



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
ENERGETICKÝ ÚSTAV

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
ENERGY INSTITUTE

METODA HRANIČNÍCH VÍŘIVÝCH ELEMENTŮ PRO 2D PROUDĚNÍ KAPALIN

BOUNDARY VORTICITY ELEMENT METHOD FOR 2D FLUID FLOW

DIPLOMOVÁ PRÁCE
MASTER'S THESIS

AUTOR PRÁCE
AUTHOR

Bc. MILOSLAV FIC

VEDOUCÍ PRÁCE
SUPERVISOR

doc. Ing. JAROSLAV ŠTIGLER, Ph.D.

BRNO 2013

Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství

Energetický ústav

Akademický rok: 2012/2013

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

student(ka): Bc. Miloslav Fic

který/která studuje v **magisterském navazujícím studijním programu**

obor: **Fluidní inženýrství (2301T036)**

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma diplomové práce:

Metoda hraničních vířivých elementů pro 2D proudění kapalin

v anglickém jazyce:

Boundary Vorticity Element Method for 2D Fluid Flow

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Pro řešení proudění kapalin se v současné době používají komerční programy CFD. Tyto programy jsou založeny na řešení diferenciálních rovnic popisující daný problém. Pro řešení diferenciálních rovnic je využívána metoda konečných prvků či metoda konečných objemů.

Kromě těchto komerčně zpracovaných metod však ještě existují další méně známé metody. Jednou z nich je právě Metoda hraničních vířivých elementů. Jedná se o metodu integrální. Tato metoda má, ve srovnání s komerčními programy, svá omezení, ale také výhody kvůli kterým stojí za to se jí zabývat.

Cíle diplomové práce:

Cílem této práce je vytvořit program, který by umožňoval řešení obtékání jednoduchých profilů. Na těchto příkladech je pak třeba ověřit různé okrajové podmínky.

Seznam odborné literatury:

R.I.Lewis, Vortex Element Methods for Fluid Dynamic Analysis of Engineering Systems.
Podklady poskytnuté vedoucím diplomové práce

Vedoucí diplomové práce: doc. Ing. Jaroslav Štigler, Ph.D.

Termín odevzdání diplomové práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2012/2013.

V Brně, dne 12.11.2012

L.S.

doc. Ing. Zdeněk Skála, CSc.
Ředitel ústavu

prof. RNDr. Miroslav Doupovec, CSc., dr. h. c.
Děkan fakulty

ABSTRAKT

Tato diplomová práce se věnuje metodě hraničních vířivých elementů pro 2D proudění kapalin. Cílem práce je naprogramovat tuto metodu se spojitých rozložení hustoty vířivosti a na obtékání jednoduchých profilů ověřit metodu a různé okrajové podmínky. Výsledky výpočtů jsou v práci prezentovány a jsou uvedeny klady a zápory jednotlivých variant okrajových podmínek. V práci je použita nová okrajová podmínka.

KLÍČOVÁ SLOVA

BEM, cirkulace, hustota vířivosti, metoda hraničních elementů, CFD.

ABSTRACT

This master's thesis deals with boundary vorticity element method for 2D fluid flow. The aim of this work is to program this method with continuous vorticity lay-out and to validate method with various boundary conditions. The computed results are presented in this work. Advantages and disadvantages of each one boundary condition are pointed out. New one boundary condition for boundary vorticity element method is applied in this thesis.

KEYWORDS

BEM, vorticity, boundary element method, CFD.

BIBLIOGRAFICKÁ CITACE

FIC, M. *Metoda hraničních vířivých elementů pro 2D proudění kapalin*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2013. 69 s. Vedoucí diplomové práce doc. Ing. Jaroslav Štigler, Ph.D..

PROHLÁŠENÍ

„Prohlašuji, že svou diplomovou práci na téma Metoda hraničních vířivých elementů pro 2D proudění kapalin jsem vypracoval samostatně pod vedením vedoucího diplomové práce a s použitím odborné literatury a dalších informačních zdrojů, které jsou všechny citovány v práci a uvedeny v seznamu literatury na konci práce.

Jako autor uvedené diplomové práce dále prohlašuji, že v souvislosti s vytvořením této diplomové práce jsem neporušil autorská práva třetích osob, zejména jsem nezasáhl nedovoleným způsobem do cizích autorských práv osobnostních a jsem si plně vědom následků porušení ustanovení § 11 a následujících autorského zákona č. 121/2000 Sb., včetně možných trestněprávních důsledků vyplývajících z ustanovení části druhé, hlavy VI. díl 4 Trestního zákoníku č. 40/2009 Sb.

V Brně dne: **24. května 2013**

.....
podpis autora

PODĚKOVÁNÍ

Děkuji vedoucímu diplomové práce doc. Ing. Jaroslavu Štiglerovi, Ph.D. za účinnou metodickou, pedagogickou a odbornou pomoc a další cenné rady při zpracování mé diplomové práce.

V Brně dne: **24. května 2013**

.....
podpis autora

OBSAH

1	ÚVOD	15
2	TEORETICKÝ ZÁKLAD	17
2.1	Potenciální proudění.....	17
2.2	Modely vírů.....	19
2.2.1	Potenciální vír	19
2.2.2	Lambův model víru.....	19
2.2.3	Rankinův model víru	19
2.2.4	Model s definovaným rozložením hustoty vířivosti v jádru víru.....	20
2.3	Vírové vlákno a vírová stěna.....	21
2.3.1	Odvození přímé vírové desky	22
2.3.2	Samoindukovaná rychlost.....	23
2.4	Metody pro řešení potenciálního proudění	25
2.4.1	Metoda Douglas-Neumannova	25
2.4.2	Metoda singularit pro tenké profily	25
2.4.3	Metoda Martensenova.....	25
2.4.4	Metoda hraničních vířivých elementů	26
3	ALGORITMUS APLIKOVANÉ METODY	27
3.1	Indukovaná rychlost	28
3.1.1	Bod ležící mimo přímku ($r_0 \neq 0$).....	29
3.1.2	Bod ležící mimo element ($r_0 = 0$).....	29
3.1.3	Bod ležící na elementu ($r_0 = 0$)	29
3.1.4	Bod totožný s uzlem	29
3.2	Okrajové podmínky.....	30
3.2.1	Kutta-Žukovského podmínka hladkého odtoku z profilu	30
4	PROGRAM VEMETHOD	31
4.1	Sestavení řešené matice.....	32
4.1.1	Redukce matice vyjádřením členů $A_{(m,0)}$ a $A_{(m,1)}$	32
4.1.2	Redukce matice vyjádřením členů $A_{(m,2)}$ a $A_{(m,3)}$	33
5	VÝSLEDKY APLIKOVANÉ METODY	35
5.1	Metodika hodnocení výsledků	35
5.2	Hustota vířivosti	35
5.3	Kmitání hustoty vířivosti po délce elementů	37
5.3.1	Nerovnoměrné rozložení délky elementů	40

5.4	Tečné rychlosti na mezní vrstvě	43
5.4.1	Tečná rychlost pod mezní vrstvou	44
5.4.2	Tečná rychlost nad mezní vrstvou.....	45
5.5	Normálové rychlosti pod mezní vrstvou	46
5.6	Rychlostní pole	49
6	ALTERNATIVNÍ OKRAJOVÉ PODMÍNKY	51
6.1	Okrajová podmínka nulových rychlostí	51
6.2	Okrajová podmínka se třemi referenčními body	53
7	PŘÍKLADY OBTÉKÁNÍ JEDNODUCHÝCH PROFILŮ.....	55
7.1	Čtvercový profil.....	55
7.2	Kruhový profil	56
7.3	Eliptický profil.....	57
7.4	Obdélníkový profil	58
8	ZÁVĚREČNÉ ZHODNOCENÍ	61
9	ZÁVĚR.....	63
10	PŘÍLOHY	69

1 ÚVOD

Metoda hraničních vířivých elementů pro 2D proudění kapalin má svůj základ v modelování mezní vrstvy. Mezní vrstva je modelována nekonečně tenkou vrstvou na profilu. Současná metoda je navržena pro modelování vířivého proudění ideální kapaliny, tedy nestlačitelné a neviskózní. Natékající kapalinu modeluje paralelní proud.

Počátky metody jsou datovány do raných dob výpočetní techniky. Metoda hraničních vířivých elementů vychází z klasických matematických metod. Metoda zažívala svůj boom z důvodu výpočtové nenáročnosti. To byl důvod, proč se dala počítat i na nevykonných stolních počítačích. S nárůstem výpočetního výkonu stolních počítačů byly klasické metody, jako tato metoda, vytlačeny výpočty na bázi metody konečných prvků. Metoda je nadále využívána v aerodynamice.

Pro svoji výpočetní nenáročnost se metoda hraničních vířivých elementů nabízí k využití pro optimalizaci obtékaných profilů.

V této práci je uveden teoretický základ související s principy prezentované metody. Ve třetí kapitole se nachází shrnutí algoritmu, který byl aplikován ve vytvořeném programu VEMethod. Program VEMethod je uveden kapitolou 4.

Kapitola pátá se věnuje rozboru výstupu z programu VEMethod a hodnocení hustoty vířivosti, normálových rychlostí pod mezní vrstvou a tečných rychlostí na obtékaném profilu pro okrajovou podmínku spojitě hustoty vířivosti a její první derivace.

V šesté kapitole je prezentována okrajová podmínka se dvěma referenčními body a nově navržená podmínka se třemi referenčními body. Sedmá kapitola srovnává všechny tři sady okrajových podmínek a upozorňuje na jejich klady a zápory.

Tato diplomová práce má za cíl vytvořit program s jádrem pro řešení metody hraničních vířivých elementů, ověřit jeho správnost a testovat vliv a kvalitu vybraných okrajových podmínek pro obtékání jednoduchých profilů.

2 TEORETICKÝ ZÁKLAD

Metoda hraničních vířivých elementů prezentovaná v této diplomové práci je odvozena pro proudění ideální kapaliny. Odvození základů metody hraničních vířivých elementů pro potenciální proudění ideální, tedy neviskózní a nestlačitelné kapaliny, je ve stručnosti uvedeno v této kapitole.

2.1 Potenciální proudění

Pro nestlačitelnou kapalinu platí rovnice kontinuity:

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0. \quad (1)$$

\vec{v} je vektor rychlosti proudění a ∇ je diferenciální operátor *Nabla*, $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right)$. Nyní zavedeme pojem potenciálu ϕ ve tvaru:

$$\vec{v} = \nabla \phi. \quad (2)$$

Kombinací rovnic (1) a (2) získáme Laplaceovu rovnici.

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (3)$$

Jedná se o základní rovnici řešení nevířivého proudění, jinak zvaného potenciální proudění. Laplaceova rovnice je lineární, což umožňuje superpozici jednotlivých řešení. Existuje několik důležitých elementárních řešení Laplaceovy rovnice.

Paralelní proud:

$$\phi = v_{\infty} \cdot x \quad (4)$$

v_{∞} je rychlost proudění v nekonečnu a x je poloha v paralelním proudu. Proudnice jsou rovnoběžné přímkami ve směru v_{∞} . Ekvipotenciály jsou kolmé na směr v_{∞} .

Zdroj / propad:

$$\phi = \frac{\Lambda}{2\pi} \cdot \ln r \quad (5)$$

Λ je síla zdroje, fyzikálně popsána jako objemový průtok zdroje, a r je vzdálenost od zdroje, resp. propadu. Řešení nazýváme zdrojem, má-li Λ kladnou hodnotu, naopak propadem, má-li Λ zápornou hodnotu. Proudnice vycházejí ze zdroje/propadu všemi směry a ekvipotenciály tvoří v trojrozměrném prostoru kulové plochy se zdrojem/propadem ve středu.

Potenciální vír:

$$\phi = \frac{\Gamma}{2\pi} \cdot \theta \quad (6)$$

θ je natočení kolem středu víru a Γ je síla víru, tedy cirkulace kolem vírového vlákna.

Cirkulace Γ je definována vztahem:

$$\Gamma = \oint_s v_i \cdot \tau_i, \quad (7)$$

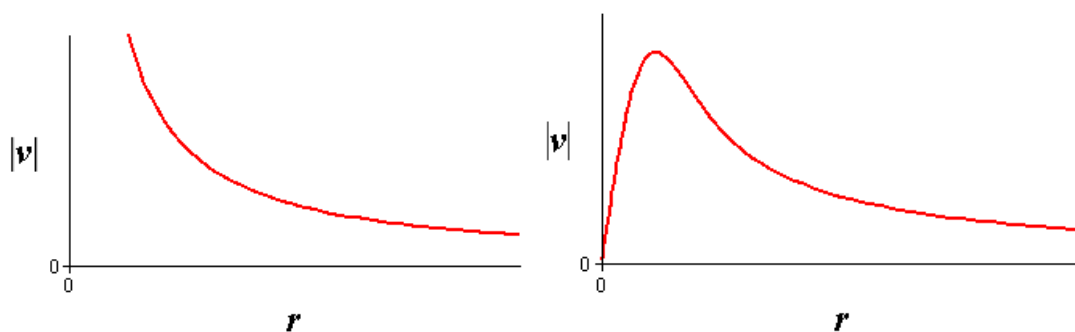
kde v_i je složka i rychlosti,
 τ_i je složka i tečného jednotkového vektoru k uzavřené křivce s , v případě vírového vlákna je vlákno touto křivkou uzavřeno.

Proudnice tvoří kružnice kolem středu víru. Ekvipotenciály potom plochy vystupující ze středu víru všemi směry. Rychlost generovaná jedním nekonečným vírovým vláknem je v Einsteinově symbolice dána vztahem:

$$v_i = \frac{\Gamma}{2\pi r^2} \cdot \varepsilon_{i3k} (x_k' - x_k), \quad (8)$$

kde r je vzdálenost od středu víru:
 $r^2 = (x_k' - x_k) \cdot (x_k' - x_k)$,
 x_k' je k souřadnice polohy bodu hledané rychlosti,
 x_k je k souřadnice polohy středu víru,
 ε_{i3k} je Levi-Civitův tenzor.

Ze vztahu (8) je vykreslen na obrázku 1 průběh velikosti rychlosti $|v|$ na vzdálenosti r od vírového vlákna pro konstantní vířivost.



Obr. 1 Graf průběhu velikosti rychlosti ve vzdálenosti r od vírového vlákna:
 vlevo potenciální vír, vpravo skutečný vír (vliv viskozity)

K problematice vírů se váží Helmholtzovy věty. Z nichž prakticky vyplývá, že vířivost nevzniká ani nezaniká uvnitř ideální kapaliny, ale děje se tak na hranici. V případě skutečných kapalin dochází vlivem viskozity a difuzivity vířivosti k odchýlení od potenciálního víru. Skutečný vír popisují modely vírů.

2.2 Modely vířů

Modely vířů se s různou přesností snaží přiblížit teoretický popis víru skutečnému proudění ve vírech. Každý z následujících přístupů byl odvozen jiným postupem, nyní budou nastíněny. Podkladem této kapitoly byly zdroje [8] a [9].

2.2.1 Potenciální vír

Potenciální vír je model vytvořený pro ideální kapalinu a jedná se o jedno z řešení Laplaceovy rovnice pro potenciál v kapalině. Laplaceova rovnice je lineární, proto je možné využít superpozice ke složení účinků více vířů. Veškerá vířivost tohoto modelu je obsažena v nekonečně malém jádře ve středu víru. Absolutní velikost rychlosti vyvolaná vírem v bodě ve vzdálenosti r od středu víru je dána vztahem:

$$v = \frac{\Gamma}{2\pi} \cdot \frac{1}{r}. \quad (9)$$

2.2.2 Lambův model víru

Lambův model víru vychází přímo z řešení Navier-Stokesovy rovnice pro osamocený rovinný vír v neohrazeném prostoru. Protože je Navier-Stokesova rovnice nelineární, superpozice více vířů není možná. Velikost rychlosti v závislosti na poloměru víru vyjadřuje rovnice:

$$v(r, t) = \frac{\Gamma_0}{2\pi r} \cdot \left(1 - e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}\right), \quad (10)$$

kde Γ_0 je celková vířivost víru v čase $t=0$,
 ν je kinematická viskozita kapaliny,
 t je parametrem času.

V Lambově modelu má jádro víru konečnou velikost. Rozložení hustoty vířivosti Lambova modelu má tvar Gaussovy křivky:

$$\omega(r, t) = \frac{\Gamma_0}{2\pi r \cdot t} \cdot e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}. \quad (11)$$

2.2.3 Rankinův model víru

Tento model vychází ze znalosti velikosti jádra s poloměrem R_c . Jádro tohoto modelu je tvořeno pomyslným rotujícím válcem, který na hranici jádra dodává vířivost o hodnotě:

$$\Gamma_0 = 2\pi R_c^2 \cdot \omega \quad (12)$$

ω je úhlová rychlost rotujícího válce. Absolutní velikost rychlosti v závislosti na poloměru víru pro $r < R_c$ lineárně narůstá:

$$v(r) = \omega \cdot r. \quad (13)$$

Pokud platí $r \geq R_c$, je průběh velikosti rychlosti totožný s případem potenciálního víru.

$$v(r) = \frac{\Gamma_0}{2\pi} \cdot \frac{1}{r} \quad (14)$$

2.2.4 Model s definovaným rozložením hustoty vířivosti v jádru víru

Model je čerpán ze zdrojů [8] a [9]. Tento model je vytvořen pro základní předpoklady:

- Vířivost pouze uvnitř jádra víru
- Známý poloměr jádra víru
- Známé rozložení hustoty vířivosti
- Rotační symetrie rozložení vířivosti

Za těchto předpokladů je zaveden průběh hustoty vířivosti ve tvaru polynomu n . stupně závislý na poloměru od středu víru:

$$\gamma(r) = \sum_{k=0}^n A_k \cdot r^k. \quad (15)$$

Vztah pro velikost rychlosti je jako v případě Rankinova modelu řízen polohou vztažného bodu. Rychlost indukovaná v bodě ve vzdálenosti ρ od středu víru v případě $\rho < R_c$ je dána vztahem:

$$v(\rho) = \frac{\Gamma_\rho}{2\pi} \cdot \frac{1}{\rho}. \quad (16)$$

Γ_ρ je vířivost uzavřená uvnitř jádra víru kružnicí o poloměru ρ . Je-li potom vztažný bod ve vzdálenosti $\rho < R_c$, platí rovnice:

$$v(\rho) = \frac{\Gamma_c}{2\pi} \cdot \frac{1}{\rho}. \quad (17)$$

Γ_c je celková vířivost v jádru víru. Poloměr jádra víru je dán smluvně jako vzdálenost od středu víru, kdy si velikosti rychlostí Lambova modelu a potenciálního víru odpovídají s procentuální odchylkou a .

$$R_c^2 = 4\nu t \cdot \ln\left(\frac{100}{a}\right) \quad (18)$$

Ve vztahu (18) je zohledněna difuzivita parametrem t času.

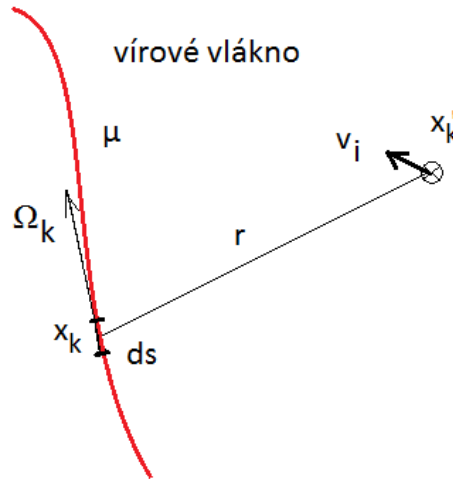
Obecně je jádro víru popsáno takto:

„Jádro víru je oblast, kde je nenulový vektor víru rychlosti. Mimo jádro považujeme vektor víru rychlosti za nulový.“ zdroj [9]

Jádro potenciálního víru má poloměr roven nule. Jádro Rankinova modelu víru má takový poloměr, při němž je velikost rychlosti maximální. Poloměr jádra Lambova modelu víru je nekonečný.

2.3 Vířivé vlákno a vířivá stěna

Kapitola vychází z odvození v publikaci [2]. Vířivé vlákno je vířivá trubice s nekonečně malým průměrem.



Obr. 2 Vířivé vlákno

Stále uvažujme ideální kapalinu. Potom pro pole rychlosti vyvolané nekonečně dlouhým uzavřeným vířivým vláknem v nekonečně rozsáhlém prostoru platí

$$v_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial A_k}{\partial x_j}, \quad (19)$$

kde A_k je k složka vektorového potenciálu daného rovnici

$$A_k = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\Omega_k'}{r} dV'. \quad (20)$$

Vektor víru rychlosti $\Omega_k' = \Omega \frac{dx_k}{ds}$, kde velikost vektoru víru Ω vyjádříme ze vztahu pro intenzitu víru $\mu = \Omega \cdot \Delta q$ po příčném průřezu Δq . Intenzitu vířivé trubice uvažujeme konstantní po délce trubice. Také pro objemový element dV' využijeme vztah s příčným průřezem a elementem délky vířivé trubice $dV' = \Delta q \cdot ds$. Dosazením do vztahu (20) a úpravou dle $r^2 = (x_k' - x_k) \cdot (x_k' - x_k)$ dostaneme vztah:

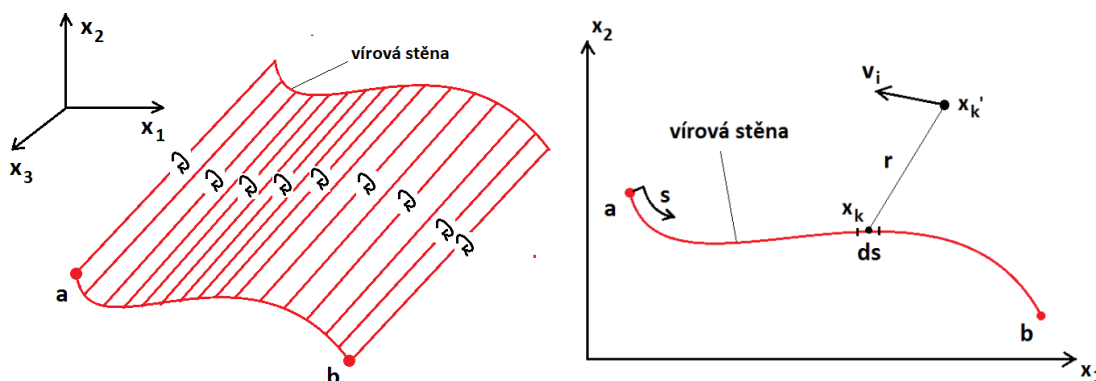
$$v_i = \frac{\mu}{4\pi} \int_{(s)} \frac{1}{r^2} \varepsilon_{ijk} \frac{dx_j'}{ds} \frac{(x_k' - x_k)}{r} ds. \quad (21)$$

Vztah pro elementární rychlost indukovanou elementem vířivého vlákna o intenzitě μ v bodě x_j' ve vzdálenosti r od části vlákna x_j o elementární délce ds je analogií Biotova-Savartova zákona ve tvaru:

$$dv_i = \frac{\mu}{4\pi} \cdot \frac{1}{r^2} \varepsilon_{ijk} \frac{dx_j'}{ds} \frac{(x_k' - x_k)}{r} ds. \quad (22)$$

V případě, že se jedná o přímé nekonečně dlouhé vírové vlákno ve směru souřadnicové osy x_3 , odpovídá rovnice indukované rychlosti (21) dříve uvedené rovnici (8), která byla odvozena pro rovinný potenciální vír. Intenzita víru μ je rovna cirkulaci Γ kolem vírového vlákna v rovině x_1x_2 .

Uvažujeme-li nekonečný počet přímých nekonečně dlouhých vírových vláken spojených paralelně do jedné pomyslné plochy s roztečí mezi vlákny limitně blízkí k nule, hovoříme o *vírové stěně*.



Obr. 3 Vírová stěna

V souvislosti s vírovou stěnou zavedeme pojem *hustota cirkulace*, která je definována jako derivace celkové cirkulace Γ kolem vírové stěny podle parametru křivky s .

$$\gamma = \frac{d\Gamma}{ds} \quad (23)$$

Předpokládejme vírovou stěnu s nekonečně dlouhými vírovými vlákny rovnoběžnými s osou x_3 , potom elementární rychlost generovaná elementem vírové stěny v bodě x_k' ležícím v rovině x_1x_2 je dána vztahem:

$$dv_i = \frac{\gamma \cdot ds}{2\pi} \cdot \frac{1}{r^2} \varepsilon_{i3k} (x_k' - x_k), \quad (24)$$

kde r je vzdálenost mezi bodem indukované rychlosti a elementem vírové stěny, s je parametr křivky a v krajních bodech průmětu desky v rovině x_1x_2 nabývá hodnot $s(a)$, $s(b)$.

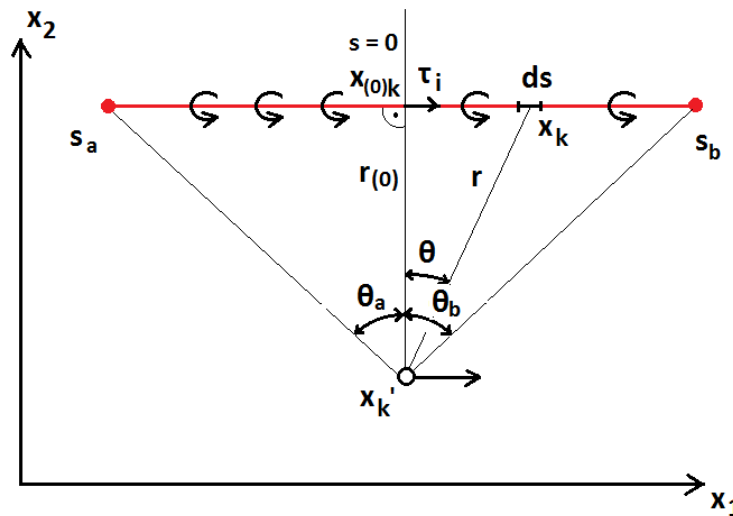
2.3.1 Odvození přímé vírové desky

Přímá vírová deska je speciální případ vírové desky, kdy průmět vírové desky do roviny kolmé na vírová vlákna tvoří úsečku, pro nekonečnou desku přímku (viz obr. 4). Odvození je provedeno pro konstantní hustotu cirkulace $\gamma = konst.$ Podkladem pro kapitoly 2.3.1 a 2.3.2 byl zdroj [6].

V tomto případě je vhodné převést integrační meze na úhlové veličiny, s čímž souvisí několik transformačních vztahů. Vzdálenost r dostane tvar $r = \frac{r_{(0)}}{\cos \theta}$. Parametr s je nahrazen vztahem $s = r_{(0)} \cdot \tan \theta$, odkud potom plyne vztah pro diferenciál $ds = \frac{r_{(0)}}{\cos^2 \theta} d\theta$. Poslední úpravou $x_k = x_{k(0)} + s \cdot \tau_k$ dostaneme vztah pro indukovanou rychlost vírovou stěnou v rovině.

$$v_i = \frac{\gamma}{2\pi} \varepsilon_{i3k} \int_{\theta_a}^{\theta_b} \frac{(x_k' - x_{(0)k} - \tau_k \cdot r_{(0)} \cdot \tan \theta)}{r_{(0)}} d\theta, \quad (25)$$

kde $r_{(0)}$ je vzdálenost bodu indukované rychlosti a jeho průmětu na vířivou stěnu
 $r_{(0)}^2 = (x_k' - x_{k(0)}) \cdot (x_k' - x_{k(0)})$,
 $x_{k(0)}$ je průmět bodu x_k' na vířivou stěnu,
 θ je úhel natočení od kolmice na vířivou stěnu $\theta \in \langle \theta_a, \theta_b \rangle$,
 τ_k je tečný vektor.



Obr. 4 Přímá vířivá stěna

Vířivá stěna indukuje rychlost sama na svých elementech. Děje se tak v případě, kdy průmět vířivé stěny není úsečkou či přímkou, ale obecnou křivkou, a také v případě $r_{(0)} = 0$, tedy element stěny působí tzv. *samoindukovanou rychlost* sám na sobě.

2.3.2 Samoindukovaná rychlost

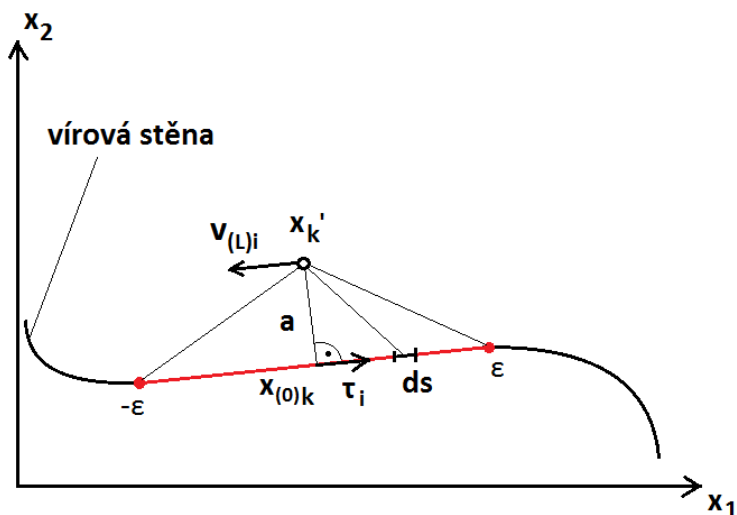
Pokud totiž $r_{(0)} = 0$, integrál z rovnice (25) nabývá nekonečné hodnoty. To se řeší ve smyslu Cauchyho hlavní hodnoty, z čehož vyplývá oddělené řešení indukce rychlosti od nekonečně malého okolí bodu $(-\varepsilon, \varepsilon)$ a od zbytku vířivé stěny. Integrální tvar rovnice (24) ve smyslu hlavní hodnoty je následující:

$$v_i = \int_{s_a}^{s_b} \frac{\gamma}{2\pi} \cdot \frac{1}{r^2} \varepsilon_{i3k} (x_k' - x_k) \cdot ds + v_{(L)i}, \quad (26)$$

kde $v_{(L)i}$ je samoindukovaná rychlost daná vztahem

$$v_{(L)i} = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{\gamma}{2\pi} \cdot \frac{1}{r^2} \varepsilon_{i3k} (x_k' - x_k) \cdot ds. \quad (27)$$

Řešení rovnice (27) vyžaduje zjednodušení, proto uvažujeme nekonečně malé okolí bodu $(-\varepsilon, \varepsilon)$ na křivce vírové stěny jako přímý úsek. Dále zavedeme fiktivní odsazení bodu x_k' od této úsečky o vzdálenost a . (viz obr. 5)



Obr. 5 Samoindukovaná rychlost

Uvažujeme hustotu cirkulace konstantní. Využijeme analogicky stejné transformace na úhlové proměnné jako v případě odvození vztahu (25) s tím rozdílem, že $r_{(0)} = a$. Definujme si úhel α , který svírá úsečka $(-\varepsilon, \varepsilon)$ s rovnoběžkou osy x_1 . $(x_k' - x_k)$ můžeme vyjádřit ve složkách $(x_1' - x_{(0)1}) = -a \cdot \sin \alpha$ a $(x_2' - x_{(0)2}) = a \cdot \cos \alpha$. Potom nabude rovnice (27) ve složkách tvar:

$$v_{(L)1} = \frac{\gamma}{2\pi} \varepsilon_{132} \int_{\theta_a}^{\theta_b} \frac{(a \cdot \cos \alpha - \tau_2 \cdot a \cdot \tan \theta)}{a} d\theta \quad (28)$$

$$v_{(L)2} = \frac{\gamma}{2\pi} \varepsilon_{123} \int_{\theta_a}^{\theta_b} \frac{(-a \cdot \sin \alpha - \tau_1 \cdot a \cdot \tan \theta)}{a} d\theta. \quad (29)$$

Zpětným zavedením $x_1' \rightarrow x_{(0)1}$ tedy $a = 0$ dostaneme hranice integrálu $\theta_a = -\pi/2$, $\theta_b = \pi/2$. Po integraci získáme vztahy

$$v_{(L)1} = -\frac{\gamma}{2} \cos \alpha \quad (30)$$

$$v_{(L)2} = -\frac{\gamma}{2} \sin \alpha. \quad (31)$$

Z geometrické souvislosti vyplývá úprava vztahů (30) a (31) do výsledného tvaru:

$$v_{(L)i} = \mp \frac{\gamma}{2} \tau_i. \quad (32)$$

V rovnici (32) je znaménko $(-)$ pro bod x_k' ležící nad vírovou stěnou a $(+)$ pro bod x_k' ležící pod vírovou stěnou.

2.4 Metody pro řešení potenciálního proudění

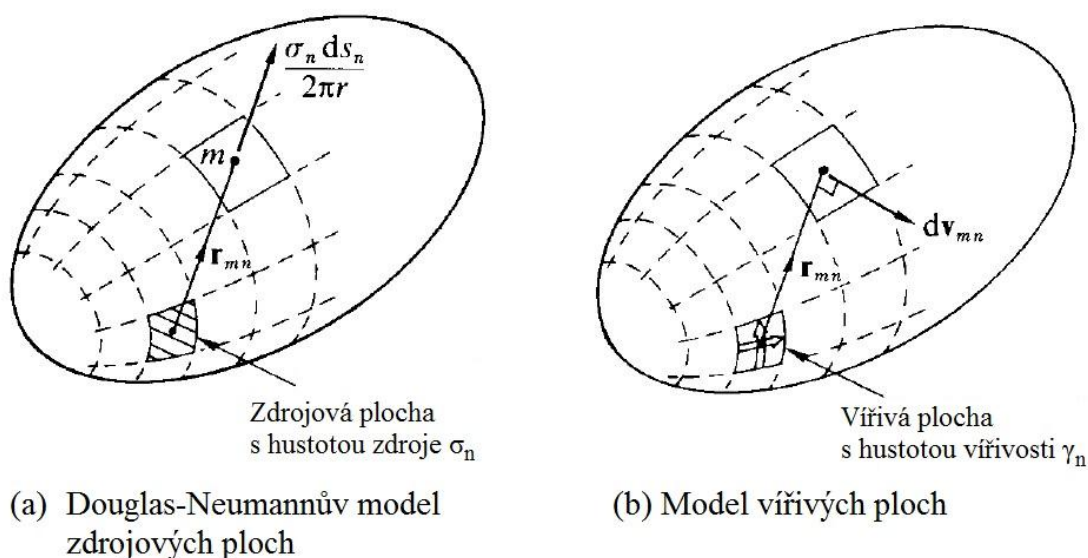
Metody pro řešení potenciálního proudění stojí na principu superpozice řešení Laplaceovy rovnice. Následující kapitoly jsou čerpány ze zdroje [4].

2.4.1 Metoda Douglas-Neumannova

Jedná se o jednu z prvních metod, která navazuje na klasickou matematiku před počítačovým věkem. Využívala se přibližně od roku 1953. Metoda spočívá v nahrazení povrchu tělesa konečným počtem ploch (viz obr. 6). Tyto plochy jsou modelovány stěnami zdrojů/propadů, podobnou stěnou jako je vírová stěna. Výpočet hustoty zdrojů/propadů je podmíněn splněním podmínky nulové normálové rychlosti na povrchu modelovaného tělesa. Metoda nemá fyzikální podklad v reálném proudění. Byla hojně využívána v letectví.

2.4.2 Metoda singularit pro tenké profily

Tato metoda podobně jako metoda Douglas-Neumannova využívá hustoty zdrojů/propadů. Hustota zdrojů/propadů je ale rozložena po střednici profilu. Při výpočtu touto metodou musí být splněny podmínky nulové normálové rychlosti na povrchu profilu a musí platit rovnice kontinuity i uvnitř profilu. Rychlost na střednici profilu je tečná ke střednici. Metoda se využívá k zobrazení rychlostního pole v lopatkových mřížích.



Obr. 6 Modely povrchových zdrojů a vířivých ploch pro třídímní potenciální proudění [4]

2.4.3 Metoda Martensenova

Tato metoda je jednou z nejstarších výpočetních technik a vychází z Martensenovy teorie hraničního integrálu. Povrch tělesa obtékaného potenciálním prouděním je rozčleněn do konečného počtu ploch. V případě řešení dvojrozměrného proudění pak konečného počtu úseků. Každá plocha (úsek) má určitou hustotu vířivosti (cirkulace) γ . Pro každou plochu (úsek) je zvolen referenční bod, nejčastěji střed, a v tomto bodě vyžadujeme splnění podmínky ulpívání na profilu.

Podmínka ulpívání na profilu plyne z fyzikální podstaty proudění, protože na obtékaném tělese se vytváří mezní vrstva. Ta je modelována nekonečně tenkou mezní vrstvou, kde je stejně jako ve skutečnosti nulová unášivá rychlost k povrchu tělesa pod mezní vrstvou. Za daných podmínek je možné dopočítat hustoty vířivosti γ jednotlivých ploch z velikosti rychlosti natékající kapaliny modelované paralelním proudem o rychlosti v_∞ . Metoda má, jak bylo zmíněno, fyzický základ ve víření v mezní vrstvě. Začala být využívána kolem roku 1959.

2.4.4 Metoda hraničních vířivých elementů

Tato metoda je hraniční integrální metodou pro řešení vířivého proudění. Metoda hraničních vířivých elementů využívá diskretizace obtékaného profilu na konečný počet ploch (úseků). Na diskretizovaném povrchu se nacházejí singulární body, pro které doposud nebylo odvozeno řešení. Jsou to body na hranicích mezi plochami. Jejím fyzickým základem je mezní vrstva na povrchu obtékaného profilu.

Martensenova metoda staví na předpokladu, že hustota vířivosti γ zůstává po délce úseku konstantní. Tím je vnášena nespojitost na hranice úseků. V různé literatuře týkající se metody hraničních vířivých elementů se můžeme dočíst i o aplikaci lineárního průběhu hustoty vířivosti po délce úseků.

Výhodou metody hraničních vířivých elementů je snadné určení vztakové síly působící na obtékaný profil, a to pouhým sečtením přídavků cirkulace od jednotlivých úseků (N).

$$\Gamma = \sum_{j=1}^N \Gamma_j , \quad (33)$$

kde Γ_j je příspěvek cirkulace jednoho elementu, závislý pouze na délce elementu a hustotě vířivosti na elementu. Z celkové cirkulace snadno určíme vztakovou sílu L' :

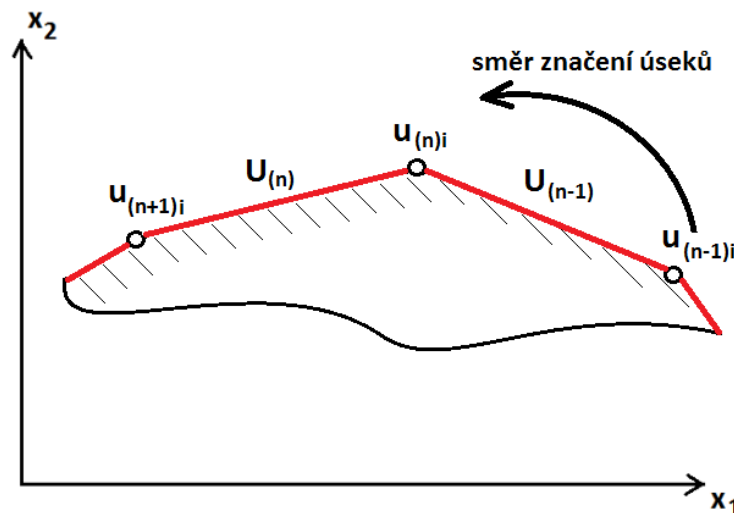
$$L' = \rho_\infty v_\infty \Gamma. \quad (34)$$

3 ALGORITMUS APLIKOVANÉ METODY

Tato kapitola se věnuje shrnutí výpočtového modelu ze zdroje [7], který je předmětem této diplomové práce a k němuž se vztahuje vytvořený program a získané výsledky. Uvedený model hraničních vířivých elementů určený pro řešení 2D potenciálního proudění kapalin je odvozen pro případ, kdy je průběh hustoty vířivosti po přímém elementu ve tvaru polynomu 3. stupně:

$$\gamma(p) = \sum_{c=0}^3 A_c \cdot p^c, \quad (35)$$

kde p je parametr po délce elementu a A_c je c . koeficient polynomu. Konečný počet přímých elementů $U_{(n)}$ zastupuje obtékaný profil. Ke styku jednotlivých elementů dochází v uzlových bodech $u_{(n)i}$ (viz obr. 7). Současná metoda předpokládá, že elementy tvoří jednoduchý uzavřený n -úhelník.



Obr. 7 Uspořádání uzlů a úseků, značení v kladném směru rotace

Parametr p nabývá mezních hodnot v uzlech ohraničujících element. Pro úsek $U_{(n)}$ jsou tyto mezní hodnoty v uzlech $u_{(n)}$ a $u_{(n+1)}$:

$$p(u_{(n)}) = 0, \quad (36)$$

$$p(u_{(n+1)}) = L_{(n)}, \quad (37)$$

kde $L_{(n)}$ je délka elementu $U_{(n)}$.

3.1 Indukovaná rychlost

Elementy obtékaného profilu představují nekonečně tenkou mezní vrstvu. Modelově jsou proto elementy nahrazeny vířivými stěnami a předpokládáme, že pro elementy platí rovnice (24), jen připomeňme tvar:

$$dv_i = \frac{\gamma(p) \cdot ds}{2\pi} \cdot \frac{1}{r^2} \varepsilon_{i3k} (x_k' - x_k),$$

kde vystupuje člen ds . Rozložení hustoty vířivosti je však vztaženo k parametru p . Závislost parametru p na parametru s je dána rovnicí:

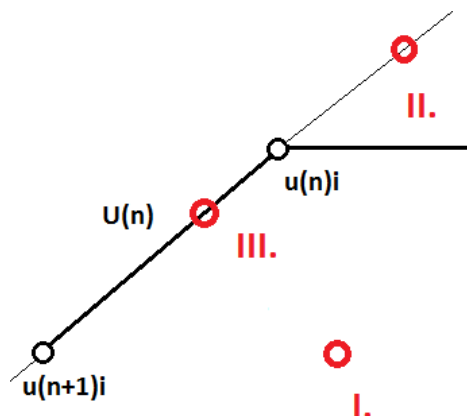
$$p = s - s_{(a)}. \quad (38)$$

Protože hodnota parametru s je vztažena k průmětu bodu x_k' , pro který hledáme indukovanou rychlost, $s_{(a)}$ je hodnota parametru v počátečním bodě elementu ($u_{(n)}$). Hodnota $s_{(b)}$ odpovídá parametru s v bodě $u_{(n+1)}$.

Odvození integrálních rovnic pro indukovanou rychlost je obsahem práce [7]. Následující rovnice představují finální vztahy pro různé případy indukované rychlosti. Jedná se o indukci rychlosti v bodech:

- I. obecný bod ležící **mimo** přímkou procházející uzly elementu ($r_{(0)} \neq 0$)
- II. bod ležící **mimo** element, ale ležící na přímce procházející uzly ($r_{(0)} = 0$)
- III. bod ležící **na** elementu ($r_{(0)} = 0$)

Jednotlivé případy jsou znázorněny na obr. 8.



Obr. 8 Varianty poloh bodů indukované rychlosti ve 2D

Obecně platí pro indukovanou rychlost jedním elementem předpis:

$$v_i = \sum_{c=0}^3 A_{(c)} \cdot g_{(c)i}, \quad (39)$$

kde $A_{(c)}$ je c . koeficient polynomu hustoty vířivosti a $g_{(c)i}$ je proměnná pro c . stupeň polynomu. Hodnota $g_{(c)i}$ je hodnota závislá pouze na geometrii.

3.1.1 Bod ležící mimo přímku ($r_{(0)} \neq 0$)

Pro tento případ má proměnná $g_{(c)i}$ tvar:

$$g_{(c)i} = \frac{\varepsilon_{i3k}}{2 \cdot \pi} [(x_k' - x_{(0)k}) \cdot I'_{(1,c)} - \tau_k \cdot I'_{(2,c)}]. \quad (40)$$

$I'_{(1,c)}$ a $I'_{(2,c)}$ jsou řešení integrálu daného elementu pro c . stupeň polynomu hustoty vířivosti. Hodnoty $I'_{(1,c)}$ a $I'_{(2,c)}$ jsou závislé pouze na geometrii.

3.1.2 Bod ležící mimo element ($r_{(0)} = 0$)

Pro proměnnou $g_{(c)i}$ platí rovnice:

$$g_{(c)i} = -\frac{\varepsilon_{i3k}}{2 \cdot \pi} \tau_k \cdot I_{(c)}^* \quad (41)$$

$I_{(c)}^*$ je řešení integrálu daného elementu pro c . stupeň polynomu hustoty vířivosti v případě $r_{(0)} = 0$, τ_k je k složka tečného vektoru elementu.

3.1.3 Bod ležící na elementu ($r_{(0)} = 0$)

V případě, kdy se bod nachází na elementu, se projeví také člen samoindukované (lokální) rychlosti a $g_{(c)i}$ pak nabývá tvar:

$$g_{(c)i} = -\frac{\varepsilon_{i3k}}{2 \cdot \pi} (\tau_k \cdot I_{(c)}^* - p_{(r)}^c \cdot n_k \cdot \pi) \quad (42)$$

$I_{(c)}^*$ je řešení integrálu daného elementu pro c . stupeň polynomu hustoty vířivosti v případě $r_{(0)} = 0$ stejně jako v případě bodu mimo element ($r_{(0)} \neq 0$). $p_{(r)}^c$ je parametr p průmětu fiktivně odsazeného bodu x_k' a n_k je k složka normálového vektoru elementu orientovaného jako vnější normála kapaliny.

3.1.4 Bod totožný s uzlem

V uzlu $u_{(n)}$ dochází k rozporu v řešení integrálu indukované rychlosti. V uzlových bodech totiž nabývá tečný vektor stejně jako parametr p různých hodnot v závislosti na volbě výchozího elementu, před ($U_{(n-1)}$) nebo za ($U_{(n)}$) uzlovým bodem. Proto nemáme jednoznačné řešení pro indukovanou rychlost. To však nebrání v sestavení řešení.

3.2 Okrajové podmínky

Po sestavení rovnic hledáme řešení pro 4 neznámé parametry na každém elementu. Abychom získali úplné řešení, je nutné stanovit pro každý element stejný počet okrajových podmínek. V základním návrhu řešení uvažujeme 4 podmínky:

- 1) Spojitý průběh hustoty vířivosti γ .

V každém uzlu proto platí rovnost hustot vířivosti stýkajících se elementů:

$$\gamma_{(n)}(u_{(n)}) = \gamma_{(n-1)}(u_{(n)}). \quad (43)$$

- 2) Hladký průběh hustoty vířivosti γ .

Musí být v každém uzlu splněna podmínka spojitosti prvních derivací hustoty vířivosti.

$$\left(\frac{\partial \gamma_{(n)}}{\partial p}\right)_{(u_{(n)})} = \left(\frac{\partial \gamma_{(n-1)}}{\partial p}\right)_{(u_{(n)})} \quad (44)$$

- 3) V referenčním bodě elementu musí být rychlost v_i rovna unášivé rychlosti povrchu obtékaného profilu pod vírovou vrstvou $U_{(n)i}$. Vyjádřeno:

$$v_i(x_{(n)i}) = U_{(n)i}. \quad (45)$$

Ve skutečnosti podmínka 3) vyjadřuje 2 okrajové podmínky, protože se jedná o rovnost ve složkách. Tedy vztaženo na povrch profilu, jde o vyjádření podmínky ulpívání na povrchu ($v_i \cdot n_i = U_{(n)i} \cdot n_i$) a rovnosti tečných složek rychlosti ($v_i \cdot \tau_i = U_{(n)i} \cdot \tau_i$).

3.2.1 Kutta-Žukovského podmínka hladkého odtoku z profilu

V případě, že se jedná o obtékání tenkého profilu nebo tvarovaného profilu lopatky, je nutné uvažovat Kutta-Žukovského podmínku, která říká, že rychlost na odtokové hraně ze spodní a z horní strany profilu je stejná.

Pro metodu hraničních vířivých elementů se Kutta-Žukovského podmínka realizuje vztahem:

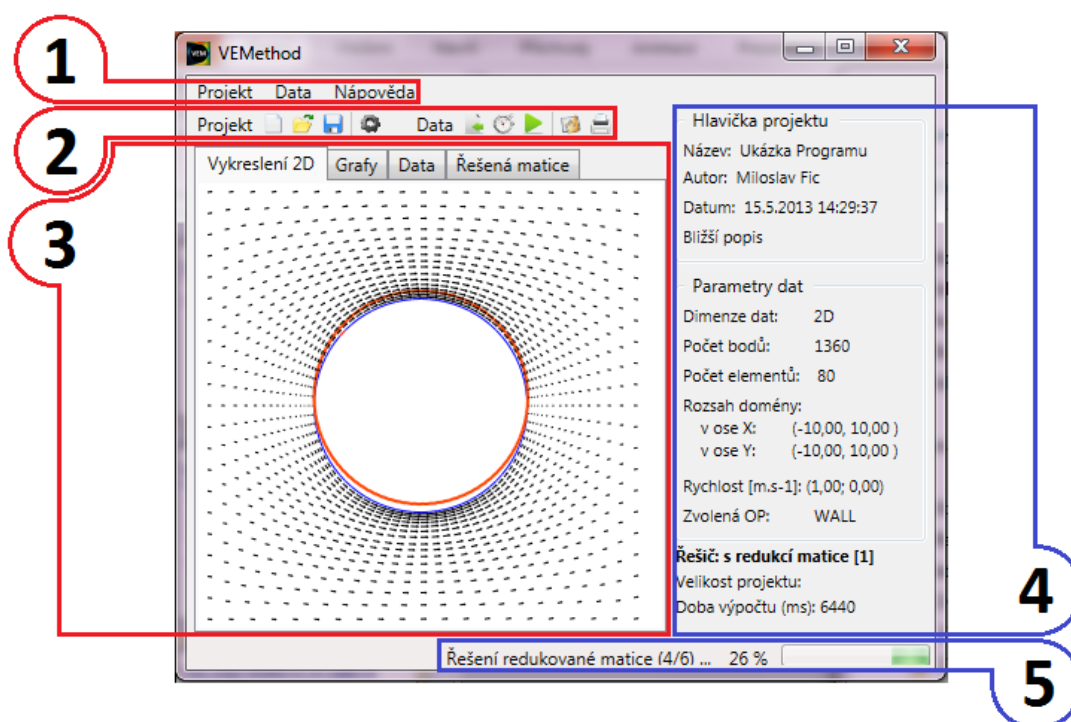
$$\gamma_{(n)}(u_{(n)}) = -\gamma_{(n-1)}(u_{(n)}). \quad (46)$$

Tedy v bodě odtokové hrany mají hustoty vířivosti stejnou velikost, ale opačné znaménko. Protože zavedením této podmínky dojde k přeúčnění řešené soustavy rovnic, jedna z okrajových podmínek na odtokové hraně musí být vynechána.

4 PROGRAM VEMETHOD

Program byl vytvořen v jazyce C# formou WPF aplikace, která běží na platformě Microsoft .NET Framework 4. Tuto formu programu jsem zvolil z důvodu snadnější udržovatelnosti kódu, protože C# je plně objektový programovací jazyk. Dále platforma poskytuje komfortní přístup k prvkům grafického rozhraní a prostředkům paralelního programování. Je kladen velký důraz na bezpečnost kódu. V neposlední řadě k volbě tohoto jazyka vedl fakt, že platforma Microsoft .NET Framework 4 je dostupná v každém stolním počítači s operačním systémem Microsoft Windows novějším než Windows 2000, tedy Windows XP včetně.

Program tvoří jedno hlavní okno (viz obr. 9).



Obr. 9 Uživatelské rozhraní programu

Hlavní okno se skládá z 5 oblastí:

- 1 Menu programu
- 2 Panel nástrojů
- 3 Panel záložek
- 4 Informační panel
- 5 Stavový panel

Panel nástrojů nabízí ikony pro rychlý přístup k operacím, které je v daný okamžik možné provést. Po spuštění programu jsou umožněny prostředky k založení nového projektu a otevření některého z dříve uložených projektů. Po vytvoření, příp. načtení projektu následuje import geometrie. Program VEMethod nemá modul pro vkládání vlastní geometrie. V akademické praxi je pro přenos výpočetní sítě využíván formát

MSH (Mesh) pro Fluent 5/6, proto je program VEMethod schopen importovat soubory MSH obsahující 2D síť s omezením na jednu uzavřenou okrajovou podmínku WALL. V případě nevhodného souboru, program řádně informuje o nedostatku souboru. Po úspěšném načtení výpočetní sítě vyžaduje aplikace zadání ustálené rychlosti obtékajícího proudu. Pokud není prostřednictvím nastavení učiněno jinak, výchozí řešitel vychází ze sestavení problému s okrajovými podmínkami 1) až 3) dle kapitoly 3.2 a využití redukce řešené matice.

Vyřešený projekt je připraven pro vykreslení. V panelu záložek je možnost vykreslit řešené matice formou barevné mapy, vypsát vypočtená data, vykreslit obtékaný profil a rychlostní pole a zobrazit grafy průběhů hustoty vířivosti a normálové rychlosti k profilu.

Průběh jednotlivých úkonů je monitorován stavovým panelem, kde je procentuální zápis kompletnosti procesu a bližší informace k probíhající operaci.

4.1 Sestavení řešené matice

V kapitole 3 byly popsány rovnice metody, tyto rovnice je třeba sestavit a vyjádřit neznámé. Po sestavení dostaneme celkovou matici, která nabývá rozměru $4N \times 4N$, kde N je celkový počet elementů, plus vektor pravých stran. Zapsáno maticově:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}. \quad (47)$$

Vektor proměnných \mathbf{x} je tvořen koeficienty $A_{(0)}$ až $A_{(3)}$ pro každý element. Vektor pravých stran \mathbf{b} podle volby okrajových podmínek obsahuje 0 pro podmínky spojitosti a $c_{(m)i} = U_{(m)i} - c_{(\infty)i}$ pro rovnost unášivé $U_{(m)i}$ a rychlosti proudění v referenčním bodě m . elementu. $c_{(\infty)i}$ je rychlost ustáleného proudu natékajícího na profil. Matice \mathbf{A} po sestavení je z poloviny řídká, protože podmínky spojitosti se týkají vždy jen dvou sousedních elementů. Proto byly odvozeny dva postupy k její redukci. Oba vycházejí z rovnic (43) a (44).

4.1.1 Redukce matice vyjádřením členů $A_{(m,0)}$ a $A_{(m,1)}$

Od posledního elementu (U_{N-1}) dosazujeme postupně za $A_{(m+1,0)}$ v celé soustavě rovnic až po první element dle vztahu (48). Následně stejným postupem dosazujeme za $A_{(m+1,1)}$ ze vztahu (49).

$$A_{(m+1,0)} = A_{(m,0)} + L_{(m)} \cdot A_{(m,1)} + L_{(m)}^2 \cdot A_{(m,2)} + L_{(m)}^3 \cdot A_{(m,3)} \quad (48)$$

$$A_{(m+1,1)} = A_{(m,1)} + 2L_{(m)} \cdot A_{(m,2)} + 3L_{(m)}^2 \cdot A_{(m,3)} \quad (49)$$

Protože řádky matice popisují podmínky spojitosti (43) a (44), jsou po úpravách lineárně závislé. Výsledná redukovaná matice má rozměr $(2N + 2) \times (2N + 2)$. V programu je tato varianta přístupná v nastavení zaškrtnutím možnosti „Řešič s redukcí matice“.

4.1.2 Redukce matice vyjádřením členů $A_{(m,2)}$ a $A_{(m,3)}$

Z rovnic (48) a (49) vyjádříme vztahy pro $A_{(m,2)}$ a $A_{(m,3)}$ ve tvaru:

$$A_{(m,2)} = -\frac{3}{L_{(m)}^2} A_{(m,0)} - \frac{2}{L_{(m)}} A_{(m,1)} + \frac{3}{L_{(m)}^2} A_{(m+1,0)} - \frac{1}{L_{(m)}} A_{(m+1,1)} \quad (50)$$

$$A_{(m,3)} = \frac{2}{L_{(m)}^3} A_{(m,0)} + \frac{1}{L_{(m)}^2} A_{(m,1)} - \frac{2}{L_{(m)}^3} A_{(m+1,0)} + \frac{1}{L_{(m)}^2} A_{(m+1,1)}. \quad (51)$$

Ty se následně dosadí do rovnic pro rychlosti v referenčních bodech, čímž zohledníme podmínku spojitosti hustoty vířivosti a její první derivace. Výsledná redukovaná matice má rozměr $(2N) \times (2N)$. Tato varianta je dostupná v nastavení programu po zaškrtnutí pole „Řešič s aplikací OP“.

Redukce prostřednictvím rovnic (50) a (51) je sice účinnější, ale operační nároky předčí variantu rovnic (48) a (49). Proto se do 200 elementů po profilu hodí více redukce členy $A_{(m,0)}$ a $A_{(m,1)}$. Důvodem, proč vůbec nad redukcí řešené matice uvažujeme, je fakt, že matici řešíme Gaussovou eliminační metodou, které přísluší $O(n^3)$ aritmetických operací při řešení matice, kde n je počet řádků čtvercové matice.

Program poskytuje také klasickou variantu Gaussovy eliminační metody s výběrem hlavního prvku volbou nastavení „Řešič bez redukce“. Tento řešič však není nastaven jako výchozí, protože poskytuje stejné výsledky jako obě varianty redukce matice, pouze je výpočetně náročnější.

5 VÝSLEDKY APLIKOVANÉ METODY

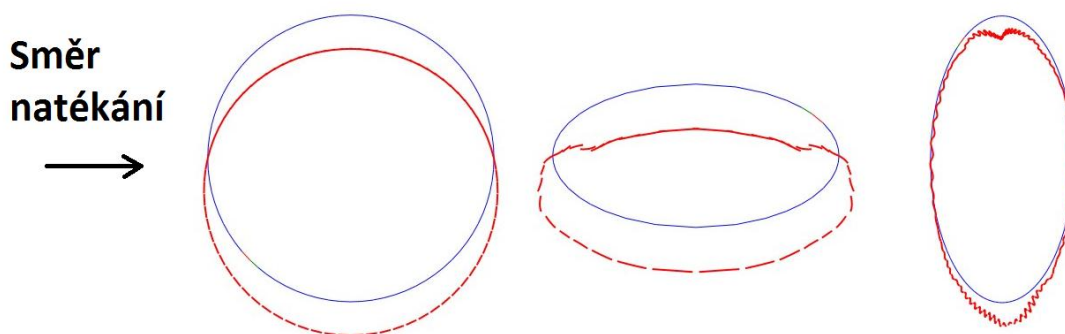
Po vytvoření programu je nutné ověřit správnost metody a odhalit úskalí výsledků, kterých jsme schopni dosáhnout. Protože metoda je určena především pro proudění ideální kapaliny kolem jednoduchých profilů, navrhl jsem několik profilů, na nichž probíhalo ověřování kvality výsledků a srovnání s výsledky komerčního CFD (ANSYS Fluent), kde je správnost výsledků proudění kolem jednoduchých profilů ověřena s praktickými výsledky v laboratoři.

5.1 Metodika hodnocení výsledků

Hodnocení kvality proudění vyplývá ze srovnání s realitou. Možnostmi, jak porovnat proudění, jsou vykreslení průběhu hustoty vířivosti po profilu, vykreslení normálových a tečných rychlostí, dále podle rychlostního pole lze zhodnotit, zda průběh proudění odpovídá představě o proudění kolem daného profilu.

5.2 Hustota vířivosti

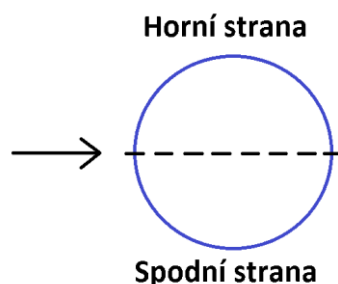
Hustota vířivosti γ je spojitá veličina, proto ji na rozdíl od rychlosti lze vyjádřit po celém povrchu profilu včetně uzlových bodů, kde je spojitost vnucena okrajovými podmínkami. V programu jsou dvě možnosti jak zobrazit hustotu vířivosti. Jedním ze způsobů je klasický graf, který vyjádří průběh hustoty vířivosti od prvního po poslední element, tedy po délce celého profilu. Druhou variantou je možná nezvyklé vykreslení přímo do plochy, kde je zobrazen obtékaný profil. Druhá varianta dává dobře srozumitelné výsledky pro elipsovité profily. Podstatou je vykreslení záporných hodnot hustoty směrem od profilu k jeho středu a naopak kladných hodnot směrem od středu. Míra odsazení je řízena v nastavení a hodnotu vířivosti zjistíme najetím myši na daný úsek vířivosti. Příklady na obr. 10 ukazují obtékaný kruhový a elipsový profil.



Obr. 10 Zobrazení hustoty vířivosti v rovině proudění (červeně hustota vířivosti, modře obtékaný profil)

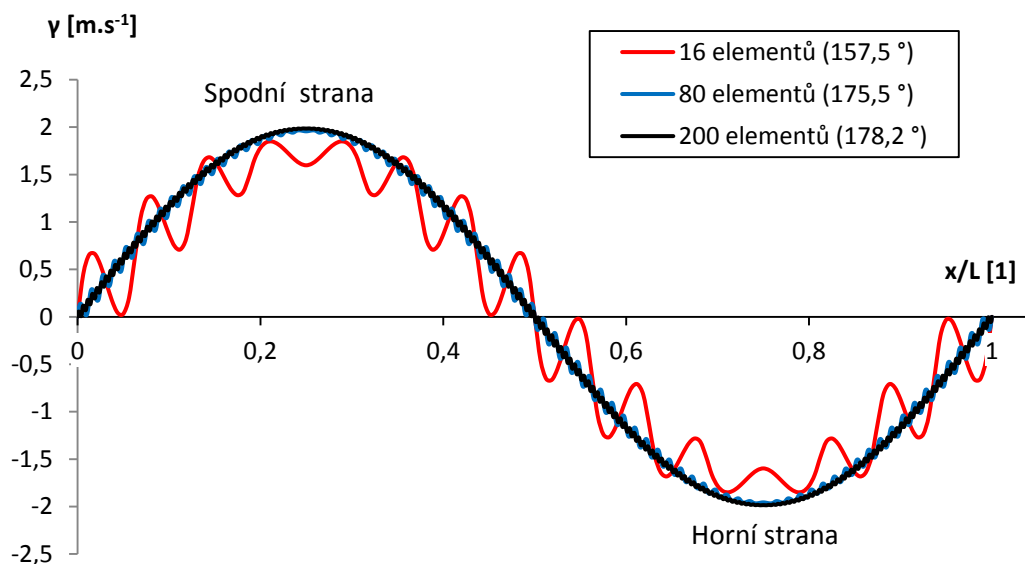
Tento způsob zobrazení vnáší lepší představu o poloze stagnačních bodů (křížení křivky hustoty vířivosti a profilu).

Další možností, jak program poskytuje hodnoty hustoty vířivosti po profilu, je prostřednictvím tabulky v záložce Data. Hodnoty z tabulky jsou kopírovatelné. Proto je snadné hodnoty dále zpracovávat. Data jsou řazena od stagnačního bodu přes spodní stranu profilu, dále horní stranu a opět do stagnačního bodu náběžné strany.



Obr. 11 Zobrazení stran obtékaného profilu

Pro různé obtékané profily byl získán široký soubor hodnot dat. Nejlépe představitelný je válcový profil. Na grafu 1 je vykresleno rozložení hustoty vířivosti po kruhovém profilu pro 3 varianty počtu elementů. V legendě je dále uveden úhel svíraný elementy na profilu.



Graf 1 Hustota vířivosti po délce profilu (0 až 1 – obvod profilu)

Podle obrázku je patrné, že nejlepší kvality dosahuje průběh s největším počtem elementů po profilu. S klesajícím počtem elementů se zhoršuje kvalita rozložení hustoty vířivosti. Na průběhu hustoty vířivosti se objevují kmity. Délka jedné vlny odpovídá délce příslušného elementu.

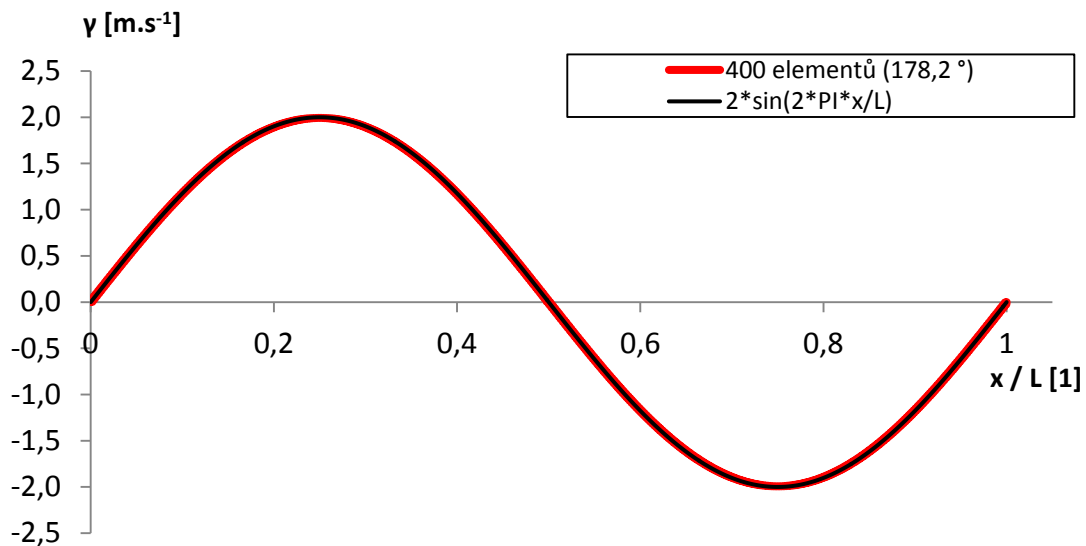
Amplituda kmitů je po profilu proměnná a nejvyšší hodnoty dosahuje na elementech přilehlých k bodům průniku osy symetrie profilu a profilu, tedy stagnačním bodům na profilu. Ideální průběh hustoty vířivosti po profilu dosahuje extrémů v polovině horní a spodní strany profilu. Pro rychlost paralelního proudu 1 m.s^{-1} je absolutní hodnota těchto extrémů 2 m.s^{-1} . Této hodnotě se extrémy průběhů vířivosti na diskretizovaném profilu s rostoucím počtem elementů přibližují. Na horní straně profilu jsou hodnoty hustoty vířivosti záporné. To je z důvodu kladné orientace řazení elementů (proti směru hodinových ručiček). Tečné vektory elementů na horní straně profilu mají pro kladnou orientaci řazení elementů opačný směr, než je směr paralelního proudu.

Pokud válec nerotuje, je průběh hustoty vířivosti po profilu symetrický a regresní křivka pro počet elementů jdoucí do nekonečna odpovídá tvaru funkce sinus (viz graf 2), dáno vztahem:

$$\gamma\left(\frac{x}{L}, v_{\infty}\right) = 2 \cdot v_{\infty} \cdot \sin\left(2\pi \cdot \frac{x}{L}\right), \quad (52)$$

kde v_{∞} je velikost rychlosti paralelního proudu,
 x je poloha bodu, dána vzdáleností od stagnačního bodu náběžné strany válcového profilu ve směru kladné křivky profilu, kde hledáme hustotu vířivosti $\gamma\left(\frac{x}{L}, v_{\infty}\right)$.
 L je celkový obvod profilu

Pro 400 elementů na profilu a rychlost paralelního proudu $1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ je vykreslena regrese funkcí sinus dle vztahu (52) v grafu 2. Průběhy si odpovídají

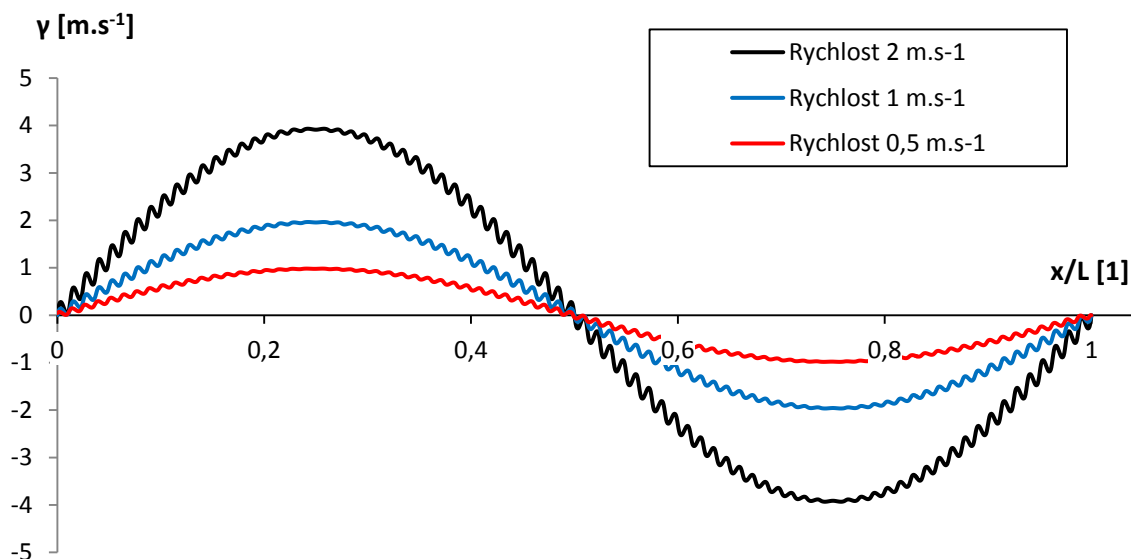


Graf 2 Regrese hustoty vířivosti po délce profilu funkcí sinus

Ke stejným výsledkům je možno dojít pro další rychlosti. Rychlost paralelního proudu ovlivňuje pouze amplitudu hustoty vířivosti, což ostatně dokazuje graf 3, kde je vykreslen případ s 80 elementy profilu pro rychlosti 0,5, 1, a $2 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

5.3 Kmitání hustoty vířivosti po délce elementů

V grafu 3 je dále zaznamenán vliv rychlosti proudění na amplitudu kmitu hustoty vířivosti na elementech. Tato amplituda závisí na rychlosti proudění stejně jako v případě průběhu hustoty vířivosti po profilu lineárně.

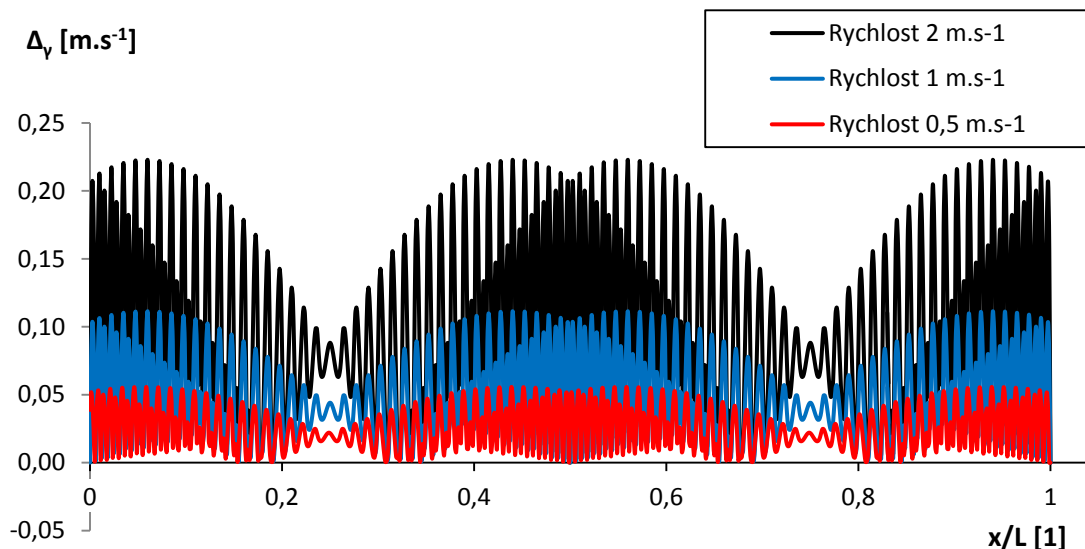


Graf 3 Průběh hustoty vířivosti po profilu pro 80 elementů a různé velikosti rychlosti paralelního proudu

Odchylku kmitavé hustoty vířivosti Δ_γ od hladkého průběhu můžeme díky znalosti přesné aproximace vyjádřit pomocí rovnice:

$$\Delta_\gamma \left(\frac{x}{L} \right) = \left| \gamma_n \left(\frac{x}{L} \right) - \gamma_{\sin} \left(\frac{x}{L} \right) \right|, \quad (53)$$

kde γ_n je hustota vířivosti v místě profilu x/L pro n elementů a γ_{\sin} je hustota pro tentýž bod vypočtená z aproximační rovnice (52). Průběh odchylek od přesného řešení pro stejné případy jako v grafu 3, tedy 80 elementů profilu a rychlosti 0,5, 1 a 2 m.s⁻¹.



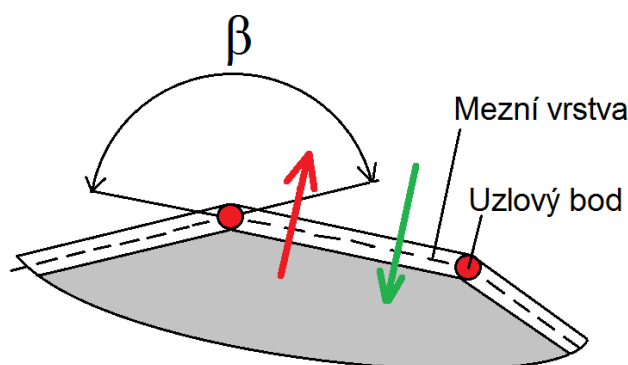
Graf 4 Průběhy odchylek hustoty vířivosti od přesného řešení

Z hodnoty $\Delta_\gamma \left(\frac{x}{L}\right)$ vychází tabulka 1, kde je uvedena vždy maximální odchylka na profilu pro danou hodnotu rychlosti proudění a pro daný počet elementů na kruhovém profilu.

Tabulka 1 Maximální odchylky průběhu hustoty vířivosti

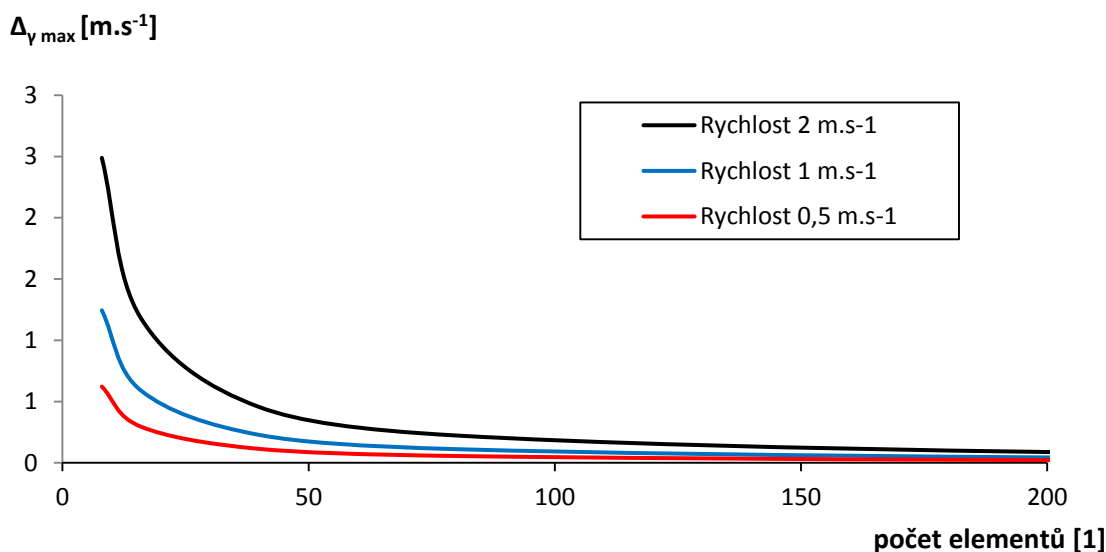
Rychlost proudění			0,5 m.s-1	1 m.s-1	2 m.s-1
elementů	obvod	úhel mezi elementy	Maximální odchylka hustoty vířivosti $\Delta_\gamma \max$		
[1]	[m]	[°]	[m.s-1]		
∞	31,4159	180	0	0	0
400	31,4156	179,1	0,010957	0,021913	0,043826
200	31,4146	178,2	0,022009	0,044018	0,088036
80	31,4079	175,5	0,055731	0,111463	0,222926
40	31,3836	171	0,113716	0,227432	0,454864
16	31,2145	157,5	0,294039	0,588078	1,176156
8	30,6147	135	0,622251	1,244503	2,489005

V tabulce jsou dále uvedeny hodnoty celkového obvodu, který je dán součtem délek všech elementů a dále úhel mezi sousedními elementy (platí pro případ, kdy jsou všechny elementy stejné), který je sevřen sousedními elementy (viz obr. 12).

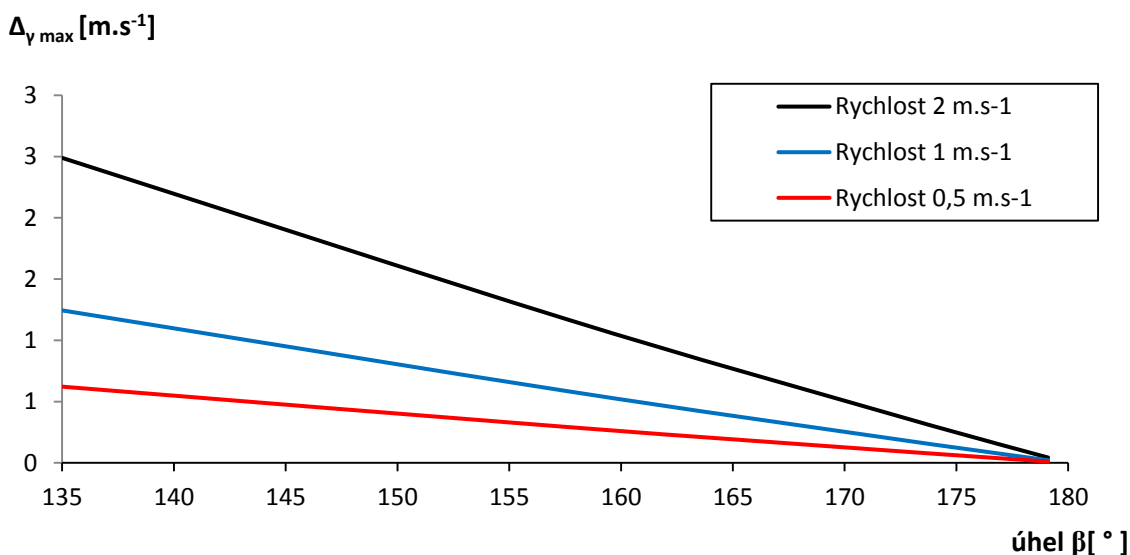


Obr. 12 Element na povrchu profilu (β – úhel mezi sousedními elementy, normála elementu v kladném směru pod mezní vrstvou – zelená, normála v kladném směru nad mezní vrstvou – červená) inspirováno z zdroje [5]

Z tabulky 1 je vynesena závislost maximální odchylky hustoty vířivosti na počtu elementů profilu do grafu 5. Průběhy potvrzují, že zvýšením počtu elementů se sníží amplitudy kmitání a přiblíží se ideálnímu průběhu hustoty vířivosti. Také pro vyšší počet elementů profilu klesá vliv rychlosti paralelního proudu na amplitudu kmitání. Velikost úhlu sevřeného elementy je řízena počtem elementů na profilu. Závislost maximální odchylky hustoty vířivosti na úhlu mezi elementy zaznamenává graf 6. Tato závislost je lineární.



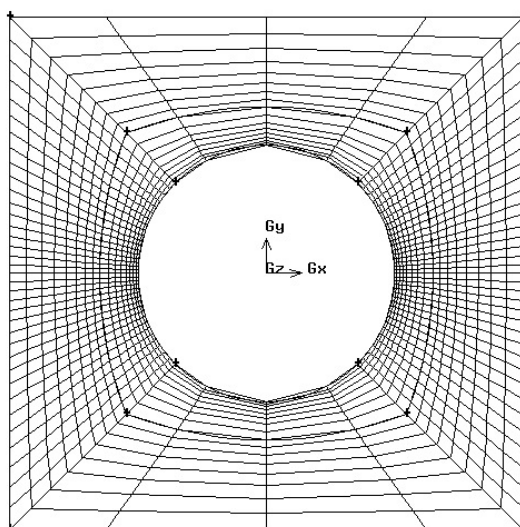
Graf 5 Závislost maximální odchytky hustoty vířivosti na počtu elementů



Graf 6 Závislost maximální odchytky hustoty vířivosti na úhlu mezi elementy

5.3.1 Nerovnoměrné rozložení délk elementů

Tato kapitola se věnuje vlivu diskretizace profilu nestejně dlouhými elementy. Jak zaznamenává graf 3, v okolí stagnačního bodu na náběžné a odtokové straně dochází k většímu rozkmitu hustoty vířivosti než v oblastech extrémů. Provedl jsem sérii úprav výpočetní sítě s 80 elementy. Elementy jsou zhušťovány nejprve směrem k okolí stagnačních bodů. Dále jsou uvedeny také varianty, kdy jsou elementy zhuštěny směrem k oblastem v polovině spodní a horní strany válcového profilu. Zhuštění bylo provedeno v programu Gambit 2.4.1 a to formou oddělení čtvrtin obvodu vertikálně a horizontálně uložených k paralelnímu proudu. Na vertikálních a na horizontálních úsecích byla postupně vystřídána série rozložení, příkladem 2 x 36 elementy vertikálně a 2 x 4 horizontálně (viz obr. 13). Přehled variací rozložení je uveden v tabulce 2.



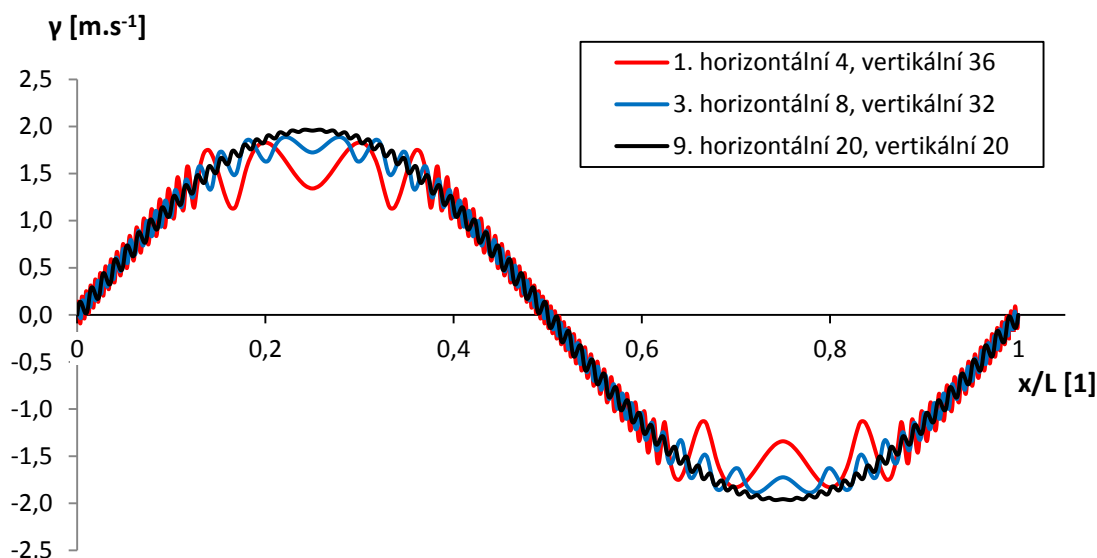
Obr. 13 Síť s nerovnoměrně rozloženými elementy
(2 x 36 vertikálně, 2 x 4 horizontálně)

Pro vybrané sítě byly provedeny výpočty pro rychlost $1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Ze vztahu (53) jsou spočteny jak hodnoty hustot vířivosti, tak hodnoty maximální amplitudy kmitání, které vystupují z výpočtu. Maximální amplitudy kmitání jsem uvedl v tabulce 1.

Tabulka 2 Maximální odchylky průběhu hustoty vířivosti

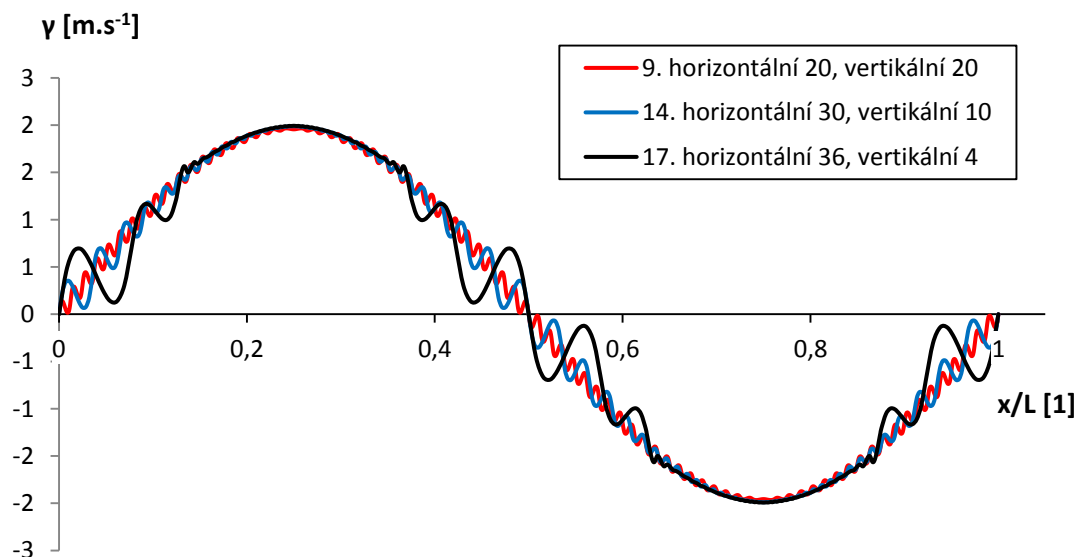
Varianta rozložení elem. na úseky obvodu	Obvod	amplitudy
1. horizontální 4, vertikální 36	31,295584	0,658351
2. horizontální 6, vertikální 34	31,359515	0,39796
3. horizontální 8, vertikální 32	31,382819	0,276964
4. horizontální 10, vertikální 30	31,393638	0,212797
5. horizontální 12, vertikální 28	31,399385	0,170475
6. horizontální 14, vertikální 26	31,402658	0,1412
7. horizontální 16, vertikální 24	31,404539	0,133561
8. horizontální 18, vertikální 22	31,405521	0,139488
9. horizontální 20, vertikální 20	31,407853	0,111463
10. horizontální 22, vertikální 18	31,405521	0,165765
11. horizontální 24, vertikální 16	31,404539	0,183549
12. horizontální 26, vertikální 14	31,402658	0,206712
13. horizontální 28, vertikální 12	31,399385	0,23767
14. horizontální 30, vertikální 10	31,393638	0,28062
15. horizontální 32, vertikální 8	31,382819	0,343459
16. horizontální 34, vertikální 6	31,359515	0,442776
17. horizontální 36, vertikální 4	31,295584	0,619696

V tabulce jsou také uvedeny celkové obvody spočtené pro jednotlivé varianty. První a poslední řádek tabulky obsahuje nejmenší hodnotu obvodu, to signalizuje velkou chybu zapříčiněnou příliš nerovnoměrným rozložením. Pro vybrané varianty jsou vykresleny grafy 7 a 8.



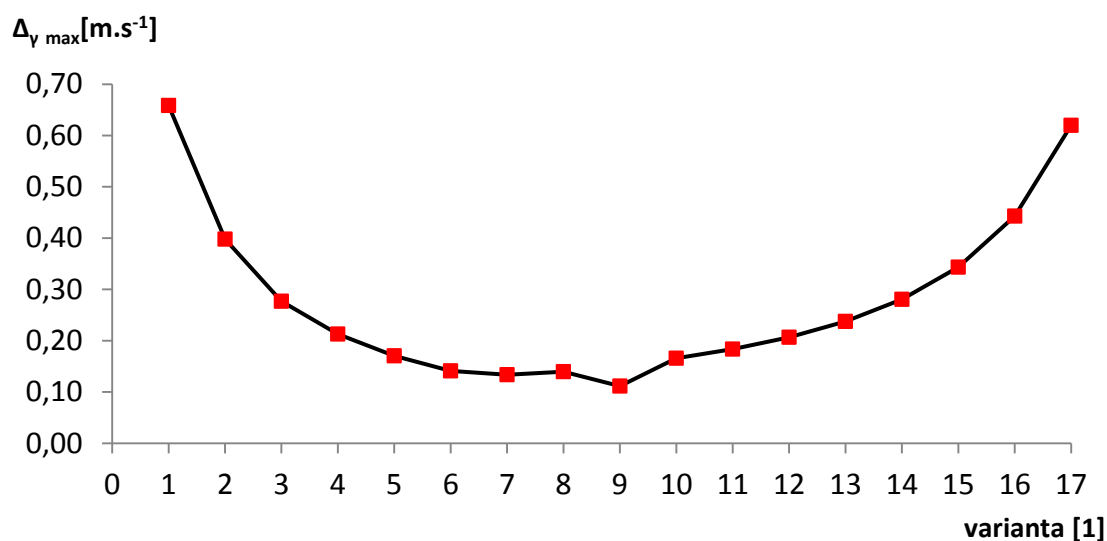
Graf 7 Průběh hustoty vířivosti po profilu vybraných variant (zvýšení počtu elementů v okolí stagnačních bodů)

Při bližším pohledu v grafu 7 v okolí stagnačních bodů pro maximální zjemnění (varianta 1.) nedochází k výraznému snížení amplitudy kmitání, naopak k mírnému nárůstu. V polovině spodní a horní strany je velký rozkmit, což je nežádoucí. Pro variantu 3. v blízkosti stagnačních bodů dojde k mírnému útlumu, nicméně opět v oblasti maxima hustoty vířivosti dochází k rozkmitu. Žádná z variant celkově nepředčí kvalitu průběhu hustoty vířivosti pro případ rovnoměrného rozložení 80 elementů po profilu.



Graf 8 Průběh hustoty vířivosti po profilu vybraných variant (zvýšení počtu elementů v okolí maxima hustoty vířivosti)

Graf 8 naopak vykresluje vybrané průběhy hustot vířivosti pro případy, kdy jsou elementy zhuštěny v okolí středu spodní a horní strany profilu. Varianta 17. ukazuje, že průběh se v místě zhuštění velice dobře přiblížil ideálnímu rozložení hustoty a odchylka maximální hodnoty vířivosti klesla na méně než 0,5 %. V okolí stagnačních bodů pro tuto variantu vznikají kmity, které mohou způsobovat falešnou rotaci rychlosti a především značné velikosti normálových rychlostí do profilu, čímž je navýšena nepřesnost metody. Opět se v souboru variant se zhuštěním v okolí maxima hustoty vířivosti nenachází celkově lepší řešení, než rovnoměrné rozložení elementů. To také potvrzuje graf 9, kde jsou pro jednotlivé varianty vyneseny maximální odchylky průběhů hustoty vířivosti od ideálního případu.



Graf 9 Maximální odchylky hustoty vířivosti jednotlivých variant

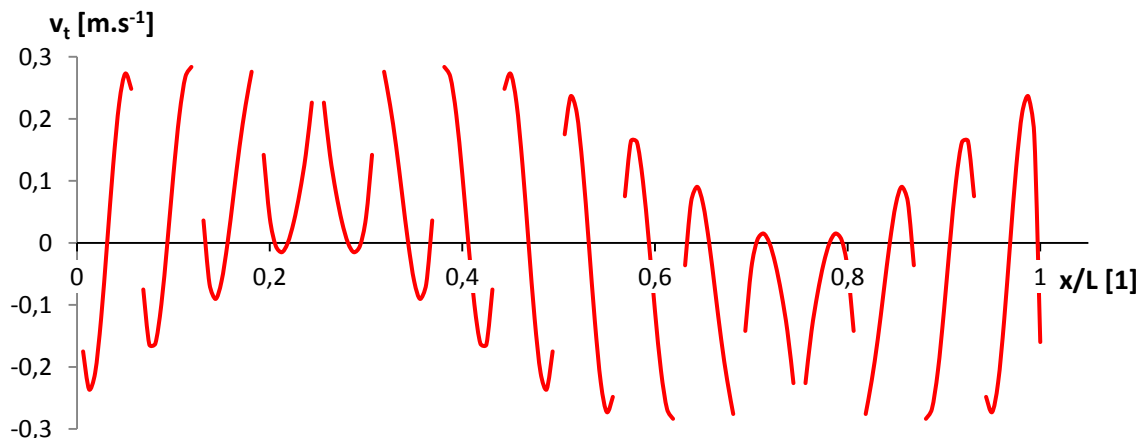
Varianta rovnoměrného rozložení elementů (20 horizontálně, 20 vertikálně) jako jediná nepřesahuje chybu $0,12 \text{ m.s}^{-1}$. Ostatní varianty jsou vhodné pouze pro výpočty určené k lokálnímu pozorování proudění na obtékaném profilu, např. varianta 17 se přibližuje k ideálnímu průběhu hustoty vířivosti v oblasti maxima hustoty vířivosti, kde také vektory rychlosti nejlépe odpovídají skutečnosti.

5.4 Tečné rychlosti na mezní vrstvě

Tato metoda předpokládá nekonečně tenkou mezní vrstvu. Je možné ji rozšířit na výpočty mezní vrstvy konečné tloušťky, to však není předmětem současné práce. Mezní vrstva je metodou modelována jako přímý úsek, element. Nicméně jak vyplývá z teorie, není jedno, na které straně mezní vrstvy hledáme řešení. Proto při výpočtech na rozhraní mezní vrstvy existují dvě normály (viz obr. 12). Vnější normála kapaliny, která odpovídá normále při výpočtech pod mezní vrstvou, a normála pro výpočet nad mezní vrstvou odpovídající vnější normále profilu. Při výpočtu koeficientů polynomu hustoty vířivosti v okrajové podmínce nulových rychlostí vystupuje vnější normála pod mezní vrstvou. Pod mezní vrstvou vyžadujeme nulovou tečnou rychlost (ulpívání) a nulovou normálovou rychlost (neprostupný profil).

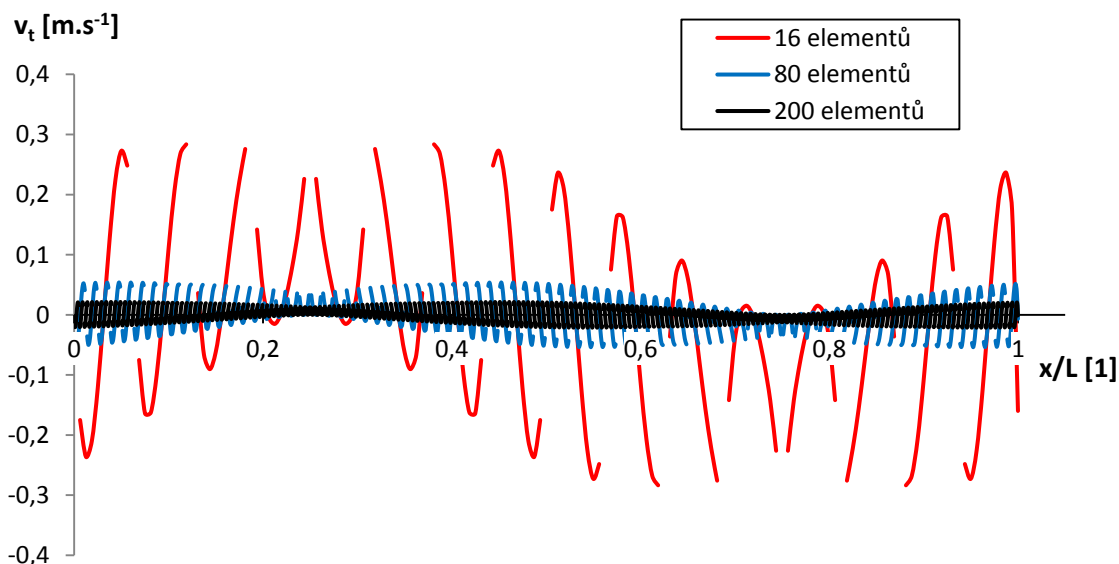
5.4.1 Tečná rychlost pod mezní vrstvou

Řešením matice je splněna nulová tečná rychlost v referenčním bodě. V jeho okolí již tomu tak není. Graf 10 vykresluje průběh tečných rychlostí na kruhovém profilu $r = 5$ m s 16 elementy pro proudění $1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.



Graf 10 Tečné rychlosti na kruhovém profilu $r = 5$ m s 16 elementy pro proudění $1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$

Průběh tečné rychlosti pod mezní vrstvou je nespojitý, což platí i pro normálové rychlosti. To proto, že v uzlových bodech současná metoda nedokáže určit hodnoty rychlosti. Elementy průběhu tečné rychlosti protínají vždy alespoň jednu osu (x/L) a to v místech referenčních bodů. Nepřesnost modelu s 16 elementy je v porovnání s modely s vyšším počtem elementů značná. V grafu jsou dále průběhy s 80 a 200 elementy.

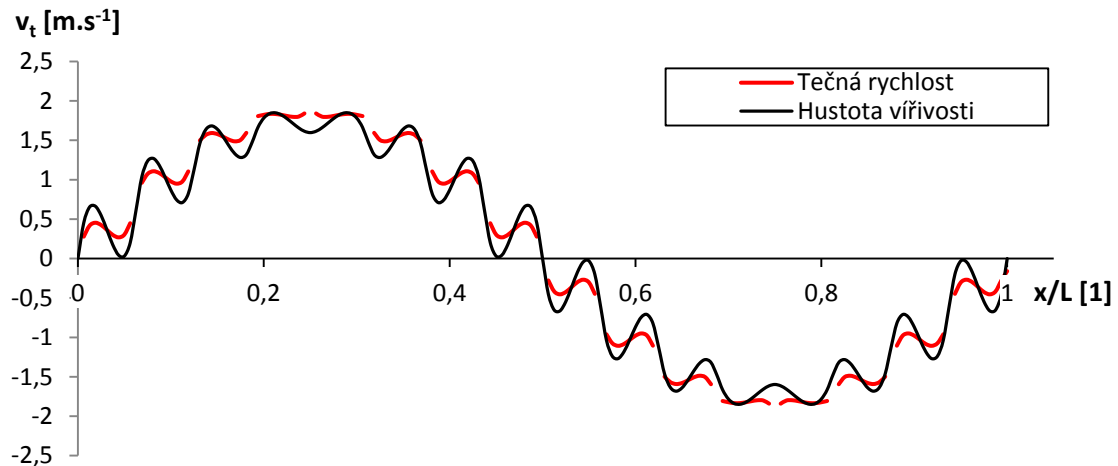


Graf 11 Tečné rychlosti na kruhovém profilu $r = 5$ m pro proudění $1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$

Nepřesnost způsobenou nenulovou tečnou složkou rychlosti po profilu lze opět lokálně snížit zhuštěním elementů.

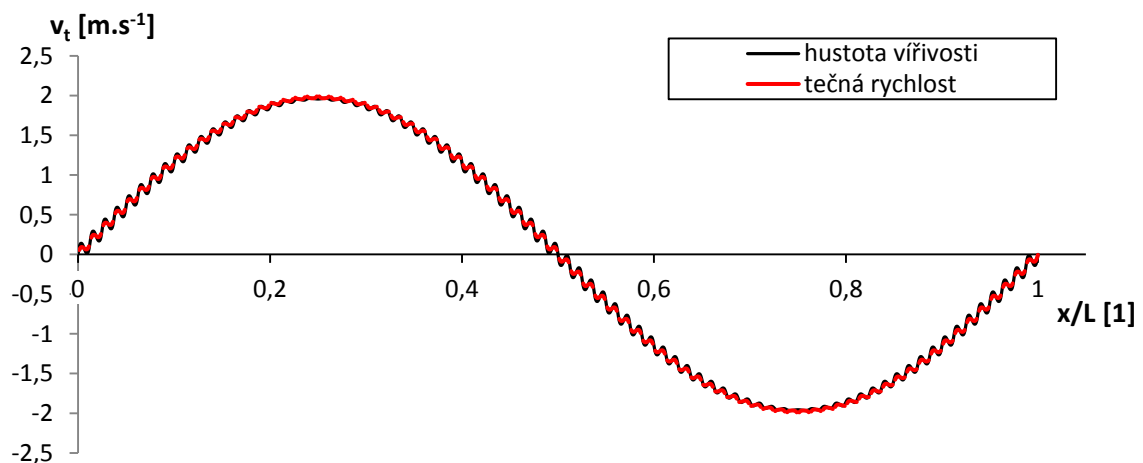
5.4.2 Tečná rychlost nad mezní vrstvou

Pro tečnou rychlost nad mezní vrstvou platí, že normála má opačný směr než normála profilu. Zároveň tečny elementů na horní straně mají opačný směr než paralelní proud natékající na profil, což se projeví záporným znamínkem rychlosti. Průběh tečné rychlosti pro kruhový profil $r = 5$ m s 16 elementy pro proudění 1 m.s^{-1} je vykreslen v grafu 12.



Graf 12 Tečná rychlost nad mezní vrstvou na kruhovém profilu $r = 5$ m pro proudění 1 m.s^{-1} pro 16 elementů

Tečná rychlost nad mezní vrstvou je právě tou složkou rychlosti, která udává hodnotu cirkulace kolem profilu. Z definice hustoty vířivosti pak plyne, že na povrchu profilu těsně nad mezní vrstvou by se měly hodnoty tečné rychlosti a hustoty vířivosti rovnat. V grafu 12 je společně s tečnou rychlostí vykreslena hustota vířivosti. Velikosti tečné rychlosti velice dobře sedí velikostem hustoty vířivosti v referenčních bodech. Jinde na profilu dochází k odchýlení z důvodu velké amplitudy kmitu hustoty vířivosti. V případě většího počtu elementů se velikost tečné rychlosti k průběhu hustoty vířivosti přimyká (viz graf 13).

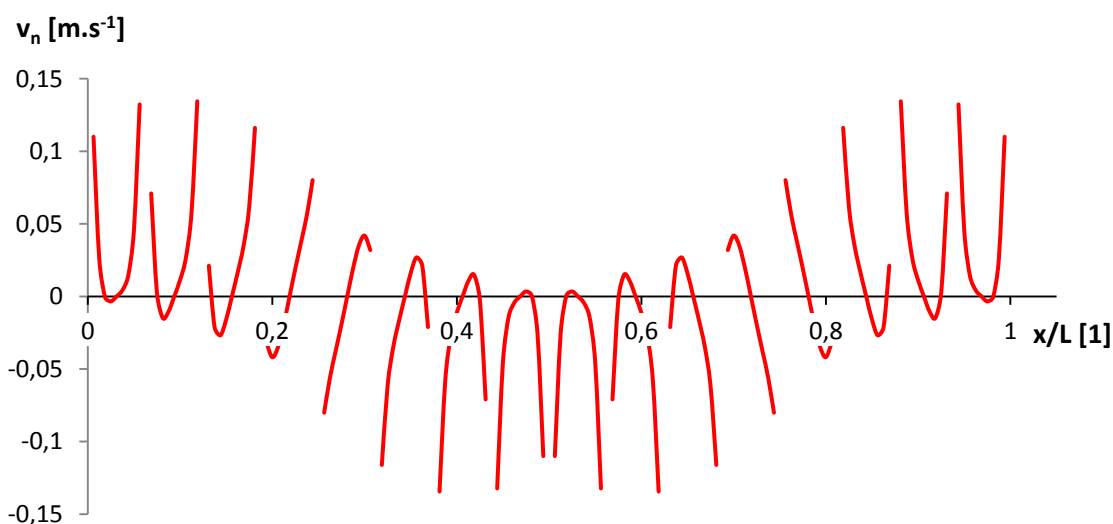


Graf 13 Tečná rychlost nad mezní vrstvou na kruhovém profilu $r = 5$ m pro proudění 1 m.s^{-1} pro 80 elementů

5.5 Normálové rychlosti pod mezní vrstvou

Hodnota normálové rychlosti nás zajímá pod mezní vrstvou, kde by měla ve skutečnosti existovat nepropustnost povrchu tělesa. Protože neprostupnost profilu je modelována jedním referenčním bodem na každém elementu, je v tomto bodě normálová rychlost zaručeně rovna nule. Na zbytku elementu tomu tak být nemusí. Prostupnost, jinak průsak, do tělesa je významným faktorem při hodnocení kvality diskretizace profilu. Míra, v jaké kapalina vniká do tělesa, určuje diskontinuitu proudění. Pokud na povrchu nabývá normálová rychlost velkých hodnot, je nutné lokálně, případně na celém profilu, zvýšit počet elementů, a tím zajistit požadovanou přesnost modelu. Velikost normálové rychlosti má kladnou hodnotu, vtéká-li kapalina do tělesa, tedy směr normálové rychlosti je shodný s normálou pod mezní vrstvou.

Graf 14 představuje průběh normálové rychlosti po kruhovém profilu $r = 5$ m s 16 elementy pro proudění $1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

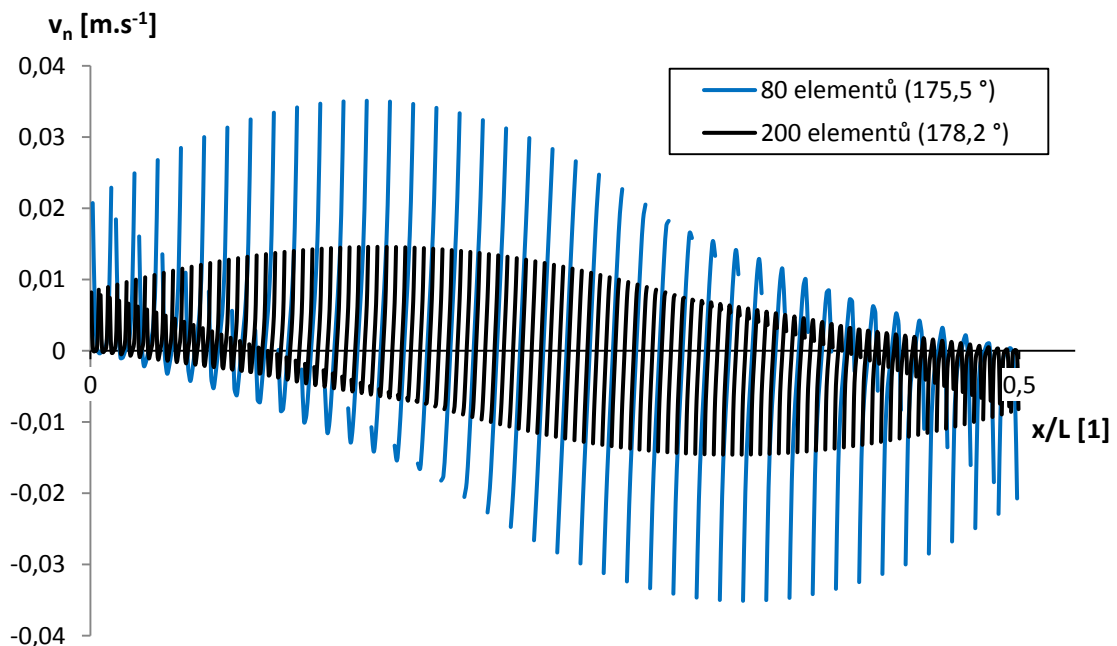


Graf 14 Normálová rychlost na kruhovém profilu $r = 5$ m se 16 elementy pro proudění $1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$

Na průběhu v grafu 14 je názorně vidět, že normálová rychlost je symetrická podle osy symetrie kruhového profilu se směrem shodným se směrem natékajícího proudu. Na náběžné straně profilu má normálová rychlost kladnou velikost vyjma blízkého okolí referenčního bodu. Naopak na odtokové straně profilu je kapalina tažena z profilu ven, proto má normálová rychlost zápornou hodnotu. Maxima normálové rychlosti se pro profil s 16 elementy pohybují kolem $0,15 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Jedná se o vysokou hodnotu, vzhledem k nátokové rychlosti $1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Proto model s 16 elementy vykazuje významné chyby.

Graf 15 uvádí průběhy normálové velikosti pro 80 a 200 elementů pro přehlednost pouze na spodní straně profilu. Z grafu 15 vyplývá, že profil s 80 elementy je protékán normálovou rychlostí maximálně o velikosti $0,035 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. U profilu s 200 elementy má maximum rychlosti jen $0,015 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Na elementu maxima hustoty vířivosti ($x/L = 0,25$) je velikost normálové rychlosti antisymetrická přes referenční bod daného elementu. To je dáno tím, že se proud kapaliny kolem elementu stáčí a vrací se zpět k ose profilu.

Proto kapalina, která na jedné polovině elementu vytéká, na druhé do elementu vtéká zpět.



Graf 15 Normálová rychlost na kruhovém profilu $r = 5 \text{ m}$ pro proudění 1 m.s^{-1}

Za účelem hodnocení míry, s jakou je profil protékán, jsem zavedl do programu VEMethod výstupní proměnnou *měrný průtok* q_m (pojem čerpán ze zdroje [5]):

$$q_m = \frac{1}{L_{celk}} \int_{\Gamma} v_n dL, \quad (54)$$

kde L_{celk} je celkový obvod diskretizovaného povrchu Γ obtékaného profilu.

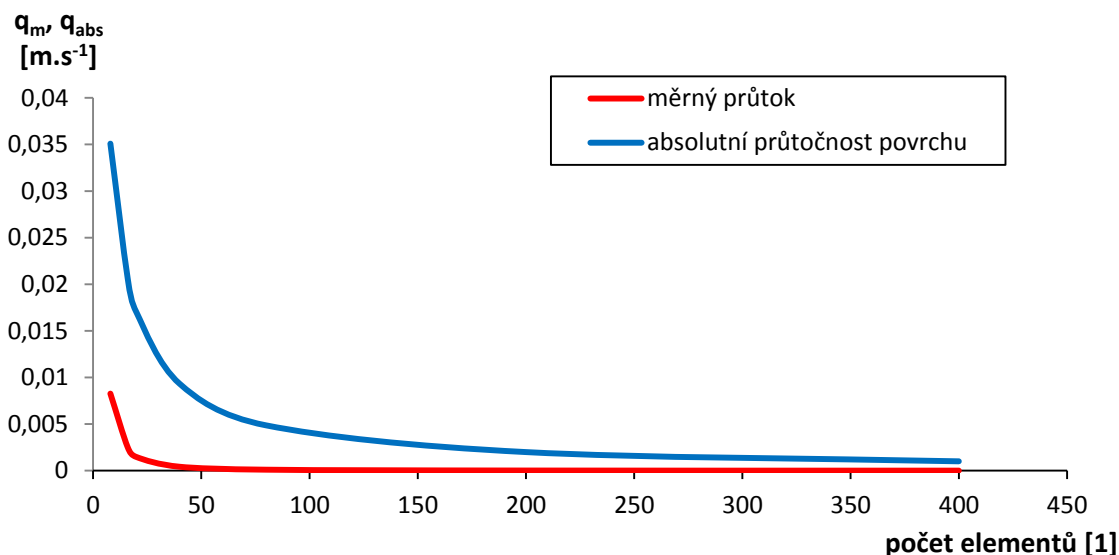
Integrace je realizována lichoběžníkovou metodou z dat získaných pro průběh normálových rychlostí po jednotlivých elementech. Počet kroků na element je volitelná veličina v nastavení. Přesnost získaná tímto výpočtem dosahuje dostatečné míry na vytvoření představy o průtočnosti povrchu. Další pomocnou proměnnou je *absolutní průtočnost povrchu* q_{abs} , která je definována vztahem:

$$q_{abs} = \frac{1}{L_{celk}} \int_{\Gamma} |v_n| dL. \quad (55)$$

Tato proměnná se liší od měrného průtoku tím, že nabízí informaci o celkovém množství kapaliny procházející profilem. Měrný průtok udává míru nesplnění kontinuity proudění, tedy míru nerovnosti vtékající a vytékající kapaliny. Pro různé počty elementů byly provedeny výpočty q_m a q_{abs} , jejichž výsledky jsou uvedeny v tabulce 3 a v grafu 16. Hodnoty jsou uvedeny pro rychlost paralelního proudu 1 m.s^{-1} .

Tabulka 3 Maximální odchylky průběhu hustoty vířivosti

Elementů [1]	Úhel [°]	q_m [m.s ⁻¹]	q_{abs} [m.s ⁻¹]
8	135	0,0082686	0,035088
16	157,5	0,0025119	0,020626
20	162	0,0014717	0,017011
40	171	0,0004217	0,009326
80	175,5	0,0001058	0,004861
200	178,2	1,69E-05	0,001994
400	179,1	4,23E-06	0,001005

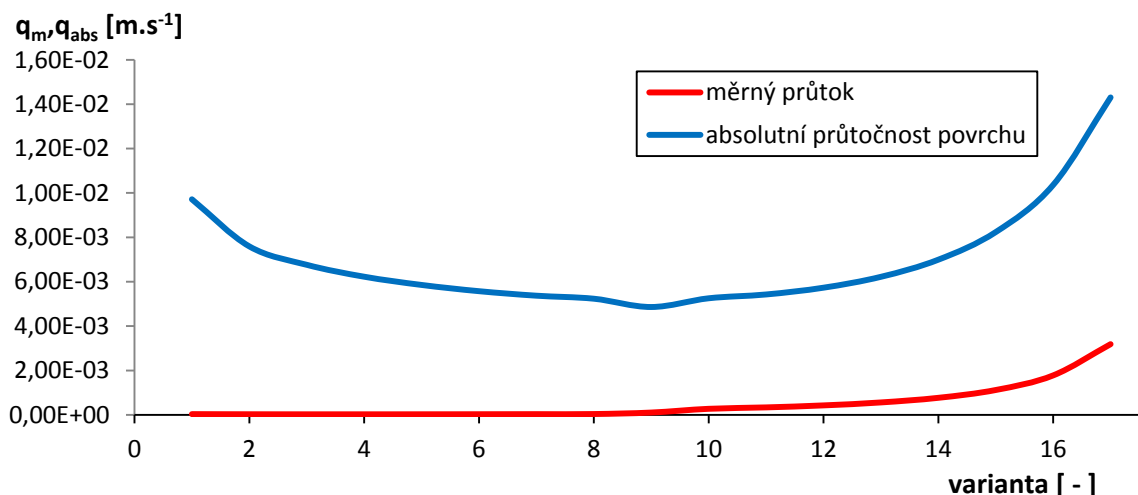


Graf 16 Závislost měrného průtoku a absolutní průtočnosti povrchu na počtu elementů profilu

Absolutní průtočnost povrchu i měrný průtok vykazují strmý pokles pro zvyšování počtu elementů v oblasti do 50 elementů na profilu. Od padesáti elementů při zjemňování dochází pouze k mírnému poklesu hodnot q_m a q_{abs} . Tyto veličiny jsou lineárně závislé na rychlosti natékající kapaliny.

Zkoumal jsem také vliv nerovnoměrného rozložení elementů po profilu na měrný průtok a absolutní průtočnost povrchu. Výsledky vykreslené do grafu 17 se vztahují na varianty dříve uvedené v tabulce 2, u kterých je vždy 80 elementů a poloměr kruhového profilu je 5 m. Výpočty proběhly pro 1 m.s⁻¹.

Opět celkově nejlepších hodnot dosáhla varianta s rovnoměrným rozložením elementů. Za povšimnutí stojí stoupající tendence závislosti měrného průtoku, která nabývá svého maxima pro variantu 2 x 4 elementy vertikálně, tedy na náběžné straně profilu. Rozložení hustoty vířivosti na takto velkých elementech nezajistí nízké normálové rychlosti a zvýší tak průtok kapaliny do tělesa.

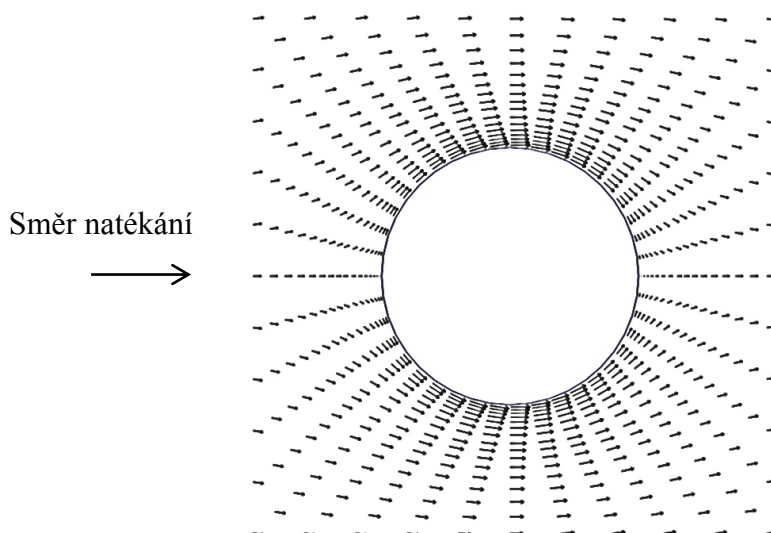


Graf 17 Závislost měrného průtoku a absolutní průtočnosti povrchu na nerovnoměrnosti rozložení elementů

5.6 Rychlostní pole

Vykreslením rychlostního pole v okolí obtékaného profilu získáme také možnost zhodnotit proudění vypočtené metodou hraničních vířivých elementů. Pokud dochází k výrazným kmitům hustoty vířivosti až přes nulovou hranici opačným směrem, v rychlostním poli a především na povrchu se ukážou víry.

Na obrázku 14 je výstup z programu VEMethod pro 40 elementů na profilu. Tvar rychlostního pole odpovídá obtékání válce ideální kapalinou, nicméně velikosti rychlostí na profilu nedosahují na hodnotu $2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ tak, jak by měly pro paralelní proud s rychlostí $1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Tento nedostatek řeší navýšením počtu elementů.



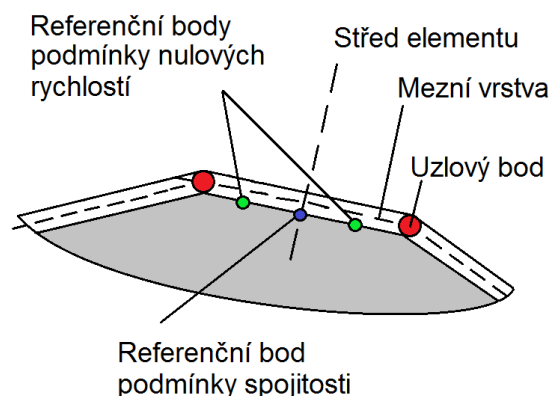
Obr. 14 Rychlostní pole proudu s ustálenou rychlostí $1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ při obtékání válce se 40 elementy na povrchu.

6 ALTERNATNÍ OKRAJOVÉ PODMÍNKY

Okrajová podmínka s jedním referenčním bodem a spojitostí hustoty vířivosti, pracovně označená jako okrajová podmínka spojitosti, vykazuje dobré výsledky při modelování proudění v malé oblasti okolí profilu, kde je dostatečně zhuštěna síť elementů. Navíc je přirozeně určena k modelování proudění na povrchu, kde ve skutečnosti je hladký profil, což například čtverec není. Alternativami okrajové podmínky spojitosti se nabízí varianta bez předepsání spojitosti hustoty vířivosti, tzv. okrajová podmínka nulových rychlostí, nebo v této práci navržená kombinovaná okrajová podmínka se třemi referenčními body.

6.1 Okrajová podmínka nulových rychlostí

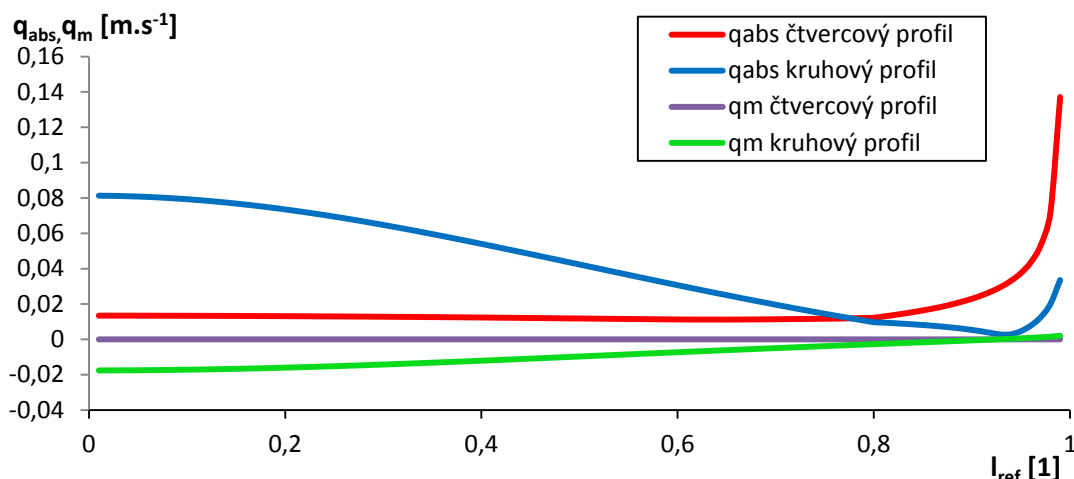
Ve zdrojích [5] a [7] je diskutována další varianta sestavení okrajových podmínek, která zavádí namísto spojitosti hustoty vířivosti a její první derivace umístění dalšího referenčního bodu na element, čím je zdvojená podmínka nulových rychlostí. Tato varianta okrajové podmínky si klade za cíl minimalizovat průtok do profilu, a protože nezavádí podmínku spojitosti, očekává lepší výsledky v případech profilů s ostrými přechody. Okrajová podmínky nulových rychlostí využívá při výpočtu dva referenční body pod mezní vrstvou (viz obr. 15).



Obr. 15 Referenční body na elementu

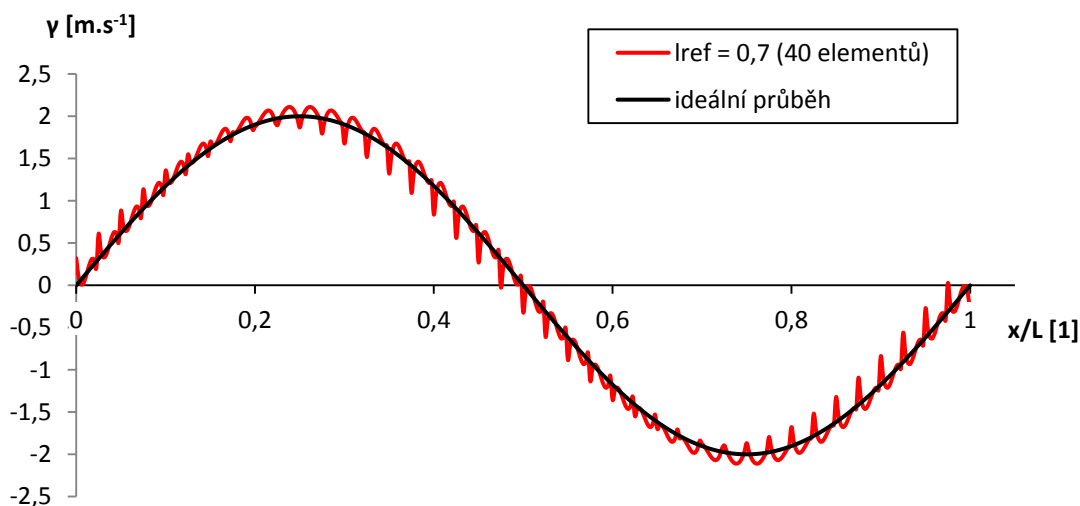
V referenčních bodech je předepsána rovnost rychlosti proudění a rychlosti profilu tak, aby byla normálová rychlost rovna nule a zároveň kapalina ulpívala na povrchu, tedy aby byla tečná rychlost pod mezní vrstvou rovna nule. S existencí dvou referenčních bodů přichází otázka jejich umístění. Ve zdroji [7] se uvádí polohy v jedné a ve dvou třetinách povrchu, což bylo určeno pro profil čtverce. Dle mého výpočtu je přítomen vliv tvaru profilu. Požadavky kladené na polohu referenčních bodů se tak značně liší. Uvažujeme-li symetrické uložení referenčních bodů se středem symetrie shodným se středem elementu, zavedl jsem pro uložení referenčního bodu proměnnou *poměrné vzdálenosti referenčních bodů*. Tato proměnná je definována jako vzdálenost referenčního bodu od středu elementu. Nabývá hodnot $l_{ref} \in (0,1)$, kde 0 odpovídá blízkému okolí středu elementu a 1 je uzlový bod.

Závislost měrného průtoku a absolutní průtočnosti povrchu na poloze referenčních bodů uvádí graf 18. V grafu jsou uvedeny průběhy pro kruhový profil (40 elementů) a čtvercový profil (40 elementů). V obou případech je rychlost proudu $1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.



Graf 18 Závislost měrného průtoku a absolutní průtočnosti na poměrné vzdálenosti ref. bodů

Závislost absolutní průtočnosti pro větší poměrné vzdálenosti referenčních bodů v případě kruhového profilu klesá až do $l_{ref} = 0,95$. U čtvercového profilu závislost velice mírně klesá do $l_{ref} = 0,7$, kde začíná prudce narůstat. Měrný průtok čtvercového profilu je zanedbatelný, naopak pro kruhový profil signalizuje vytékání kapaliny z profilu s tendencí ke zlepšení pro rostoucí hodnoty l_{ref} . Pokud bych měl zvolit pevnou hodnotu poměrné vzdálenosti ref. bodů, potom $l_{ref} = 0,7$. Nejedná se o bod optima, ale tuto hodnotu je třeba konfrontovat s kvalitou rozložení hustoty vířivosti (viz graf 19).



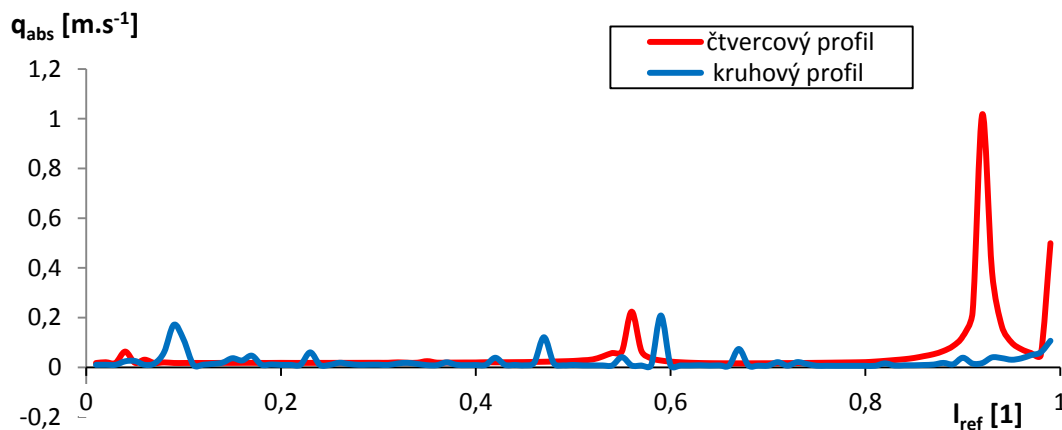
Graf 19 Hustota vířivosti na kruhovém profilu $r = 5$ m pro proudění $1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ a $l_{ref} = 0,7$.

Hustota vířivosti v grafu 19 má malý rozkmit, ale přesahuje maximální hodnotu ideálního průběhu přibližně o $0,11 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Pro menší hodnoty l_{ref} má hustota vířivosti po profilu větší rozkmit a naopak pro větší se více vzdaluje od ideálního průběhu.

6.2 Okrajová podmínka se třemi referenčními body

Tato okrajová podmínka vyplynula z předchozích dvou probíraných okrajových podmínek. Spojitost první derivace hustoty vířivosti a zároveň pouze jeden referenční bod u okrajové podmínky spojitosti vnáší do řešení chyby, stejně jako nespojitost hustoty vířivosti v případě okrajové podmínky nulových rychlostí. Okrajová podmínka se třemi referenčními body nijak nenavýšuje velikost řešené matice a zůstává u 4 rovnic na element.

Při její realizaci dochází k oddělení referenčních bodů s nulovou normálovou rychlostí a referenčních bodů s nulovou tečnou rychlostí. Jeden z bodů pro tečnou rychlost je nahrazen spojitostí hustoty vířivosti v uzlových bodech elementu a druhý bod s nulovou tečnou rychlostí je přesunut do středu elementu. Optimální poloha referenčních bodů je analyzována na základě minimalizace absolutní průtočnosti profilem. Měrný průtok je pro všechny hodnoty l_{ref} zanedbatelně malý.

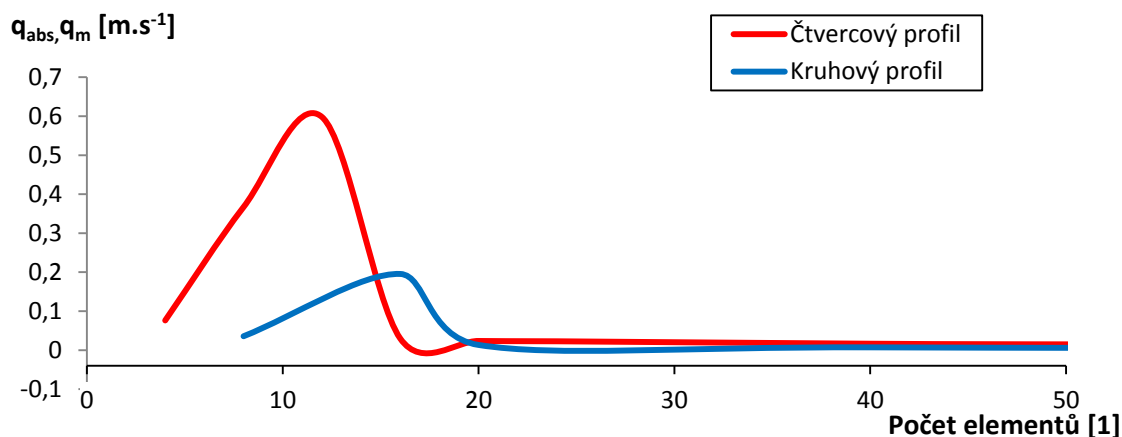


Graf 20 Závislost absolutní průtočnosti profilu na l_{ref}

V grafu 20 je provedena citlivostní analýza absolutní průtočnosti na parametr l_{ref} . Absolutní průtočnost profilu je téměř nezávislá na l_{ref} , pouze pro hodnoty $l_{ref} > 0,8$ se jak v případě čtverce, tak v případě kruhového profilu rozchází a rychlostní pole na povrchu profilu je špatně popsáno. Hodnota absolutní průtočnosti povrchu se mimo lokální maxima pohybuje kolem hodnoty $0,1 \text{ m.s}^{-1}$ pro kruhový průřez a kolem $0,2 \text{ m.s}^{-1}$ pro čtvercový profil. V obou případech bylo po obtékaném profilu rovnoměrně rozneseno 40 elementů a natékal proud kapaliny rychlostí 1 m.s^{-1} .

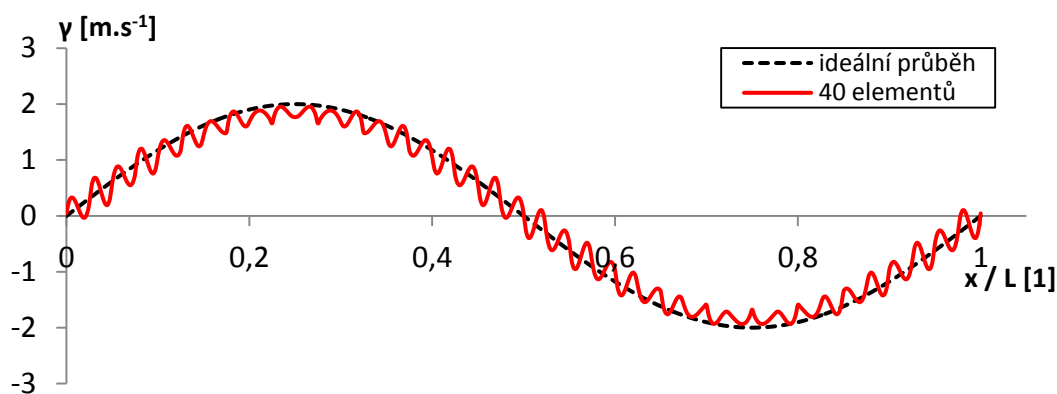
Lokální extrém v okolí hodnot 0,6 a 0,1 jsou skutečně pozorovatelné na průběhu hustoty vířivosti jejím rozkmitáním, nejedná se o náhodnou chybu práce s daty. Přesný původ těchto rozkmitání v současnosti není odhalen.

Pro zvolenou hodnotu $l_{ref} = 0,7$ je zkoumán vliv počtu elementů na hodnotu absolutní průtočnosti povrchu (viz graf 21). Pro tuto sadu okrajových podmínek (tři referenční body) je vliv počtu elementu pro čtvercový i kruhový profil od 20 elementů po profilu dále velmi malý. Pro 20 elementů je hodnota absolutní průtočnosti profilu menší než 1,5 % rychlosti natékající kapaliny pro kruhový profil a menší než 2,5 % pro čtvercový profil a dále slabě klesá.

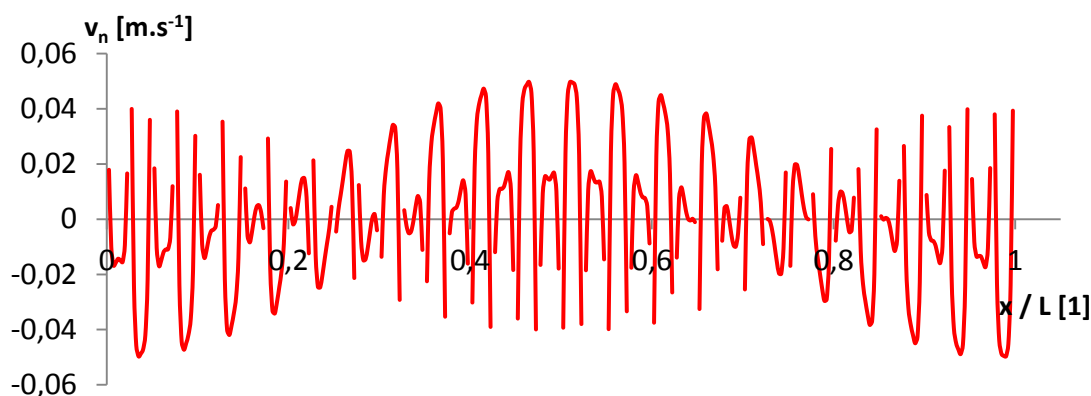


Graf 21 Závislost absolutní průtočnosti profilu počtu elementů (pro $l_{ref} = 0,7$), čtvercový profil (délka strany 1 m), kruhový profil (poloměr $r = 5$ m)

Příkladem je uveden průběh hustoty vířivosti kruhového profilu spočtený pomocí okrajové podmínky se třemi referenčními body pro 40 elementů a průběh normálových rychlostí.



Graf 22 Průběh hustoty vířivosti po délce kruhového profilu pro okrajovou podmínku se třemi referenčními body ($l_{ref} = 0,7$)



Graf 23 Průběh normálových rychlostí po délce kruhového profilu

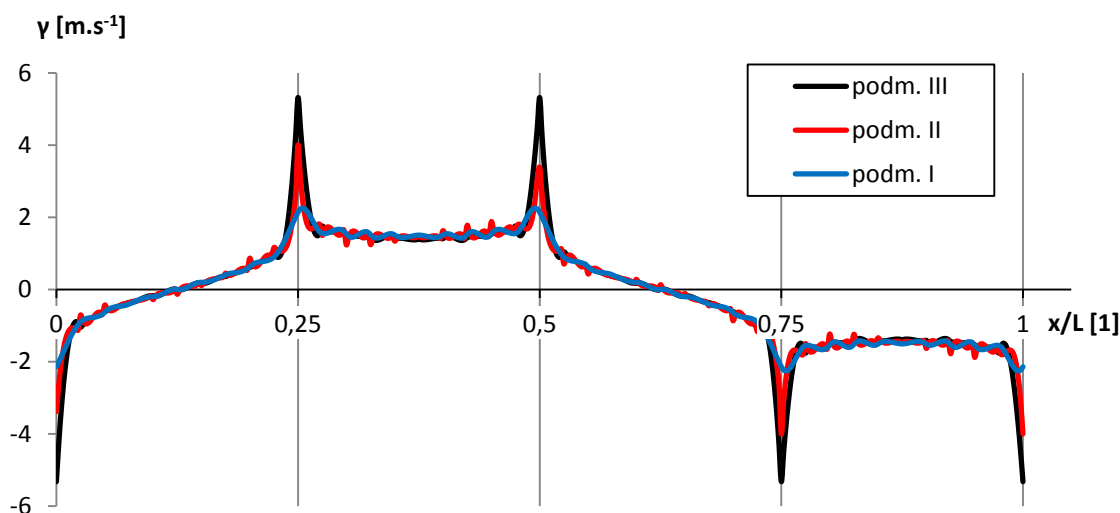
7 PŘÍKLADY OBTÉKÁNÍ JEDNODUCHÝCH PROFILŮ

Tato kapitola prezentuje výsledky pro jednoduché profily získané pomocí všech tří okrajových podmínek. Tyto podmínky jsou touto formou srovnány, aby bylo možné vyslovit závěry ke kvalitě jednotlivých okrajových podmínek. Pro okrajové podmínky se 2 a 3 referenčními body je zvolena hodnota poměrné vzdálenosti $l_{ref} = 0,7$. Označme si okrajové podmínky zkráceně podle počtu referenčních bodů římskými číslicemi: okrajová podmínka spojitosti (I), okrajová podmínka nulových rychlostí (II) a okrajová podmínka se 3 referenčními body (III).

Jako jednoduché profily jsem zvolil obtékaný hranol s čtvercovým (hrana čtverce $a = 1$ m) a obdélníkovým průřezem (strany $a = 1$ m, $b = 0,25$ m), válec s kruhovým ($r = 5$ m) a eliptickým průřezem (hlavní poloosa $a = 0,5$ m, vedlejší poloosa $b = 0,25$ m). Prezentované výsledky jsou získány pro rychlost paralelního proudu $1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

7.1 Čtvercový profil

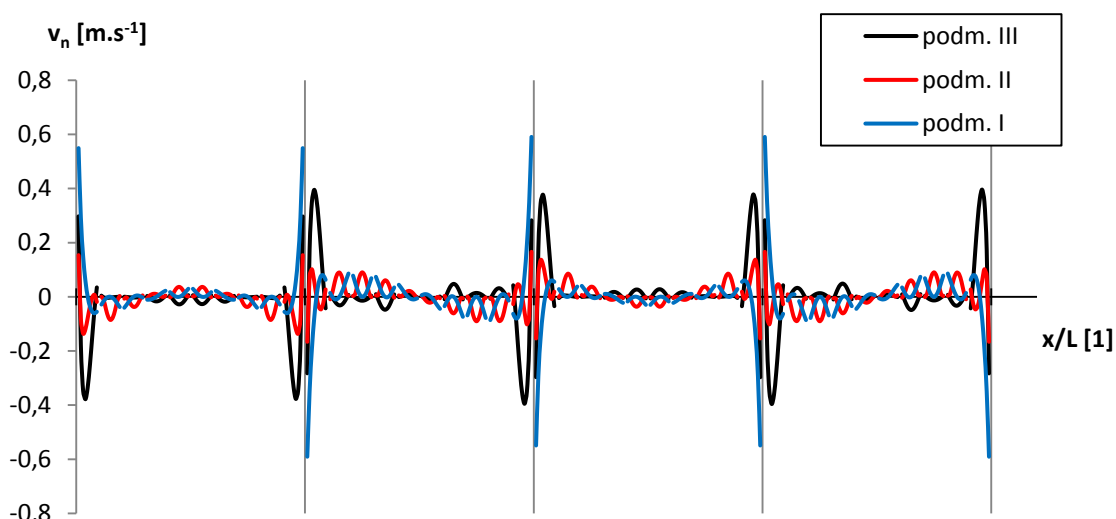
Pro čtvercový profil jsou specifické obtékané ostré hrany a krátká ustalovací délka profilu po proudu. Graf 24 vynáší srovnání tvaru hustoty vířivosti jednotlivých okrajových podmínek pro 40 elementů.



Graf 24 Hustota vířivosti na čtvercovém profilu

První čtvrtina grafu 24 je tvořena náběžnou stranou čtverce, následuje spodní strana, odtoková strana a v grafu od 0,75 do 1 je horní strana profilu. Podmínka III má nejpřesnější průběh hustoty vířivosti, s minimální amplitudou kmitání na stranách a maximem výchylky na hraně čtvercového profilu. Podmínka II se na hranách podmínce III přibližuje, ale na rovných úsecích se rozkmitává. Poslední podmínka I má kvůli vnucené spojitosti kmitavý průběh a nekopíruje hustotu vířivosti na hranách.

Pro menší počet elementů se rozdíly mezi podmínkami I – III zvyrazňují.

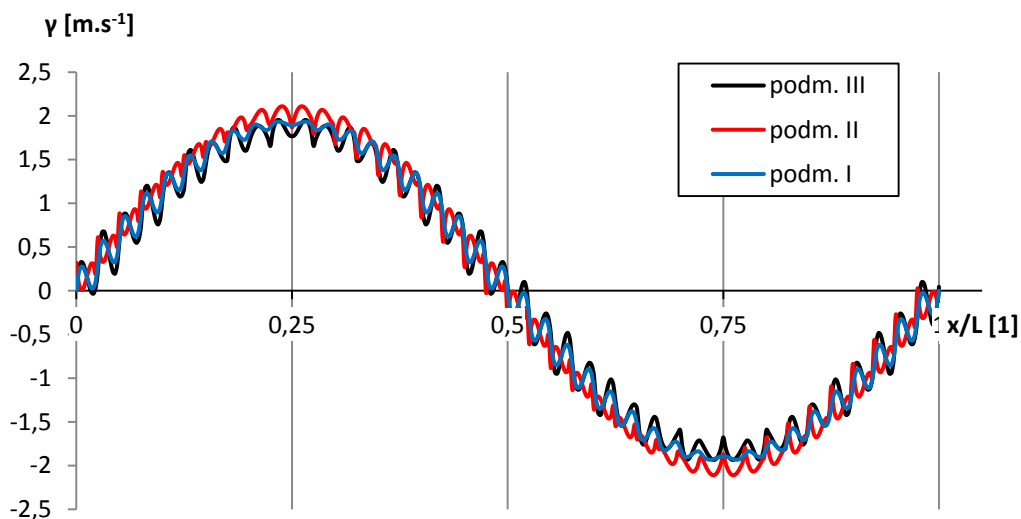


Graf 25 Normálové rychlosti

V grafu 25 má podmínka III velký výkmit normálové rychlosti v okolí hran, dále na stěnách je utlumená, dosahuje absolutní průtočnosti $0,0156 \text{ m.s}^{-1}$. Podmínka II dosahuje lepší průběh a také hodnota absolutní průtočnosti je $0,0114 \text{ m.s}^{-1}$. Poslední podmínka I dosahuje nejvyšší hodnoty normálové rychlosti a absolutní průtočnost je $0,0189 \text{ m.s}^{-1}$. Obrázek vektorového pole naleznete v příloze A.

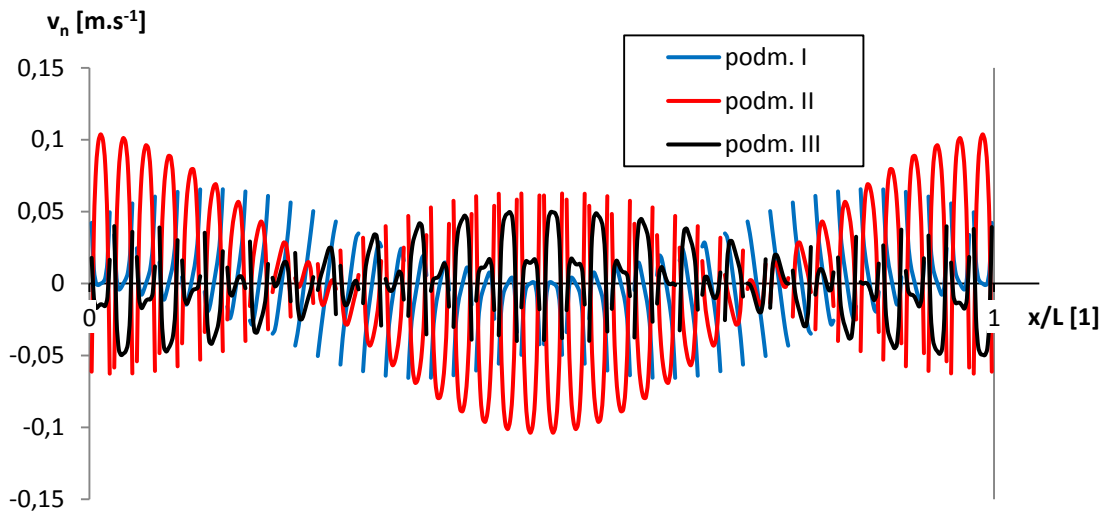
7.2 Kruhový profil

Kruhový profil je v této práci probírán nejpodrobněji, proto v této kapitole uvedu grafy hustoty vířivosti a normálových rychlostí.



Graf 26 Hustota vířivosti na kruhovém profilu

Zatímco podmínky I a III se v okolí maxima hustoty vířivosti přibližují k hodnotě 2 m.s^{-1} odspodu ($1,95 \text{ m.s}^{-1}$), podmínka II tuto hodnotu výrazně přesahuje ($2,14 \text{ m.s}^{-1}$). Na celém průběhu hustoty vířivosti je podmínka II nejméně kmitavá.

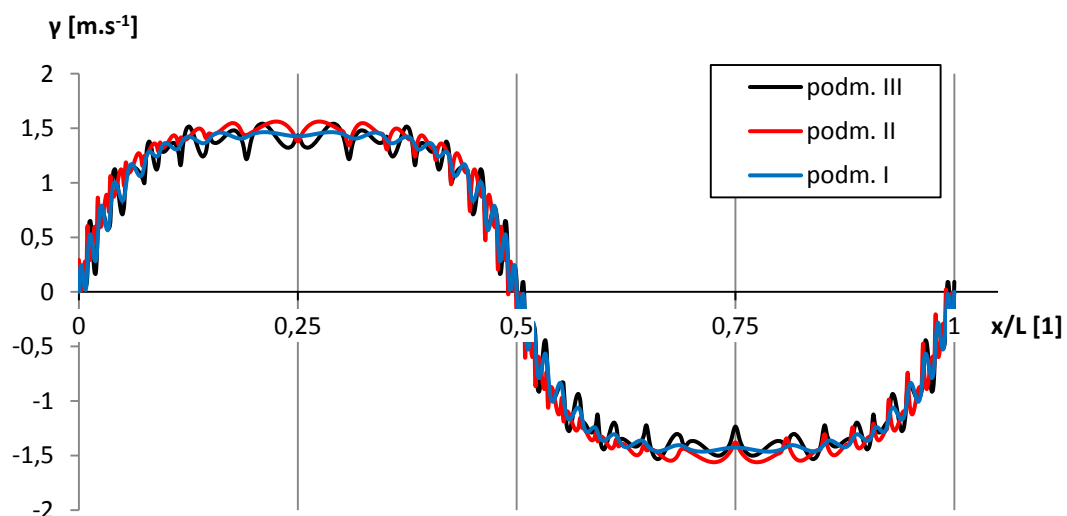


Graf 27 Normálové rychlosti

Na profilu válce s 40 elementy vychází nejvyšší normálové rychlosti pro podmínku II, kde velikost rychlosti dosahuje až $0,1 \text{ m.s}^{-1}$. Absolutní průtočnost povrchu je v tomto případě $0,0196 \text{ m.s}^{-1}$. Další dvě podmínky vykazují o poznání lepší výsledky. Podmínka III má průtočnost $0,0072 \text{ m.s}^{-1}$ a podmínka I má průtočnost $0,0093 \text{ m.s}^{-1}$. Podmínka III je podle výsledků optimalizovanější pro kruhové profily než zbylé dvě podmínky. Vektorové pole je vykresleno v příloze B.

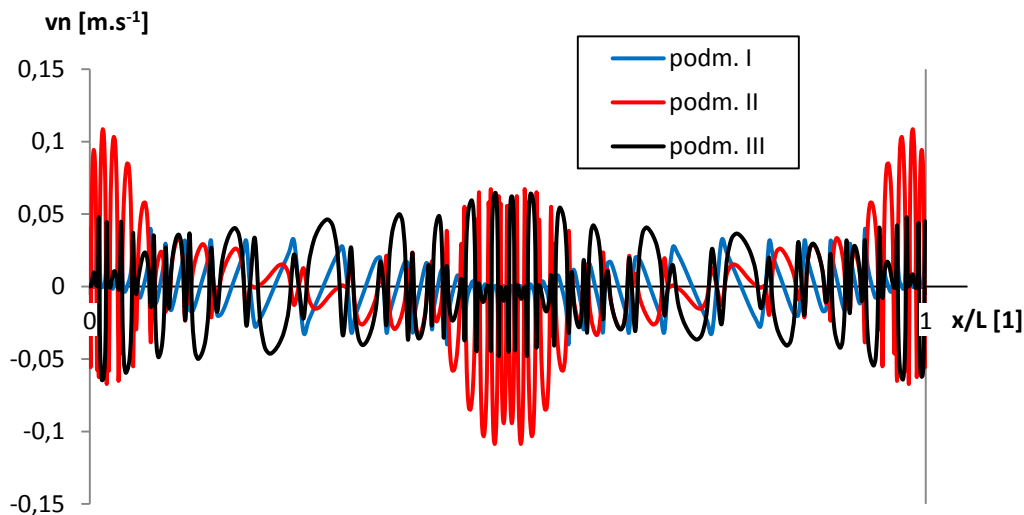
7.3 Eliptický profil

Příklad eliptického profilu je vytvořen s nerovnoměrným rozložením. Zhuštění elementů se nachází na konci v hlavní poloose elipsy. Počet elementů je 40. Hustotu vířivosti po profilu elipsy popisuje graf 28.



Graf 28 Hustota vířivosti eliptického profilu natékaného podél hlavní poloosy

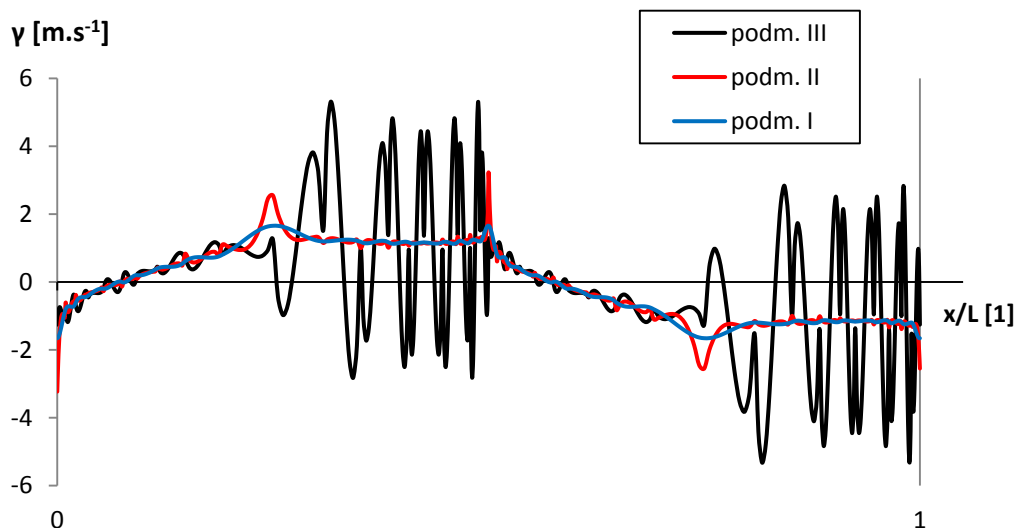
Elipsa je natékána ve směru hlavní poloosy. Vyhlazený průběh podmínky I vykazuje nejlepší kvalitu. Absolutní průtočnost povrchu má podmínka I $0,0059 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Pro $l_{ref} = 0,7$ nabývá podmínka III průtočnost $0,0087 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. V případě, že zvýšíme hodnotu $l_{ref} = 0,8$, podmínka III nabude průtočnosti $0,0032 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. V grafu normálových rychlostí se průběh hustoty vířivosti pro podmínku I rozkmitává nejméně. Vektorové pole obtékání eliptického profilu se nachází v příloze C.



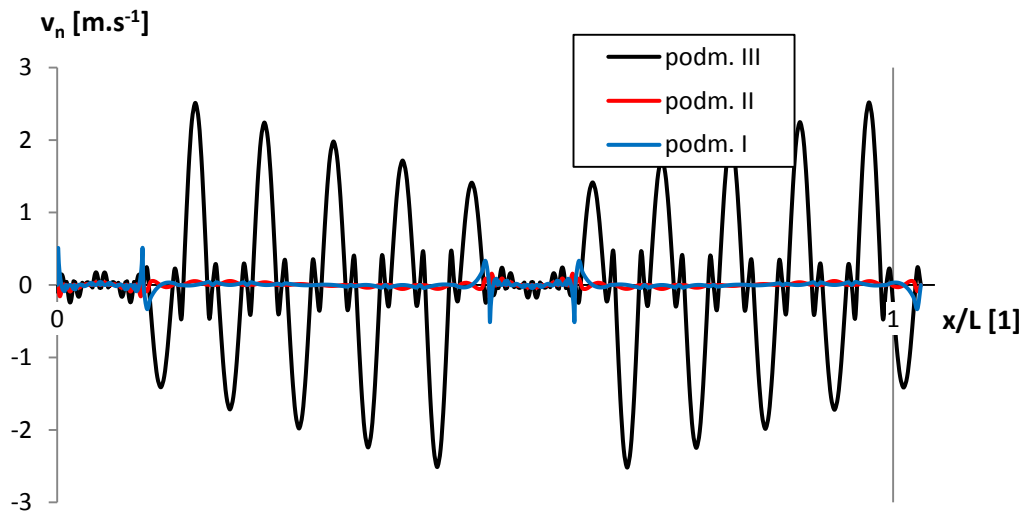
Graf 29 Normálové rychlosti

7.4 Obdélníkový profil

Obdélník definovaný počátkem kapitoly 7 má poměr stran 1:4. Elementy se rozkládají po všech stranách stejně, 10 elementů na straně. Protože proudění natéká modelový obdélník podélně, náběžná hrana je zhuštěnější než podélně obtékané stěny. Výsledek výpočtu najdeme v grafu 30 a 31.



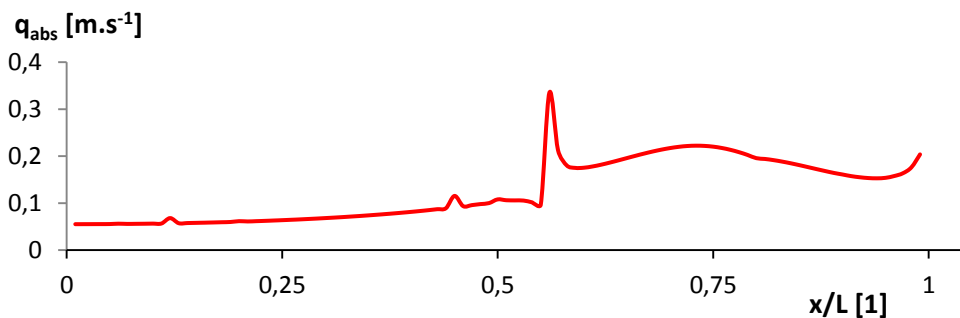
Graf 30 Hustota vířivosti po profilu podélně natékaného obdélníkového profilu



Graf 31 Normálové rychlosti

Podmínka III se ukázala jako dobrá varianta, která obecně dává kvalitní výsledky, v předchozích příkladech jednoduchých profilů. Přesto v případě obdélníkového profilu, výsledky naprosto ztroskotávají. V této konfiguraci jako nejlepší vychází podmínka II.

Při bližším pohledu na vliv poměrné vzdálenosti referenčních bodů na absolutní průtočnost profilu dostaneme pro variantu III graf 32.



Graf 32 Normálové rychlosti

Je vidět, že v případě obtékání obdélníkového profilu je volba relativní vzdálenosti referenčních bodů s hodnotou větší než 0,4 velkou chybou. Volbou $l_{ref} = 0,2$ nabývá pro podmínku III q_{abs} hodnoty $0,06169 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. To je oproti původní hodnotě $0,2173 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ zlepšení o více než 71 %. Důvod takového chování charakteristiky $q_{abs}(x/L)$ není znám. Přes odlišnou volbu zůstává lepší volbou okrajové podmínky varianta II, která má absolutní průtočnost $0,008 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Vektorové pole pro případ obtékání obdélníkového profilu je umístěno v příloze D (spočteno s podmínkou II).

8 ZÁVĚREČNÉ ZHODNOCENÍ

Metoda hraničních vířivých elementů je rychlá a efektivní metoda pro výpočet proudění kolem profilů. Její přesnost je zakotvena v okrajových podmínkách. Volba okrajových podmínek má největší vliv na kvalitu výstupu programu. Okrajové podmínky čerpané z literatury [7] jsou dvěma extrémy, které lze aplikovat v metodě s rozložením hustoty vířivosti po elementu ve tvaru polynomu 3. stupně.

Podmínka s jedním referenčním bodem a spojitostí hustoty vířivosti i její první derivace klade důraz na spojitý průběh hustoty vířivosti, což není vhodné pro každý případ. Vhodnost této podmínky spočívá především v modelování malého okolí na obtékaném profilu, kde je podmínka schopna s velkou přesností podchytit proudění díky hladkému průběhu hustoty vířivosti, který vzniká.

Podmínka se dvěma referenčními body na elementu profilu zaručuje v těchto bodech nulové normálové a tečné rychlosti. Její předností je aplikace na profily dlouhé ve směru proudící kapaliny. Podmínka nepředepisuje spojitost hustoty vířivosti v uzlových bodech. Proto se nepřenáší na dlouhé profily kmitání hustoty vířivosti z náběžné hrany.

Mezi tyto dvě podmínky jsem navrhl podmínku třetí, která kombinuje výhody obou, předepisuje spojitost průběhu hustoty vířivosti, ale již ne první derivace, čímž se značně oprostí kmitání po délce profilu a zároveň je předepsána podmínka nepropustnosti profilu ve dvou bodech. Referenční bod ve středu elementu zaručuje podmínku ulpívání kapaliny na profilu.

I když se ve většině případů zdá být třetí podmínka se třemi referenčními body zlatou střední cestou, ne vždy jsou výsledky této okrajové podmínky dobré, jako v případě podélného obtékání obdélníkového profilu (kapitola 7.4) nebo v případě elipsy obtékané ve směru hlavní poloosy (kapitola 7.3). V těchto případech se ukázalo, že pevně zvolený parametr l_{ref} poměrné vzdálenosti referenčních bodů nevyhovuje všem případům obtékaných profilů.

Možným řešením, jak zkvalitnit volbu okrajových podmínek, a tak výsledky metody, je zavést rozhodovací proceduru, která určí, jaká z podmínek a případně jaké další parametry budou zvoleny pro optimální modelování proudění v určité oblasti nebo v celkovém rozsahu domény. Avšak do doby, než budou popsány všechny souvislosti mezi modelem, zvolenými parametry a výsledkem, bude rozhodovacím prvkem uživatel sám. Uživatel aplikace VEMethod musí obsáhnout pokročilé znalosti modelování proudění, aby byl schopen posoudit kvality zvolené podmínky a správně zvolit okrajové podmínky pro řešený problém.

9 ZÁVĚR

Metoda hraničních vířivých elementů je alternativou dnes nejrozšířenějšímu softwaru na bázi metody konečných objemů. Metoda hraničních vířivých elementů vyniká svojí rychlostí, protože není prováděn výpočet v celém modelovaném objemu, ale pouze na hranici. Tento fakt si vybírá také svoji daň a to formou omezení, protože na povrchu existují body, v nichž nelze spočítat indukovanou rychlost.

Obecně aplikaci této metody spatřuji v oblasti návrhu, optimalizace a výpočtů lopatkových profilů, protože je tato metoda v porovnání s běžnými CFD softwary mnohem rychlejší, což umožňuje efektivní zapojení do optimalizační smyčky. V současné době metoda prezentovaná v této práci není aplikována k takovým účelům.

Tato diplomová práce, jejímž dílčím úkolem bylo naprogramovat metodu hraničních vířivých elementů pro 2D proudění kapalin, obsahuje a rozebírá problematiku okrajových podmínek, jejichž vliv na výsledky je zcela zásadní. Především je věnován prostor kmitání hustoty vířivosti pro okrajovou podmínku se spojeným průběhem hustoty vířivosti a její první derivace.

V práci jsem navrhl novou sadu okrajových podmínek, která vykazuje velice dobré výsledky. Existují však případy, kdy tomu tak není. Výsledky poskytované touto sadou okrajových podmínek můžeme ovlivnit proměnným parametrem uložení referenčních bodů.

Jedním z cílů diplomové práce bylo ověřit okrajové podmínky na jednoduchých profilech. To je splněno v kapitole 7, kde se také ukazují výhody a nevýhody naprogramovaných okrajových podmínek.

Tato práce poskytuje základ pro další odhalování souvislostí mezi vstupním modelem, volbou okrajových podmínek a výsledkem. V textu práce bylo nastíněno několik nepopsaných jevů. Popisem těchto jevů dostojí metoda výraznému zpřesnění. Dalšími kroky v práci by mohla být restrukturalizace kódu programu a zefektivnění numerických výpočtů. Krok správným směrem je redukce matice obsahující podmínky spjitosti. Tím je dosaženo téměř zdvojnásobení rychlosti výpočtu, protože Gaussova eliminační metoda využitá k řešení hlavní matice je velice operačně náročná. Potřebný počet operací je asi roven třetí mocnině šířky matice.

Metoda hraničních vířivých elementů má fyzikální základ v mezní vrstvě utvářené na rozhraní profilu a proudící kapaliny. Důležitým krokem k rozšíření metody v poli aplikací je propojení s modelováním mezní vrstvy konečné tloušťky.

LITERATURA

- [1] ANDERSON, J.D. Jr. Incompressible Inviscid Flows: Source and Vortex Panel Methods. *Computational Fluid Dynamics*. Heidelberg: Springer-Verlag Berlín, 2009. s. 53-75. ISBN 978-3-540-85055-7.
- [2] BRDIČKA, M. – SAMEK, L. – SOPKO, B. Vířivé vlákno v nestlačitelné tekutině. In *Mechanika kontinua*. 4. vyd. Praha: Academia, 2011. Kapitola 16.3, s. 598-603. ISBN 978-80-200-2039-0.
- [3] BREBBIA, C. A. – DOMINQUEZ, J., Boundary Elements—An Introductory Course, 2. edition., *Computational Mechanics Publications*, Southampton, England, and McGraw-Hill, New York, 1991.
- [4] LEWIS, R.I. *Vortex element methods for fluid dynamic analysis of engineering systems*. Cambridge: Cambridge University Press, 1991. ISBN 0-521-36010-2.
- [5] ŘÍHÁK, J. *Metoda hraničních vířivých elementů se spojitým rozložením vířivosti a její aplikace na 2D proudění*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2005. 47 s. Vedoucí diplomové práce Ing. Jaroslav Štigler, Ph.D.
- [6] ŠTIGLER, Jaroslav. *Přednášky z předmětu Teorie hydraulických strojů*, 2012, VUT Brno.
- [7] ŠTIGLER, Jaroslav. *Metoda hraničních vířivých elementů pro 2D proudění. Část 1*. Brno, 2005. VUT-EU13303-QR-01-05. Technická zpráva. VUT Brno.
- [8] ŠTIGLER, Jaroslav. Models of the vortex in real fluid. In *ENGINEERING MECHANICS 2000, proceedings of the international conference May 15-18 2000, Svratka Czech Republic. Volume IV. Fracture Mechanics, Reliability of Structures, Fluid Mechanics, Thermodynamics*. 1st edition. Prague: Institute of Theoretical and Applied Mechanics Academy of Sciences of the Czech Republic, 2000. s. 155-160. ISBN 80-86246-07-8
- [9] ŠTIGLER, Jaroslav. Rovinný vír a jeho matematické modelování, *Habilitační přednáška*. Brno, 2008.

SEZNAM SYMBOLŮ

∇	-	matematický operátor Nabla
\vec{v}	$\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$	rychlost proudění
v_i	$\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$	rychlost proudění
v_∞	$\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$	rychlost paralelního proudu
$v_{(L)i}$	$\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$	samoindukovaná rychlost
ν	$\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$	kinematická viskozita (ný)
ϕ	$\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$	potenciál
x	m	poloha
x_k	m	bod na vírovém vlákne nebo stěně
x_k'	m	bod indukované rychlosti
$x_{(0)k}$	m	kolmý průmět bodu indukované rychlosti na vírovou stěnu
r	m	poloměr
$r_{(0)}$	m	vzdálenost od kolmého průmětu k bodu indukované rychlosti
R_c	m	poloměr vírového jádra
Λ	$\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$	síla zdroje/propadu
μ	$\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$	intenzita vírového vlákna
γ	$\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$	hustota vířivosti
Γ	$\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$	cirkulace
Γ_j	$\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$	příspěvek cirkulace od jednoho elementu
Γ_0	$\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$	celková cirkulace víru
Γ_ρ	$\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$	cirkulace uzavřená uvnitř jádra víru
Γ_C	$\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$	celková cirkulace jádra víru
θ	rad	úhel natočení
τ_k	1	tečný jednotkový vektor
n_k	1	normálový vektor
ε_{i3k}	-	Levi – Cívítův tenzor
t	s	parametr času
ω	$\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$	úhlová rychlost rotujícího válce
Ω_k	$\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$	vektor víru rychlosti
A_k	$\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$	koeficient polynomu hustoty vířivosti
$A_{(m,0-3)}$	$\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$	koeficient polynomu hustoty vířivosti
V	m^3	kontrolní objem
a	%	procentuální odchylka
s	m	parametr křivky
ε	m	blízké okolí bodu na vírové stěně
α	rad	úhel sevřená kolmicí odsazení od vírové stěny a osy x_2
L'	N	vztlaková síla
ρ_∞	$\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$	hustota natékající tekutiny v ustáleném proudu
p	m	parametr po délce elementu

$u_{(n)}$	-	n . uzlový bod
$L_{(n)}$	m	délka n . uzlového bodu
$S_{(a)}$	m	hodnota parametru křivky v počátečním bodě elementu
$g_{(c)i}$	m	parametr polynomu indukované rychlosti závislý na geometrii
$I'_{(1,c)}$	1	řešení prvního integrálu pro $r_{(0)} \neq 0$
$I'_{(2,c)}$	m	řešení druhého integrálu pro $r_{(0)} \neq 0$
$I^*_{(c)}$	m	řešení integrálu pro $r_{(0)} = 0$
$U_{(n)i}$	$m \cdot s^{-1}$	unášivá složka rychlosti
A	-	řešená matice problému
x	-	vektor neznámých
b	-	vektor pravých stran
Δ_γ	$m \cdot s^{-1}$	odchylka hustoty vířivosti
$\Delta_{\gamma max}$	$m \cdot s^{-1}$	maximální odchylka hustoty vířivosti
β	°	úhel sevřený sousedními elementy profilu
q_m	$m \cdot s^{-1}$	měrný průtok do profilu
q_{abs}	$m \cdot s^{-1}$	absolutní průtočnost povrchu

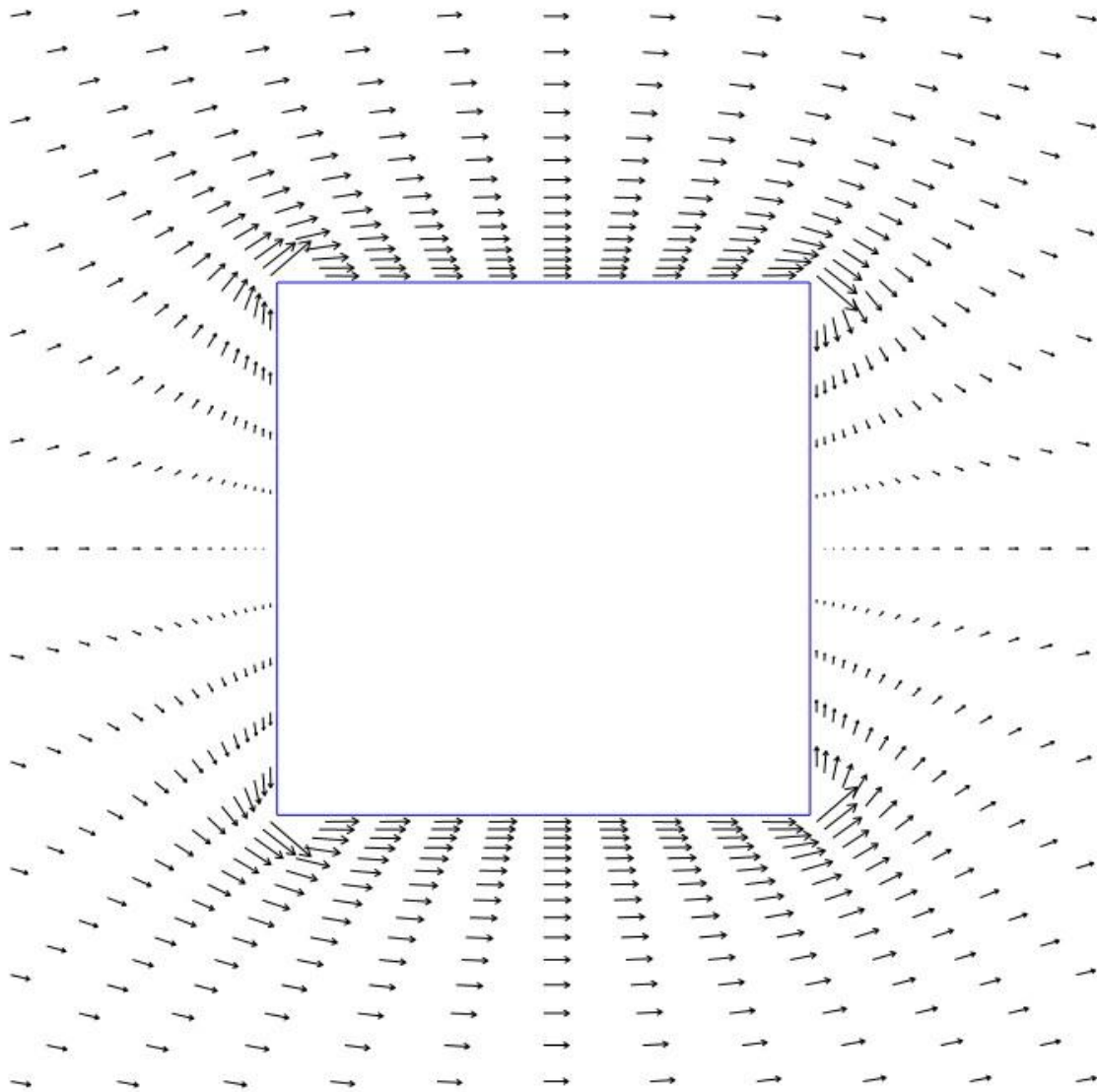
SEZNAM PŘÍLOH

Příloha A	Vektorové pole v okolí obtékaného čtvercového profilu pro podmínku III ($l_{ref} = 0,7$)
Příloha B	Vektorové pole v okolí obtékaného kruhového profilu pro podmínku III ($l_{ref} = 0,7$)
Příloha C	Vektorové pole v okolí podélně obtékaného elipsového profilu podmínky III ($l_{ref} = 0,7$)
Příloha D	Vektorové pole v okolí podélně obtékaného obdélníkového profilu podmínky II ($l_{ref} = 0,7$)
Příloha E	CD, obsahuje: <ul style="list-style-type: none"> - elektronickou verzi diplomové práce - program VEMethod verze 1.5 - soubory .MSH počtených profilů - projekt VEMethod pro Microsoft Visual Studio 2010

10 PŘÍLOHY

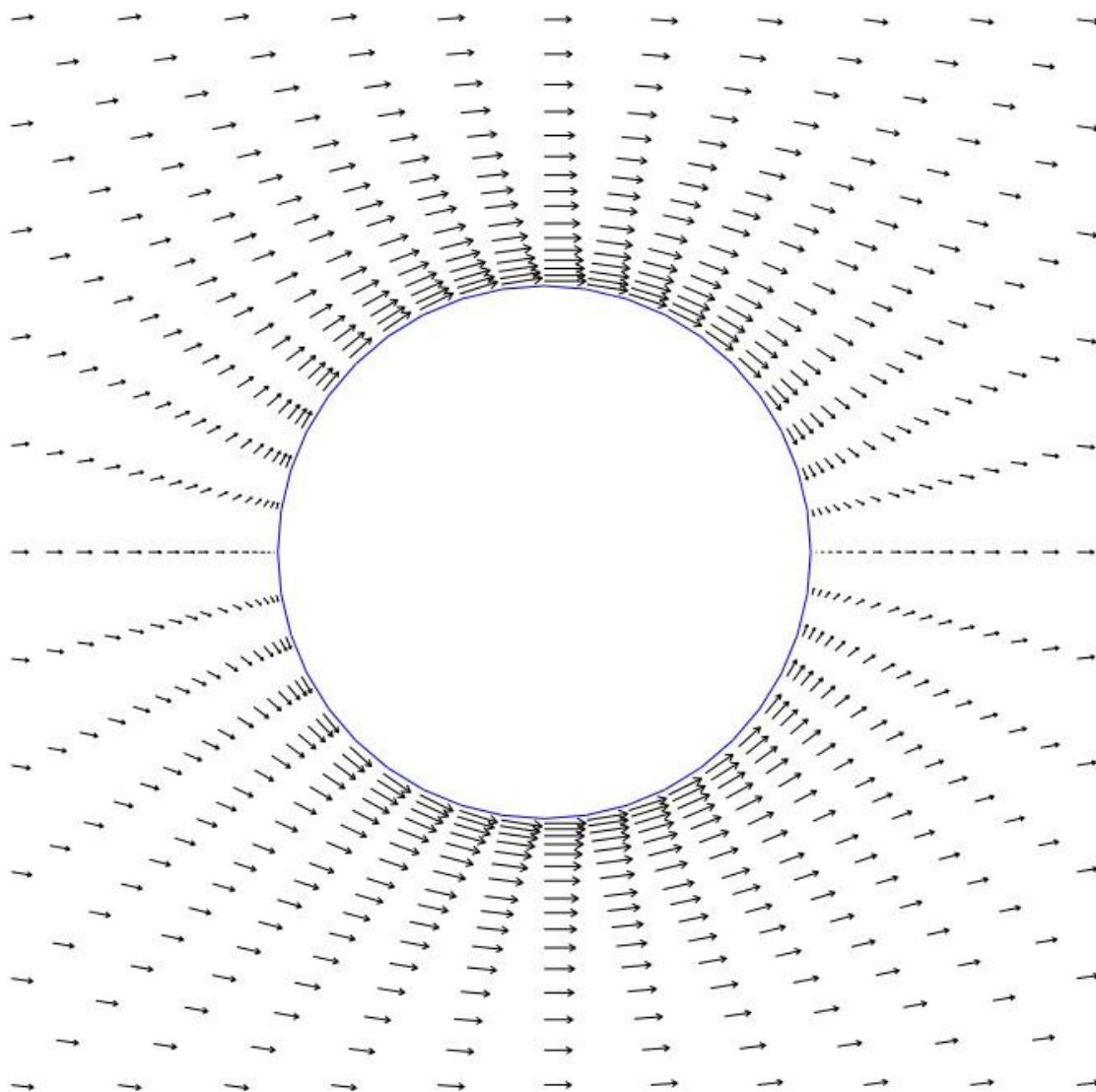
Příloha A

Vykreslení vektorového pole pro obtékání čtvercového profilu. Strana čtverce je dlouhá 1 m. Výpočet proveden s okrajovou podmínkou tří referenčních bodů (III). Parametr $l_{ref} = 0,7$. Profil má 40 elementů. Řešení spočteno pro rychlost natékající kapaliny $1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.



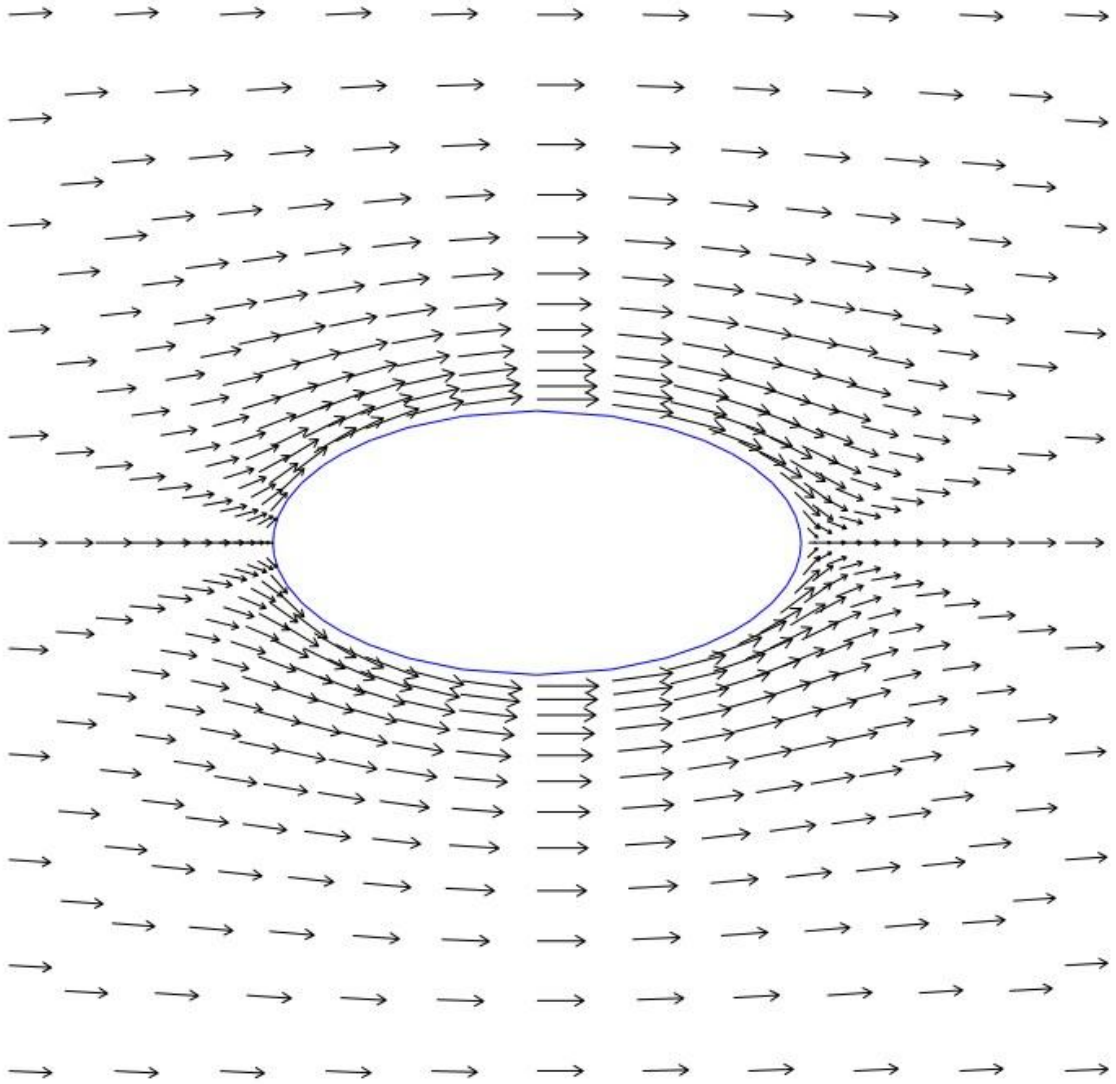
Příloha B

Vykreslení vektorového pole pro obtékání kruhového profilu. Kruh má poloměr 5 m. Výpočet proveden s okrajovou podmínkou tří referenčních bodů (III). Parametr $l_{ref} = 0,7$. Profil má 40 elementů. Řešení spočteno pro rychlost natékající kapaliny $1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.



Příloha C

Vykreslení vektorového pole pro podélné obtékání elipsovitého profilu. Elipsa má hlavní poloosu $a = 0,5$ m, vedlejší poloosu $b = 0,25$ m. Výpočet proveden s okrajovou podmínkou tří referenčních bodů (III). Parametr $l_{ref} = 0,7$. Profil má 40 elementů. Řešení spočteno pro rychlost natékající kapaliny $1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.



Příloha D

Vykreslení vektorového pole pro podélné obtékání obdélníkového profilu. Obdélník má strany $a = 1$ m, $b = 0,25$ m. Výpočet proveden s okrajovou podmínkou nulových rychlostí (II). Parametr $l_{ref} = 0,7$. Profil má 40 elementů. Řešení spočteno pro rychlost natékající kapaliny $1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

