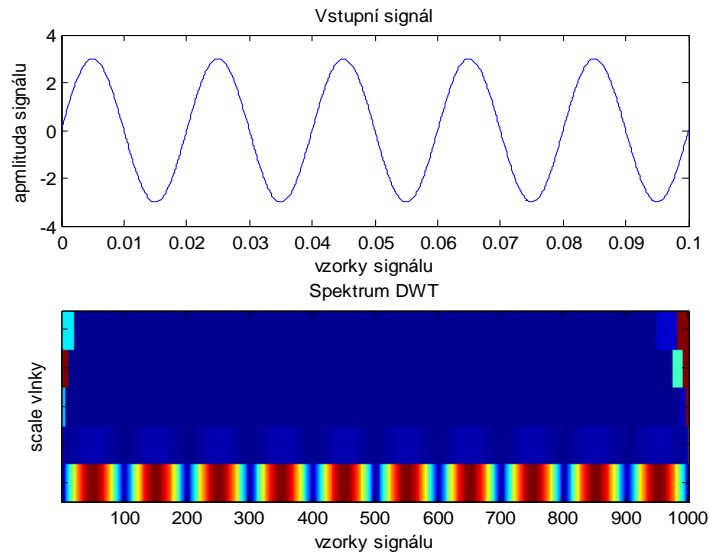
**Obr.24:** Analýza výše popsaného signálu pomocí WT, vlnka Daubechieova 5.řádu, 12 frekvenčních pásem, diadické rozložení



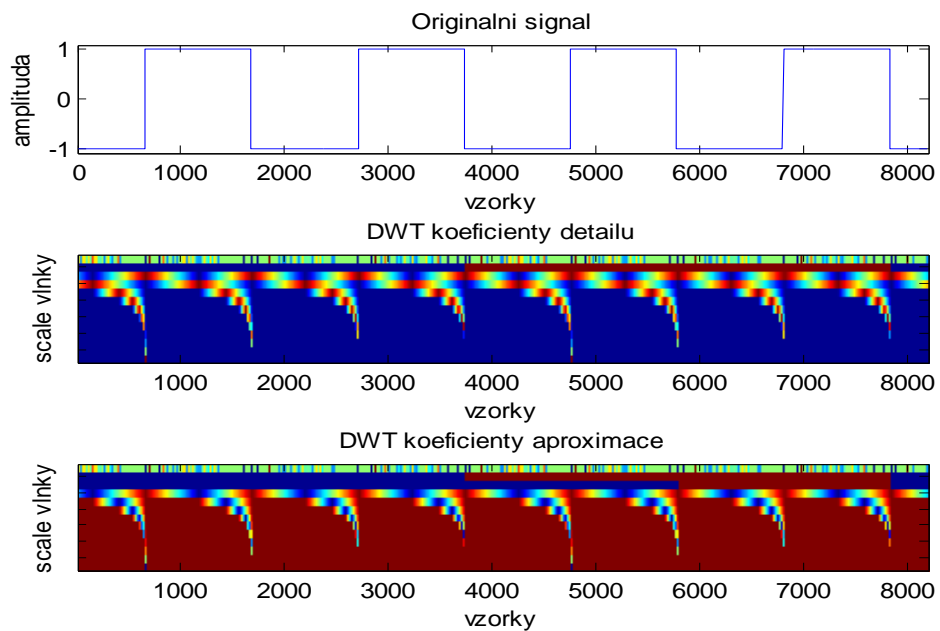
**Obr.25:** Analýza výše popsaného signálu pomocí WT, vlnka Symletova 5.řádu, 12 frekvenčních pásem, diadické rozložení

Je třeba si uvědomit, že DWT jde v analýze dál, než FT, protože nejen, že pro danou *scale* dokáže určit přítomnost signálu, ale detekuje i jeho amplitudu rozdílnou od nuly.

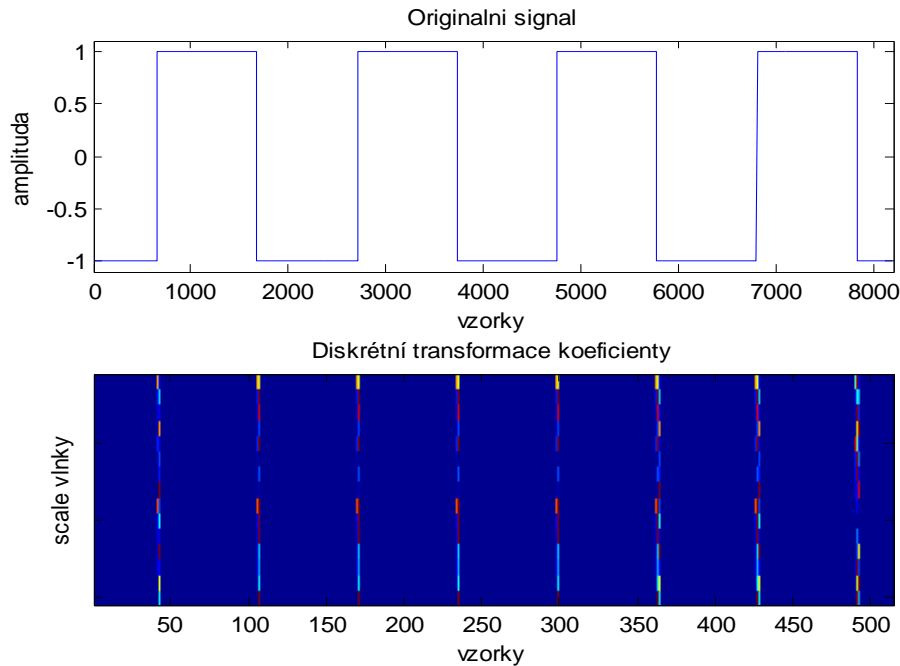
Například sinusovka se v DWT projeví jako pulzující signál o dané amplitudě. DWT reaguje nikoliv na přítomnost signálu, ale spíše na jeho změnu, tedy na jeho derivaci. Zatímco FT zobrazuje signál o dané úrovni, DWT ho zobrazuje s mnohem větším časovým rozlišením a proto se může dostat až do stádia, kdy kopíruje změnu amplitudy signálu v čase.



**Obr. 26:** Spektrum DWT



**Obr.27:** DWT bez podvzorkování



**Obr. 28:** DWT s podvzorkováním

Další výhodou DWT je dále možnost vypustit některé vektory s informací o frekvenční složce, která je ve spektru jen těžko rozeznatelná, nebo vyloženě ruší. Tento vektor pak nahradíme jednoduše nulami a po provedení zpětné transformace dostáváme signál bez této složky. Takto zhotovený signál není absencí informace nijak dále zkreslen. Ke zpětné transformaci se využívá tzv. dekompozičních filtrů. Vektory koeficientů  $h$  a  $g$  je pak nutno převrátit a brát v opačném pořadí.

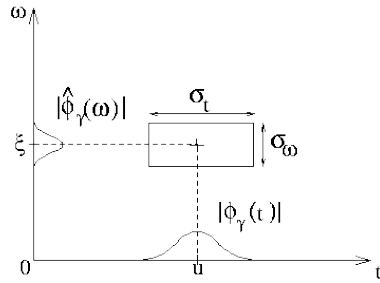
Většina těchto operací je velice dobře zpracována v programu MATLAB. Zde můžeme nalézt dokonce aplikaci s mnoha funkcemi týkajícími se vlnkové transformace, např. rozklad signálu na jednotlivé koeficienty. Tuto aplikaci vyvoláme zadáním příkazu „wavemenu“.

### 2.3. Princip nejistoty

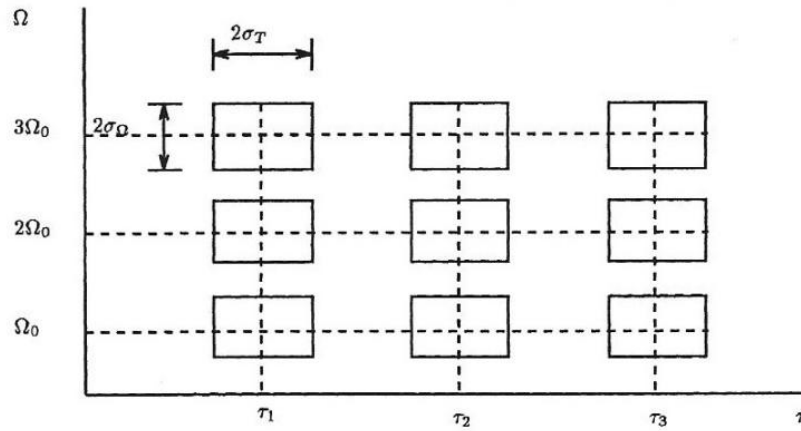
Dle principu nejistoty (viz. rovnice (19)) nelze v podstatě zvyšovat přesnosti obou os do nekonečna. Na obrázku (3) vidíme, že limit přesností odpovídá následující rovnici

$$\sigma_f \cdot \sigma_\xi > \frac{1}{2}, \quad (19)$$

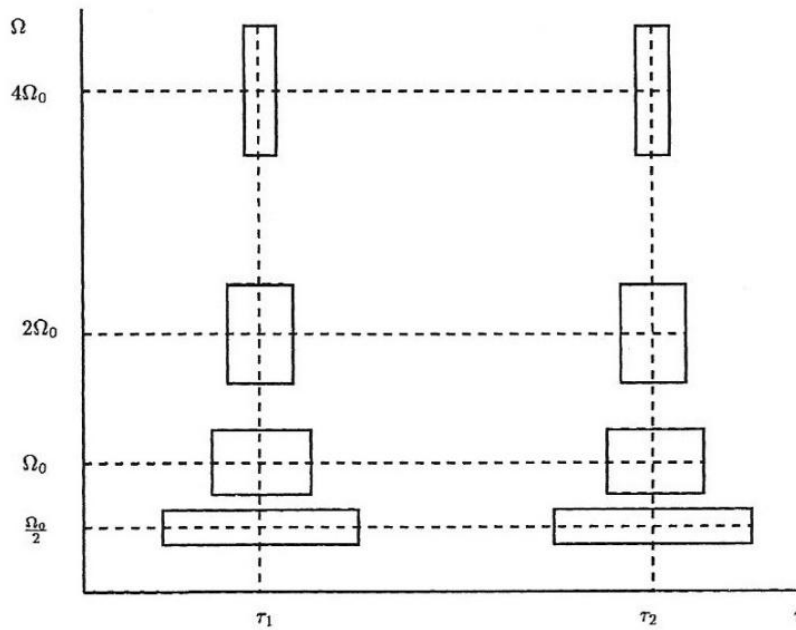
kde  $\sigma_f$  je kvadratická frekvenční odchylka a  $\sigma_\xi$  je kvadratická časová odchylka. Vzorec je odvozen z tzv. Heisenbergerova teorému nejistoty a vzorec platí pro transformaci Fourierovu i Vlnkovou. Na následujícím obrázku je uveden graf časově-frekvenčních lokalizací pro některé typy výpočtů.



**Obr.29:** Heisenbergerovo okno nejistoty [4]

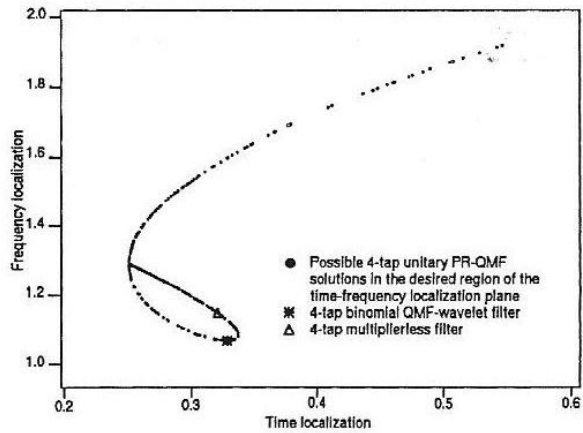


(a)

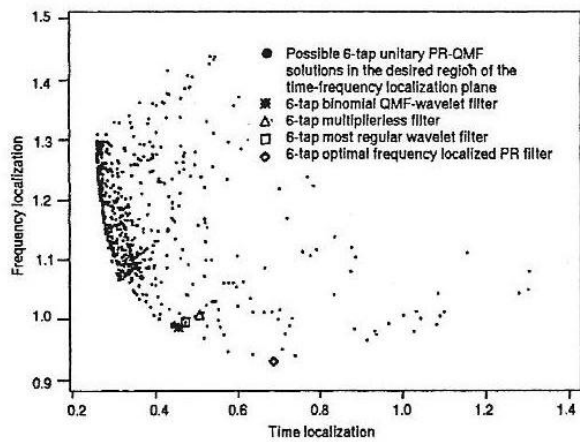


(b)

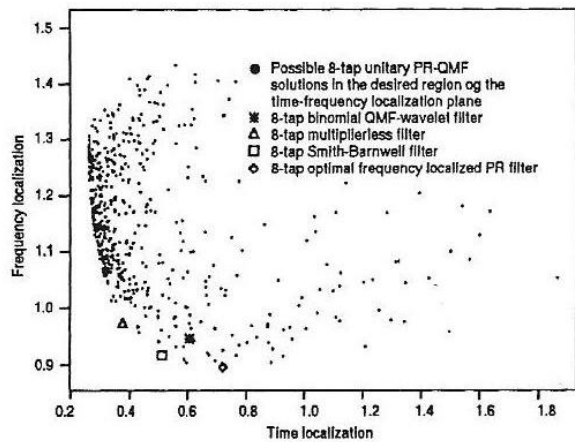
**Obr.30:** Časově frekvenční rozlišení a) FT, uniformní WT, b) diadické WT [3]



(a)



(b)



(c)

**Obr.31:** Příklady časově frekvenční lokalizace filtrů včetně Vlnkového filtru (Wavelet filtr) [3]

### 3. Závěr

Fourierova transformace se je vhodná pro analýzu signálů s širokým frekvenčním spektrem, každé frekvenci přiřazuje stejnou váhu a má pro každý signál stejné rozlišení v čase. Frekvenční rozlišení se dá vylepšit proudloužením signálu a doplněním nulami, časové rozlišení můžeme ovlivnit velkým překrytím jednotlivých spekter. Kvalitu přesnosti též ovlivní užití váhované okno, ideální je Hannovo, které má nejlepší vlastnosti, co se týče útlumu postranních laloků spektra. Dále jsme se zabývali Vlnkovou transformací, která je vhodná pro signály se spektrem, jehož frekvenční složky od sebe nejsou příliš vzdálené, pak můžeme uspořádáním filtrů dolních a horních propustí vytvořit rozložení, které nám umožní zaměřit se na úzké frekvenční pásmo. V časovém rozlišení je pak toto pásmo též značně dělené a to nám umožňuje rychlou detekci počátku vzniku frekvence i jejího konce. Navíc DWT je schopna detekovat poměrně přesně i průběh amplitud jednotlivých frekvenčních složek. Diadická vlnková transformace vzhledem k exponenciálnímu nárůstu frekvencí v jednotlivých scales je lépe použitelná pro určení nižších frekvencí ovšem s horší časovou přesností. Naopak u vyšších frekvencí víme mnohem jistěji výskyt v čase, ovšem nedostatkem je horší frekvenční rozlišení. U WT záleží velice na volbě rozkladového stromu, tvaru vlnky a jejím řádu popř. koeficientech dekompozičních filtrů. V případě velice podrobného rozkladu a užití podvzorkování můžeme vyšetřit signál až do úplného vyčerpání informace, tedy do chvíle, kdy počet vyšetřovaných vzorků vstupního signálu klesne na minimum. Fourierova transformace užívá lineárního rozlišení v čase i frekvenci a je snazší k pochopení, protože výsledné koeficienty lze přímo očíslovat jako frekvence. U WT je však potřeba scales přepočítávat složitějším způsobem na frekvenci. Obě transformace mají své využití v digitální technice a dalších technologiích jako např. audiotechnika, radioelektronika, biomedicína apod.

## 4. Literatura

- [1] ŠEBESTA, V. *Signály a soustavy* [online]. Brno: Vysoké učení technické, Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií, 2008.167s. [cit. 10.9.2008], Dostupný z WWW: <[https://www.feec.vutbr.cz/et/skripta/urel/Signaly\\_a\\_soustavy\\_S.pdf](https://www.feec.vutbr.cz/et/skripta/urel/Signaly_a_soustavy_S.pdf)>.
- [2] ŠMÍD, R. *Úvod do vlnkové transformace* [online]. Praha: ČVUT FEL katedra měření, 2001. [citováno 14.11.2008], Dostupné z WWW: <<http://measure.feld.cvut.cz/usr/staff/smid/wavelets/wavelet-intro-html.html>>.
- [3] AKANSU, MARK *Subband and Wavelet Transforms*. London: Kluwer Academic Publishers, 1996. 450s. [citováno 5.4.2009]
- [4] [citováno 5.4.2009], Dostupné z WWW: <[http://cas.ensmp.fr/~chaplais/Wavetour\\_presentation/atomes/Heisenberg\\_box.html](http://cas.ensmp.fr/~chaplais/Wavetour_presentation/atomes/Heisenberg_box.html)>
- [5] BERANOVÁ, L. *Wavelet toolbox (Semestrální práce z předmětu APR)* [online]. Praha: ČVÚT v Praze, Fakulta elektrotechnická, K315. [citováno 5.4.2009], Dostupné z WWW: <[http://k315.feld.cvut.cz/download/apr/apr\\_2001/wavelet\\_toolbox.pdf](http://k315.feld.cvut.cz/download/apr/apr_2001/wavelet_toolbox.pdf)>