# LOGIKA FYZIKY Z HLEDISKA SÉMANTICKÉ PERSPEKTIVY

IVAN CHAJDA

ABSTRAKT. Je popsán základní aparát používaný v logice kvantové mechaniky. Ukazuje se, že sémantika logiky kvantové mechaniky se odlišuje od sémantiky klasické logiky a jsou zde zmíněny nejdůležitější rozdíly. Je vzpomenut přínos G. Birkhoffa a J. von Neumanna pro vznik logiky kvantové mechaniky.

Logika fyziky se zabývá výroky o fyzikálním systému. Pro vysvětlení našeho východiska připomeneme nejprve logickou strukturu klasické fyziky. Nechť je dán fyzikální systém $\mathcal{S}$ a nechť $X$ je jeho fázový prostor. Matematicky vzato, za $X$ bereme topologický prostor s Borelovskou strukturou. Prvky z $X$ pak identifikujeme se stavy fyzikálního systému $\mathcal{S}$. Pozorovatelné veličiny (tzv. observables) jsou pak měřitelné funkce $f\colon X \to \mathbb{R}$ a elementární výroky o fyzikálním systému $\mathcal{S}$ mají tvar $f \in \Delta$, kde $\Delta$ je některá měřitelná podmnožina množiny reálných čísel $\mathbb{R}$. Složené výroky pak tvoříme z elementárních výroků pomocí logických spojek negace (označení $\neg$), disjunkce (ozn. $\vee$) a konjunkce (ozn. $\wedge$). Elementární výrok $f \in \Delta$ o systému $\mathcal{S}$ je pravdivý ve stavu $x \in X$, právě když $f(x) \in \Delta$, neboli $x \in f^{-1}(\Delta)$. Tento pojem je tedy zaveden čistě sémanticky. Následně zavádíme pojem tzv. sémantického vyplývání (ozn. $\models$) takto:

$$(f \in \Delta) \models (g \in \Gamma), \text{ pokud pravdivost } f \in \Delta \text{ implikuje pravdivost } g \in \Gamma.$$

Na množině všech výroků zavádíme ekvivalenci (ozn. $\sim$) takto:

$$(f \in \Delta) \sim (g \in \Gamma), \text{ právě když}$$
$$(f \in \Delta) \models (g \in \Gamma) \text{ v konjunkci s } (g \in \Gamma) \models (f \in \Delta).$$

Označme $[f \in \Delta]$ třídu výroků ekvivalentních s výrokem $f \in \Delta$ v ekvivalenci $\sim$. Lze tedy definovat $[f \in \Delta] = f^{-1}(\Delta)$. Toto je identifikace tzv. Lindenbaumovy–Tarského algebry, jejíž prvky jsou právě výše popsané třídy ekvivalentních výroků. Tato identifikace tedy ztotožňuje třídu výroků o systému $\mathcal{S}$ (tj. prvky Lindenbaumovy–Tarského algebry) s algebrou $\Sigma(X)$ měřitelných (Borelovských) podmnožin $X$. Pro fyzikální systém $\mathcal{S}$ klasické fyziky je $\Sigma(X)$ Booleova algebra, přičemž výše zmíněné logické spojky $\models$, $\neg$, $\vee$ a $\wedge$ odpovídají množinově-teoretickým operacím inkluze, komplementace, sjednocení a průnik. Zřejmě $\emptyset$ je nejmenším a $X$ největším prvkem této Booleovy algebry, které v naší sémantice hrají roli nepravdy (ozn. $\perp$)

2010 *MSC.* Primární 03G12, 81P10.

*Klíčová slova.* Sémantika, logika kvantové mechaniky, Hilbertův prostor, samoadjungované operátory.

Práce byla podporována projektem A-Math-Net – Síť pro transfer znalostí v aplikované matematice (CZ.1.07/2.4.00/17.0100).

a pravdy (ozn. $\top$). Všimněme si, že pro fyzikální systém $\mathcal{S}$ klasické logiky speciálně platí:

1. disjunkce a konjunkce vzájemně distributují;
2. $p \vee q$ je pravdivé, právě když $p$ je pravdivé nebo $q$ je pravdivé;
3. $p \wedge q$ je pravdivé, právě když $p$ je pravdivé a $q$ je pravdivé;
4. $\neg p$ je pravdivý výrok, právě když $p$ není pravdivý;
5. existuje tzv. materiální implikace $\Rightarrow\colon \Sigma(X) \times \Sigma(X) \to \Sigma(X)$ splňující $p \leq (q \Rightarrow r)$, právě když $p \wedge q \leq r$, a tedy $(q \Rightarrow r) = (q^c \cup r)$, kde $q^c$ označuje množinový komplement $q$.

Nyní se budeme zabývat sémantikou logiky neklasického fyzikálního systému. Logika kvantové mechaniky v našem pojetí byla zavedena Garettem Birkhoffem a John von Neumannem v r. 1936, ovšem první přístup J. von Neumanna se datuje již od r. 1932. Vychází z pojmu Hilbertova prostoru $\mathcal{H}$, jehož jednotkové vektory jsou interpretovány jako tzv. čisté stavy. Pozorovatelné veličiny (observables) se identifikují se samoadjungovanými operátory $a\colon \mathrm{Dom}(a) \to \mathcal{H}$, kde $\mathrm{Dom}(a)$ je hustá podmnožina v $\mathcal{H}$. Pro jednoduchost můžeme ještě předpokládat, že tyto operátory jsou ohraničené, tj. $\mathrm{Dom}(a) = \mathcal{H}$. Elementární výroky mají opět tvar $a \in \Delta$ jako v klasické fyzice a lze je opět spojovat pomocí logických spojek $\neg$, $\vee$ a $\wedge$. Nyní je pravdivý predikát na $a \in \Delta$ určen přiřazenou spektrální projekcí, což zapisujeme $\mathsf{E}_a(\Delta)$. Neboli zobrazení $\Delta \mapsto \mathsf{E}_a(\Delta)$ je tzv. spektrální míra definovaná pomocí $a$. Podle J. von Neumannova přístupu z r. 1932 je výrok $a \in \Delta$ pravdivý ve stavu $\psi \in \mathcal{H}$, právě když $\psi \in \mathsf{E}_a(\Delta)\mathcal{H}$, tj. třída ekvivalence určená touto podmínkou může být vyjádřena jako

$$[a \in \Delta] = \mathsf{E}_a(\Delta)\mathcal{H}.$$

Každá taková třída je tudíž uzavřeným podprostorem Hilbertova prostoru $\mathcal{H}$, přičemž uspořádání této množiny tříd je opět dáno množinovou inkluzí. Sémantické vyplývání pak odpovídá množinové inkluzi přiřazených lineárních podprostorů. Odtud plyne, že svaz $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ uzavřených lineárních podprostorů prostoru $\mathcal{H}$ je korektní kvantově-mechanickou analogií svazu $\Sigma(X)$ měřitelných podmnožin klasického fázového prostoru $X$ klasického fyzikálního systému $\mathcal{S}$.

G. Birkhoff a J. von Neumann byli vedeni tímto přístupem k tvrzení, že logika kvantové mechaniky je popsána svazem $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, který zde hraje roli Lindenbaumovy–Tarského algebry ekvivalentních tříd kvantově-mechanických výroků. Logické spojky jsou zde ovšem realizovány odlišně než v logice klasického fyzikálního systému, a to takto:

$p \vee q$ je uzavřený podprostor prostoru $\mathcal{H}$ generovaný $p \cup q$;

$p \wedge q = p \cap q$ (jako v klasickém systému).

Co se týká negace, Birkhoff a von Neumann definovali $\neg p$ jako výrok, který je pravdivý, právě když $p$ je nepravdivý. Neboli v kvantové mechanice je výrok $a \in \Delta$ nepravdivý ve stavu $\psi$, právě když $\psi \in (\mathsf{E}_a(\Delta)\mathcal{H})^{\perp}$, kde $^{\perp}$ označuje ortogonální komplement v $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Pak $\neg p = p^{\perp}$. Svaz $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ má nejmenší prvek $\{0\}$ a největší prvek $\mathcal{H}$, $\neg$ je tzv. ortokomplementace. Dohromady, $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ lze chápat jako tzv. ortomodulární svaz.

Avšak Birkhoff a von Neumann odolali pokušení o takto jednoduchý popis logiky kvantové mechaniky. Všimli si totiž podstatných rozdílů mezi výrokovou logikou klasické fyziky, což je Booleova algebra, a logikou kvantové mechaniky, které lze vyjádřit v následujících pěti bodech (srovnej s předchozími body 1–5 u logiky klasické mechaniky):

1. disjunkce a konjunkce nejsou vzájemně distributivní;
2. existují stavy, ve kterých je $p \vee q$ pravdivý výrok, přičemž ani $p$ ani $q$ není pravdivý;
3. existují výroky $p$, $q$, pro které nelze $p \wedge q$ uvažovat jako konjunkci, neboť tato konjunkce nemá fyzikální smysl (interpretaci);
4. $\neg p = \top$, právě když $p = \bot$, nikoliv když $p \neq \top$;
5. neexistuje zobrazení $\Rightarrow\colon \mathcal{L}(\mathcal{H}) \times \mathcal{L}(\mathcal{H}) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ splňující $p \leq (q \Rightarrow r)$, právě když $p \wedge q \leq r$ (neboli $q \Rightarrow r$ není rovno $q^c \cup r$, kde $q^c$ je množinový komplement $q$).

Poznamenejme, že bod 4 vlastně znamená, že v logice kvantové mechaniky neplatí „zákon vyloučeného třetího“. Dále, $p \Rightarrow q = \neg p \vee q$, právě když $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ je Booleova algebra, tj. právě když uvažovaný fyzikální systém $\mathcal{S}$ je klasický. Tedy logika kvantové mechaniky splňuje pouze slabší verzi zákona $p \leq (q \Rightarrow r)$, právě když $p \wedge q \leq r$, tj. tento zákon platí pouze pro $p$ a $q$ splňující

$$q = \left(q \wedge p^{\perp}\right) \vee (q \wedge p).$$

V tomto případě říkáme, že $p$, $q$ komutují. To pak vede k zavedení tzv. Sasakiho implikace

$$p \Rightarrow_s q = p^{\perp} \vee (p \wedge q).$$

Můžeme tedy shrnout vztahy mezi popsanými algebraickými pojmy. Pro daný Hilbertův prostor $\mathcal{H}$ je každý jeho uzavřený podprostor určen některou projekcí $p$, která definuje ohraničený lineární operátor $p\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ splňující $p^2 = p$ (tj. je idempotentní) a $p^* = p$ (je samoadjungovaný). Neboli existuje vzájemně jednoznačná korespondence mezi projekcemi na $\mathcal{H}$ a uzavřenými lineárními podprostory $\mathcal{H}$. Projekce $p$ určuje podprostor $p(\mathcal{H})$ a naopak, každý uzavřený podprostor je obrazem v právě jedné projekci. Označme $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ algebru všech ohraničených operátorů na $\mathcal{H}$. Je-li $\mathcal{P}(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ množina všech projekcí na $\mathcal{H}$, lze definovat uspořádání na $\mathcal{P}(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ takto:

$$p \leq q, \text{ právě když } p(\mathcal{H}) \subseteq q(\mathcal{H}).$$

Je ihned patrné, že $p \leq q$, právě když $pq = qp = p$. Dále, $p^{\perp} = 1 - p$ a lze definovat

$$p \wedge q = \operatorname*{s-lim}_{n\to\infty} (pq)^n, \qquad p \vee q = \left(p^{\perp} \vee q^{\perp}\right)^{\perp},$$

kde symbol s-lim označuje limitu v silné operátorové topologii (tj. $\text{s-lim}\, a_n = a$, právě když $\lim \|(a_n - a)\psi\| = 0$ pro každé $\psi \in \mathcal{H}$, přičemž $\|a\psi\| = p_{\psi}(a)$). Pokud $p$, $q$ komutují, lze tyto vztahy zapsat jednodušším způsobem takto:

$$p \wedge q = pq, \qquad p \vee q = p + q - pq.$$

Poznamenejme závěrem, že maximální množiny vzájemně komutujících prvků tvoří tzv. bloky.

## Reference

[1] G. Birkhoff, J. von Neuman: *The logic of quantum mechanics*, Ann. of Math. **37** (1936), 823–843.
[2] J. von Neuman: *Matematische Grundlagen der Quantummechanik*, Berlin, 1932.

Ivan Chajda, Katedra algebry a geometrie, Přírodovědecká fakulta, Palackého Univerzita, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc, Česká republika,
*e-mail*: ivan.chajda@upol.cz