

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
ÚSTAV MATEMATIKY
FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
INSTITUTE OF MATHEMATICS

SYNTÉZA POSLOUPNOSTI DIGITÁLNÍCH OBRAZŮ
S POHYBLIVÝM OBJEKTEM
SYNTHESIS OF DIGITAL IMAGE SEQUENCE WITH MOVING OBJECT

DIPLOMOVÁ PRÁCE
MASTER'S THESIS

AUTOR PRÁCE
AUTHOR

Bc. JAN ČERMÁK

VEDOUCÍ PRÁCE
SUPERVISOR

prof. RNDr. MILOSLAV DRUCKMÜLLER, CSc.

Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství

Ústav matematiky

Akademický rok: 2013/2014

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

student(ka): Bc. Jan Čermák

který/která studuje v **magisterském navazujícím studijním programu**

obor: **Matematické inženýrství (3901T021)**

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma diplomové práce:

Syntéza posloupnosti digitálních obrazů s pohyblivým objektem

v anglickém jazyce:

Synthesis of digital images sequence with moving object

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Popsat metody umožňující složení posloupnosti digitálních obrazů s pohyblivým objektem v jediný výsledný obraz, na kterém je ostrý objekt i pozadí. Zobecnit tyto metody na případ proměnné intenzity pozadí.

Cíle diplomové práce:

Vytvořit počítačový program implementující uvedené metody. Otestovat tento program na posloupnosti obrazů komety pohybující je na pozadí hvězdné oblohy.

Seznam odborné literatury:

Šonka, Hlaváč : Počítačové vidění, Grada 1998

Vedoucí diplomové práce: prof. RNDr. Miloslav Druckmüller, CSc.

Termín odevzdání diplomové práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2013/2014.

V Brně, dne 19.11.2013

L.S.

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc.
Ředitel ústavu

prof. RNDr. Miroslav Doupovec, CSc., dr. h. c.
Děkan fakulty

Abstrakt

Práce se zabývá metodami syntézy posloupnosti digitálních obrazů s pohyblivým objektem. Nejdříve jsou vysvětleny základní pojmy z Fourierovy analýzy a statistiky důležité k pochopení problematiky a následně jsou popsány metody používané k vlastní syntéze, které byly testovány na sérii snímků komety pohybující se na pozadí hvězdné oblohy. Následuje jejich porovnání a zhodnocení výsledků.

Summary

This master's thesis deals with methods for synthesis of digital image sequence with moving object. At first, we describe basic concepts from Fourier analysis and statistics that are essential for understanding the issue and afterwards we describe methods for the synthesis that were tested on a series of images of a comet moving on a background of a night sky. Finally, we compare the methods and analyse the outcomes.

Klíčová slova

Syntéza posloupnosti digitálních obrazů, pohyblivý objekt, zpracování obrazů, dvojrozměrná Fourierova transformace, programování v Delphi.

Keywords

Synthesis of digital image sequence, moving object, image processing, two-dimensional Fourier transform, Delphi programming.

ČERMÁK, J. *Syntéza posloupnosti digitálních obrazů s pohyblivým objektem*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2014. 75 s. Vedoucí diplomové práce prof. RNDr. Miloslav Druckmüller, CSc..

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci Syntéza posloupnosti digitálních obrazů s pohyblivým objektem vypracoval samostatně pod vedením prof. RNDr. Miloslava Druckmüllera, CSc. s použitím materiálů uvedených v seznamu literatury.

Bc. Jan Čermák

Děkuji vedoucímu mé práce panu prof. RNDr. Miloslavu Druckmüllerovi, CSc. za čas strávený na konzultacích a za poskytnuté snímky komety pro testování. Děkuji Lence za pomoc při psaní, za opravy a za podporu. Děkuji také své rodině za podporu při studiu.

Bc. Jan Čermák

Obsah

1	Úvod	3
2	Dvojměrná diskrétní Fourierova transformace	4
2.1	Dvojdímní signály	4
2.1.1	Dvojdímní spojitý a diskrétní signály	4
2.1.2	Periodické signály	6
2.1.3	Periodizace signálu	6
2.1.4	Popis signálu v prostorové a frekvenční oblasti	7
2.1.5	Digitální signály	7
2.2	Fourierova transformace a Fourierova řada spojitého 2-D signálu	8
2.2.1	Fourierova transformace	8
2.2.2	Fourierova řada	13
2.2.3	Vztah mezi Fourierovou transformací a Fourierovou řadou	19
2.3	Fourierova transformace a Fourierova řada diskrétního 2-D signálu	21
2.3.1	Fourierova transformace diskrétního signálu	22
2.3.2	Vztah Fourierovy transformace spojitého a diskrétního signálu	25
2.3.3	Vzorkovací teorém	27
2.3.4	Fourierova transformace diskrétního signálu jako kvadratura Fourierovy transformace spojitého signálu	29
2.3.5	Fourierova řada diskrétního signálu	30
2.3.6	Souvislost Fourierovy řady spojitého a diskrétního signálu	34
2.3.7	Vztah mezi Fourierovou transformací diskrétního signálu a Fourierovou řadou diskrétního signálu	36
2.3.8	Přechod od Fourierovy řady spojitého periodického signálu k Fourierově řadě diskrétního signálu pomocí kvadratury	38
2.3.9	Dualita diskretizace a periodizace signálu	39
2.4	Dvojměrná diskrétní Fourierova transformace	39
2.4.1	Vztah DFT k Fourierově řadě diskrétního signálu	40
2.4.2	Podmínky existence DFT	41
2.4.3	Vlastnosti DFT	41
2.5	Základní možnosti použití 2-D DFT	42
2.5.1	Interpolace dat	43
3	Základní pojmy ze statistiky	45
3.1	Obecné pojmy	45
3.2	Popisná statistika	49
3.2.1	Metody zpracování dat	50
4	Syntéza posloupnosti digitálních obrazů	53
4.1	Metody pro syntézu digitálních obrazů	53
4.1.1	Vlastní metody	54
4.1.2	Metody zamítnutí pixelu	56
4.1.3	Normalizace obrazu	58

5	Softwarová implementace	61
5.1	Procedury	61
5.1.1	Normalise	61
5.1.2	Average	62
5.1.3	Median	62
5.1.4	Sigma Clipping	62
5.1.5	Sigma Median Clipping	62
5.2	Výsledky	62
6	Závěr	67
7	Seznam použitých zkratk a symbolů	71
A	Ukázky z programu	72
A.1	Normalise	72
A.2	Average	72
A.3	Median	73
A.4	Sigma Clipping	74
A.5	Sigma Median Clipping	75

1. Úvod

Motivace pro zadání této práce pochází z fotografování hvězdné oblohy, na které se pohybuje kometa. Snímky hvězdné oblohy se vždy pořizují vícekrát a poté se kombinují v jeden výsledný obraz kvůli zlepšení poměru signál-šum. Zde není úkol tak jednoduchý, záleží totiž na tom, s jakými snímky pracujeme. Můžeme mít snímky sesazené na hvězdy (tj. hvězdy jsou na všech snímcích na odpovídajících si místech) nebo na kometu. Při prostém sečtení máme buď ostré hvězdy a rozmazanou kometu nebo naopak. Pro zpracování těchto snímků jsou tedy třeba pokročilejší metody. Naším cílem je výsledek, ve kterém budou ostré jak hvězdy, tak kometa (tzn. jak pozadí, tak pohybující se objekt).

V rámci této práce popíšeme metody umožňující složení posloupnosti digitálních obrazů s pohyblivým objektem v jediný výsledný obraz a následně tyto metody zobecníme na případ proměnné intenzity pozadí. Tyto metody jsme implementovali do počítačového programu, který jsme testovali na posloupnosti obrazů komety pohybující se na pozadí hvězdné oblohy.

Dříve, než se v textu dostaneme k popisu zmíněných metod, popíšeme si teoretické základy pro ně potřebné. Jsou to dvojrozměrná diskrétní Fourierova transformace pro zobecnění metod na případ proměnné intenzity pozadí v Kapitole 2, kde se zabýváme popisem čtyř objektů důležitých pro zavedení dvojrozměrné diskrétní Fourierovy transformace, a sice Fourierovou transformací spojitého signálu, Fourierovou řadou spojitého periodického signálu, Fourierovou transformací diskrétního signálu a Fourierovou řadou diskrétního periodického signálu. Uvádíme zde jejich vlastnosti a podmínky existence. Dále se v Kapitole 3 zabýváme některými pojmy ze statistiky, zejména z popisné, potřebné pro samotné metody syntézy. V kapitole 4 popíšeme tyto metody a jejich vlastnosti. Následuje závěrečná Kapitola 5, kde se zabýváme programovou implementací těchto metod a představíme a porovnáme si výsledky, jaké jednotlivé metody dávají.

V přílohách najdeme ukázky zdrojového kódu z programu implementujícího uvedené metody. K diplomové práci přikládám také CD, na kterém najdeme tento program a také ukázky snímků pro testování před a po zpracování.

2. Dvojměrná diskretní Fourierova transformace

Pro potřeby této diplomové práce je třeba vysvětlit důležitý pojem Fourierovy řady a Fourierovy transformace, zejména pak její modifikace Dvojměrné diskretní Fourierovy transformace.

V celé řadě oborů se často měřením, či jinou cestou, získávají soubory dat naměřených v uzlových bodech pravidelné obdélníkové sítě. Většinou chápeme tato data jako diskretně odebrané vzorky nějaké funkce představující fyzikální model skutečnosti a naší snahou je získat jejich zpracováním co možná nejúplnější informace o studovaném jevu. Mezi nástroji k tomu sloužící zaujímá velmi důležité postavení právě dvojměrná diskretní Fourierova transformace (2-D DFT). 2-D DFT je přirozeným způsobem zavedeným dvojměrným zobecněním jednorozměrné diskretní Fourierovy transformace.

V této kapitole budeme nejprve definovat některé dále používané pojmy, dále se budeme zabývat výkladem integrální Fourierovy transformace a Fourierovy řady ve dvou dimenzích. Následně definujeme diskretní ekvivalenty Fourierovy transformace a řady, poté už přistoupíme k základním vlastnostem 2-D DFT a možnostem jejího použití. V této kapitole vycházíme především z [1], [2] a [5].

Uvedené věty budeme uvádět bez důkazů, ty je možno najít v použité literatuře.

2.1. Dvojdímní signály

2.1.1. Dvojdímní spojitý a diskretní signály

Základními pojmy, se kterými budeme pracovat, jsou pojmy dvojdímního (2-D) spojitého a diskretního signálu. Pod pojmem 2-D spojitého signálu si budeme představovat funkci dvou reálných, zatímco pod pojmem 2-D diskretního signálu funkci dvou celočíselných proměnných. Přívlástek spojitý nebo diskretní tedy nebude vyjadřovat vlastnosti příslušné funkce, ale jejího definičního oboru. Spojitý signál může být reprezentován funkcí, která není v matematickém smyslu spojitá. Diskretní signál chápeme jako přirozený protějšek spojitého signálu, který vznikne jeho diskretizací neboli vzorkováním. Z hlediska jednoduchosti popisu a efektivity numerického zpracování mají největší význam 2-D diskretní signály, které vznikly pravoúhlým ekvidistantním vzorkováním 2-D spojitého signálu, tj. vzorkováním v pravidelné obdélníkové síti. Dále budeme uvažovat jen takovéto signály. Slovo dvojdímní (2-D) budeme proto často vypouštět. Pro jednoduchost budeme také vypouštět přívlástek spojitý či diskretní, když bude z kontextu či označení jasné, o jaký typ signálu se jedná.

Definice 2.1. Spojitým dvojdímním (2-D) signálem budeme nazývat reálnou (či komplexní) funkci $s(t_1, t_2)$ dvou reálných proměnných t_1, t_2 , jejímž definičním oborem je celá reálná rovina \mathbb{R}^2 .

Definice 2.2. Diskretním dvojdímním (2-D) signálem budeme nazývat reálnou (či komplexní) funkci $x(n_1, n_2)$ dvou celočíselných proměnných n_1, n_2 , která vznikla

2. DVOJROZMĚRNÁ DISKRÉTNÍ FOURIEROVA TRANSFORMACE

pravoúhlým ekvidistantním vzorkováním (diskretizací) spojitého signálu $s(t_1, t_2)$ s kroky vzorkování Δ_1 v první a Δ_2 ve druhé proměnné tak, že platí

$$x(n_1, n_2) = s(n_1\Delta_1, n_2\Delta_2), \quad (2.1)$$

kde n_1, n_2 jsou celá čísla, $(n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2$. Jak je vidět, jde vlastně o dvojdimenzionální posloupnost. Jednotlivé hodnoty posloupnosti $x(n_1, n_2)$ nazýváme **vzorky signálu** $s(t_1, t_2)$.

Volba definičního oboru signálu jako celé \mathbb{R}^2 či \mathbb{Z}^2 se může zdát na první pohled nevhodná, protože v praxi často pracujeme se signály, které jsou zadány jen na určitém intervalu z \mathbb{R}^2 či na konečné množině ze \mathbb{Z}^2 . Důvodem takovéto volby je jednoduchost matematického popisu vlastností, které budeme uvádět dále. Libovolný signál, který je zadán jen na určitém intervalu z \mathbb{R}^2 či na konečné množině ze \mathbb{Z}^2 , můžeme vhodně prodloužit na celé \mathbb{R}^2 či \mathbb{Z}^2 , např. pomocí jeho periodického opakování nebo doplnění nulami. Dále také uvidíme, že samotná práce s Fourierovými řadami či DFT s sebou nese automaticky to, že pracujeme s periodickým prodloužením signálu, eventuelně s periodizovaným signálem v celém oboru \mathbb{R}^2 či \mathbb{Z}^2 . Důležitým pojmem, který budeme dále používat, je pojem nosiče signálu.

Definice 2.3. **Nosičem spojitého signálu** nazýváme uzávěr té podmnožiny definičního oboru, ve které signál nabývá nenulových hodnot.

Definice 2.4. V případě, že nosičem spojitého signálu je nějaká omezená podmnožina z \mathbb{R}^2 , hovoříme o signálu s **konečným nosičem** nebo o prostorově omezeném signálu.

Příkladem takového signálu je signál $s(t_1, t_2)$, pro který platí

$$\begin{aligned} s(t_1, t_2) &\neq 0, & 0 \leq t_1 \leq Q_1, & 0 \leq t_2 \leq Q_2, \\ s(t_1, t_2) &= 0 & \text{jinde.} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Nosič tohoto signálu je obdélník

$$P_{Q_1, Q_2} = \{(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq t_1 \leq Q_1, 0 \leq t_2 \leq Q_2\}. \quad (2.3)$$

Všimněme si, že spojitý signál 2.2 je reprezentován obecně nespojitou funkcí.

Pojem nosiče se zpravidla zavádí pro spojité signály. Jelikož dále budeme pracovat s diskrétními signály, které vznikly diskretizací signálů spojitých, je výhodné zavést též pojem nosiče diskrétního signálu.

Definice 2.5. **Nosičem diskrétního signálu** budeme nazývat tu podmnožinu \mathbb{Z}^2 , ve které nabývá diskrétní signál nenulových hodnot. V případě, kdy nosičem diskrétního signálu je konečná podmnožina \mathbb{Z}^2 , hovoříme o **diskrétním signálu s konečným nosičem**.

Příkladem takového signálu je signál $x(n_1, n_2)$, pro který platí

$$\begin{aligned} x(n_1, n_2) &\neq 0, & 0 \leq n_1 \leq M_1 - 1, & 0 \leq n_2 \leq M_2 - 1, \\ x(n_1, n_2) &= 0 & \text{jinde.} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Nosič tohoto signálu můžeme zapsat

$$P_{M_1, M_2} = \{(n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2 : 0 \leq n_1 \leq M_1 - 1, 0 \leq n_2 \leq M_2 - 1\}. \quad (2.5)$$

2.1. DVOJDIMENZIONÁLNÍ SIGNÁLY

2.1.2. Periodické signály

Pro další výklad budeme v textu také potřebovat signály periodické.

Definice 2.6. Periodickým (2-D) spojitým signálem budeme nazývat každý spojitý signál $\tilde{s}(t_1, t_2)$, pro který existuje dvojice reálných čísel (T_1, T_2) taková, že

$$\tilde{s}(t_1 + T_1, t_2) = \tilde{s}(t_1, t_2),$$

$$\tilde{s}(t_1, t_2 + T_2) = \tilde{s}(t_1, t_2)$$

pro všechna $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$. Nejmenší z čísel T_1 resp. T_2 , pro které je toto splněno, budeme nazývat **první** resp. **druhou periodou** a příslušnou dvojici T_1, T_2 pak periodou signálu $\tilde{s}(t_1, t_2)$.

Definice 2.7. Obdobně periodickým (2-D) diskretním signálem budeme nazývat každý diskretní signál $\tilde{x}(n_1, n_2)$, pro který existuje dvojice přirozených čísel (N_1, N_2) taková, že

$$\tilde{x}(n_1 + N_1, n_2) = \tilde{x}(n_1, n_2),$$

$$\tilde{x}(n_1, n_2 + N_2) = \tilde{x}(n_1, n_2)$$

pro všechna $(n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2$. Nejmenší z čísel N_1 resp. N_2 , pro které je toto splněno, budeme nazývat **první** resp. **druhou periodou** a příslušnou dvojici (N_1, N_2) pak periodou signálu $\tilde{x}(n_1, n_2)$.

Poznámka. Pro odlišení periodického signálu od neperiodického jsme použili vlnku nad symbolem označujícím signál. Dále bude vlnka nad symbolem označujícím libovolnou funkci vyjadřovat, že jde o funkci periodickou.

Pracujeme-li s periodickým signálem, stačí (stejně jako u periodické funkce) uvažovat jeho hodnoty pouze z nějakého intervalu nezávisle proměnných odpovídajícího jedné periodě, tj. z nějakého intervalu periodicity. Nejčastěji užíváme intervaly

$$\langle 0, T_1 \rangle \times \langle 0, T_2 \rangle, \left\langle -\frac{T_1}{2}, \frac{T_1}{2} \right\rangle \times \left\langle -\frac{T_2}{2}, \frac{T_2}{2} \right\rangle, \langle 0, N_1 - 1 \rangle \times \langle 0, N_2 - 1 \rangle$$

a nazýváme je **základní intervaly periodicity**.

2.1.3. Periodizace signálu

Jedna z možností, jak vytvořit periodický signál z neperiodického, je periodizace, která se provede nasčítáním spočetně mnoha vzájemně posunutých signálů. Periodický spojitý signál $\tilde{s}(t_1, t_2)$ s periodou (T_1, T_2) získáme periodizací signálu $s(t_1, t_2)$ pomocí vzorce

$$\tilde{s}(t_1, t_2) = \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} s(t_1 + k_1 T_1, t_2 + k_2 T_2) \quad (2.6)$$

a obdobně periodický diskretní signál $\tilde{x}(n_1, n_2)$ s periodou (N_1, N_2) získáme periodizací diskretního signálu $x(n_1, n_2)$ pomocí vzorce

$$\tilde{x}(n_1, n_2) = \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} x(n_1 + k_1 N_1, n_2 + k_2 N_2), \quad (2.7)$$

2. DVOJROZMĚRNÁ DISKRÉTNÍ FOURIEROVA TRANSFORMACE

kde $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ a přitom předpokládáme, že obě uvedené řady konvergují.

V případě, že signály $s(t_1, t_2)$ resp. $x(n_1, n_2)$ nemají konečný nosič, dojde k jejich překrývání v periodizovaných signálech $\tilde{s}(t_1, t_2)$ resp. $\tilde{x}(n_1, n_2)$. Stejně tak dojde k překrývání i v případě, že $s(t_1, t_2)$ resp. $x(n_1, n_2)$ mají konečný nosič, ale zvolíme nedostatečně velkou periodu (T_1, T_2) resp. (N_1, N_2) .

2.1.4. Popis signálu v prostorové a frekvenční oblasti

V sekci 2.1.1 jsme zavedli 2-D signál jako funkci dvou reálných či celočíselných proměnných. Jak uvidíme dále, dvojrozměrné varianty Fourierovy transformace a Fourierovy řady spojitého a diskrétního signálu jsou transformacemi, které přiřazují signálu další objekt - jeho obraz, tzv. **spektrum**, jež je opět funkcí dvou reálných či celočíselných proměnných nazývaných **frekvence**. Dvojice signál (vzor) a jeho transformace (obraz) se nazývá **Fourierův pár**. Manipulujeme-li se spektrem, říkáme, že pracujeme se signálem ve frekvenční oblasti. Protějškem pojmů frekvence a frekvenční oblast, které pocházejí z fyzikálních interpretací, jsou pojmy prostorová proměnná a prostorová oblast, které používáme, pracujeme-li s netransformovaným signálem. Používání pojmů prostorová proměnná a prostorová oblast je konvencí, prostorová proměnná nemusí mít nutně fyzikální rozměr délky.

Mezi funkcemi představujícími signál v prostorové a frekvenční oblasti je (při splnění určitých podmínek) vzájemně jednoznačný vztah a popis signálu v prostorové a frekvenční oblasti je z formálního hlediska rovnocenný - určitým charakteristickým vlastnostem signálu v prostorové oblasti jednoznačně odpovídají jisté charakteristické vlastnosti spektra ve frekvenční oblasti a obráceně. Při zpracování signálu je často výhodnější pracovat ve frekvenční oblasti, a to ze dvou důvodů. Jednak mají jednotlivé frekvenční složky, tj. hodnoty spektra na jednotlivých frekvencích, vlastní fyzikální smysl, nebo alespoň jasně daný geometrický význam, také je v řadě případů numerický výpočet některých operací, zejména konvoluce, ve frekvenční oblasti efektivnější.

2.1.5. Digitální signály

Vzhledem ke konečnému rozsahu čísel zobrazitelných v počítači vyžaduje numerická práce s diskrétním signálem (resp. se vzorky spojitého signálu), aby byly jeho hodnoty nějakým způsobem rozděleny do konečného počtu úrovní. Tento proces nazýváme **kvantování** a diskrétní signál, jehož hodnoty jsou kvantovány, nazýváme **digitální**. V současné době často přímo digitální signály získáváme. Počet úrovní kvantování může být v různých aplikacích velmi různý a při vlastních výpočtech pak pochopitelně dochází k chybám plynoucím z kvantování. Kvantováním se zde ale nebudeme zabývat, zmiňujeme ho jen pro ozřejmění pojmu digitální signál.

2.2. Fourierova transformace a Fourierova řada spojitého 2-D signálu

V následujících dvou sekcích probereme čtyři matematické objekty, které mají úzký vztah k 2-D DFT. Jsou to Fourierova transformace spojitého 2-D signálu, Fourierova řada spojitého periodického 2-D signálu, Fourierova transformace diskrétního 2-D signálu a Fourierova řada diskrétního periodického 2-D signálu. Uvedeme si základní vlastnosti a vzájemné vztahy této čtveřice objektů, které souhrnně označíme jako Fourierovy transformace. V tomto oddílu si osvětlíme první dva objekty, Fourierovu transformaci spojitého 2-D signálu a Fourierovu řadu spojitého periodického 2-D signálu. Budeme je zkráceně nazývat Fourierova transformace a Fourierova řada.

2.2.1. Fourierova transformace

V literatuře lze většinou najít buď podrobný výklad jednorozměrné Fourierovy transformace nebo náročnější výklad vícerozměrné Fourierovy transformace. V tomto oddílu se omezíme na výklad Fourierovy transformace spojitého 2-D signálu, základní podmínky její existence a její vlastnosti.

Definice 2.8. Za určitých podmínek, které probereme podrobněji dále, tvoří **Fourierův pár** spojitý 2-D signál $s(t_1, t_2)$ a jeho spektrum $S(\Omega_1, \Omega_2)$, přičemž

$$s(t_1, t_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S(\Omega_1, \Omega_2) \exp(i\Omega_1 t_1 + i\Omega_2 t_2) d\Omega_1 d\Omega_2, \quad (2.8)$$

$$S(\Omega_1, \Omega_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(t_1, t_2) \exp(-i\Omega_1 t_1 - i\Omega_2 t_2) dt_1 dt_2. \quad (2.9)$$

Vztah 2.9 nazýváme **přímou**, vztah 2.8 **inverzní Fourierovou transformací**.

Podmínky existence přímé a inverzní Fourierovy transformace

Existuje celá řada podmínek, při jejichž splnění popisují vztahy 2.8 a 2.9 vzájemně jednoznačný vztah mezi signálem $s(t_1, t_2)$ a jeho spektrem $S(\Omega_1, \Omega_2)$. Omezíme se na jednoduché příklady těchto podmínek.

Základní požadavek je samozřejmě existence integrálů na pravé straně 2.8 a 2.9.

Věta 2.1. *Existence integrálu 2.9 pro libovolná reálná Ω_1 a Ω_2 je zřejmě zaručena, jestliže*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |s(t_1, t_2)| dt_1 dt_2 < \infty. \quad (2.10)$$

*Signály s touto vlastností se nazývají **absolutně integrovatelné**.*

2. DVOJROZMĚRNÁ DISKRÉTNÍ FOURIEROVA TRANSFORMACE

Poznámka. Oba integrály v 2.8, 2.9 jsou v Lebesgueově smyslu. Můžeme si je však představit jako obyčejné Riemannovy integrály, neboť prakticky pro všechny signály, s nimiž se setkáváme, Riemannův i Lebesgueův integrál existují současně. Pro Lebesgueův integrál je podmínka 2.10 ekvivalentní s podmínkou

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(t_1, t_2) dt_1 dt_2 < \infty.$$

Poznámka. Protože v 2.10 můžeme změnit integrand na množině (dvojměrné) míry nula (např. na celé přímce), aniž se hodnota integrálu změní, chápeme ve smyslu integrovatelnosti všechny signály, jež se liší na množině míry nula, jako totožné.

Nadále budeme pro absolutně integrovatelný signál užívat označení $s \in L^1(\mathbb{R}^2)$. S použitím tohoto označení formulujeme následující tvrzení o inverzní Fourierově transformaci.

Věta 2.2. *Mějme signál $s \in L^1(\mathbb{R}^2)$, jehož spektrum S je dáno vzorcem 2.9 a pro nějž platí $S \in L^1(\mathbb{R}^2)$. Nechť navíc funkce, jež reprezentuje signál s , je spojitá. (Zde jde o spojitost funkce v běžném matematickém smyslu.) Pak vzorec 2.8 platí pro skoro všechna $t_1, t_2 \in \mathbb{R}^2$ (tj. všude v \mathbb{R}^2 až na případnou množinu míry nula).*

Oslabíme-li ve větě 2.2 předpoklady, dostaneme některá slabší tvrzení. Obecně však neplatí, že signálu $s \in L^1(\mathbb{R}^2)$ přísluší spektrum $S \in L^1(\mathbb{R}^2)$, ani obráceně. Z teoretického pohledu je zajímavé omezit se na takové signály, jejichž spektra mají stejné vlastnosti jako signály samotné.

Definice 2.9. Uvažujme signály s takové, že

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |s(t_1, t_2)|^2 dt_1 dt_2 < \infty. \quad (2.11)$$

Takové signály se nazývají **kvadraticky integrovatelné**. Značíme je $s \in L^2(\mathbb{R}^2)$.

Všimněme si, že i pro kvadraticky integrovatelné signály platí poznámka 2.2.1.

Protože z předpokladu $s \in L^2(\mathbb{R}^2)$ neplyne obecně $s \in L^1(\mathbb{R}^2)$, nemusí mít vzorec 2.9 smysl pro $s \in L^1(\mathbb{R}^2)$. Abychom rozšířili obor funkcí, pro něž existuje Fourierova transformace, na celé $L^1(\mathbb{R}^2)$, zavedeme obecnější přímou a inverzní Fourierovu transformaci vzorci

$$s_H(t_1, t_2) = \frac{1}{4\pi^2} \lim_{A \rightarrow \infty} \iint_{|\Omega_1^2 + \Omega_2^2| < A^2} S(\Omega_1, \Omega_2) \exp(i\Omega_1 t_1 + i\Omega_2 t_2) d\Omega_1 d\Omega_2, \quad (2.12)$$

$$S_H(\Omega_1, \Omega_2) = \lim_{A \rightarrow \infty} \iint_{|t_1^2 + t_2^2| < A^2} s(t_1, t_2) \exp(-i\Omega_1 t_1 - i\Omega_2 t_2) dt_1 dt_2, \quad (2.13)$$

$A \in \mathbb{R}$, tj. pomocí tzv. hlavních hodnot integrálů, jež jsou na pravé straně vzorců 2.8 a 2.9. Existuje-li integrál 2.8, pak zřejmě existuje i integrál 2.12 a platí $s_H = s$ (a podobně pro spektrum). Obrácené tvrzení však neplatí, integrál 2.12 resp. 2.13 může existovat, aniž by existoval integrál 2.8, resp. 2.9.

Nyní můžeme vyslovit tvrzení o Fourierově páru v $L^2(\mathbb{R}^2)$, tzv. Plancherelovu větu.

2.2. FOURIEROVA TRANSFORMACE A FOURIEROVA ŘADA SPOJITÉHO 2-D SIGNÁLU

Věta 2.3. *Nechť $s \in L^2(\mathbb{R}^2)$ Pak spektrum S_H , dané vzorcem 2.13, patří do $L^2(\mathbb{R}^2)$ a*

$$s(t_1, t_2) = \frac{1}{4\pi^2} \lim_{A \rightarrow \infty} \iint_{|\Omega_1^2 + \Omega_2^2| < A^2} S_H(\Omega_1, \Omega_2) \exp(i\Omega_1 t_1 + i\Omega_2 t_2) d\Omega_1 d\Omega_2, \quad (2.14)$$

$A \in \mathbb{R}$, pro skoro všechna $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$.

Budeme-li navíc předpokládat i $s \in L^1(\mathbb{R}^2)$, pak $S_H = S$ a vzorec 2.14 přejde ve vzorec 2.12.

Všechna uvedená tvrzení i úvahy zůstanou v platnosti, zaměníme-li vzájemně signál a spektrum.

Vlastnosti Fourierovy transformace

V této sekci si uvedeme základní vlastnosti Fourierovy transformace. Je potřeba si uvědomit, že pro správnou aplikaci některých vlastností je nutné, aby příslušný signál resp. jeho spektrum splňovali podmínky existence přímé resp. inverzní Fourierovy transformace.

- Fourierův pár

$$s(t_1, t_2) \longleftrightarrow S(\Omega_1, \Omega_2)$$

- Transformační vztahy

$$s(t_1, t_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S(\Omega_1, \Omega_2) \exp(i\Omega_1 t_1 + i\Omega_2 t_2) d\Omega_1 d\Omega_2$$

$$S(\Omega_1, \Omega_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(t_1, t_2) \exp(-i\Omega_1 t_1 - i\Omega_2 t_2) dt_1 dt_2$$

1. linearita

$$a s_1(t_1, t_2) + b s_2(t_1, t_2) \longleftrightarrow a S_1(\Omega_1, \Omega_2) + b S_2(\Omega_1, \Omega_2)$$

2. změna měřítka

$$s(a t_1, b t_2) \longleftrightarrow \frac{1}{|ab|} S\left(\frac{\Omega_1}{a}, \frac{\Omega_2}{b}\right)$$

3. posunutí signálu

$$s(t_1 - a, t_2 - b) \longleftrightarrow S(\Omega_1, \Omega_2) \exp(-ia\Omega_1 - ib\Omega_2)$$

4. modulace signálu

$$s(t_1, t_2) \exp(iat_1 + ibt_2) \longleftrightarrow S(\Omega_1 - a, \Omega_2 - b)$$

2. DVOJROZMĚRNÁ DISKRÉTNÍ FOURIEROVA TRANSFORMACE

5. derivování signálu

$$\begin{aligned}\frac{\partial s(t_1, t_2)}{\partial t_1} &\longleftrightarrow i\Omega_1 S(\Omega_1, \Omega_2) \\ \frac{\partial s(t_1, t_2)}{\partial t_2} &\longleftrightarrow i\Omega_2 S(\Omega_1, \Omega_2) \\ \frac{\partial^2 s(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} &\longleftrightarrow -\Omega_1 \Omega_2 S(\Omega_1, \Omega_2)\end{aligned}$$

6. derivování spektra

$$\begin{aligned}-i t_1 s(t_1, t_2) &\longleftrightarrow \frac{\partial S(\Omega_1, \Omega_2)}{\partial \Omega_1} \\ -i t_2 s(t_1, t_2) &\longleftrightarrow \frac{\partial S(\Omega_1, \Omega_2)}{\partial \Omega_2} \\ -t_1 t_2 s(t_1, t_2) &\longleftrightarrow \frac{\partial^2 S(\Omega_1, \Omega_2)}{\partial \Omega_1 \partial \Omega_2}\end{aligned}$$

7. transpozice

$$s(t_2, t_1) \longleftrightarrow S(\Omega_2, \Omega_1)$$

8. zrcadlení

$$\begin{aligned}s(-t_1, t_2) &\longleftrightarrow S(-\Omega_1, \Omega_2) \\ s(t_1, -t_2) &\longleftrightarrow S(\Omega_1, -\Omega_2) \\ s(-t_1, -t_2) &\longleftrightarrow S(-\Omega_1, -\Omega_2)\end{aligned}$$

9. komplexně sdružený signál

$$s^*(t_1, t_2) \longleftrightarrow S^*(-\Omega_1, -\Omega_2)$$

10. reálný signál

$$s(t_1, t_2) = s^*(t_1, t_2) \longleftrightarrow S(\Omega_1, \Omega_2) = S^*(-\Omega_1, -\Omega_2)$$

11. konvoluce

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s_1(\xi_1, \xi_2) s_2(t_1 - \xi_1, t_2 - \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \longleftrightarrow S_1(\Omega_1, \Omega_2) S_2(\Omega_1, \Omega_2)$$

12. násobení signálů

$$s_1(t_1, t_2) s_2(t_1, t_2) \longleftrightarrow \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_1(\varphi_1, \varphi_2) S_2(\Omega_1 - \varphi_1, \Omega_2 - \varphi_2) d\varphi_1 d\varphi_2$$

13. korelace

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s_1(\xi_1, \xi_2) s_2^*(\xi_1 + t_1, \xi_2 + t_2) d\xi_1 d\xi_2 \longleftrightarrow S_1(\Omega_1, \Omega_2) S_2^*(\Omega_1, \Omega_2)$$

2.2. FOURIEROVA TRANSFORMACE A FOURIEROVA ŘADA SPOJITÉHO 2-D SIGNÁLU

14. autokorelace

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(\xi_1, \xi_2) s^*(\xi_1 + t_1, \xi_2 + t_2) d\xi_1 d\xi_2 \longleftrightarrow |S(\Omega_1, \Omega_2)|^2$$

15. Parsevalova rovnost

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t_1, t_2) s_2^*(t_1, t_2) dt_1 dt_2 = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_1(\Omega_1, \Omega_2) S_2^*(\Omega_1, \Omega_2) d\Omega_1 d\Omega_2$$

16. Rayleighova rovnost

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |s(t_1, t_2)|^2 dt_1 dt_2 = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |S(\Omega_1, \Omega_2)|^2 d\Omega_1 d\Omega_2$$

Amplitudové, fázové, logaritmické a výkonové spektrum

Spektrum $S(\Omega_1, \Omega_2)$ je komplexní funkce dvou reálných proměnných. Můžeme pracovat s reálnou částí $\text{Re}(S(\Omega_1, \Omega_2))$ a imaginární částí $\text{Im}(S(\Omega_1, \Omega_2))$ spektra nebo s amplitudovým spektrem $A(\Omega_1, \Omega_2)$, fázovým spektrem $F(\Omega_1, \Omega_2)$, logaritmickým spektrem $L(\Omega_1, \Omega_2)$ a výkonovým spektrem $P(\Omega_1, \Omega_2)$.

Definice 2.10. Amplitudovým spektrem $A(\Omega_1, \Omega_2)$, fázovým spektrem $F(\Omega_1, \Omega_2)$, logaritmickým spektrem $L(\Omega_1, \Omega_2)$ a výkonovým spektrem $P(\Omega_1, \Omega_2)$ rozumíme objekty dané následujícími vztahy:

$$\begin{aligned} S(\Omega_1, \Omega_2) &= A(\Omega_1, \Omega_2) \exp(i F(\Omega_1, \Omega_2)), \\ A(\Omega_1, \Omega_2) &= |S(\Omega_1, \Omega_2)|, \\ F(\Omega_1, \Omega_2) &= \arg S(\Omega_1, \Omega_2), \\ L(\Omega_1, \Omega_2) &= \log A(\Omega_1, \Omega_2), \\ P(\Omega_1, \Omega_2) &= A^2(\Omega_1, \Omega_2), \end{aligned} \tag{2.15}$$

kde \arg značí hlavní hodnotu argumentu, tj. $F(\Omega_1, \Omega_2) \in (-\pi, \pi)$.

Poznámka. Logaritmické spektrum má význam mj. pro názorné zobrazení amplitudového spektra v oblastech, kde jsou jeho hodnoty značně menší, než v oblasti maxima. Pro nulovou hodnotu amplitudového spektra není logaritmické spektrum definováno.

2.2.2. Fourierova řada

V této sekci si vysvětlíme pojem Fourierovy řady. Nebudeme se soustředit na její elementární výklad, uvedeme si pouze definici a hlavní vlastnosti 2-D trigonometrické Fourierovy řady složené z exponenciál, která má úzký vztah k Fourierově transformaci i k pojmům z dalších oddílů.

Definice 2.11 (Fourierova řada). Za určitých podmínek, které uvedeme podrobněji dále, lze 2-D spojitý periodický signál $\tilde{s}(t_1, t_2)$ s periodou (T_1, T_2) vyjádřit jako funkcionální řadu, speciálně jako sumu vážených exponenciál

$$\tilde{s}(t_1, t_2) = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} S(n_1, n_2) \exp\left(2\pi i \left(\frac{n_1 t_1}{T_1} + \frac{n_2 t_2}{T_2}\right)\right), \quad (2.16)$$

kde Fourierovy koeficienty $S(n_1, n_2)$ jsou dány vztahem

$$S(n_1, n_2) = \frac{1}{T_1 T_2} \int_a^{a+T_1} \int_b^{b+T_2} \tilde{s}(t_1, t_2) \exp\left(-2\pi i \left(\frac{n_1 t_1}{T_1} + \frac{n_2 t_2}{T_2}\right)\right) dt_1 dt_2, \quad (2.17)$$

přičemž a, b jsou libovolná reálná čísla. Pro naše další potřeby je nejvýhodnější volba $a = -\frac{T_1}{2}$ a $b = -\frac{T_2}{2}$, tj.

$$S(n_1, n_2) = \frac{1}{T_1 T_2} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} \int_{-\frac{T_2}{2}}^{\frac{T_2}{2}} \tilde{s}(t_1, t_2) \exp\left(-2\pi i \left(\frac{n_1 t_1}{T_1} + \frac{n_2 t_2}{T_2}\right)\right) dt_1 dt_2. \quad (2.18)$$

Konvergence Fourierovy řady

Funkce $\exp\left(2\pi i \left(\frac{n_1 t_1}{T_1} + \frac{n_2 t_2}{T_2}\right)\right)$ tvoří úplný ortogonální systém na intervalu $I_{T_1, T_2} = \langle -\frac{T_1}{2}, \frac{T_1}{2} \rangle \times \langle -\frac{T_2}{2}, \frac{T_2}{2} \rangle$. Z obecné teorie Fourierových řad je známo, že Fourierova řada 2.16 každého periodického signálu $\tilde{s}(t_1, t_2)$, pro nějž platí

$$\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} \int_{-\frac{T_2}{2}}^{\frac{T_2}{2}} |\tilde{s}(t_1, t_2)|^2 dt_1 dt_2 < \infty, \quad (2.19)$$

konverguje v průměru k tomuto signálu, tj.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} \int_{-\frac{T_2}{2}}^{\frac{T_2}{2}} \left| \tilde{s}(t_1, t_2) - \sum_{n_1=-N}^N \sum_{n_2=-N}^N S(n_1, n_2) \exp\left(2\pi i \left(\frac{n_1 t_1}{T_1} + \frac{n_2 t_2}{T_2}\right)\right) \right|^2 dt_1 dt_2 = 0. \quad (2.20)$$

Pro signály mající vlastnost 2.19 budeme nadále používat označení $\tilde{s} \in L^2(I_{T_1, T_2})$.

Poznámka. Integrály v 2.19, 2.20 jsou chápány v Lebesgueově smyslu, obdobně jako v poznámce 2.2.1 v sekci 2.2.1 si je však můžeme představit jako Riemannovy integrály, neboť prakticky pro všechny signály, s nimiž se setkáváme, Riemannův i Lebesgueův integrál existují současně a jsou si rovny.

2.2. FOURIEROVA TRANSFORMACE A FOURIEROVA ŘADA SPOJITÉHO 2-D SIGNÁLU

Poznámka. Jelikož hodnoty integrálu 2.17 resp. 2.18 nemůže ovlivnit množina hodnot signálu \tilde{s} míry nula, můžeme, obdobně jako v poznámce 2.2.1 v sekci 2.2.1, chápat všechny signály z $L^2(\langle a, a + T_1 \rangle \times \langle b, b + T_2 \rangle)$ resp. z $L^2(I_{T_1, T_2})$, které se liší na množině míry nula, jako totožné.

Dále platí, že částečný součet Fourierovy řady je nejlepší aproximací signálu pomocí trigonometrických polynomů ve smyslu nejmenších čtverců, tj. střední kvadratická odchylka

$$\varepsilon_{N_1, N_2}^2 = \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} \int_{-\frac{T_2}{2}}^{\frac{T_2}{2}} \left| \tilde{s}(t_1, t_2) - \sum_{n_1=-N}^N \sum_{n_2=-N}^N H(n_1, n_2) \exp \left(2\pi i \left(\frac{n_1 t_1}{T_1} + \frac{n_2 t_2}{T_2} \right) \right) \right|^2 dt_1 dt_2$$

je při pevných $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ nejmenší, právě když za koeficienty $H(n_1, n_2)$ aproximačního trigonometrického polynomu zvolíme Fourierovy koeficienty $S(n_1, n_2)$.

Z obecné teorie Fourierových řad plyne i tvrzení o tom, kdy řada 2.16 s předem zvolenými koeficienty $S(n_1, n_2)$ konverguje k nějakému signálu z $L^2(I_{T_1, T_2})$.

Věta 2.4. *Zvolme komplexní čísla $S(n_1, n_2)$, kde $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ tak, že*

$$\sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} |S(n_1, n_2)|^2 < \infty. \quad (2.21)$$

Pak řada

$$\sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} S(n_1, n_2) \exp \left(2\pi i \left(\frac{n_1 t_1}{T_1} + \frac{n_2 t_2}{T_2} \right) \right)$$

konverguje v průměru (tj. ve smyslu 2.20) k jistému signálu $\tilde{s}(t_1, t_2) \in L^2(I_{T_1, T_2})$.

Poznámka. Analogicky ke kvadraticky integrovatelným funkcím z $L^2(\mathbb{R}^2)$ se množina posloupností s vlastností 2.21 označuje l^2 (kvadraticky sčitatelné posloupnosti).

Konvergenci Fourierovy řady jsme zatím vyšetřovali v průměru, tj. ve smyslu limity 2.20. Důležitá otázka je také její konvergence v obvyklém smyslu, tzv. bodová konvergence. Uvedeme tedy jedno tvrzení o bodové konvergenci.

Věta 2.5. *Nechť signál $\tilde{s}(t_1, t_2)$ má v intervalu $I_{T_1, T_2} = \langle -\frac{T_1}{2}, \frac{T_1}{2} \rangle \times \langle -\frac{T_2}{2}, \frac{T_2}{2} \rangle$ spojité derivace $\frac{\partial \tilde{s}}{\partial t_1}$, $\frac{\partial \tilde{s}}{\partial t_2}$ a $\frac{\partial^2 \tilde{s}}{\partial t_1 \partial t_2}$ (jde o spojitost uvedených derivací v běžném matematickém smyslu). Pak v každém vnitřním bodě (t_1, t_2) tohoto intervalu platí 2.16, kde koeficienty $S(n_1, n_2)$ jsou dány vzorcem 2.18.*

Za předpokladu, že rozklad signálu 2.16 existuje, lze platnost vztahů 2.17, 2.18 pro Fourierovy koeficienty formálně ověřit dosazením 2.16 do 2.17 a využitím ortogonality funkcí $\exp \left(2\pi i \left(\frac{n_1 t_1}{T_1} + \frac{n_2 t_2}{T_2} \right) \right)$. Uvedený formální postup je z matematického hlediska oprávněný, jestliže řada v 2.16 konverguje stejnoměrně v I_{T_1, T_2} .

Jestliže použijeme ještě silnější předpoklad, tj. absolutní konvergenci řady s členy $S(n_1, n_2)$, neboli

$$\sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} |S(n_1, n_2)| < \infty, \quad (2.22)$$

2. DVOJROZMĚRNÁ DISKRÉTNÍ FOURIEROVA TRANSFORMACE

vyplývá z něj stejnoměrná konvergence řady 2.16 a tedy i existence spojitého periodického signálu $\tilde{s}(t_1, t_2)$. Navíc funkce $\tilde{s}(t_1, t_2)$, která signál reprezentuje, bude spojitá v obvyklém matematickém smyslu.

Poznámka. Analogicky k absolutně integrovatelným funkcím z $L^1(\mathbb{R}^2)$ se množina posloupností s vlastností 2.22 označuje l^1 (absolutně sčitatelné posloupnosti).

Při sčítání Fourierových řad jsme často nuceni omezit se na součet konečného počtu členů řady. Hovoříme potom o **částečném součtu** Fourierovy řady. S „ořezáním“ Fourierovy řady je spojen tzv. **Gibbsův jev** – zakmitávání částečného součtu řady v okolí bodů nespojitosti. Zde analýzu spojenou s tímto jevem provádět nebudeme.

Vlastnosti Fourierovy řady

V této sekci si uvedeme základní vlastnosti Fourierovy řady. Pro správnou aplikaci následujících vlastností je nutné, aby příslušný signál byl integrovatelný v obdélníku $\langle -\frac{T_1}{2}, \frac{T_1}{2} \rangle \times \langle -\frac{T_2}{2}, \frac{T_2}{2} \rangle$ resp. $\langle a, a + T_1 \rangle \times \langle b, b + T_2 \rangle$ a odpovídající Fourierova řada konvergovala. Dále je zřejmé, že u vlastností týkajících se dvojic signálů (1., 11., 12., 13., 15.) předpokládáme, že oba signály mají stejnou periodu. Číslování vlastností je stejné jako u vlastností Fourierovy transformace. Pro lepší pochopení vztahu Fourierovy transformace a Fourierovy řady je vhodné si vlastnosti porovnat.

- Fourierův pár

$$\tilde{s}(t_1, t_2) \longleftrightarrow S(n_1, n_2)$$

- Transformační vztahy

$$\tilde{s}(t_1, t_2) = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} S(n_1, n_2) \exp\left(2\pi i \left(\frac{n_1 t_1}{T_1} + \frac{n_2 t_2}{T_2}\right)\right)$$

$$S(n_1, n_2) = \frac{1}{T_1 T_2} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} \int_{-\frac{T_2}{2}}^{\frac{T_2}{2}} \tilde{s}(t_1, t_2) \exp\left(-2\pi i \left(\frac{n_1 t_1}{T_1} + \frac{n_2 t_2}{T_2}\right)\right) dt_1 dt_2$$

1. linearita

$$a \tilde{s}_1(t_1, t_2) + b \tilde{s}_2(t_1, t_2) \longleftrightarrow a S_1(n_1, n_2) + b S_2(n_1, n_2)$$

2. změna měřítka

$$\tilde{s}(a t_1, b t_2) \longleftrightarrow \frac{1}{|ab|} S\left(\frac{n_1}{a}, \frac{n_2}{b}\right)$$

3. posunutí signálu

$$\tilde{s}(t_1 - a, t_2 - b) \longleftrightarrow S(n_1, n_2) \exp\left(-2\pi i \left(\frac{a n_1}{T_1} + \frac{b n_2}{T_2}\right)\right)$$

4. modulace signálu

$$\tilde{s}(t_1, t_2) \exp\left(2\pi i \left(\frac{m_1 t_1}{T_1} + \frac{m_2 t_2}{T_2}\right)\right) \longleftrightarrow S(n_1 - m_1, n_2 - m_2)$$

2.2. FOURIEROVA TRANSFORMACE A FOURIEROVA ŘADA SPOJITÉHO 2-D SIGNÁLU

5. derivování signálu

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{s}(t_1, t_2)}{\partial t_1} &\longleftrightarrow 2\pi i \frac{n_1}{T_1} S(n_1, n_2) \\ \frac{\partial \tilde{s}(t_1, t_2)}{\partial t_2} &\longleftrightarrow 2\pi i \frac{n_2}{T_2} S(n_1, n_2) \\ \frac{\partial^2 \tilde{s}(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} &\longleftrightarrow -4\pi^2 \frac{n_1 n_2}{T_1 T_2} S(n_1, n_2)\end{aligned}$$

7. transpozice

$$\tilde{s}(t_2, t_1) \longleftrightarrow S(n_2, n_1)$$

8. zrcadlení

$$\begin{aligned}\tilde{s}(-t_1, t_2) &\longleftrightarrow S(-n_1, n_2) \\ \tilde{s}(t_1, -t_2) &\longleftrightarrow S(n_1, -n_2) \\ \tilde{s}(-t_1, -t_2) &\longleftrightarrow S(-n_1, -n_2)\end{aligned}$$

9. komplexně sdružený signál

$$\tilde{s}^*(t_1, t_2) \longleftrightarrow S^*(-n_1, -n_2)$$

10. reálný signál

$$\tilde{s}(t_1, t_2) = \tilde{s}^*(t_1, t_2) \longleftrightarrow S(n_1, n_2) = S^*(-n_1, -n_2)$$

11. periodická konvoluce

$$\frac{1}{T_1 T_2} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} \int_{-\frac{T_2}{2}}^{\frac{T_2}{2}} \tilde{s}_1(\xi_1, \xi_2) s_2(t_1 - \xi_1, t_2 - \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \longleftrightarrow S_1(n_1, n_2) S_2(n_1, n_2)$$

12. násobení signálů

$$\tilde{s}_1(t_1, t_2) \tilde{s}_2(t_1, t_2) \longleftrightarrow \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} S_1(m_1, m_2) S_2(n_1 - m_1, n_2 - m_2)$$

13. periodická korelace

$$\frac{1}{T_1 T_2} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} \int_{-\frac{T_2}{2}}^{\frac{T_2}{2}} \tilde{s}_1(\xi_1, \xi_2) \tilde{s}_2^*(\xi_1 + t_1, \xi_2 + t_2) d\xi_1 d\xi_2 \longleftrightarrow S_1(n_1, n_2) S_2^*(n_1, n_2)$$

14. periodická autokorelace

$$\frac{1}{T_1 T_2} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} \int_{-\frac{T_2}{2}}^{\frac{T_2}{2}} \tilde{s}(\xi_1, \xi_2) \tilde{s}^*(\xi_1 + t_1, \xi_2 + t_2) d\xi_1 d\xi_2 \longleftrightarrow |S(n_1, n_2)|^2$$

2. DVOJROZMĚRNÁ DISKRÉTNÍ FOURIEROVA TRANSFORMACE

15. Parsevalova rovnost

$$\frac{1}{T_1 T_2} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} \int_{-\frac{T_2}{2}}^{\frac{T_2}{2}} \tilde{s}_1(t_1, t_2) \tilde{s}_2^*(t_1, t_2) dt_1 dt_2 = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} S_1(n_1, n_2) S_2^*(n_1, n_2)$$

16. Rayleighova rovnost

$$\frac{1}{T_1 T_2} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} \int_{-\frac{T_2}{2}}^{\frac{T_2}{2}} |\tilde{s}_1(t_1, t_2)|^2 dt_1 dt_2 = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} |S(n_1, n_2)|^2$$

Amplitudové, fázové, logaritmické a výkonové spektrum

Fourierovy koeficienty $S(n_1, n_2)$ spojitého periodického signálu $\tilde{s}(t_1, t_2)$ tvoří diskrétní spektrum. Je to komplexní funkce dvou celočíselných proměnných. Analogicky jako v předchozí sekci můžeme pracovat s reálnou částí $\text{Re}(S(n_1, n_2))$ a imaginární částí $\text{Im}(S(n_1, n_2))$ spektra nebo s amplitudovým spektrem $A(n_1, n_2)$, fázovým spektrem $F(n_1, n_2)$, logaritmickým spektrem $L(n_1, n_2)$ a výkonovým spektrem $P(n_1, n_2)$.

Definice 2.12. Amplitudovým spektrem $A(n_1, n_2)$, fázovým spektrem $F(n_1, n_2)$, logaritmickým spektrem $L(n_1, n_2)$ a výkonovým spektrem $P(n_1, n_2)$ rozumíme objekty dané následujícími vztahy:

$$\begin{aligned} S(n_1, n_2) &= A(n_1, n_2) \exp(i F(n_1, n_2)), \\ A(n_1, n_2) &= |S(n_1, n_2)|, \\ F(n_1, n_2) &= \arg S(n_1, n_2), \\ L(n_1, n_2) &= \log A(n_1, n_2), \\ P(n_1, n_2) &= A^2(n_1, n_2), \end{aligned} \tag{2.23}$$

kde \arg značí hlavní hodnotu argumentu, tzn. $F(n_1, n_2) \in (-\pi, \pi)$.

O logaritmickém spektru platí poznámka 2.2.1.

Pojem harmonické složky

Jednotlivé sčítance v řadě 2.16 se nazývají **harmonické složky** (nebo krátce jen harmonické). Každá harmonická se skládá z koeficientu $S(n_1, n_2)$ a funkce $\exp\left(2\pi i \left(\frac{n_1 t_1}{T_1} + \frac{n_2 t_2}{T_2}\right)\right)$.

Pro reálný signál platí podle vlastnosti 10. uvedené výše $S(n_1, n_2) = S^*(-n_1, -n_2)$. Díky tomu si můžeme každou jednotlivou harmonickou složku reálného signálu představovat jako tzv. „vlnitý plech“ v prostorové oblasti a samotný signál resp. jeho Fourierovu řadu chápat jako součet těchto „vlnitých plechů“.

2.2. FOURIEROVA TRANSFORMACE A FOURIEROVA ŘADA SPOJITÉHO 2-D SIGNÁLU

Sečteme-li dvě harmonické složky reálného signálu pro dvojici (n_1, n_2) a $(-n_1, -n_2)$, dostaneme po krátkém výpočtu pomocí jednoduchých goniometrických vztahů

$$\begin{aligned} V(n_1, n_2) &= S(n_1, n_2) \exp\left(2\pi i \left(\frac{n_1 t_1}{T_1} + \frac{n_2 t_2}{T_2}\right)\right) + S(-n_1, -n_2) \exp\left(2\pi i \left(-\frac{n_1 t_1}{T_1} - \frac{n_2 t_2}{T_2}\right)\right) = \\ &= 2 \left(\operatorname{Re}(S(n_1, n_2)) \sin\left(2\pi \left(\frac{n_1 t_1}{T_1} + \frac{n_2 t_2}{T_2}\right)\right) - \operatorname{Im}(S(n_1, n_2)) \cos\left(2\pi \left(\frac{n_1 t_1}{T_1} + \frac{n_2 t_2}{T_2}\right)\right) \right) = \\ &= 2 |S(n_1, n_2)| \cos\left(2\pi \left(\frac{n_1 t_1}{T_1} + \frac{n_2 t_2}{T_2}\right) + \arg S(n_1, n_2)\right). \end{aligned}$$

Poslední rovnost můžeme ještě přepsat

$$V(n_1, n_2) = 2 A(n_1, n_2) \cos\left(2\pi \left(\frac{n_1 t_1}{T_1} + \frac{n_2 t_2}{T_2}\right) + F(n_1, n_2)\right), \quad (2.24)$$

kde $A(n_1, n_2)$ je amplitudové, $F(n_1, n_2)$ fázové spektrum.

Reálnou funkci danou předpisem 2.24 můžeme trefně nazvat „vlnitý plech“. Je zřejmé, že sdružíme-li ve Fourierově řadě reálného signálu do dvojic harmonické složky pro všechny indexy (n_1, n_2) a $(-n_1, -n_2)$ (s výjimkou $(0, 0)$), dostaneme vyjádření signálu jako superpozici spočetně mnoha „vlnitých plechů“ s různou frekvencí, amplitudou a fází.

Tyto úvahy jsou dvourozměrným zobecněním klasické představy jednorozměrné Fourierovy řady jako rozkladu reálné funkce zadané na konečném intervalu na vážený součet vzájemně posunutých sinusovek s různou amplitudou.

Představu o rozkladu reálného signálu na superpozici „vlnitých plechů“ můžeme rozšířit i na komplexní signál, budeme-li uvažovat zvlášť jeho reálnou a imaginární část. Každou z nich si pak můžeme představit jako superpozici „vlnitých plechů“. (Imaginární části odpovídají potom „vlnité plechy“ s imaginárními amplitudami.)

Fourierova řada jako reprezentace signálu zadaného na konečném intervalu

O Fourierově řadě se většinou hovoří jako o vzájemně jednoznačném přiřazení posloupnosti Fourierových koeficientů a periodického signálu. Z formálního hlediska je ovšem důležité uvědomit si, že na vztahy 2.16 a 2.18 se můžeme dívat také jako na reprezentaci (neperiodického) 2-D signálu $s(t_1, t_2)$, který je zadán pouze na intervalu $I_{T_1, T_2} = \left\langle -\frac{T_1}{2}, \frac{T_1}{2} \right\rangle \times \left\langle -\frac{T_2}{2}, \frac{T_2}{2} \right\rangle$. To, že 2.16 dává zároveň i periodické prodloužení signálu mimo tento interval, je pak důsledkem periodicity použitých funkcí $\exp\left(2\pi i \left(\frac{n_1 t_1}{T_1} + \frac{n_2 t_2}{T_2}\right)\right)$ v proměnných t_1, t_2 . Tato představa odpovídá praktické situaci, kdy pracujeme se signálem v určitém intervalu z \mathbb{R}^2 . Podobně je možné chápat Fourierovu řadu jako vyjádření signálu s konečným nosičem I_{T_1, T_2} uvnitř tohoto nosiče.

Poznámka. Je zřejmé, že pokud na hranici nosiče nebude signál splňovat podmínku

$$\begin{aligned} s\left(t_1, -\frac{T_2}{2}\right) &= s\left(t_1, \frac{T_2}{2}\right), \quad t_1 \in \left\langle -\frac{T_1}{2}, \frac{T_1}{2} \right\rangle, \\ s\left(-\frac{T_1}{2}, t_2\right) &= s\left(\frac{T_1}{2}, t_2\right), \quad t_2 \in \left\langle -\frac{T_2}{2}, \frac{T_2}{2} \right\rangle, \end{aligned} \quad (2.25)$$

2. DVOJROZMĚRNÁ DISKRÉTNÍ FOURIEROVA TRANSFORMACE

nastane problém, k jaké hodnotě má příslušná Fourierova řada konvergovat. Víme, že v jednorozměrném případě konverguje Fourierova řada v bodě nespojitosti k průměrné hodnotě z limit zleva a zprava. Ve dvojrozměrném případě je ale situace komplikovanější, proto se jí zde nebudeme zabývat. Pro jednoduchost předpokládejme, že podmínka 2.25, kterou můžeme nazývat periodickou okrajovou podmínkou, je splněna.

2.2.3. Vztah mezi Fourierovou transformací a Fourierovou řadou

V tomto oddílu se budeme zabývat vztahem mezi Fourierovou transformací a Fourierovou řadou. Nejdříve připomeňme, že Fourierova transformace přísluší spojitému signálu, který je jejím prostřednictvím charakterizován pomocí nespočetné množiny hodnot spektra, zatímco Fourierova řada přísluší spojitému periodickému signálu, k jehož popisu zde stačí spočetná množina koeficientů řady.

Dále je z definičního vztahu 2.9 pro přímou Fourierovu transformaci (značíme ji zde S_T , aby se značení nezaměnilo s koeficienty Fourierovy řady)

$$S_T(\Omega_1, \Omega_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(t_1, t_2) \exp(-i\Omega_1 t_1 - i\Omega_2 t_2) dt_1 dt_2$$

a z definice 2.17 pro koeficienty Fourierovy řady

$$S(n_1, n_2) = \frac{1}{T_1 T_2} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} \int_{-\frac{T_2}{2}}^{\frac{T_2}{2}} \tilde{s}(t_1, t_2) \exp\left(-2\pi i \left(\frac{n_1 t_1}{T_1} + \frac{n_2 t_2}{T_2}\right)\right) dt_1 dt_2$$

zřejmé, že bude-li $s(t_1, t_2) = 0$ vně intervalu $\langle a, a + T_1 \rangle \times \langle b, b + T_2 \rangle$, bude platit

$$S_T\left(2\pi \frac{n_1}{T_1}, 2\pi \frac{n_2}{T_2}\right) = T_1 T_2 S(n_1, n_2), \quad (2.26)$$

tj. hodnoty Fourierovy transformace signálu $s(t_1, t_2)$ v bodech $\left(2\pi \frac{n_1}{T_1}, 2\pi \frac{n_2}{T_2}\right)$ jsou až na multiplikatívni konstantu dány koeficienty Fourierovy řady periodického signálu $\tilde{s}(t_1, t_2)$, který je uvnitř intervalu $\langle a, a + T_1 \rangle \times \langle b, b + T_2 \rangle$ roven signálu $s(t_1, t_2)$.

Nyní si ukážeme, jak lze formálně přejít od Fourierovy transformace k Fourierově řadě diskretizací signálu ve frekvenční oblasti, tj. diskretizací spektra. Předpokládejme, že pro spojité signál $s(t_1, t_2)$ existuje jeho Fourierova transformace daná vzcrcem 2.9 a počítejme hodnoty spektra v bodech $(n_1 \Delta_1, n_2 \Delta_2)$.

$$S_T(n_1 \Delta_1, n_2 \Delta_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(t_1, t_2) \exp(-in_1 \Delta_1 t_1 - in_2 \Delta_2 t_2) dt_1 dt_2$$

Položme $\Delta_1 = \frac{2\pi}{T_1}, \Delta_2 = \frac{2\pi}{T_2}$.

2.2. FOURIEROVA TRANSFORMACE A FOURIEROVA ŘADA SPOJITÉHO 2-D SIGNÁLU

$$S_T \left(2\pi \frac{n_1}{T_1}, 2\pi \frac{n_2}{T_2} \right) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(t_1, t_2) \exp \left(-2\pi i \left(\frac{n_1 t_1}{T_1} + \frac{n_2 t_2}{T_2} \right) \right) dt_1 dt_2$$

Názorný význam veličin T_1, T_2 bude patrný později. Všimněme si, že funkce $\exp \left(-2\pi i \left(\frac{n_1 t_1}{T_1} + \frac{n_2 t_2}{T_2} \right) \right)$ jsou periodické v proměnných t_1, t_2 s periodou (T_1, T_2) . Toho využijeme k dalším úpravám. Celý integrační obor, tj. \mathbb{R}^2 , rozdělíme na obdélníky $Q(l_1, l_2) = \langle l_1 T_1 - \frac{T_1}{2}, l_1 T_1 + \frac{T_1}{2} \rangle \times \langle l_2 T_2 - \frac{T_2}{2}, l_2 T_2 + \frac{T_2}{2} \rangle$, kde $l_1, l_2 \in \mathbb{Z}$ a předchozí vztah formálně přepíšeme.

$$S_T \left(2\pi \frac{n_1}{T_1}, 2\pi \frac{n_2}{T_2} \right) = \sum_{l_1=-\infty}^{\infty} \sum_{l_2=-\infty}^{\infty} \iint_{Q(l_1, l_2)} s(t_1, t_2) \exp \left(-2\pi i \left(\frac{n_1 t_1}{T_1} + \frac{n_2 t_2}{T_2} \right) \right) dt_1 dt_2$$

Substitucí $\xi_1 = t_1 - l_1 T_1$, $\xi_2 = t_2 - l_2 T_2$ a s využitím periodicity funkcí $\exp \left(-2\pi i \left(\frac{n_1 t_1}{T_1} + \frac{n_2 t_2}{T_2} \right) \right)$ dále dostaneme

$$S_T \left(2\pi \frac{n_1}{T_1}, 2\pi \frac{n_2}{T_2} \right) = \sum_{l_1=-\infty}^{\infty} \sum_{l_2=-\infty}^{\infty} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} \int_{-\frac{T_2}{2}}^{\frac{T_2}{2}} s(\xi_1 + l_1 T_1, \xi_2 + l_2 T_2) \exp \left(-2\pi i \left(\frac{n_1 \xi_1}{T_1} + \frac{n_2 \xi_2}{T_2} \right) \right) d\xi_1 d\xi_2. \quad (2.27)$$

Za předpokladu stejnoměrné konvergence řady $\sum_{l_1=-\infty}^{\infty} \sum_{l_2=-\infty}^{\infty} s(\xi_1 + l_1 T_1, \xi_2 + l_2 T_2)$ na obdélníku $\langle -\frac{T_1}{2}, \frac{T_1}{2} \rangle \times \langle -\frac{T_2}{2}, \frac{T_2}{2} \rangle$ můžeme ještě zaměnit pořadí sumace a integrace, takže

$$S_T \left(2\pi \frac{n_1}{T_1}, 2\pi \frac{n_2}{T_2} \right) = \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} \int_{-\frac{T_2}{2}}^{\frac{T_2}{2}} \sum_{l_1=-\infty}^{\infty} \sum_{l_2=-\infty}^{\infty} s(\xi_1 + l_1 T_1, \xi_2 + l_2 T_2) \exp \left(-2\pi i \left(\frac{n_1 \xi_1}{T_1} + \frac{n_2 \xi_2}{T_2} \right) \right) d\xi_1 d\xi_2. \quad (2.28)$$

Položíme-li nyní

$$\tilde{s}(\xi_1, \xi_2) = \sum_{l_1=-\infty}^{\infty} \sum_{l_2=-\infty}^{\infty} s(\xi_1 + l_1 T_1, \xi_2 + l_2 T_2), \quad (2.29)$$

$$S(n_1, n_2) = \frac{1}{T_1 T_2} S_T \left(2\pi \frac{n_1}{T_1}, 2\pi \frac{n_2}{T_2} \right), \quad (2.30)$$

dostáváme vztah

$$S(n_1, n_2) = \frac{1}{T_1 T_2} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} \int_{-\frac{T_2}{2}}^{\frac{T_2}{2}} \tilde{s}(\xi_1, \xi_2) \exp\left(-2\pi i \left(\frac{n_1 \xi_1}{T_1} + \frac{n_2 \xi_2}{T_2}\right)\right) d\xi_1 d\xi_2 \quad (2.31)$$

identický se vztahem 2.18 pro výpočet Fourierových koeficientů spojitého periodického 2-D signálu.

Formule 2.29 představuje periodizaci signálu $s(t_1, t_2)$ s periodou (T_1, T_2) . Zjistili jsme tedy, že vzorky Fourierovy transformace signálu $s(t_1, t_2)$ představují (až na multiplikační konstantu $\frac{1}{T_1 T_2}$) koeficienty Fourierovy řady signálu $\tilde{s}(t_1, t_2)$, který vznikne periodizací podle 2.29. Je zřejmé, že Fourierova řada, ve které vezmeme koeficienty podle vztahu 2.30, bude udávat periodizovaný signál $\tilde{s}(t_1, t_2)$, nikoliv však signál $s(t_1, t_2)$. Je také zřejmé, že čím větší bude perioda T_1 resp. T_2 , tím hustší bude vzorkování spektra S_T ve směru první, resp. druhé osy souřadnic a zároveň menší amplituda koeficientů $S(n_1, n_2)$.

Uvažujme nyní prostorově omezený signál, jehož nosič leží uvnitř intervalu $I_{T_1, T_2} = \langle -\frac{T_1}{2}, \frac{T_1}{2} \rangle \times \langle -\frac{T_2}{2}, \frac{T_2}{2} \rangle$. Při periodizaci podle 2.29 nebude docházet k překrývání hodnot jednotlivých sčítanců (tzv. aliasing), takže bude platit

$$\tilde{s}(t_1, t_2) = s(t_1, t_2), \quad (t_1, t_2) \in I_{T_1, T_2}$$

V tomto případě bude Fourierova řada s koeficienty danými vzorcem 2.30 udávat v oboru I_{T_1, T_2} přímo signál $s(t_1, t_2)$.

Máme-li tedy prostorově omezený signál, stačí k jeho popisu ve frekvenční oblasti pouze spočetná množina hodnot – vzorků Fourierovy transformace resp. koeficientů Fourierovy řady (oproti nespočetné množině hodnot Fourierovy transformace potřebné pro popis prostorově neomezeného signálu).

2.3. Fourierova transformace a Fourierova řada diskrétního 2-D signálu

V předchozím oddíle jsme se zabývali dvěma transformacemi spojitých 2-D signálů – Fourierovou transformací a Fourierovou řadou. V praxi ale často nastává situace, kdy máme k dispozici diskrétní signály, které představují diskrétně odebrané vzorky spojitých signálů. Na základě znalosti diskrétního signálu bychom chtěli použít Fourierovu transformaci či řadu a dále s nimi pracovat. V tomto oddíle si zavedeme diskrétní analogie transformací spojitých signálů, které budou mít rozumné vlastnosti a jednoduchý vztah ke svým spojitým protějškům. Budeme je nazývat Fourierova transformace diskrétního signálu a Fourierova řada diskrétního signálu. Uvedeme zde také tzv. vzorkovací teorém a ujasníme, v čem spočívá dualita diskretizace a periodizace signálu.

2.3.1. Fourierova transformace diskrétního signálu

Zabýváme-li se otázkou, jak zavést diskrétní analogii Fourierovy transformace, zřejmě první, co nás napadne, je nahradit integrování sumací, protože místo spojitého signálu $s(t_1, t_2)$ máme posloupnost jeho vzorků $x(n_1, n_2)$. Jak ukážeme dále, skutečně lze tímto způsobem zavést matematický objekt s rozumnými vlastnostmi i vztahem ke svému spojitému protějšku.

Definice 2.13. Fourierovou transformací diskrétního signálu nazveme komplexní funkci $\tilde{X}(\omega_1, \omega_2)$ danou předpisem

$$\tilde{X}(\omega_1, \omega_2) = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} x(n_1, n_2) \exp(-i\omega_1 n_1 - i\omega_2 n_2). \quad (2.32)$$

Díky periodicitě funkcí $\exp(-i\omega_1 n_1 - i\omega_2 n_2)$ v proměnných ω_1, ω_2 je spektrum $\tilde{X}(\omega_1, \omega_2)$ periodická funkce dvou reálných proměnných s periodou $(2\pi, 2\pi)$. Při práci s ní uvažujeme nejčastěji interval periodicity $\langle -\pi, \pi \rangle \times \langle -\pi, \pi \rangle$. Otázkami existence transformace dané tímto předpisem se budeme zabývat později.

Vztah pro inverzní transformaci nalezneme snadno s využitím periodicity a ortogonality funkcí $\exp(-i\omega_1 n_1 - i\omega_2 n_2)$. Jeho odvození můžeme nalézt v [1].

Inverzní Fourierova transformace diskrétního signálu je dána vztahem

$$x(n_1, n_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{X}(\omega_1, \omega_2) \exp(i\omega_1 n_1 + i\omega_2 n_2) d\omega_1 d\omega_2. \quad (2.33)$$

Až na znaménko v argumentu exponenciály, které je pouze záležitostí konvence, můžeme na 2.32 pohlížet jako na Fourierovu řadu spojitého periodického signálu $\tilde{X}(\omega_1, \omega_2)$ s periodou $(2\pi, 2\pi)$. Komplementárním vztahem k 2.32 je pak pochopitelně vztah 2.33 pro výpočet koeficientů této řady. Fourierovu transformaci diskrétního signálu můžeme tedy chápat jako Fourierovu řadu spojitého periodického signálu „naruby“.

Podmínky existence Fourierovy transformace diskrétního signálu

Úzká souvislost Fourierovy transformace diskrétního signálu a Fourierovy řady se také projeví, když se začneme zabývat podmínkami existence a jednoznačnosti vztahů 2.32 a 2.33. Z teorie řad víme, že součet na pravé straně 2.32 existuje a dává spojitou funkci $\tilde{X}(\omega_1, \omega_2)$, když řada ze sčítanců $x(n_1, n_2)$ konverguje absolutně, tj. je splněna podmínka

$$\sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} |x(n_1, n_2)| < \infty. \quad (2.34)$$

Existenci Fourierovy transformace $\tilde{X}(\omega_1, \omega_2)$, nikoliv však spojitost funkce $\tilde{X}(\omega_1, \omega_2)$, zajišťuje slabší podmínka

$$\sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} |x(n_1, n_2)|^2 < \infty. \quad (2.35)$$

stejně jako ve větě 2.4.

2. DVOJROZMĚRNÁ DISKRÉTNÍ FOURIEROVA TRANSFORMACE

Poznámka. Transformaci danou předpisem 2.32 můžeme též nazývat Fourierovou transformací posloupnosti. Posloupnosti splňující 2.34 resp. 2.35 označujeme l^1 resp. l^2 .

Podobně jako v sekci 2.2.2 dostáváme, že pro Fourierovu transformaci $\tilde{X} \in L^2(I_{2\pi,2\pi})$ konverguje řada v 2.32 k $\tilde{X}(\omega_1, \omega_2)$ v průměru a že postačující podmínka pro bodovou konvergenci této řady k $\tilde{X}(\omega_1, \omega_2)$ je spojitost funkce \tilde{X} a jejích derivací $\frac{\partial \tilde{X}}{\partial \omega_1}$, $\frac{\partial \tilde{X}}{\partial \omega_2}$, $\frac{\partial^2 \tilde{X}}{\partial \omega_1 \partial \omega_2}$ v $I_{2\pi,2\pi}$.

Vlastnosti Fourierovy transformace diskrétního signálu

Nyní si uvedeme základní vlastnosti Fourierovy transformace diskrétního signálu. Můžeme je porovnat s vlastnostmi Fourierovy transformace (spojitého signálu) a Fourierovy řady (sekce 2.2.1 a 2.2.2). Číslování odpovídajících si vlastností je zachováno.

- Fourierův pár

$$x(n_1, n_2) \longleftrightarrow \tilde{X}(\omega_1, \omega_2)$$

- Transformační vztahy

$$x(n_1, n_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{X}(\omega_1, \omega_2) \exp(i\omega_1 n_1 + i\omega_2 n_2) d\omega_1 d\omega_2$$

$$\tilde{X}(\omega_1, \omega_2) = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} x(n_1, n_2) \exp(-i\omega_1 n_1 - i\omega_2 n_2)$$

1. linearita

$$a x_1(n_1, n_2) + b x_2(n_1, n_2) \longleftrightarrow a \tilde{X}_1(\omega_1, \omega_2) + b \tilde{X}_2(\omega_1, \omega_2)$$

3. posunutí signálu

$$x(n_1 - m_1, n_2 - m_2) \longleftrightarrow \tilde{X}(\omega_1, \omega_2) \exp(-i\omega_1 m_1 - i\omega_2 m_2)$$

4. modulace signálu

$$x(n_1, n_2) \exp(i\varphi_1 n_1 + i\varphi_2 n_2) \longleftrightarrow \tilde{X}(\omega_1 - \varphi_1, \omega_2 - \varphi_2)$$

6. derivování spektra

$$-i n_1 x(n_1, n_2) \longleftrightarrow \frac{\partial \tilde{X}(\omega_1, \omega_2)}{\partial \omega_1}$$

$$-i n_2 x(n_1, n_2) \longleftrightarrow \frac{\partial \tilde{X}(\omega_1, \omega_2)}{\partial \omega_2}$$

$$-n_1 n_2 x(n_1, n_2) \longleftrightarrow \frac{\partial^2 \tilde{X}(\omega_1, \omega_2)}{\partial \omega_1 \partial \omega_2}$$

7. transpozice

$$x(n_2, n_1) \longleftrightarrow \tilde{X}(\omega_2, \omega_1)$$

2.3. FOURIEROVA TRANSFORMACE A FOURIEROVA ŘADA DISKRÉTNÍHO 2-D SIGNÁLU

8. zrcadlení

$$\begin{aligned}x(-n_1, n_2) &\longleftrightarrow \tilde{X}(-\omega_1, \omega_2) \\x(n_1, -n_2) &\longleftrightarrow \tilde{X}(\omega_1, -\omega_2) \\x(-n_1, -n_2) &\longleftrightarrow \tilde{X}(-\omega_1, -\omega_2)\end{aligned}$$

9. komplexně sdružený signál

$$x^*(n_1, n_2) \longleftrightarrow \tilde{X}^*(-\omega_1, -\omega_2)$$

10. reálný signál

$$x(n_1, n_2) = x^*(n_1, n_2) \longleftrightarrow \tilde{X}(\omega_1, \omega_2) = \tilde{X}^*(-\omega_1, -\omega_2)$$

11. diskretní konvoluce

$$\sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} x_1(m_1, m_2) x_2(n_1 - m_1, n_2 - m_2) \longleftrightarrow \tilde{X}_1(\omega_1, \omega_2) \tilde{X}_2(\omega_1, \omega_2)$$

12. násobení signálů

$$x_1(n_1, n_2) x_2(n_1, n_2) \longleftrightarrow \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{X}_1(\varphi_1, \varphi_2) \tilde{X}_2(\omega_1 - \varphi_1, \omega_2 - \varphi_2) d\varphi_1 d\varphi_2$$

13. diskretní korelace

$$\sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} x_1(m_1, m_2) x_2^*(m_1 + n_1, m_2 + n_2) \longleftrightarrow \tilde{X}_1(\omega_1, \omega_2) \tilde{X}_2^*(\omega_1, \omega_2)$$

14. diskretní autokorelace

$$\sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} x(m_1, m_2) x^*(m_1 + n_1, m_2 + n_2) \longleftrightarrow |\tilde{X}(\omega_1, \omega_2)|^2$$

15. Parsevalova rovnost

$$\sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} x_1(n_1, n_2) x_2^*(n_1, n_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{X}_1(\omega_1, \omega_2) \tilde{X}_2^*(\omega_1, \omega_2) d\omega_1 d\omega_2$$

16. Rayleighova rovnost

$$\sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} |x(n_1, n_2)|^2 = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\tilde{X}(\omega_1, \omega_2)|^2 d\omega_1 d\omega_2$$

Amplitudové, fázové, logaritmické a výkonové spektrum

Spektrum $\tilde{X}(\omega_1, \omega_2)$, které reprezentuje Fourierovu transformaci diskrétního signálu, je komplexní funkce a podobně jako u Fourierovy řady a Fourierovy transformace spojitého signálu můžeme hovořit o reálné části $\text{Re}(\tilde{X}(\omega_1, \omega_2))$ a imaginární části $\text{Im}(\tilde{X}(\omega_1, \omega_2))$ spektra a o amplitudovém spektru $\tilde{A}(\omega_1, \omega_2)$, fázovém spektru $\tilde{F}(\omega_1, \omega_2)$, logaritmickém spektru $\tilde{L}(\omega_1, \omega_2)$ a výkonovém spektru $\tilde{P}(\omega_1, \omega_2)$.

Definice 2.14. Amplitudovým spektrem $\tilde{A}(\omega_1, \omega_2)$, fázovým spektrem $\tilde{F}(\omega_1, \omega_2)$, logaritmickým spektrem $\tilde{L}(\omega_1, \omega_2)$ a výkonovým spektrem $\tilde{P}(\omega_1, \omega_2)$ rozumíme objekty dané následujícími vztahy:

$$\begin{aligned}\tilde{X}(\omega_1, \omega_2) &= \tilde{A}(\omega_1, \omega_2) \exp(i \tilde{F}(\omega_1, \omega_2)), \\ \tilde{A}(\omega_1, \omega_2) &= |\tilde{X}(\omega_1, \omega_2)|, \\ \tilde{F}(\omega_1, \omega_2) &= \arg \tilde{X}(\omega_1, \omega_2), \\ \tilde{L}(\omega_1, \omega_2) &= \log \tilde{A}(\omega_1, \omega_2), \\ \tilde{P}(\omega_1, \omega_2) &= \tilde{A}^2(\omega_1, \omega_2),\end{aligned}\tag{2.36}$$

kde \arg značí hlavní hodnotu argumentu, tzn. $\tilde{F}(\omega_1, \omega_2) \in (-\pi, \pi)$.

O logaritmickém spektru platí poznámka 2.2.1.

2.3.2. Vztah Fourierovy transformace spojitého a diskrétního signálu

Zde si ukážeme, jaký je vztah mezi Fourierovou transformací spojitého a diskrétního signálu. Použijeme zde postup analogický postupu, kterým jsme provedli formální přechod od Fourierovy transformace k Fourierově řadě v sekci 2.2.3. Budeme diskretizovat signál v prostorové oblasti.

Mějme spojitý signál $s(t_1, t_2)$ a předpokládejme, že jsou splněny podmínky pro existenci přímé a inverzní transformace. Podle definičních vztahů 2.9, 2.8 je

$$\begin{aligned}S(\Omega_1, \Omega_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(t_1, t_2) \exp(-i\Omega_1 t_1 - i\Omega_2 t_2) dt_1 dt_2, \\ s(t_1, t_2) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S(\Omega_1, \Omega_2) \exp(i\Omega_1 t_1 + i\Omega_2 t_2) d\Omega_1 d\Omega_2.\end{aligned}$$

Pravoúhlým ekvidistantním vzorkováním signálu $s(t_1, t_2)$ s kroky vzorkování Δ_1 ve směru první a Δ_2 ve směru druhé osy souřadnic obdržíme diskrétní signál $x(n_1, n_2)$,

$$x(n_1, n_2) = s(n_1 \Delta_1, n_2 \Delta_2).$$

Za $s(n_1 \Delta_1, n_2 \Delta_2)$ můžeme formálně dosadit hodnoty inverzní Fourierovy transformace v bodech $(n_1 \Delta_1, n_2 \Delta_2)$. Pak

$$x(n_1, n_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S(\Omega_1, \Omega_2) \exp(i\Omega_1 n_1 \Delta_1 + i\Omega_2 n_2 \Delta_2) d\Omega_1 d\Omega_2.$$

2.3. FOURIEROVA TRANSFORMACE A FOURIEROVA ŘADA DISKRÉTNÍHO 2-D SIGNÁLU

Provedeme substituci $\varphi_1 = \Omega_1 \Delta_1$, $\varphi_2 = \Omega_2 \Delta_2$, dostaneme

$$x(n_1, n_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\Delta_1 \Delta_2} S\left(\frac{\varphi_1}{\Delta_1}, \frac{\varphi_2}{\Delta_2}\right) \exp(i\varphi_1 n_1 + i\varphi_2 n_2) d\varphi_1 d\varphi_2.$$

Dále využijeme toho, že funkce $\exp(i\varphi_1 n_1 + i\varphi_2 n_2)$ jsou periodické v proměnných φ_1, φ_2 s periodou $(2\pi, 2\pi)$. Integrační obor, tj. celé \mathbb{R}^2 , rozdělíme na obdélníky

$$Q(l_1, l_2) = \langle -\pi + 2\pi l_1, \pi + 2\pi l_1 \rangle \times \langle -\pi + 2\pi l_2, \pi + 2\pi l_2 \rangle$$

a jednotlivé integrály sečteme

$$x(n_1, n_2) = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{l_1=-\infty}^{\infty} \sum_{l_2=-\infty}^{\infty} \iint_{Q(l_1, l_2)} \frac{1}{\Delta_1 \Delta_2} S\left(\frac{\varphi_1}{\Delta_1}, \frac{\varphi_2}{\Delta_2}\right) \exp(i\varphi_1 n_1 + i\varphi_2 n_2) d\varphi_1 d\varphi_2.$$

Substitucí $\omega_1 = \varphi_1 - 2\pi l_1$, $\omega_2 = \varphi_2 - 2\pi l_2$ a s využitím periodicity exponenciál dostaneme

$$x(n_1, n_2) = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{l_1=-\infty}^{\infty} \sum_{l_2=-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\Delta_1 \Delta_2} S\left(\frac{\omega_1 + 2\pi l_1}{\Delta_1}, \frac{\omega_2 + 2\pi l_2}{\Delta_2}\right) \exp(i\omega_1 n_1 + i\omega_2 n_2) d\omega_1 d\omega_2.$$

Za předpokladu stejnoměrné konvergence řady

$$\sum_{l_1=-\infty}^{\infty} \sum_{l_2=-\infty}^{\infty} S\left(\frac{\omega_1 + 2\pi l_1}{\Delta_1}, \frac{\omega_2 + 2\pi l_2}{\Delta_2}\right) \exp(i\omega_1 n_1 + i\omega_2 n_2)$$

na obdélníku $\langle -\pi, \pi \rangle \times \langle -\pi, \pi \rangle$ můžeme zaměnit pořadí sumace a integrace, tj.

$$x(n_1, n_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\Delta_1 \Delta_2} \sum_{l_1=-\infty}^{\infty} \sum_{l_2=-\infty}^{\infty} S\left(\frac{\omega_1 + 2\pi l_1}{\Delta_1}, \frac{\omega_2 + 2\pi l_2}{\Delta_2}\right) \exp(i\omega_1 n_1 + i\omega_2 n_2) d\omega_1 d\omega_2. \quad (2.37)$$

Porovnejme výsledek se vzorcem 2.33 pro inverzní Fourierovu transformaci diskretního signálu:

$$x(n_1, n_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{X}(\omega_1, \omega_2) \exp(i\omega_1 n_1 + i\omega_2 n_2) d\omega_1 d\omega_2$$

Zjistíme, že

$$\tilde{X}(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{l_1=-\infty}^{\infty} \sum_{l_2=-\infty}^{\infty} S\left(\frac{\omega_1 + 2\pi l_1}{\Delta_1}, \frac{\omega_2 + 2\pi l_2}{\Delta_2}\right). \quad (2.38)$$

Dospěli jsme tedy k závěru, že Fourierova transformace diskretního signálu je dána periodizací 2.38 Fourierovy transformace signálu spojitého.

Nyní se dostáváme k pojmu tzv. frekvenčně omezeného signálu.

Definice 2.15. Frekvenčně omezeným signálem nazýváme spojitý signál, jehož spektrum je nenulové pouze uvnitř nějakého intervalu frekvencí.

Je zřejmé, že jde o analogii k pojmu prostorově omezený signál zavedenému v sekci 2.1.1 a užitému zejména při posuzování vztahu Fourierovy transformace a Fourierovy řady spojitého signálu v sekci 2.2.3.

Je-li $s(t_1, t_2)$ frekvenčně omezený signál, jehož spektrum $S(\Omega_1, \Omega_2)$ je nulové vně intervalu $\left\langle -\frac{\pi}{\Delta_1}, \frac{\pi}{\Delta_1} \right\rangle \times \left\langle -\frac{\pi}{\Delta_2}, \frac{\pi}{\Delta_2} \right\rangle$, platí

$$\tilde{X}(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{\Delta_1 \Delta_2} S\left(\frac{\omega_1}{\Delta_1}, \frac{\omega_2}{\Delta_2}\right), \quad -\pi \leq \omega_1, \omega_2 \leq \pi. \quad (2.39)$$

Na základě znalosti Fourierovy transformace diskrétního signálu můžeme tedy v tomto případě snadno zjistit Fourierovu transformaci signálu spojitého.

Není-li $s(t_1, t_2)$ frekvenčně omezený signál, popř. zvolíme-li nedostatečně malé kroky diskretizace Δ_1, Δ_2 , dojde při periodizaci popsané vztahem 2.38 k překrývání hodnot spektra S a je tedy nemožné zjistit z Fourierovy transformace diskrétního signálu Fourierovu transformaci signálu spojitého. Tento efekt překrývání hodnot spektra způsobený diskretizací signálu je označován jako aliasing, přesněji jako aliasing ve frekvenční oblasti. Zmenšováním velikosti kroků Δ_1, Δ_2 se bude zmenšovat také aliasing.

2.3.3. Vzorkovací teorém

V předchozí sekci jsme dospěli k závěru, že pro frekvenčně omezený signál $s(t_1, t_2)$ je znalost jeho Fourierovy transformace rovnocenná znalosti Fourierovy transformace diskrétního signálu $x(n_1, n_2)$, který vznikl vzorkováním signálu $s(t_1, t_2)$ (s dostatečně malými kroky vzorkování). Přitom ale Fourierova transformace diskrétního signálu je určena na základě spočetné množiny hodnot (vzorků), zatímco Fourierova transformace spojitého signálu je dána nespočetnou množinou hodnot spojitého signálu. Z toho plyne, že hodnoty spojitého signálu, které leží mezi vzorky, nenesou žádnou dodatečnou informaci k té informaci, kterou už známe ze souboru vzorků, tj. z diskrétního signálu. Tento fakt je obsahem tzv. vzorkovacího teorému. Zde naznačíme postup jeho odvození.

Mějme frekvenčně omezený signál $s(t_1, t_2)$, jehož spektrum $S(\Omega_1, \Omega_2)$ je nenulové uvnitř intervalu $\left\langle -\frac{\pi}{\Delta_1}, \frac{\pi}{\Delta_1} \right\rangle \times \left\langle -\frac{\pi}{\Delta_2}, \frac{\pi}{\Delta_2} \right\rangle$ a jemu odpovídající diskrétní signál $x(n_1, n_2)$,

$$x(n_1, n_2) = s(n_1 \Delta_1, n_2 \Delta_2),$$

jehož spektrum je $\tilde{X}(\omega_1, \omega_2)$. Víme, že platí

$$S\left(\frac{\omega_1}{\Delta_1}, \frac{\omega_2}{\Delta_2}\right) = \begin{cases} \tilde{X}(\omega_1, \omega_2) \Delta_1 \Delta_2 & \text{pro } -\pi \leq \omega_1, \omega_2 \leq \pi, \\ 0 & \text{jinde,} \end{cases}$$

což je ekvivalentní se vztahem

$$S(\Omega_1, \Omega_2) = \begin{cases} \tilde{X}(\Omega_1 \Delta_1, \Omega_2 \Delta_2) \Delta_1 \Delta_2 & \text{pro } -\frac{\pi}{\Delta_1} \leq \Omega_1 \leq \frac{\pi}{\Delta_1}, -\frac{\pi}{\Delta_2} \leq \Omega_2 \leq \frac{\pi}{\Delta_2} \\ 0 & \text{jinde.} \end{cases} \quad (2.40)$$

2.3. FOURIEROVA TRANSFORMACE A FOURIEROVA ŘADA DISKRÉTNÍHO 2-D SIGNÁLU

Dosaďme toto vyjádření $S(\Omega_1, \Omega_2)$ do vzorce 2.8 pro inverzní Fourierovu transformaci:

$$\begin{aligned}
 s(t_1, t_2) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S(\Omega_1, \Omega_2) \exp(i\Omega_1 t_1 + i\Omega_2 t_2) d\Omega_1 d\Omega_2 = \\
 &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\frac{\pi}{\Delta_1}}^{\frac{\pi}{\Delta_1}} \int_{-\frac{\pi}{\Delta_2}}^{\frac{\pi}{\Delta_2}} S(\Omega_1, \Omega_2) \exp(i\Omega_1 t_1 + i\Omega_2 t_2) d\Omega_1 d\Omega_2 = \\
 &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\frac{\pi}{\Delta_1}}^{\frac{\pi}{\Delta_1}} \int_{-\frac{\pi}{\Delta_2}}^{\frac{\pi}{\Delta_2}} \tilde{X}(\Omega_1 \Delta_1, \Omega_2 \Delta_2) \Delta_1 \Delta_2 \exp(i\Omega_1 t_1 + i\Omega_2 t_2) d\Omega_1 d\Omega_2 = \\
 &= \frac{\Delta_1 \Delta_2}{4\pi^2} \int_{-\frac{\pi}{\Delta_1}}^{\frac{\pi}{\Delta_1}} \int_{-\frac{\pi}{\Delta_2}}^{\frac{\pi}{\Delta_2}} \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} x(n_1, n_2) \exp(-i\Omega_1 \Delta_1 n_1 - i\Omega_2 \Delta_2 n_2) \\
 &\quad \exp(i\Omega_1 t_1 + i\Omega_2 t_2) d\Omega_1 d\Omega_2 \\
 &= \frac{\Delta_1 \Delta_2}{4\pi^2} \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} x(n_1, n_2) \int_{-\frac{\pi}{\Delta_1}}^{\frac{\pi}{\Delta_1}} \int_{-\frac{\pi}{\Delta_2}}^{\frac{\pi}{\Delta_2}} \exp(-i\Omega_1(t_1 - \Delta_1 n_1) + \\
 &\quad + i\Omega_2(t_2 - \Delta_2 n_2)) d\Omega_1 d\Omega_2.
 \end{aligned}$$

Přitom jsme předpokládali stejnoměrnou konvergenci řady

$$\sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} x(n_1, n_2) \exp(-i\Omega_1 \Delta_1 n_1 - i\Omega_2 \Delta_2 n_2)$$

na $\left\langle -\frac{\pi}{\Delta_1}, \frac{\pi}{\Delta_1} \right\rangle \times \left\langle -\frac{\pi}{\Delta_2}, \frac{\pi}{\Delta_2} \right\rangle$. Po výpočtu integrálu v poslední rovnosti obdržíme vztah vyjadřující vzorkovací teorém, a sice

$$s(t_1, t_2) = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} x(n_1, n_2) \frac{\sin\left(\frac{\pi}{\Delta_1}(t_1 - \Delta_1 n_1)\right)}{\frac{\pi}{\Delta_1}(t_1 - \Delta_1 n_1)} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{\Delta_2}(t_2 - \Delta_2 n_2)\right)}{\frac{\pi}{\Delta_2}(t_2 - \Delta_2 n_2)}, \quad (2.41)$$

který říká, že frekvenčně omezený signál může být přesně rekonstruován z posloupnosti svých vzorků. Tento vztah bývá často zapisován pomocí funkce sinc ve tvaru

$$s(t_1, t_2) = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} x(n_1, n_2) \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{\Delta_1}(t_1 - \Delta_1 n_1)\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{\Delta_2}(t_2 - \Delta_2 n_2)\right). \quad (2.42)$$

Tyto vztahy představují interpolační vzorec. Existuje celá řada odlišných způsobů interpolace, nejjednodušší je např. lineární (zde bilineární) interpolace. Vlastnost, kterou se interpolace podle 2.41 liší od jiných způsobů, je to, že zachovává podobnost mezi Fourierovými spektry diskrétního signálu a spojitého signálu, který z něj vznikl interpolací. Tato podobnost je vyjádřena právě vztahem 2.40.

2.3.4. Fourierova transformace diskretního signálu jako kvadratura Fourierovy transformace spojitého signálu

V sekci 2.3.2 jsme formálním postupem ukázali, jaká je souvislost mezi Fourierovou transformací diskretního signálu a Fourierovou transformací spojitého signálu. Zde si ukážeme, že z numerického hlediska není Fourierova transformace diskretního signálu nic jiného, než kvadratura integrálu představujícího Fourierovu transformaci spojitého signálu pomocí tzv. lichoběžníkové formule.

Vyjdeme z definičního vzorce 2.9 pro Fourierovu transformaci.

$$S(\Omega_1, \Omega_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(t_1, t_2) \exp(-i\Omega_1 t_1 - i\Omega_2 t_2) dt_1 dt_2$$

Zvolíme kladná čísla Δ_1, Δ_2 a vzorec přepíšeme

$$S(\Omega_1, \Omega_2) = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} \int_{n_1\Delta_1}^{(n_1+1)\Delta_1} \int_{n_2\Delta_2}^{(n_2+1)\Delta_2} s(t_1, t_2) \exp(-i\Omega_1 t_1 - i\Omega_2 t_2) dt_1 dt_2.$$

Integrál přes každý obdélník $\langle n_1\Delta_1, (n_1 + 1)\Delta_1 \rangle \times \langle n_2\Delta_2, (n_2 + 1)\Delta_2 \rangle$ o stranách Δ_1, Δ_2 nahradíme pomocí tzv. lichoběžníkové formule,

$$\begin{aligned} & \int_{n_1\Delta_1}^{(n_1+1)\Delta_1} \int_{n_2\Delta_2}^{(n_2+1)\Delta_2} s(t_1, t_2) \exp(-i\Omega_1 t_1 - i\Omega_2 t_2) dt_1 dt_2 \approx \\ & \approx \frac{1}{4} \Delta_1 \Delta_2 (s(n_1\Delta_1, n_2\Delta_2) \exp(-i\Omega_1 n_1\Delta_1 - i\Omega_2 n_2\Delta_2) + \\ & + s((n_1 + 1)\Delta_1, n_2\Delta_2) \exp(-i\Omega_1 (n_1 + 1)\Delta_1 - i\Omega_2 n_2\Delta_2) + \\ & + s(n_1\Delta_1, (n_2 + 1)\Delta_2) \exp(-i\Omega_1 n_1\Delta_1 - i\Omega_2 (n_2 + 1)\Delta_2) + \\ & + s((n_1 + 1)\Delta_1, (n_2 + 1)\Delta_2) \exp(-i\Omega_1 (n_1 + 1)\Delta_1 - i\Omega_2 (n_2 + 1)\Delta_2)), \end{aligned} \quad (2.43)$$

tj. průměr hodnot integrandu ve vrcholech obdélníka vynásobíme plochou obdélníka. Dá se ukázat (odkaz na Ralston 1965), že chyba lichoběžníkové formule se dá odhadnout výrazem $c_1 C_1 \Delta_1^3 + c_2 C_2 \Delta_2^3 + c_3 C_3 \Delta_3^3$, kde c_1, c_2, c_3 jsou kladné konstanty a C_1, C_2, C_3 jsou po řadě nezáporná čísla, kterými lze odhadnout absolutní hodnoty parciálních derivací $\frac{\partial^2}{\partial t_1^2}$, $\frac{\partial^2}{\partial t_2^2}$ a $\frac{\partial^4}{\partial t_1^2 \partial t_2^2}$ integrandu na intervalu integrace.

Po užití lichoběžníkové formule obdržíme

$$\begin{aligned} \hat{S}(\Omega_1, \Omega_2) &= \Delta_1 \Delta_2 \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} s(n_1\Delta_1, n_2\Delta_2) \exp(-i\Omega_1 n_1\Delta_1 - i\Omega_2 n_2\Delta_2) = \\ &= \Delta_1 \Delta_2 \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} x(n_1, n_2) \exp(-i\Omega_1 n_1\Delta_1 - i\Omega_2 n_2\Delta_2), \end{aligned} \quad (2.44)$$

kde jsme položili $x(n_1, n_2) = s(n_1\Delta_1, n_2\Delta_2)$ a použili označení \hat{S} pro přibližné hodnoty spektra S . Zřejmě $x(n_1, n_2)$ představuje diskretní signál, který vznikl pravouhlým

2.3. FOURIEROVA TRANSFORMACE A FOURIEROVA ŘADA DISKRÉTNÍHO 2-D SIGNÁLU

ekvidistantním vzorkováním signálu $s(t_1, t_2)$ s kroky Δ_1, Δ_2 . Provedeme-li dále substituci $\Omega_j = \frac{\omega_j}{\Delta_j}$, $j = 1, 2$ a položíme-li

$$\tilde{X}(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{\Delta_1 \Delta_2} \hat{S} \left(\frac{\omega_1}{\Delta_1}, \frac{\omega_2}{\Delta_2} \right),$$

dostaneme

$$\tilde{X}(\omega_1, \omega_2) = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} x(n_1, n_2) \exp(-i \omega_1 n_1 - i \omega_2 n_2),$$

což je právě definiční vzorec 2.32 pro Fourierovu transformaci diskrétního signálu.

V souladu s výše uvedeným postupem můžeme tedy říct, že Fourierova transformace diskrétního signálu představuje až na multiplikativní konstantu $\frac{1}{\Delta_1 \Delta_2}$ numerický výpočet Fourierovy transformace odpovídajícího spojitého signálu pomocí lichoběžníkové formule.

2.3.5. Fourierova řada diskrétního signálu

Zde si zavedeme diskrétní analogii Fourierovy řady spojitého (periodického) signálu. Budeme ji nazývat Fourierova řada diskrétního (periodického) signálu. Jak ještě uvidíme dále ve 4. kapitole, má Fourierova řada diskrétního signálu velmi blízko k DFT.

Začneme obdobnou úvahou, jako při zavádění Fourierovy transformace diskrétního signálu. Vycházíme ze vztahu pro koeficienty Fourierovy řady spojitého periodického signálu (2.17).

$$S(l_1, l_2) = \frac{1}{T_1 T_2} \int_a^{a+T_1} \int_b^{b+T_2} \tilde{s}(t_1, t_2) \exp \left(-2\pi i \left(\frac{l_1 t_1}{T_1} + \frac{l_2 t_2}{T_2} \right) \right) dt_1 dt_2$$

Zdá se být rozumné zvolit pro koeficienty Fourierovy řady diskrétního signálu podobný vztah, v němž integrace bude nahrazena sumací. Uvidíme, že tento způsob vede k přijatelnému výsledku.

Definice 2.16. Koeficienty $\tilde{X}(l_1, l_2)$ Fourierovy řady diskrétního signálu udává následující vztah:

$$\tilde{X}(l_1, l_2) = \frac{1}{N_1 N_2} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \tilde{x}(n_1, n_2) \exp \left(-2\pi i \left(\frac{l_1 n_1}{N_1} + \frac{l_2 n_2}{N_2} \right) \right). \quad (2.45)$$

Díky periodicitě funkcí $\exp \left(-2\pi i \left(\frac{l_1 n_1}{N_1} + \frac{l_2 n_2}{N_2} \right) \right)$ představují koeficienty $\tilde{X}(l_1, l_2)$ periodickou komplexní funkci dvou celočíselných proměnných s periodou (N_1, N_2) .

Vztah inverze k 2.45, tj. vztah pro Fourierovu řadu diskrétního signálu, získáme využitím periodicity a ortogonality funkcí $\exp \left(2\pi i \left(\frac{l_1 n_1}{N_1} + \frac{l_2 n_2}{N_2} \right) \right)$. Obě strany 2.45 vy-

2. DVOJROZMĚRNÁ DISKRÉTNÍ FOURIEROVA TRANSFORMACE

násobíme členem $\exp\left(2\pi i \left(\frac{l_1 m_1}{N_1} + \frac{l_2 m_2}{N_2}\right)\right)$ a sečteme přes všechna l_1, l_2 z intervalu $\langle 0, N_1 - 1 \rangle \times \langle 0, N_2 - 1 \rangle$:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{l_1=0}^{N_1-1} \sum_{l_2=0}^{N_2-1} \tilde{X}(l_1, l_2) \exp\left(2\pi i \left(\frac{l_1 m_1}{N_1} + \frac{l_2 m_2}{N_2}\right)\right) = \\
 &= \frac{1}{N_1 N_2} \sum_{l_1=0}^{N_1-1} \sum_{l_2=0}^{N_2-1} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \tilde{x}(n_1, n_2) \exp\left(-2\pi i \left(\frac{l_1 n_1}{N_1} + \frac{l_2 n_2}{N_2}\right)\right) \\
 & \quad \exp\left(2\pi i \left(\frac{l_1 m_1}{N_1} + \frac{l_2 m_2}{N_2}\right)\right) = \\
 &= \frac{1}{N_1 N_2} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \tilde{x}(n_1, n_2) \sum_{l_1=0}^{N_1-1} \sum_{l_2=0}^{N_2-1} \exp\left(-2\pi i \left(\frac{l_1(n_1 - m_1)}{N_1} + \frac{l_2(n_2 - m_2)}{N_2}\right)\right) = \\
 &= \frac{1}{N_1 N_2} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \tilde{x}(n_1, n_2) N_1 N_2 \delta_{n_1, m_1} \delta_{n_2, m_2} = \\
 &= \tilde{x}(m_1, m_2),
 \end{aligned}$$

kde $\delta_{n,m}$ je symbol pro Kroneckerovo delta.

Obdrželi jsme tedy vyjádření pro Fourierovu řadu diskretního signálu

$$\tilde{x}(n_1, n_2) = \sum_{l_1=0}^{N_1-1} \sum_{l_2=0}^{N_2-1} \tilde{X}(l_1, l_2) \exp\left(2\pi i \left(\frac{l_1 n_1}{N_1} + \frac{l_2 n_2}{N_2}\right)\right). \quad (2.46)$$

Nejzajímavější na tomto výsledku je zřejmě to, že se jedná o součet konečného počtu sčítanců, nejde tedy o nekonečnou řadu. Je to velmi důležitý fakt z hlediska numerického výpočtu a numerické práce s Fourierovou řadou diskretního signálu. V definičních vztazích Fourierových párů tří matematických objektů, které jsme zavedli – Fourierovy transformace, Fourierovy řady a Fourierovy transformace diskretního signálu – vystupují buď integrály nebo součty nekonečného počtu sčítanců, jejichž výpočet v uzavřeném tvaru je znám jen pro dost omezený počet případů. Většinou jsme nuceni numericky počítat jejich aproximace. Naproti tomu Fourierovu řadu diskretního signálu můžeme spočítat vždy a právě ona je vlastně samostatně zavedeným nástrojem pro výpočet numerické aproximace tří výše uvedených objektů.

Poznámka. Definiční vzorce 2.45 a 2.46 pro Fourierovu řadu diskretního signálu a její koeficienty představují vzájemně jednoznačné přiřazení dvou diskretních periodických signálů s periodou (N_1, N_2) . Vzorce jsou až na faktor $\frac{1}{N_1 N_2}$ zcela symetrické. Tento faktor bychom mohli namísto k 2.45 přiřadit k 2.46. Důvodem, proč jsme jej použili v 2.45 je, že pak Fourierův koeficient $\tilde{X}(0, 0)$ vyjadřuje aritmetický průměr hodnot signálu $\tilde{x}(n_1, n_2)$ v jedné periodě.

Podmínky existence Fourierovy řady diskretního signálu

Jak jsme uvedli dříve, Fourierovu řadu diskretního signálu a její koeficienty lze spočítat vždy, a to pomocí konečného počtu operací sčítání a násobení. Není tedy třeba hovořit

2.3. FOURIEROVA TRANSFORMACE A FOURIEROVA ŘADA DISKRÉTNÍHO 2-D SIGNÁLU

o nějakých podmínkách existence, jako jsme to dělali vždy na podobném místě v předchozích sekcích.

Vlastnosti Fourierovy řady diskretního signálu

Zde si uvedeme základní vlastnosti Fourierovy řady diskretního signálu. Můžeme je porovnat s vlastnostmi dříve probraných transformací. U vlastností 1., 11., 12., 13. a 15., týkajících se dvojic signálů, se předpokládá, že oba signály mají stejnou periodu.

- Fourierův pár

$$\tilde{x}(n_1, n_2) \longleftrightarrow \tilde{X}(l_1, l_2)$$

- Transformační vztahy

$$\tilde{x}(n_1, n_2) = \sum_{l_1=0}^{N_1-1} \sum_{l_2=0}^{N_2-1} \tilde{X}(l_1, l_2) \exp\left(2\pi i \left(\frac{l_1 n_1}{N_1} + \frac{l_2 n_2}{N_2}\right)\right)$$

$$\tilde{X}(l_1, l_2) = \frac{1}{N_1 N_2} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \tilde{x}(n_1, n_2) \exp\left(-2\pi i \left(\frac{l_1 n_1}{N_1} + \frac{l_2 n_2}{N_2}\right)\right)$$

1. linearita

$$a \tilde{x}_1(n_1, n_2) + b \tilde{x}_2(n_1, n_2) \longleftrightarrow a \tilde{X}_1(l_1, l_2) + b \tilde{X}_2(l_1, l_2)$$

3. posunutí signálu

$$\tilde{x}(n_1 - m_1, n_2 - m_2) \longleftrightarrow \tilde{X}(l_1, l_2) \exp\left(-2\pi i \left(\frac{m_1 l_1}{N_1} + \frac{m_2 l_2}{N_2}\right)\right)$$

4. modulace signálu

$$\tilde{x}(n_1, n_2) \exp\left(2\pi i \left(\frac{n_1 m_1}{N_1} + \frac{n_2 m_2}{N_2}\right)\right) \longleftrightarrow \tilde{X}(l_1 - m_1, l_2 - m_2)$$

7. transpozice

$$\tilde{x}(n_2, n_1) \longleftrightarrow \tilde{X}(l_2, l_1)$$

8. zrcadlení

$$\tilde{x}(-n_1, n_2) \longleftrightarrow \tilde{X}(-l_1, l_2)$$

$$\tilde{x}(n_1, -n_2) \longleftrightarrow \tilde{X}(l_1, -l_2)$$

$$\tilde{x}(-n_1, -n_2) \longleftrightarrow \tilde{X}(-l_1, -l_2)$$

9. komplexně sdružený signál

$$\tilde{x}^*(n_1, n_2) \longleftrightarrow \tilde{X}^*(-l_1, -l_2)$$

10. reálný signál

$$\tilde{x}(n_1, n_2) = \tilde{x}^*(n_1, n_2) \longleftrightarrow \tilde{X}(l_1, l_2) = \tilde{X}^*(-l_1, -l_2)$$

2. DVOJROZMĚRNÁ DISKRÉTNÍ FOURIEROVA TRANSFORMACE

11. diskretní periodická konvoluce

$$\frac{1}{N_1 N_2} \sum_{m_1=0}^{N_1-1} \sum_{m_2=0}^{N_2-1} \tilde{x}_1(m_1, m_2) \tilde{x}_2(n_1 - m_1, n_2 - m_2) \longleftrightarrow \tilde{X}_1(l_1, l_2) \tilde{X}_2(l_1, l_2)$$

12. násobení signálů

$$\tilde{x}_1(n_1, n_2) \tilde{x}_2(n_1, n_2) \longleftrightarrow \sum_{m_1=0}^{N_1-1} \sum_{m_2=0}^{N_2-1} \tilde{X}_1(m_1, m_2) \tilde{X}_2(l_1 - m_1, l_2 - m_2)$$

13. diskretní periodická korelace

$$\frac{1}{N_1 N_2} \sum_{m_1=0}^{N_1-1} \sum_{m_2=0}^{N_2-1} \tilde{x}_1(m_1, m_2) \tilde{x}_2^*(m_1 + n_1, m_2 + n_2) \longleftrightarrow \tilde{X}_1(l_1, l_2) \tilde{X}_2^*(l_1, l_2)$$

14. diskretní periodická autokorelace

$$\frac{1}{N_1 N_2} \sum_{m_1=0}^{N_1-1} \sum_{m_2=0}^{N_2-1} \tilde{x}(m_1, m_2) \tilde{x}^*(m_1 + n_1, m_2 + n_2) \longleftrightarrow |\tilde{X}(l_1, l_2)|^2$$

15. Parsevalova rovnost

$$\frac{1}{N_1 N_2} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \tilde{x}_1(n_1, n_2) \tilde{x}_2^*(n_1, n_2) = \sum_{l_1=0}^{N_1-1} \sum_{l_2=0}^{N_2-1} \tilde{X}_1(l_1, l_2) \tilde{X}_2^*(l_1, l_2)$$

16. Rayleighova rovnost

$$\frac{1}{N_1 N_2} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} |\tilde{x}(n_1, n_2)|^2 = \sum_{l_1=0}^{N_1-1} \sum_{l_2=0}^{N_2-1} |\tilde{X}(l_1, l_2)|^2$$

Amplitudové, fázové, logaritmické a výkonové spektrum

Koeficienty Fourierovy řady diskretního signálu představují diskretní spektrum, které je komplexní periodickou funkcí dvou celočíselných proměnných. Podobně jako u Fourierovy transformace, Fourierovy řady a Fourierovy transformace diskretního signálu můžeme hovořit o reálné části $\text{Re}(\tilde{X}(l_1, l_2))$ a imaginární části $\text{Im}(\tilde{X}(l_1, l_2))$ spektra a o amplitudovém spektru $\tilde{A}(l_1, l_2)$, fázovém spektru $\tilde{F}(l_1, l_2)$, logaritmickém spektru $\tilde{L}(l_1, l_2)$ a výkonovém spektru $\tilde{P}(l_1, l_2)$.

Definice 2.17. Amplitudovým spektrem $\tilde{A}(l_1, l_2)$, fázovým spektrem $\tilde{F}(l_1, l_2)$, logaritmickým spektrem $\tilde{L}(l_1, l_2)$ a výkonovým spektrem $\tilde{P}(l_1, l_2)$ rozumíme objekty dané následujícími vztahy:

$$\begin{aligned} \tilde{X}(l_1, l_2) &= \tilde{A}(l_1, l_2) \exp(i \tilde{F}(l_1, l_2)), \\ \tilde{A}(l_1, l_2) &= |\tilde{X}(l_1, l_2)|, \\ \tilde{F}(l_1, l_2) &= \arg \tilde{X}(l_1, l_2), \\ \tilde{L}(l_1, l_2) &= \log \tilde{A}(l_1, l_2), \\ \tilde{P}(l_1, l_2) &= \tilde{A}^2(l_1, l_2), \end{aligned} \tag{2.47}$$

kde \arg značí hlavní hodnotu argumentu, tzn. $\tilde{F}(l_1, l_2) \in (-\pi, \pi)$.

O logaritmickém spektru platí poznámka 2.2.1.

Fourierova řada diskrétního signálu jako vyjádření diskrétního signálu zadaného na konečném intervalu

Podobně jako u Fourierovy řady spojitého signálu si můžeme představit, že vztahy 2.45 a 2.46 jsou vyjádřením diskrétního signálu, který byl zadán pouze v intervalu $P_{N_1, N_2} = \langle 0, N_1 - 1 \rangle \times \langle 0, N_2 - 1 \rangle$, a že 2.46 dává zároveň i periodické prodloužení hodnot signálu mimo tento interval, chápat jako důsledek periodicity funkcí $\exp\left(2\pi i \left(\frac{l_1 n_1}{N_1} + \frac{l_2 n_2}{N_2}\right)\right)$. Můžeme tedy na Fourierovu řadu diskrétního signálu pohlížet jako na vzájemně jednoznačné přiřazení $N_1 \times N_2$ hodnot (jedné periody) signálu a $N_1 \times N_2$ hodnot (jedné periody) koeficientů Fourierovy řady.

Také můžeme na Fourierovu řadu diskrétního signálu pohlížet jako na vyjádření diskrétního signálu s konečným nosičem P_{N_1, N_2} uvnitř tohoto nosiče.

2.3.6. Souvislost Fourierovy řady spojitého a diskrétního signálu

Nyní si ukážeme, jaký je vztah mezi Fourierovou řadou spojitého a diskrétního signálu. Použijeme analogický postup jako v případě vyjádření vztahu mezi Fourierovou transformací spojitého a diskrétního signálu, budeme diskretizovat spojitý periodický signál v prostorové oblasti.

Mějme spojitý periodický signál $\tilde{s}(t_1, t_2)$ a předpokládejme, že jsou splněny podmínky pro existenci jeho Fourierovy řady, která je dána vzorcem 2.16

$$\tilde{s}(t_1, t_2) = \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} S(k_1, k_2) \exp\left(2\pi i \left(\frac{k_1 t_1}{T_1} + \frac{k_2 t_2}{T_2}\right)\right),$$

kde Fourierovy koeficienty jsou podle 2.18

$$S(k_1, k_2) = \frac{1}{T_1 T_2} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} \int_{-\frac{T_2}{2}}^{\frac{T_2}{2}} \tilde{s}(t_1, t_2) \exp\left(-2\pi i \left(\frac{k_1 t_1}{T_1} + \frac{k_2 t_2}{T_2}\right)\right) dt_1 dt_2.$$

Pravoúhlým ekvidistantním vzorkováním signálu $\tilde{s}(t_1, t_2)$ takovým, že na periodu T_1 případně N_1 a na periodu T_2 případně N_2 vzorků, tj. s kroky diskretizace $\frac{T_1}{N_1}$ v první a $\frac{T_2}{N_2}$ ve druhé proměnné, obdržíme diskrétní signál $\tilde{x}(n_1, n_2)$,

$$\tilde{x}(n_1, n_2) = \tilde{s}\left(n_1 \frac{T_1}{N_1}, n_2 \frac{T_2}{N_2}\right).$$

Za $\tilde{s}\left(n_1 \frac{T_1}{N_1}, n_2 \frac{T_2}{N_2}\right)$ můžeme formálně dosadit hodnoty Fourierovy řady v bodech $\left(n_1 \frac{T_1}{N_1}, n_2 \frac{T_2}{N_2}\right)$,

$$\tilde{x}(n_1, n_2) = \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} S(k_1, k_2) \exp\left(2\pi i \left(\frac{k_1 n_1}{N_1} + \frac{k_2 n_2}{N_2}\right)\right).$$

2. DVOJROZMĚRNÁ DISKRÉTNÍ FOURIEROVA TRANSFORMACE

Jelikož funkce $\exp\left(2\pi i \left(\frac{k_1 n_1}{N_1} + \frac{k_2 n_2}{N_2}\right)\right)$ jsou periodické v proměnných k_1, k_2 s periodou (N_1, N_2) , můžeme položit $k_1 = l_1 + N_1 m_1$, $k_2 = l_2 + N_2 m_2$ a poslední vztah pro $\tilde{x}(n_1, n_2)$ přepsat následovně

$$\begin{aligned} \tilde{x}(n_1, n_2) &= \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} \sum_{l_1=0}^{N_1-1} \sum_{l_2=0}^{N_2-1} S(l_1 + N_1 m_1, l_2 + N_2 m_2) \\ &\quad \exp\left(2\pi i \left(\frac{(l_1 + N_1 m_1)n_1}{N_1} + \frac{(l_2 + N_2 m_2)n_2}{N_2}\right)\right) = \\ &= \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} \sum_{l_1=0}^{N_1-1} \sum_{l_2=0}^{N_2-1} S(l_1 + N_1 m_1, l_2 + N_2 m_2) \\ &\quad \exp\left(2\pi i \left(\frac{l_1 n_1}{N_1} + \frac{l_2 n_2}{N_2}\right)\right) = \\ &= \sum_{l_1=0}^{N_1-1} \sum_{l_2=0}^{N_2-1} \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} S(l_1 + N_1 m_1, l_2 + N_2 m_2) \\ &\quad \exp\left(2\pi i \left(\frac{l_1 n_1}{N_1} + \frac{l_2 n_2}{N_2}\right)\right). \end{aligned}$$

Řadu jsme tedy přerovnali. Tento krok je obecně možno provést pouze v případě, kdy tato řada konverguje absolutně. Označíme-li dále

$$\tilde{X}(l_1, l_2) = \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} S(l_1 + N_1 m_1, l_2 + N_2 m_2), \quad (2.48)$$

máme

$$\tilde{x}(n_1, n_2) = \sum_{l_1=0}^{N_1-1} \sum_{l_2=0}^{N_2-1} \tilde{X}(l_1, l_2) \exp\left(2\pi i \left(\frac{l_1 n_1}{N_1} + \frac{l_2 n_2}{N_2}\right)\right),$$

což představuje definiční vztah 2.46 pro Fourierovu řadu diskrétního signálu. Její koeficienty $\tilde{X}(l_1, l_2)$ jsou podle 2.48 dány periodizací Fourierových koeficientů odpovídajícího spojitého signálu.

Je zřejmé, že pokud nejsou Fourierovy koeficienty $S(l_1, l_2)$ nulové mimo interval frekvencí $\langle M_1, M_1 + N_1 - 1 \rangle \times \langle M_2, M_2 + N_2 - 1 \rangle$, kde $M_1, M_2 \in \mathbb{Z}$, dojde při periodizaci k překrývání hodnot $S(l_1, l_2)$, tj. k aliasingu ve frekvenční oblasti.

Z toho, co jsme právě ukázali, lze odvodit analogii vzorkovacího teorému pro periodický signál. Jsou-li Fourierovy koeficienty spojitého periodického signálu $\tilde{s}(t_1, t_2)$ nulové mimo interval frekvencí $\langle 0, N_1 - 1 \rangle \times \langle 0, N_2 - 1 \rangle$, kde $N_1, N_2 \in \mathbb{Z}$, lze spojitý periodický signál $\tilde{s}(t_1, t_2)$ rekonstruovat na základě znalosti Fourierových koeficientů diskrétního signálu $\tilde{x}(n_1, n_2)$ pomocí formule

$$\tilde{s}(t_1, t_2) = \sum_{l_1=0}^{N_1-1} \sum_{l_2=0}^{N_2-1} \tilde{X}(l_1, l_2) \exp\left(2\pi i \left(\frac{l_1 t_1}{N_1 \Delta_1} + \frac{l_2 t_2}{N_2 \Delta_2}\right)\right),$$

2.3. FOURIEROVA TRANSFORMACE A FOURIEROVA ŘADA DISKRÉTNÍHO 2-D SIGNÁLU

kde $N_1\Delta_1 = T_1$, $N_2\Delta_2 = T_2$.

Dosadíme-li sem za $\tilde{X}(l_1, l_2)$ ze vztahu 2.45, dostaneme

$$\begin{aligned}\tilde{s}(t_1, t_2) &= \sum_{l_1=0}^{N_1-1} \sum_{l_2=0}^{N_2-1} \frac{1}{N_1 N_2} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \tilde{x}(n_1, n_2) \exp\left(-2\pi i \left(\frac{l_1 n_1}{N_1} + \frac{l_2 n_2}{N_2}\right)\right) \\ &\quad \exp\left(2\pi i \left(\frac{l_1 t_1}{N_1 \Delta_1} + \frac{l_2 t_2}{N_2 \Delta_2}\right)\right) = \\ &= \frac{1}{N_1 N_2} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \tilde{x}(n_1, n_2) \\ &\quad \sum_{l_1=0}^{N_1-1} \sum_{l_2=0}^{N_2-1} \exp\left(2\pi i \left(\frac{l_1}{N_1 \Delta_1} (t_1 - n_1 \Delta_1) + \frac{l_2}{N_2 \Delta_2} (t_2 - n_2 \Delta_2)\right)\right).\end{aligned}$$

Sčítání přes l_1 a l_2 můžeme provést pomocí vzorce

$$\sum_{l=0}^{N-1} \exp(2\pi i l y) = \exp\left(2\pi i \frac{N-1}{2} y\right) \frac{\sin\left(2\pi \frac{N}{2} y\right)}{\sin\left(2\pi \frac{y}{2}\right)}.$$

Dostaneme tak

$$\begin{aligned}\tilde{s}(t_1, t_2) &= \frac{1}{N_1 N_2} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \tilde{x}(n_1, n_2) \exp\left(2\pi i \left(\frac{N_1-1}{2} \frac{t_1 - n_1 \Delta_1}{N_1 \Delta_1} + \frac{N_2-1}{2} \frac{t_2 - n_2 \Delta_2}{N_2 \Delta_2}\right)\right) \\ &\quad \frac{\sin\left(\pi \frac{t_1 - n_1 \Delta_1}{\Delta_1}\right) \sin\left(\pi \frac{t_2 - n_2 \Delta_2}{\Delta_2}\right)}{\sin\left(\pi \frac{t_1 - n_1 \Delta_1}{N_1 \Delta_1}\right) \sin\left(\pi \frac{t_2 - n_2 \Delta_2}{N_2 \Delta_2}\right)}.\end{aligned}\tag{2.49}$$

Vidíme, že podobně jako byl frekvenčně omezený spojitý signál reprezentován početnou množinou svých (vhodně odebraných) vzorků, je nyní periodický spojitý signál, který má pouze konečný počet nenulových Fourierových koeficientů, reprezentován konečnou množinou (vhodně odebraných) vzorků.

2.3.7. Vztah mezi Fourierovou transformací diskrétního signálu a Fourierovou řadou diskrétního signálu

Podobně jako v předchozí sekci, kde jsme ukázali vztah mezi Fourierovou řadou spojitého a diskrétního signálu pomocí vzorkování signálu v prostorové oblasti, ukážeme nyní vztah mezi Fourierovou transformací diskrétního signálu a Fourierovou řadou diskrétního signálu pomocí vzorkování signálu ve frekvenční oblasti, tj. pomocí vzorkování spektra.

Mějme diskrétní signál $x(n_1, n_2)$ a necht' existuje jeho Fourierova transformace $\tilde{X}_T(\omega_1, \omega_2)$,

$$\tilde{X}_T(\omega_1, \omega_2) = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} x(n_1, n_2) \exp(-i\omega_1 n_1 - i\omega_2 n_2).$$

2. DVOJROZMĚRNÁ DISKRÉTNÍ FOURIEROVA TRANSFORMACE

Označení \tilde{X}_T je zde zvoleno pro Fourierovu transformaci diskretního signálu proto, abychom ji v dalším odlišili od označení pro Fourierovu řadu diskretního signálu.

Hodnota Fourierovy transformace diskretního signálu pro frekvence $\left(2\pi\frac{l_1}{N_1}, 2\pi\frac{l_2}{N_2}\right)$ bude

$$\tilde{X}_T\left(2\pi\frac{l_1}{N_1}, 2\pi\frac{l_2}{N_2}\right) = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} x(n_1, n_2) \exp\left(-2\pi i\left(\frac{l_1 n_1}{N_1} + \frac{l_2 n_2}{N_2}\right)\right).$$

Dosadíme-li $n_1 = m_1 + k_1 N_1$, $n_2 = m_2 + k_2 N_2$ a využijeme ortogonalitu funkcí $\exp\left(-2\pi i\left(\frac{l_1 n_1}{N_1} + \frac{l_2 n_2}{N_2}\right)\right)$, dostaneme

$$\begin{aligned} \tilde{X}_T\left(2\pi\frac{l_1}{N_1}, 2\pi\frac{l_2}{N_2}\right) &= \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} \sum_{m_1=0}^{N_1-1} \sum_{m_2=0}^{N_2-1} x(m_1 + k_1 N_1, m_2 + k_2 N_2) \\ &\quad \exp\left(-2\pi i\left(\frac{l_1 m_1}{N_1} + \frac{l_2 m_2}{N_2}\right)\right) = \\ &= \sum_{m_1=0}^{N_1-1} \sum_{m_2=0}^{N_2-1} \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} x(m_1 + k_1 N_1, m_2 + k_2 N_2) \\ &\quad \exp\left(-2\pi i\left(\frac{l_1 m_1}{N_1} + \frac{l_2 m_2}{N_2}\right)\right). \end{aligned} \tag{2.50}$$

Řadu jsme tedy přerovnali. Tento krok je možno provést pouze v případě, že řada konverguje absolutně.

Označíme-li nyní

$$\tilde{x}(m_1, m_2) = \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} x(m_1 + k_1 N_1, m_2 + k_2 N_2), \tag{2.51}$$

$$\tilde{X}(l_1, l_2) = \frac{1}{N_1 N_2} \tilde{X}_T\left(2\pi\frac{l_1}{N_1}, 2\pi\frac{l_2}{N_2}\right), \tag{2.52}$$

dostaneme vzorec odpovídající definičnímu vztahu 2.45 pro koeficienty Fourierovy řady diskretního periodického signálu

$$\tilde{X}(l_1, l_2) = \frac{1}{N_1 N_2} \sum_{m_1=0}^{N_1-1} \sum_{m_2=0}^{N_2-1} \tilde{x}(m_1, m_2) \exp\left(-2\pi i\left(\frac{l_1 m_1}{N_1} + \frac{l_2 m_2}{N_2}\right)\right).$$

Koeficienty Fourierovy řady $\tilde{X}(l_1, l_2)$ diskretního signálu \tilde{x} , který vznikl periodizací 2.51, udávají tedy podle vztahu 2.52 hodnoty Fourierovy transformace $\tilde{X}_T\left(2\pi\frac{l_1}{N_1}, 2\pi\frac{l_2}{N_2}\right)$ odpovídajícího neperiodického signálu x .

Ze vztahu 2.51 je zřejmé, že zde opět může nastat aliasing, tentokrát v prostorové oblasti. V případě, že jde o signál, jehož nosič je nějakou podmnožinou intervalu $\langle 0, N_1 - 1 \rangle \times \langle 0, N_2 - 1 \rangle$, k aliasingu nedojde a bude

2.3. FOURIEROVA TRANSFORMACE A FOURIEROVA ŘADA DISKRÉTNÍHO 2-D SIGNÁLU

$$\tilde{x}(m_1, m_2) = x(m_1, m_2) \quad \text{pro } 0 \leq m_1 \leq N_1 - 1, 0 \leq m_2 \leq N_2 - 1, \quad (2.53)$$

přičemž koeficienty Fourierovy řady diskrétního signálu \tilde{x} budou prostřednictvím 2.52 udávat hodnoty vzorků Fourierovy transformace diskrétního signálu x . Zřejmě zvětšováním N_1 a N_2 můžeme libovolně „zahustit“ vzorkování spektra \tilde{X}_T .

2.3.8. Přejchod od Fourierovy řady spojitého periodického signálu k Fourierově řadě diskrétního signálu pomocí kvadratury

Nyní ukážeme, že koeficienty Fourierovy řady diskrétního signálu odpovídají kvadratuře integrálu udávajícího koeficienty Fourierovy řady signálu spojitého pomocí lichoběžníkové formule.

Mějme spojitý periodický signál $\tilde{s}(t_1, t_2)$ s periodou (T_1, T_2) . Zvolme přirozená čísla N_1, N_2 a označme

$$\tilde{x}(n_1, n_2) = \tilde{s}\left(n_1 \frac{T_1}{N_1}, n_2 \frac{T_2}{N_2}\right)$$

diskrétní periodický signál s periodou (N_1, N_2) . Nahradíme-li nyní jednotlivé integrály v 2.18 přes obdélníky o stranách $\frac{T_1}{N_1}, \frac{T_2}{N_2}$ lichoběžníkovou formulí analogickou vzorci 2.44 a využijeme periodicity signálu $\tilde{s}(t_1, t_2)$, dostaneme

$$\begin{aligned} \hat{S}(l_1, l_2) &= \frac{1}{T_1 T_2} \frac{T_1 T_2}{N_1 N_2} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \tilde{s}\left(n_1 \frac{T_1}{N_1}, n_2 \frac{T_2}{N_2}\right) \\ &\quad \exp\left(-2\pi i \left(\frac{l_1 n_1 T_1}{T_1 N_1} + \frac{l_2 n_2 T_2}{T_2 N_2}\right)\right) = \\ &= \frac{1}{N_1 N_2} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \tilde{x}(n_1, n_2) \exp\left(-2\pi i \left(\frac{l_1 n_1}{N_1} + \frac{l_2 n_2}{N_2}\right)\right), \end{aligned}$$

kde jsme $\hat{S}(l_1, l_2)$ označili přibližné hodnoty $S(l_1, l_2)$.

Položíme-li

$$\tilde{X}(l_1, l_2) = \hat{S}(l_1, l_2),$$

máme

$$\tilde{X}(l_1, l_2) = \frac{1}{N_1 N_2} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \tilde{x}(n_1, n_2) \exp\left(-2\pi i \left(\frac{l_1 n_1}{N_1} + \frac{l_2 n_2}{N_2}\right)\right).$$

Dospěli jsme tedy k závěru, že koeficienty Fourierovy řady diskrétního signálu představují numerický výpočet koeficientů Fourierovy řady odpovídajícího spojitého signálu pomocí lichoběžníkové formule. O chybě kvadratury platí to, co bylo řečeno v sekci 2.3.4.

2.3.9. Dualita diskretizace a periodizace signálu

Doposud jsme si ukázali čtveřici transformací 2-D signálů: Fourierovu transformaci spojitého signálu, Fourierovu řadu spojitého periodického signálu, Fourierovu transformaci diskrétního signálu a Fourierovu řadu diskrétního periodického signálu. Jejich vlastnosti si můžeme prohlédnout v příslušných kapitolách.

Studovali jsme také vzájemné vztahy těchto transformací. Ve všech případech jsme postupovali jednotně, vždy jsme použili diskretizaci. Diskretizací signálu nebo jeho spektra (jinak řečeno diskretizací v prostorové nebo frekvenční oblasti) jsme vždy po formálních úpravách obdrželi hledaný vztah. Přitom diskretizaci signálu v prostorové oblasti odpovídala periodizace ve frekvenční oblasti, stejně jako diskretizaci ve frekvenční oblasti odpovídala periodizace v prostorové oblasti. Můžeme tudíž hovořit o dualitě diskretizace a periodizace signálu. Tato dualita má velký význam pro práci s DFT.

2.4. Dvojměrná diskrétní Fourierova transformace

Zde budeme vycházet z Fourierovy řady diskrétního 2-D signálu. Má totiž pro naše potřeby vynikající vlastnosti – existuje vždy a je výpočetně snadno realizovatelná. Probereme dvojměrnou diskrétní Fourierovu transformaci (2-D DFT), která má velmi blízko právě k Fourierově řadě diskrétního signálu a kterou můžeme chápat jako praktickou realizaci definičních vztahů Fourierovy řady diskrétního signálu.

Pokud to bude možné, budeme nadále přívlastek dvojměrná vynechávat, jak tomu bylo doposud.

Definice 2.18. Jednorozměrnou (1-D) DFT definujeme jako vzájemně jednoznačné přiřazení dvou N -tic obecně komplexních hodnot pomocí vztahů

$$Y(l) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} y(n) \exp\left(-2\pi i \frac{nl}{N}\right), \quad 0 \leq l \leq N-1, \quad (2.54)$$

$$y(n) = \sum_{l=0}^{N-1} Y(l) \exp\left(2\pi i \frac{nl}{N}\right), \quad 0 \leq n \leq N-1, \quad (2.55)$$

přičemž přiřazení multiplikativního normovacího faktoru $\frac{1}{N}$ k jednomu z uvedených vztahů je čistě formální.

Analogicky budeme definovat dvojměrnou DFT.

Definice 2.19. Dvojměrnou (2-D) DFT definujeme jako vzájemně jednoznačné přiřazení dvou $N_1 \times N_2$ -tic obecně komplexních hodnot pomocí vztahů

$$Y(l_1, l_2) = \frac{1}{N_1 N_2} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} y(n_1, n_2) \exp\left(-2\pi i \left(\frac{n_1 l_1}{N_1} + \frac{n_2 l_2}{N_2}\right)\right), \quad (2.56)$$

$$0 \leq l_1 \leq N_1 - 1, \quad 0 \leq l_2 \leq N_2 - 1,$$

2.4. DVOJROZMĚRNÁ DISKRÉTNÍ FOURIEROVA TRANSFORMACE

$$y(n_1, n_2) = \sum_{l_1=0}^{N_1-1} \sum_{l_2=0}^{N_2-1} Y(l_1, l_2) \exp\left(2\pi i \left(\frac{n_1 l_1}{N_1} + \frac{n_2 l_2}{N_2}\right)\right), \quad (2.57)$$

$$0 \leq n_1 \leq N_1 - 1, \quad 0 \leq n_2 \leq N_2 - 1.$$

Vztah 2.56 budeme nazývat **přímou**, 2.57 pak **inverzní** 2-D DFT.

Je zřejmé, že na pořadí sumace v těchto vztazích nezáleží.

Skutečnost, že uvedené definiční vzorce tvoří dvojici komplementárních vztahů, tj. že postupným provedením přímé a poté inverzní transformace získáme opět výchozí $N_1 \times N_2$ -tici hodnot, lze snadno ověřit pomocí ortogonality funkcí $\exp\left(2\pi i \left(\frac{n_1 l_1}{N_1} + \frac{n_2 l_2}{N_2}\right)\right)$, zcela analogicky jako při odvození vyjádření pro Fourierovu řadu diskretního signálu.

Poznámka. $N_1 \times N_2$ -tice hodnot, které tvoří transformační pár při DFT, budeme dále označovat většinou symboly y, Y pro odlišení od transformačních párů diskretních signálů, pro které jsme používali symboly x, X , resp. \tilde{x}, \tilde{X} .

2.4.1. Vztah DFT k Fourierově řadě diskretního signálu

Díky periodicitě funkcí $\exp\left(2\pi i \left(\frac{n_1 l_1}{N_1} + \frac{n_2 l_2}{N_2}\right)\right)$ dávají vztahy 2.56 a 2.57 formálně hodnoty $Y(l_1, l_2), y(n_1, n_2)$ nejen pro nezávisle proměnné z intervalu $P_{N_1, N_2} = \langle 0, N_1 - 1 \rangle \times \langle 0, N_2 - 1 \rangle$, ale i pro libovolnou dvojici celých čísel. Můžeme se proto na tyto dva vztahy dívat jako na vyjádření pro Fourierovu řadu diskretního periodického signálu $\tilde{x}(n_1, n_2)$,

$$\tilde{X}(l_1, l_2) = \frac{1}{N_1 N_2} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \tilde{x}(n_1, n_2) \exp\left(-2\pi i \left(\frac{n_1 l_1}{N_1} + \frac{n_2 l_2}{N_2}\right)\right), \quad (2.58)$$

$$\tilde{x}(n_1, n_2) = \sum_{l_1=0}^{N_1-1} \sum_{l_2=0}^{N_2-1} \tilde{X}(l_1, l_2) \exp\left(2\pi i \left(\frac{n_1 l_1}{N_1} + \frac{n_2 l_2}{N_2}\right)\right), \quad (2.59)$$

kde periodický signál $\tilde{x}(n_1, n_2)$, resp. koeficienty řady $\tilde{X}(l_1, l_2)$, jsou dány periodickým prodloužením $N_1 \times N_2$ -tic hodnot $y(n_1, n_2)$, resp. $Y(l_1, l_2)$, na celé \mathbb{Z}^2 :

$$\tilde{X}(l_1, l_2) = Y(l_1 \bmod N_1, l_2 \bmod N_2), \quad (l_1, l_2) \in \mathbb{Z}^2, \quad (2.60)$$

$$\tilde{x}(n_1, n_2) = y(n_1 \bmod N_1, n_2 \bmod N_2), \quad (n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2. \quad (2.61)$$

Zápis $n \bmod N$ vyjadřuje celočíselný zbytek po dělení čísla n číslem N . Interval P_{N_1, N_2} bereme většinou za základní interval periodicity.

Pracujeme-li tedy s DFT, pracujeme vlastně s Fourierovou řadou diskretního periodického signálu. Výpočtem přímé DFT spočteme jednu periodu koeficientů Fourierovy řady příslušného diskretního signálu a obdobně pro inverzní DFT. Uvedená souvislost DFT s Fourierovou řadou diskretního signálu nás opravňuje pro jednoduchost hovořit o $N_1 \times N_2$ -tici hodnot $y(n_1, n_2)$ jako o signálu a o $N_1 \times N_2$ -tici hodnot $Y(l_1, l_2)$ jako o spektru.

2.4.2. Podmínky existence DFT

Stejně jako u Fourierovy řady diskrétního signálu lze přímou i inverzní DFT spočítat vždy, a to pomocí konečného počtu operací, který snadno zjistíme pohledem na vzorce 2.56 a 2.57. Není tedy třeba hovořit o nějakých podmínkách existence.

2.4.3. Vlastnosti DFT

Díky tomu, že jsme již zavedli Fourierovu řadu diskrétního signálu a probrali její vlastnosti, můžeme nyní získat vlastnosti DFT pouhým formálním přepisem vlastností Fourierovy řady diskrétního signálu s tím, že namísto se signálem definovaným v celém \mathbb{Z}^2 pracujeme s $N_1 \times N_2$ -ticí hodnot. Opět je zde zachováno číslování odpovídajících si vlastností. U vlastností 1., 11., 12., 13. a 15. se předpokládá, že obě DFT, které zde vystupují, mají stejný rozměr $N_1 \times N_2$. Modulární zápis u některých vztahů je použit kvůli tomu, že pracujeme s $N_1 \times N_2$ -ticí hodnot $y(n_1, n_2)$ a nemáme definovány hodnoty pro $(n_1, n_2) \notin P_{N_1, N_2}$.

- Fourierův pár

$$y(n_1, n_2) \longleftrightarrow Y(l_1, l_2)$$

- Transformační vztahy

$$y(n_1, n_2) = \sum_{l_1=0}^{N_1-1} \sum_{l_2=0}^{N_2-1} Y(l_1, l_2) \exp\left(2\pi i \left(\frac{l_1 n_1}{N_1} + \frac{l_2 n_2}{N_2}\right)\right)$$

$$Y(l_1, l_2) = \frac{1}{N_1 N_2} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} y(n_1, n_2) \exp\left(-2\pi i \left(\frac{l_1 n_1}{N_1} + \frac{l_2 n_2}{N_2}\right)\right)$$

$$(n_1, n_2), (l_1, l_2) \in \langle 0, N_1 - 1 \rangle \times \langle 0, N_2 - 1 \rangle$$

1. linearita

$$a y_1(n_1, n_2) + b y_2(n_1, n_2) \longleftrightarrow a Y_1(l_1, l_2) + b Y_2(l_1, l_2)$$

3. cyklické posunutí

$$y((n_1 - m_1) \bmod N_1, (n_2 - m_2) \bmod N_2) \longleftrightarrow Y(l_1, l_2) \exp\left(-2\pi i \left(\frac{m_1 l_1}{N_1} + \frac{m_2 l_2}{N_2}\right)\right)$$

4. modulace

$$y(n_1, n_2) \exp\left(2\pi i \left(\frac{n_1 m_1}{N_1} + \frac{n_2 m_2}{N_2}\right)\right) \longleftrightarrow Y((l_1 - m_1) \bmod N_1, (l_2 - m_2) \bmod N_2)$$

7. transpozice

$$y(n_2, n_1) \longleftrightarrow Y(l_2, l_1)$$

8. zrcadlení

$$y((N_1 - n_1) \bmod N_1, n_2) \longleftrightarrow Y((N_1 - l_1) \bmod N_1, l_2)$$

$$y(n_1, (N_2 - n_2) \bmod N_2) \longleftrightarrow Y(l_1, (N_2 - l_2) \bmod N_2)$$

$$y((N_1 - n_1) \bmod N_1, (N_2 - n_2) \bmod N_2) \longleftrightarrow Y((N_1 - l_1) \bmod N_1, (N_2 - l_2) \bmod N_2)$$

2.5. ZÁKLADNÍ MOŽNOSTI POUŽITÍ 2-D DFT

9. komplexně sdružené hodnoty $y(n_1, n_2)$

$$y^*(n_1, n_2) \longleftrightarrow Y^*((N_1 - l_1) \bmod N_1, (N_2 - l_2) \bmod N_2)$$

10. reálné hodnoty $y(n_1, n_2)$

$$y(n_1, n_2) = y^*(n_1, n_2) \longleftrightarrow Y(l_1, l_2) = Y^*((N_1 - l_1) \bmod N_1, (N_2 - l_2) \bmod N_2)$$

11. diskrétní periodická konvoluce

$$\begin{aligned} \frac{1}{N_1 N_2} \sum_{m_1=0}^{N_1-1} \sum_{m_2=0}^{N_2-1} y_1(m_1, m_2) y_2((n_1 - m_1) \bmod N_1, (n_2 - m_2) \bmod N_2) &\longleftrightarrow \\ &\longleftrightarrow Y_1(l_1, l_2) Y_2(l_1, l_2) \end{aligned}$$

12. násobení

$$y_1(n_1, n_2) y_2(n_1, n_2) \longleftrightarrow \sum_{m_1=0}^{N_1-1} \sum_{m_2=0}^{N_2-1} Y_1(m_1, m_2) Y_2((l_1 - m_1) \bmod N_1, (l_2 - m_2) \bmod N_2)$$

13. diskrétní periodická korelace

$$\begin{aligned} \frac{1}{N_1 N_2} \sum_{m_1=0}^{N_1-1} \sum_{m_2=0}^{N_2-1} y_1(m_1, m_2) y_2^*((m_1 + n_1) \bmod N_1, (m_2 + n_2) \bmod N_2) &\longleftrightarrow \\ &\longleftrightarrow Y_1(l_1, l_2) Y_2^*(l_1, l_2) \end{aligned}$$

14. diskrétní periodická autokorelace

$$\frac{1}{N_1 N_2} \sum_{m_1=0}^{N_1-1} \sum_{m_2=0}^{N_2-1} y(m_1, m_2) y^*((m_1 + n_1) \bmod N_1, (m_2 + n_2) \bmod N_2) \longleftrightarrow |Y(l_1, l_2)|^2$$

15. Parsevalova rovnost

$$\frac{1}{N_1 N_2} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} y_1(n_1, n_2) y_2^*(n_1, n_2) = \sum_{l_1=0}^{N_1-1} \sum_{l_2=0}^{N_2-1} Y_1(l_1, l_2) Y_2^*(l_1, l_2)$$

16. Rayleighova rovnost

$$\frac{1}{N_1 N_2} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} |y(n_1, n_2)|^2 = \sum_{l_1=0}^{N_1-1} \sum_{l_2=0}^{N_2-1} |Y(l_1, l_2)|^2$$

2.5. Základní možnosti použití 2-D DFT

Nyní si uvedeme některé možnosti použití 2-D DFT. Obecně je možno říci, že uvedené postupy se mohou uplatnit všude tam, kde se jedná o zpracování informace rozložené v ploše.

Za základní možnosti použití 2-D DFT považujeme frekvenční analýzu a syntézu signálů, lineární filtraci a interpolaci dat. V dalším se budeme zabývat pouze interpolací dat, kterou budeme využívat při zpracování digitálních obrazů. Uvedeme zde především praktický návod výpočetních postupů a rozbor některých citlivých momentů výpočtu pomocí DFT.

2.5.1. Interpolace dat

Prakticky si předvedeme, jak lze DFT užít k interpolaci dat.

Doplníme $N_1 \times N_2$ hodnot spektra $Y(l_1, l_2)$ nulami tak, abychom měli celkem $M_1 \times M_2$ hodnot, $M_1 = k_1 N_1$, $M_2 = k_2 N_2$, kde $k_1, k_2 \in N$. Poté spočteme inverzní DFT o rozměru $M_1 \times M_2$ a porovnáme získaný signál s původním signálem $y(n_1, n_2)$.

Označme

$$Z(l_1, l_2) = \begin{cases} Y(l_1, l_2), & l_1 = 0, \dots, N_1 - 1, l_2 = 0, \dots, N_2 - 1, \\ 0 & \text{pro ostatní } l_1, l_2 \end{cases} \quad (2.62)$$

a spočteme podle 2.57 inverzní DFT.

$$\begin{aligned} z(m_1, m_2) &= \sum_{l_1=0}^{M_1-1} \sum_{l_2=0}^{M_2-1} Z(l_1, l_2) \exp\left(2\pi i \left(\frac{m_1 l_1}{M_1} + \frac{m_2 l_2}{M_2}\right)\right) = \\ &= \sum_{l_1=0}^{N_1-1} \sum_{l_2=0}^{N_2-1} Y(l_1, l_2) \exp\left(2\pi i \left(\frac{m_1 l_1}{k_1 N_1} + \frac{m_2 l_2}{k_2 N_2}\right)\right), \end{aligned} \quad (2.63)$$

$$m_1 = 0, \dots, M_1 - 1, m_2 = 0, \dots, M_2 - 1.$$

Podle téhož vzorce

$$\begin{aligned} y(n_1, n_2) &= \sum_{l_1=0}^{N_1-1} \sum_{l_2=0}^{N_2-1} Y(l_1, l_2) \exp\left(2\pi i \left(\frac{n_1 l_1}{N_1} + \frac{n_2 l_2}{N_2}\right)\right), \\ n_1 &= 0, \dots, N_1 - 1, n_2 = 0, \dots, N_2 - 1. \end{aligned}$$

Platí tedy

$$y(n_1, n_2) = z(k_1 n_1, k_2 n_2), \quad n_1 = 0, \dots, N_1 - 1, n_2 = 0, \dots, N_2 - 1. \quad (2.64)$$

Této vlastnosti signálu $z(m_1, m_2)$ můžeme použít k interpolaci signálu $y(n_1, n_2)$ v následujícím smyslu:

Zvolme kladná čísla Δ_1, Δ_2 a hledejme spojitý periodický signál $\tilde{z}(t_1, t_2)$ s periodou $(\Delta_1 N_1, \Delta_2 N_2)$ tak, aby diskrétní signál $y(n_1, n_2)$ vznikl vzorkováním signálu $\tilde{z}(t_1, t_2)$ s kroky Δ_1, Δ_2 , tj.

$$\tilde{z}(n_1 \Delta_1, n_2 \Delta_2) = y(n_1, n_2), \quad n_1 = 0, \dots, N_1 - 1, n_2 = 0, \dots, N_2 - 1. \quad (2.65)$$

Položme $h_1 = \frac{\Delta_1}{k_1}$, $h_2 = \frac{\Delta_2}{k_2}$ a definujme spojitý periodický signál vzorcem

$$\tilde{z}(t_1, t_2) = \sum_{l_1=0}^{N_1-1} \sum_{l_2=0}^{N_2-1} Y(l_1, l_2) \exp\left(2\pi i \left(\frac{t_1 \Delta_1}{h_1 k_1 N_1} + \frac{t_2 \Delta_2}{h_2 k_2 N_2}\right)\right).$$

Protože $h_1 k_1 = \Delta_1$ a $h_2 k_2 = \Delta_2$, je signál $\tilde{z}(t_1, t_2)$ periodický s periodou $(\Delta_1 N_1, \Delta_2 N_2)$ a podle 2.63 platí

$$\tilde{z}(m_1 h_1, m_2 h_2) = \tilde{z}\left(m_1 \frac{\Delta_1}{k_1}, m_2 \frac{\Delta_2}{k_2}\right) = z(m_1, m_2).$$

2.5. ZÁKLADNÍ MOŽNOSTI POUŽITÍ 2-D DFT

Dále podle 2.64

$$\tilde{z}(n_1 k_1 h_1, n_2 k_2 h_2) = \tilde{z}(n_1 \Delta_1, n_2 \Delta_2) = z(k_1 n_1, k_2 n_2) = y(n_1, n_2).$$

Interpolační podmínka 2.65 je tedy splněna a hodnoty $y(n_1, n_2)$ určíme pomocí 2.63, kam dosadíme $m_1 = k_1 n_1$ a $m_2 = k_2 n_2$. Kromě toho můžeme určit hodnoty interpolačního signálu $\tilde{z}(t_1, t_2)$ též v bodech (t_1, t_2) , kde $t_1 = (k_1 n_1 + j_1)h_1$, $t_2 = (k_2 n_2 + j_2)h_2$, $j_1 = 0, 1, \dots, k_1$ a $j_2 = 0, 1, \dots, k_2$, jestliže v 2.63 položíme $m_1 = k_1 n_1 + j_1$ a $m_2 = k_2 n_2 + j_2$.

Vzorec 2.63 může tedy sloužit k interpolaci diskrétního periodického signálu $y(n_1, n_2)$. Ta má mezi všemi ostatními interpolacemi velkou výhodu. Nemění totiž spektrum signálu $y(n_1, n_2)$, speciálně k němu nepřidává žádné vyšší frekvence, jak vyplývá z 2.62.

3. Základní pojmy ze statistiky

3.1. Obecné pojmy

Na tomto místě si vysvětlíme několik základních pojmů ze statistiky, které budeme používat v dalších kapitolách tohoto textu. Vycházíme zejména z [10], [9] a [14].

Definice 3.1. **Pokus** je uskutečnění pevně daného systému podmínek. Může být buď **deterministický** – dostaneme jednoznačný výsledek, nebo **stochastický** – výsledek závisí na náhodě.

Definice 3.2. Mějme stochastický pokus. Nechť Ω je množina všech možných výsledků pokusu. ω je možný výsledek pokusu - **elementární jev**. Ω je **prostor elementárních jevů**. Ω je neprázdná.

Definice 3.3 (Jevová σ -algebra). Nechť Ω je prostor elementárních jevů, \mathcal{A} systém jevů definovaných na Ω . Předpokládáme, že platí:

1. $\mathcal{A} \neq \emptyset$
2. $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{A}$
3. $A_i \in \mathcal{A}, i = 1, 2, \dots \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$

Pak systém \mathcal{A} nazýváme (jevovou) **σ -algebrou**. Dvojice (Ω, \mathcal{A}) se nazývá **jevové pole**.

Poznámka. V předpokladu č. 3 v předchozí definici se myslí spočetné sjednocení.

Definice 3.4 (Četnost). Nechť (Ω, \mathcal{A}) je jevové pole, což odpovídá modelu stochastického pokusu. Pokus lze n -krát nezávisle opakovat, kde n je libovolné. Označme

n ... počet opakování pokusu

A ... sledovaný náhodný jev

$m_n(A)$... **četnost** nastoupení jevu A v n pokusech

Pak $p_n(A) = \frac{m_n(A)}{n}$ budeme značit **relativní četnost** jevu A v n pokusech.

Věta 3.1. (*Vlastnosti relativní četnosti*).

- $p_n(A) \geq 0$, pro libov. $A \in \mathcal{A}$
- $A_1, A_2 \in \mathcal{A}, A_1 \cap A_2 = \emptyset \Rightarrow p_n(A_1 \cup A_2) = p_n(A_1) + p_n(A_2)$
- $p_n(\Omega) = \frac{n}{n} = 1$

Definice 3.5 (Pravděpodobnost). Nechť (Ω, \mathcal{A}) je jevové pole, $A \in \mathcal{A}$. Nechť P je množinová funkce definovaná na \mathcal{A} s oborem hodnot $H = (-\infty, \infty)$ s vlastnostmi:

- $P(A) \geq 0$ (nezápornost)
- $A_i \in \mathcal{A}, A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j, i, j = 1, 2, \dots \Rightarrow P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ (σ -aditivita)
- $P(\Omega) = 1$ (normovanost)

3.1. OBECNÉ POJMY

Pak množinovou funkci $P : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ nazýváme **pravděpodobnost** na \mathcal{A} . Pro náhodný jev $A \in \mathcal{A}$ je číslo $P(A)$ pravděpodobnost jevu A . Trojice (Ω, \mathcal{A}, P) se nazývá **pravděpodobnostní prostor**.

Poznámka. Axiomy v definici pravděpodobnosti ji neurčují jednoznačně.

Definice 3.6. Dva elementární jevy jsou **neslučitelné**, jestliže nemohou nastat zároveň. Neboli pravděpodobnost jejich průniku je nulová. $P(A \cap B) = 0$

Definice 3.7. Řekneme, že náhodné jevy A, B definované na pravděpodobnostním prostoru (Ω, \mathcal{A}, P) jsou **nezávislé** vzhledem k pravděpodobnosti P , když platí:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Věta 3.2. (*Vlastnosti nezávislých jevů*).

- $\Omega, A \in \mathcal{A}$ jsou nezávislé
- $\emptyset, A \in \mathcal{A}$ jsou nezávislé
- $A, B \in \mathcal{A}$ jsou nezávislé $\Rightarrow A, \bar{B}$ jsou nezávislé $\Rightarrow \bar{A}, \bar{B}$ jsou nezávislé $\Rightarrow \bar{A}, B$ jsou nezávislé
- Dva neslučitelné jevy A, B jsou nezávislé tehdy a jen tehdy, když $P(A) \cdot P(B) = 0$

Definice 3.8. Řekneme, že náhodné jevy A_1, A_2, \dots, A_n definované na pravděpodobnostním prostoru (Ω, \mathcal{A}, P) jsou **(sdruženě) nezávislé**, když platí:

$$P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} P(A_i), \quad \forall I \subseteq \{1, \dots, n\}$$

Poznámka. V definici sdružené nezávislosti je každý jev nezávislý nejen na ostatních jevech, ale také na (libovolných) průnicích ostatních jevů. Lze též definovat nezávislost po dvou, kdy je každý jev nezávislý jen na ostatních jevech, ne na průnicích jiných jevů. Ze sdružené nezávislosti plyne nezávislost po dvou.

Věta 3.3. *Libovolná podmnožina sdruženě nezávislých náhodných jevů tvoří opět množinu sdruženě nezávislých náhodných jevů.*

Sdruženě nezávislé náhodné jevy budeme dále nazývat nezávislé jevy.

Definice 3.9. **Náhodnou veličinou** X definovanou na pravděpodobnostním prostoru (Ω, \mathcal{A}, P) rozumíme zobrazení $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ takové, že $\forall x \in \mathbb{R}$ platí $\{\omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A}$.

Poznámka. Součet, rozdíl, součin, podíl, limita náhodných veličin je opět náhodná veličina.

Definice 3.10. Nechtě X je náhodná veličina na pravděpodobnostním prostoru (Ω, \mathcal{A}, P) . Pak funkci $F(x) = P(\{\omega : X(\omega) \leq x\})$, $x \in \mathbb{R}$ nazýváme **distribuční funkce** náhodné veličiny X .

Poznámka. Distribuční funkce popisuje pravděpodobnostní chování náhodné veličiny X .

3. ZÁKLADNÍ POJMY ZE STATISTIKY

Definice 3.11. Nechť X je náhodná veličina na pravděpodobnostním prostoru (Ω, \mathcal{A}, P) . Pak množinovou funkci P_X definovanou vztahem $P_X(B) = P(X \in B)$, $B \in \mathcal{B}$ nazýváme **rozdělení pravděpodobnosti** náhodné veličiny X .

Poznámka. Rozdělení pravděpodobnosti je jednoznačně určeno distribuční funkcí F . Proto říkáme, že distribuční funkce F určuje rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny X nebo X má rozdělení pravděpodobnosti o distribuční funkci F .

Nyní si zavedeme diskrétní náhodnou veličinu.

Definice 3.12. Řekneme, že náhodná veličina definovaná na pravděpodobnostním prostoru (Ω, \mathcal{A}, P) je **diskrétního typu** (stručněji X je diskrétní), když existuje nejvýše spočetná množina $M \subset \mathbb{R}$ taková, že $P(X \in M) = 1$.

Definice 3.13. Nechť X je diskrétní náhodná veličina a $P(X \in M) = 1$. Pak množinu M nazýváme **oborem hodnot** náhodné veličiny X a funkci $p(x) = P(X = x)$ pro $x \in M$ a $p(x) = 0$ pro $x \notin M$ nazýváme **pravděpodobnostní funkcí** diskrétní náhodné veličiny X .

Poznámka. Fakt, že X je náhodná veličina diskrétního typu s oborem hodnot M a pravděpodobnostní funkcí p značíme $X \sim (M, p)$.

Existuje několik základních typů diskrétních náhodných veličin, pro naše účely však bude stačit **klasické rozdělení pravděpodobnosti** (někdy označováno také jako diskrétní rovnoměrné), proto se omezíme jen na tohle. Z dalších typů můžeme zmínit např. alternativní, binomické, či hypergeometrické rozdělení pravděpodobnosti.

Skutečnost, že náhodná veličina X má klasické rozdělení pravděpodobnosti, značíme $X \sim C(n)$, kde $n \in \mathbb{N}$. Klasické rozdělení pravděpodobnosti získalo své jméno, protože nám umožňuje modelovat úlohy klasické pravděpodobnosti. Připomeňme, že se jedná o úlohy, ve kterých se k výpočtu pravděpodobnosti jevu A používá vztah

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{m}{n} = \frac{\text{počet příznivých výsledků}}{\text{počet všech možných výsledků}}$$

a jedná se o modelování náhodných pokusů, které mají konečný počet n stejně možných výsledků.

Z výše uvedeného vyplývá pro elementární jevy pravděpodobnost $\frac{1}{n}$ a tedy i následující vztah pro pravděpodobnostní funkci:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{pro } x = 1, 2, \dots, n, \\ 0 & \text{jinde.} \end{cases}$$

Dále si uvedeme některé číselné charakteristiky náhodných veličin.

Definice 3.14. Střední hodnotou náhodné veličiny X rozumíme číslo EX , které je dáno vztahem

$$EX = \sum_{x \in M} x \cdot p(x), \text{ když } X \sim (M, p) \text{ a uvedená řada absolutně konverguje}$$

Věta 3.4. (*Vlastnosti střední hodnoty*).

- Nechť X je náhodná veličina se střední hodnotou EX , $g(x)$ je borelovsky měřitelná funkce. Pak $Y = g(X)$ je také náhodná veličina a její střední hodnota je $EY = \sum_{x \in M} g(x) \cdot p(x)$.

3.1. OBECNÉ POJMY

- Nechť X je náhodná veličina se střední hodnotou EX , a, b jsou dané reálné konstanty. Pak střední hodnota lineární kombinace je dána vztahem

$$E(a + bX) = a + bEX.$$

Definice 3.15. Číslo $\text{var}(X) = E(X - EX)^2$ nazýváme **rozptylem** náhodné veličiny X za předpokladu, že uvedené střední hodnoty existují.

Věta 3.5. (Vlastnosti rozptylu).

- $\text{var}(X) \geq 0$
- Nechť X je náhodná veličina s rozptylem $\text{var}(X)$ a a, b dané reálné konstanty. Pak rozptyl lineární kombinace je dán vztahem

$$\text{var}(a + bX) = b^2 \text{var}(X).$$

Definice 3.16. Nechť $\text{var}(X)$ je rozptyl náhodné veličiny X . Pak číslo $\sigma_X = \sigma(X) = \sqrt{\text{var}(X)}$ se nazývá **směrodatná odchylka** náhodné veličiny X .

Poznámka. $\sigma(a + bX) = |b| \cdot \sigma(X)$

Poznámka. Zde jen formou poznámky uvedeme analogické rozšíření vlastností střední hodnoty a rozptylu na náhodné vektory, konkrétně

- Nechť $Y = g(\mathbf{X})$ je transformovaná náhodná veličina a existuje EY . Pak platí $EY = \sum_{\mathbf{x} \in M} g(\mathbf{x}) \cdot p(\mathbf{x})$.
- Nechť náhodné veličiny X_1 a X_2 mají střední hodnoty EX_1 a EX_2 . Pak $E(X_1 + X_2) = EX_1 + EX_2$.
- Nechť X_1 a X_2 jsou nezávislé náhodné veličiny a existují $\text{var}(X_1)$ a $\text{var}(X_2)$. Pak $\text{var}(X_1 + X_2) = \text{var}(X_1) + \text{var}(X_2)$.

Bereme v úvahu také zobecnění předchozích vět:

- $E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = EX_1 + EX_2 + \dots + EX_n$ pro $n \in \mathbb{N}$
- $\text{var}(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = \text{var}(X_1) + \text{var}(X_2) + \dots + \text{var}(X_n)$ pro $n \in \mathbb{N}$ a X_1, X_2, \dots, X_n nezávislé

Nyní si přiblížíme použití statistiky při analyzování dat. Při statistickém zkoumání nás zajímají hromadné jevy a procesy, u kterých zkoumáme zákonitosti, které se projevují u velkého počtu prvků. Prvky zkoumání nazýváme statistické jednotky. Sledujeme jejich vlastnosti, které nazýváme statistické znaky nebo stručněji **veličiny**. Souhrn znaků a veličin tvoří **data**. Při zkoumání používáme dva základní druhy statistiky, popisnou statistiku a interferenční statistiku.

Popisná statistika zjišťuje a sumarizuje informace, zpracovává je ve formě grafů a tabulek a vypočítává jejich číselné charakteristiky jako průměr, rozptyl, percentily, rozpětí apod.

Interferenční statistika činí závěry na základě dat získaných z šetření provedených pro vybraný soubor respondentů. Analyzuje tyto závěry a predikuje z nich závěr pro celý soubor (volební průzkum, průzkum trhu apod.).

Při statistickém šetření máme k dispozici:

- **základní soubor** – soubor všech v dané situaci v úvahu přicházejících statistických jednotek
- **výběrový soubor** – vybraná část jednotek základního statistického souboru

Rozsah základního (výběrového) souboru je počet jednotek v souboru. Pokud sledujeme nějaké jevy na malém počtu objektů, mohou být získané údaje značně zkreslující, s jejich rostoucím počtem tedy roste vypovídací schopnost statistických údajů.

Definice 3.17. Prostý náhodný výběr je náhodný výběr ze základního souboru vytvořený tak, že každá statistická jednotka ze základního souboru má stejnou pravděpodobnost, že bude vybrána. Řídí se tedy výše popsáním klasickým rozdělením pravděpodobnosti.

Při vytváření souboru jednotek provádíme výběr ve tvaru prostého náhodného výběru. Pokud je možné vybrat tutéž jednotku znova, mluvíme o výběru s vracením, pokud opakovaný výběr není možný, jedná se o výběr bez vracení.

Poznámka. Jiné metody používají definovaný způsob výběru, který je popsán zadaným algoritmem. Využívá se především vytváření výběru s menším rozsahem, který podchycuje zákonitosti obsažené v rozsáhlejších výběrech.

V dalším se budeme zabývat popisnou statistikou.

3.2. Popisná statistika

Vlastnosti, které se pro jednotlivé jednotky mění, nazýváme **veličinami**, případně **statistickými znaky** nebo **proměnnými**. Jsou to vlastně ohodnocení statistických jednotek. Vyskytují se veličiny:

- **kvantitativní** – popsány číselnou hodnotou (výška, váha, hodnota pixelu)
- **kvalitativní** – popsány vlastnostmi (pohlaví, barva očí, dosažené vzdělání)

Kvantitativní veličiny mohou být **diskrétní**, tj. nabývající hodnot ze zadané konečné množiny, nebo **spojité**, tj. nabývající hodnot ze zadaného intervalu. Pozorováním nebo měřením hodnot zkoumané veličiny na několika statistických jednotkách získáme vstupní data. Soubor těchto údajů nazýváme **datový soubor**. Tento soubor je **jednorozměrný**, jestliže sledujeme jeden znak, nebo **vícerozměrný**, pokud sledujeme více znaků. Při zpracování jednorozměrného datového souboru kvantitativních dat $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ potřebujeme pro některá šetření data uspořádat podle velikosti. Dostaneme pak **uspořádaný** datový soubor tvaru

$$x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)},$$

kde $x_{(1)} = \min\{x_i; 1 \leq i \leq n\}$ a $x_{(n)} = \max\{x_i; 1 \leq i \leq n\}$.

3.2. POPISNÁ STATISTIKA

3.2.1. Metody zpracování dat

Grafická znázornění

Pro větší názornost používáme místo tabulek znázornění datového souboru pomocí grafů. Zde uvedeme několik základních typů:

- **histogram** – graf, kde na vodorovnou osu znázorníme třídy a na svislou osu četnosti či relativní četnosti. Často se používá ve tvaru, kdy se hodnota odpovídající třídě znázorní jako sloupec s intervalem třídy jako základnou a výška je dána četností.
- **bodový graf** – dostaneme ho tak, že na vodorovnou osu vyneseme třídy jako body i , $1 \leq i \leq k$, a ve svislém směru vynášíme jednotlivé prvky třídy znázorněné jako jednotlivé body (i, j) , $j = 1, 2, \dots, m_i$

Řada vlastností datového souboru se dá vyčíst z tvaru histogramu. Ten odpovídá grafu hustoty u rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny.

Charakteristiky (míry) polohy

Protože nám surová data obvykle žádnou smysluplnou informaci neposkytnou, je žádoucí je vyjádřit ve zhuštěnější formě. V předchozí sekci jsme používali četnosti pro to, aby se dala data lépe pochopit. Dalším krokem pro zpřehlednění datového souboru je výpočet statistických charakteristik, pokud je daná veličina pro tyto výpočty vhodná. Statistické charakteristiky shrnují informace obsažené v datech, jde o vyjádření v tzv. koncentrované formě. Díky těmto mírám lze také jednotlivé soubory porovnávat. Základními charakteristikami, které bychom měli u každého souboru vypočítat, jsou míry polohy a variability. Nyní si blíže popíšeme charakteristiky polohy.

Charakteristiky polohy, resp. míry centrální tendence, by měly charakterizovat typickou hodnotu pro daný datový soubor. Tyto míry jsou počítány z celého datového souboru a tudíž extrémní hodnoty, kterých může být velmi malé množství, potom posunou výsledek do jiné než typické polohy. Jako názorný příklad může sloužit výpočet průměrného platu v populaci. Základní charakteristikou polohy je aritmetický průměr.

Definice 3.18. Aritmetický průměr datového souboru $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ je definován vztahem

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

Poznámka. Výpočet aritmetického průměru odpovídá výpočtu střední hodnoty náhodné veličiny s klasickým rozdělením pravděpodobnosti, tj. kdy každá její realizace má stejnou pravděpodobnost, a sice $\frac{1}{n}$. Tzn. aritmetický průměr má analogické vlastnosti, jako střední hodnota. Aritmetický průměr bychom neměli používat pro kategoriální data a aby jeho vypovídací hodnota byla vysoká, mělo by být rozložení hodnot symetrické. Je citlivý na odlehlé hodnoty, měli bychom si tudíž dávat pozor, v jakých situacích jej používáme. Proto se někdy využívají **robustní** charakteristiky, které nejsou tak citlivé na odlehlé hodnoty. Mezi ně patří medián.

Definice 3.19. Medián datového souboru $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ je definován vztahem

$$\tilde{x} = \begin{cases} x_{(m)} & \text{pro } n = 2m - 1, \\ \frac{1}{2}(x_{(m)} + x_{(m+1)}) & \text{pro } n = 2m. \end{cases}$$

Poznámka. Medián je tedy v seřazeném souboru definován jako prostřední hodnota. Medián aplikujeme na soubory, které obsahují odlehle hodnoty, případně kde je rozložení dat zešikmené a aritmetický průměr nebude jejich typickou hodnotou. Medián je také odhad střední hodnoty, který minimalizuje absolutní odchylku, tj. výraz $E(|X - \tilde{x}|)$.

Pro podrobnější popis rozdělení hodnot datového souboru používáme **kvantily**. Kvantil datového souboru rozděluje soubor na dvě části. V jedné jsou hodnoty souboru, které jsou menší či nejvýše rovny kvantilu a ve druhé jsou hodnoty větší než kvantil. Speciálním případem kvantilu je medián.

Charakteristiky (míry) variability

Znalost středních hodnot nám dává užitečnou informaci o tom, kde jsou data centrována. Míra rozptýlenosti hodnot souboru se však může se stejnou střední hodnotou výrazně lišit, proto je důležité s popisem charakteristik polohy uvádět v rámci popisné statistiky také charakteristiky variability, které nám řeknou, jak moc naše charakteristiky polohy daný soubor vystihují. Čím větší je variabilita hodnot veličiny, tím méně je daná charakteristika polohy reprezentativní.

Definice 3.20. Rozptyl (střední kvadratická odchylka) datového souboru $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ je definována vztahem

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2.$$

Poznámka. Rozptyl je vlastně průměr čtverců odchylek od střední hodnoty. Nejčastěji uvažujeme jako střední hodnotu průměr, můžeme ale vzít v úvahu také medián.

Jednotky rozptylu neodpovídají jednotkám hodnot znaku, ale jsou jejich druhými mocninami. Charakteristika variability, která odpovídá jednotkám hodnot znaku, je směrodatná odchylka.

Definice 3.21. Směrodatná odchylka datového souboru $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ je definována vztahem

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}.$$

Poznámka. Jak již bylo řečeno, směrodatná odchylka odpovídá jednotkám hodnot znaku, změříme jí rozptýlenost dat kolem jejich střední hodnoty.

Definice 3.22. Střední chyba průměru datového souboru $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ je definována vztahem

$$\sigma_X = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Poznámka. Střední chyba průměru patří mezi často používané relativní míry variability. Často je označována (především v zahraniční odborné literatuře) zkratkou SE (příp. SEM) – z anglického výrazu Standard Error of Mean. Střední chyba průměru neměří rozptýlenost původní náhodné proměnné, ale rozptýlenost vypočítaného aritmetického průměru v různých výběrových souborech vybraných z jednoho základního souboru. Je teoreticky definována jako směrodatná odchylka všech možných výběrových průměrů z jedné populace, vypočítaných pro výběry o rozsahu n členů. Vyjadřuje tedy kolísání výběrových průměrů kolem teoretické (skutečné) střední hodnoty μ v celém základním souboru. Závisí

3.2. POPISNÁ STATISTIKA

jednak na rozptylu základního souboru, jednak na rozsahu výběrového souboru. Protože v praxi obvykle neznáme skutečnou hodnotu rozptylu z celého základního souboru, používá se prakticky výpočet pro výběrovou střední chybu průměru podle výše uvedeného vzorce.

4. Syntéza posloupnosti digitálních obrazů

V této kapitole se dostáváme k samotné syntéze posloupnosti digitálních obrazů. Popíšeme si, z jakého důvodu se provádí a představíme si metody, které se pro syntézu používají. Na závěr tyto metody zobecníme na případ proměnné intenzity pozadí. Budeme vycházet zejména z [11] a [4].

Opakování měření je základní technika k analyzování a redukování nejistot v pozorováních. Díky kombinování několika měření stejné četnosti mají náhodné chyby tendenci se zmenšovat a pozorovaná hodnota může být potom určena s menší nejistotou. Syntéza posloupnosti digitálních obrazů je vlastně opakování měření v praxi. Kombinujeme množinu obrazů stejného objektu, abychom zlepšili poměr signál-šum ve výsledném obraze. Kombinovat obrazy pro zlepšení tohoto poměru můžeme mnoha způsoby, některé z nich si zde představíme.

4.1. Metody pro syntézu digitálních obrazů

Nyní si popíšeme samotnou syntézu digitálních obrazů a metody, které se pro ni používají.

Máme množinu obrazů $\{f_0, f_1, \dots, f_{N-1}\}$ stejného objektu, které jsme už dříve upravili tak, aby odpovídající si struktury byly na stejných souřadnicích.

Definice 4.1. Pixelovým zásobníkem budeme nazývat vektor tvořený N pixely na stejných obrazových souřadnicích (x, y) .

$$\mathbf{f}_{xy} = \{f_0(x, y), f_1(x, y), \dots, f_{N-1}(x, y)\}. \quad (4.1)$$

Protože už jsou obrazy na sebe sesazené (odpovídající si struktury jsou na stejných souřadnicích), každý prvek pixelového zásobníku je pozorování stejného pixelu ve výsledném obraze. Za předpokladu, že všechny prvky jsou nezávislá měření náhodné veličiny, můžeme pixelový zásobník přepsat následovně:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{xy} = \{ & S(x, y) + \epsilon_0(x, y), \\ & S(x, y) + \epsilon_1(x, y), \\ & \vdots \\ & S(x, y) + \epsilon_{N-1}(x, y) \}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Každý obraz f_i jsme rozdělili na deterministický signál S , který nás zajímá, a na aditivní šumovou složku ϵ_i . Předpokládáme přitom, že uvedených N složek šumu tvoří množinu náhodných chyb s nulovou střední hodnotou:

$$E\epsilon_i(x, y) = 0,$$

což můžeme také zapsat jako

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{N-1} \epsilon_i(x, y) = 0. \quad (4.3)$$

4.1. METODY PRO SYNTÉZU DIGITÁLNÍCH OBRAZŮ

Šum je zde přítomný kvůli nejistotě získaných dat, která patří k pozorování každého procesu. Předchozí rovnice nám říká, že nejistota bude v datech vždy přítomna. Můžeme ji potlačit kombinováním obrazů, ale nikdy ji úplně neodstraníme. Při syntéze posloupnosti obrazů reprezentujeme nejistotu právě jako náhodné chyby v pixelovém zásobníku. Zdrojů těchto náhodných chyb je spousta, zmiňme si např. přístrojové limity, nepředvídatelné zapisovací a čtecí chyby. Data jsou ovlivňována také procesy, které nelze reprezentovat jako náhodné chyby na úrovni pixelů, např. ve fotografování hvězdné oblohy to jsou vesmírné záření, stopy letadel, světelné znečištění atd. Tyto vlivy se potlačují speciálními technikami, jako např. zamítnutí některých pixelů.

Definice 4.2. Poměr signál šum (zkr. SNR – z anglického Signal-to-noise ratio) je míra porovnávající úroveň žádoucího signálu s úrovní šumu na pozadí. V případě, že známe rozptyl resp. směrodatnou odchylku signálu i šumu, definujeme SNR takto:

$$\text{SNR} = \frac{\sigma_{\text{signál}}^2}{\sigma_{\text{šum}}^2}$$

Poznámka. Poměr větší, než 1 : 1 značí více signálu, než šumu. Tento poměr lze také neformálně zobecnit na poměr užitečné informace ku zkreslené či irelevantní informaci.

Proces syntézy posloupnosti digitálních obrazů kombinuje prvky jednotlivých pixelových zásobníků do jednoho pixelu výsledného obrazu. Naším hlavním cílem je zlepšení poměru signál-šum ve výsledném obraze, zajímá nás proto jakých jeho přírůstků může být dosaženo pomocí jednotlivých metod kombinování pixelů. Dvěma hlavními metodami pro tento účel jsou průměr a medián.

4.1.1. Vlastní metody

Průměr

V případě, že jako metodu syntézy použijeme průměr, hodnota každého pixelu ve výsledném obraze je vypočítána jako aritmetický průměr jednotlivých prvků odpovídajícího pixelového zásobníku:

$$g_{avg}(x, y) = \bar{\mathbf{f}}_{xy} = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f_i(x, y), \quad (4.4)$$

kde výsledný obraz daný průměrem značíme g_{avg} .

V kapitole 3 jsme si také definovali střední chybu průměru.

$$\sigma_X = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Zde ji využijeme. Máme totiž množinu N nezávislých, stejně rozdělených veličin, které mají všechny stejný rozptyl σ^2 . (Zde pracujeme se sesazenými obrazy, tzn. předpoklad, že všechny prvky pixelového zásobníku jsou nezávislé a stejně rozdělené odpovídá realitě.) Nyní můžeme jednoduše odvodit střední chybu průměru výsledného obrazu.

$$\sigma_{g_{avg}} = \frac{\sigma_{f_0}}{\sqrt{N}} \quad (4.5)$$

4. SYNTÉZA POSLOUPNOSTI DIGITÁLNÍCH OBRAZŮ

Předpokládáme-li, že všechny vstupní obrazy mají stejný SNR, je růst poměru signál-šum úměrný odmocnině z počtu kombinovaných obrazů:

$$\frac{\text{SNR}(g_{avg})}{\text{SNR}(f_0)} \sim \sqrt{N}. \quad (4.6)$$

Poznámka. Všimněme si, že průměr a suma posloupnosti obrazů jsou si ekvivalentní, co se zlepšení SNR týče. Je to zřejmé z rovnice 4.3: suma náhodných chyb s nulovou střední hodnotou se limitně blíží nule. Dělením konstantou se v tomto případě nic nezmění. Jako metodu syntézy zde používáme průměr, protože potom nemůže dojít k saturaci (přetečení) některých pixelů.

Medián

V případě, že jako metodu syntézy použijeme medián, hodnota každého pixelu ve výsledném obraze je vypočítána jako medián jednotlivých prvků odpovídajícího pixelového zásobníku:

$$g_{med}(x, y) = \tilde{\mathbf{f}}_{xy} = \begin{cases} f_{(m)}(x, y) & \text{pro } N = 2m + 1, \\ \frac{1}{2}(f_{(m)}(x, y) + f_{(m-1)}(x, y)) & \text{pro } N = 2m, \end{cases} \quad (4.7)$$

$$f_{(i)}(x, y) \leq f_{(i+1)}(x, y), \quad 0 \leq i \leq N, \quad m \in \mathbb{N}_0,$$

kde výsledný obraz daný mediánem značíme g_{med} . Přímo z definice je nejjednodušší, a také nejméně efektivní, cesta, jak spočítat medián, seřadit všechny prvky pixelového zásobníku a vzít hodnotu prostředního prvku. Existují však i mnohem efektivnější metody, ve své implementaci používám metodu založenou na algoritmu quickselect, která pro výpočet mediánu nepotřebuje seřadit všechny prvky v zásobníku.

Poznámka. Pro srovnání uvedme průměrnou složitost algoritmů nalezení mediánu po seřazení prvků zásobníku a algoritmu na bázi quickselectu. Nejeftivnější algoritmy pro seřazení posloupnosti N čísel mají průměrnou složitost $O(N \log N)$, kdežto algoritmus quickselect má průměrnou složitost $O(N)$. V obraze medián počítáme pro všechny pixely výsledného obrazu, tudíž efektivnější výpočet mediánu výrazně zrychlí celý proces počítání výsledného obrazu.

Abychom zjistili zlepšení SNR, které můžeme očekávat po kombinaci obrazů pomocí mediánu, porovnáme střední chybu mediánu se střední chybou průměru. Pro velký vzorek délky N s populačním mediánem m je dán rozptyl výběrového mediánu \hat{m} :

$$\sigma_{\hat{m}}^2 = \frac{1}{4N f^2(m)}, \quad (4.8)$$

kde $f(\cdot)$ je hustota daného rozdělení, viz [11]. Pro standardizované normální rozdělení platí

$$\sigma_{\hat{m}}^2 = \frac{\sqrt{2\pi}}{2\sqrt{N}} = \sqrt{\frac{\pi}{2N}}. \quad (4.9)$$

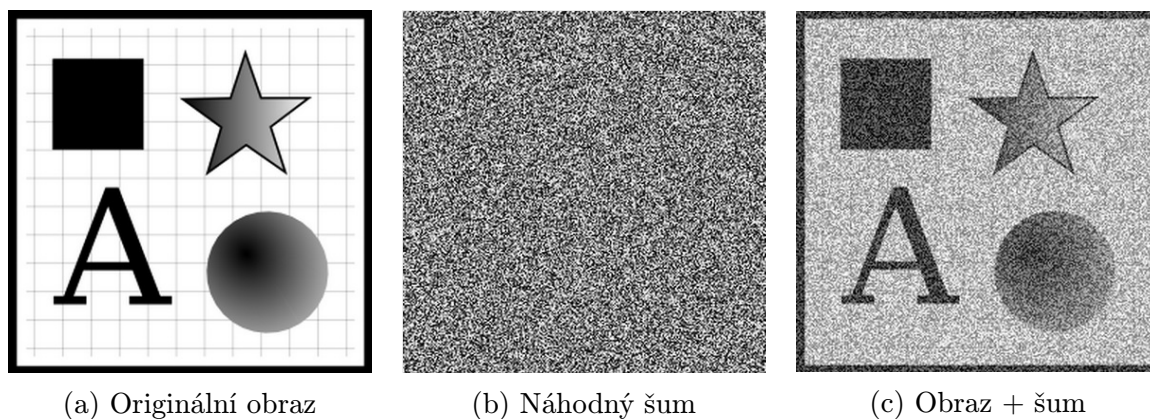
Střední chyba průměru je $\frac{1}{\sqrt{N}}$. Střední chyba mediánu je větší o multiplikatívni faktor $\sqrt{\frac{\pi}{2}} \simeq 1.253$. Můžeme tedy odvodit přírůstek SNR pro kombinaci mediánem jako

$$\frac{\text{SNR}(g_{med})}{\text{SNR}(f_0)} \sim \frac{\sqrt{N}}{1.253} \simeq 0.8\sqrt{N}. \quad (4.10)$$

4.1. METODY PRO SYNTÉZU DIGITÁLNÍCH OBRAZŮ

Vidíme, že SNR dosažený kombinací mediánem je asi o 20% menší, než SNR dosažený kombinací stejných obrazů průměrem. Co se týče zlepšení SNR, kombinace průměrem je vždy lepší. Podívejme se ale na robustnost odhadu. Pro rozdělení se silnou centrální tendencí je medián robustní odhad centrální hodnoty. Díky tomu je kombinace mediánem efektivní metoda pro syntézu posloupnosti obrazů s implicitním vyřazením odlehlých hodnot, tj. pixelů s příliš nízkou nebo příliš vysokou hodnotou, např. kvůli dříve uvedeným vlivům znehodnocujícím naměřená data. Dále si ale ukážeme algoritmy pro zamítání pixelů, které dosahují podobné efektivity zamítání odlehlých hodnot jako medián a mohou být proto použity v kombinaci s průměrem.

Nyní si ilustrujeme zlepšení poměru signál-šum při kombinaci průměrem. Vycházeli jsme ze dvou obrazů stejné velikosti: originálního obrazu a rovnoměrně rozloženého náhodného šumu. Ten jsme přičetli ke kopiím originálního obrazu, viz Obrázek 4.1, a poté jsme takto získané zašuměné obrazy průměrovali, viz Obrázek 4.2.



Obrázek 4.1: Výchozí obrazy pro syntézu

Na obrázcích jsme si všimli, že při průměrování, resp. při mediánu více obrazů se ve výsledném obraze účinně potlačuje šum. Otázkou je, kolik obrazů k syntéze zvolit, aby zlepšování SNR bylo znatelné? Pro jednoduchost zvolíme na popis tohoto problém kombinaci průměrem. Zlepšení SNR udává funkce na Obrázku 4.3.

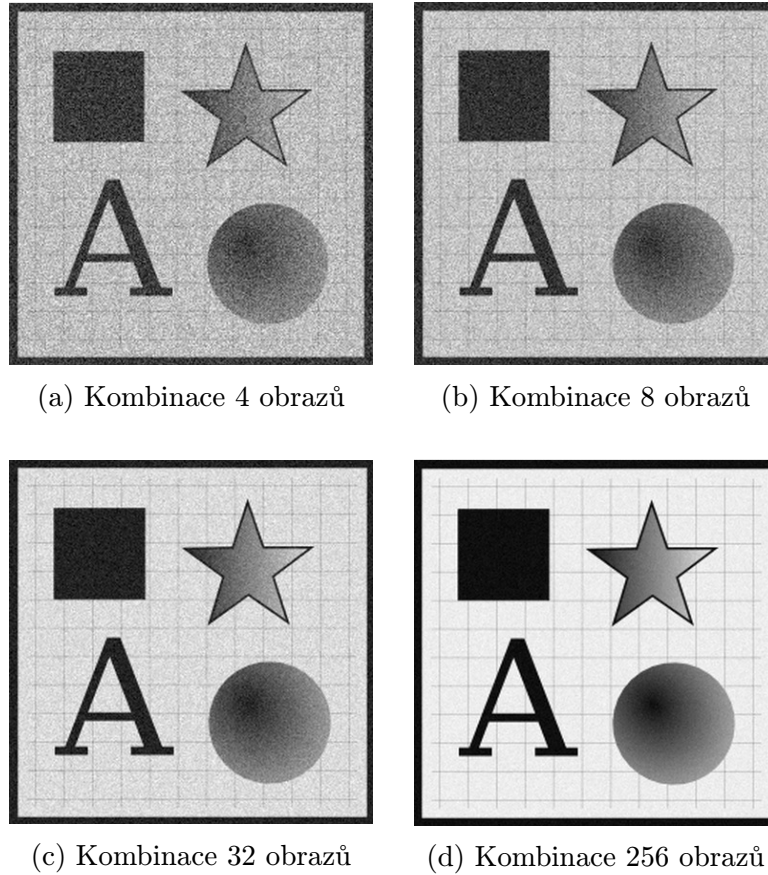
$$\Delta\text{SNR}(N) = \sqrt{N} - \sqrt{N-1},$$

kde N je počet obrazů vstupujících do syntézy. Tato funkce reprezentuje zlepšení SNR dosažené přidáním nového obrazu do syntézy. S rostoucím počtem obrazu funkce klesá a limitně se blíží k nule. Zlepšení zůstává výrazné asi do 30 obrazů, dále je na znatelné zlepšení SNR potřeba výrazně více obrazů.

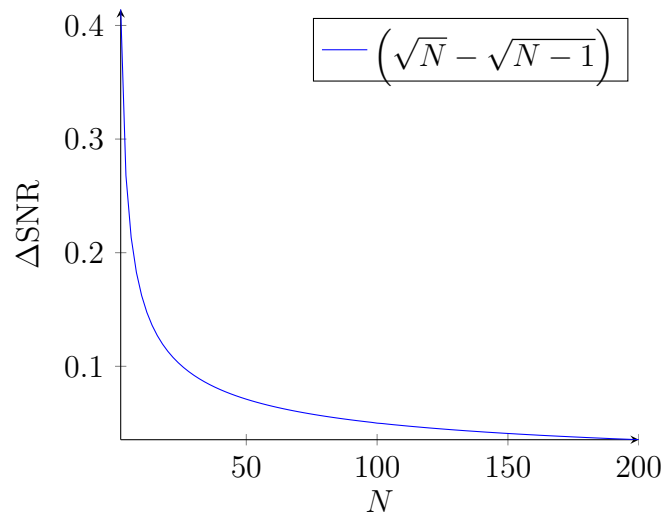
4.1.2. Metody zamítnutí pixelu

Dříve jsme uvedli, že posloupnost kombinovaných obrazů obvykle obsahuje znehodnocené hodnoty, které nemůžeme charakterizovat jako náhodný šum. Všechny tyto odlehlé hodnoty formují světlé nebo tmavé obrazce, které můžeme efektivně odstranit v průběhu syntézy díky statistickým metodám, jež nazýváme metody zamítnutí pixelu.

4. SYNTÉZA POSLOUPNOSTI DIGITÁLNÍCH OBRAZŮ



Obrázek 4.2: Průměrování zašuměných obrazů



Obrázek 4.3: Zlepšení SNR v závislosti na počtu obrazů

Cílem těchto metod je vyloučit odlehlé hodnoty z posloupnosti pixelů v pixelovém zásobníku, které budeme kombinovat do výsledného obrazu. Existuje mnoho těchto metod, v dalším se omezíme na ty, které jsou implementovány v našem programu.

4.1. METODY PRO SYNTÉZU DIGITÁLNÍCH OBRAZŮ

Sigma Clipping

Sigma Clipping je iterativní algoritmus pro zamítnutí pixelu. V každé iteraci spočteme střední hodnotu (medián) a směrodatnou odchylku od střední hodnoty a všechny pixely, které jsou od této střední hodnoty vzdáleny o více, než předepsaná hodnota v jednotkách směrodatné odchylky, jsou vyřazeny. Jelikož není zřejmé, k jaké hodnotě by měly jednotlivé iterace konvergovat, volíme pevný počet iterací, v našem případě 3. Následuje pseudokód.

```
SigmaClippingRejection( $\mathbf{x}, s_{low}, s_{high}$ )  
for  $j = 0$  to 3 do  
   $m \leftarrow \text{median}\{x_0, \dots, x_{N-1}\}$   
   $\sigma \leftarrow \text{stddev}\{x_0, \dots, x_{N-1}\}$   
   $n \leftarrow 0$   
  for  $i = 0$  to  $N - 1$  do  
    if SigmaClipping( $x_i, m, \sigma, s_{low}, s_{high}$ ) then  
      zamítne  $x_i$   
    end if  
  end for  
end for,
```

kde funkce SigmaClipping(\cdot) je definována následovně:

$$\text{SigmaClipping}(x, m, \sigma, s_{low}, s_{high}) \longrightarrow \begin{cases} \text{pravda} & \text{pro } x \in \langle m - s_{low}\sigma, m + s_{low}\sigma \rangle \\ \text{lež} & \text{jinak} \end{cases},$$

a x , m a σ jsou po řadě hodnota pixelu, medián a směrodatná odchylka pixelového zásobníku. s_{low} a s_{high} jsou vyřazovací parametry vyjádřeny v jednotkách směrodatné odchylky. Pro tento algoritmus je vhodné kombinovat minimálně 8 až 10 obrazů.

Sigma Median Clipping

Sigma Median Clipping je opět iterativní algoritmus, který je podobný předešlému algoritmu. Jediné, v čem se liší, je, že namísto vyřazení odlehle hodnoty ji nahradí v každé iteraci spočítanou střední hodnotou (mediánem). Pseudokód zde neuvádíme, až na tento jeden rozdíl je stejný jako Sigma Clipping.

4.1.3. Normalizace obrazu

Normalizace obrazu modifikuje rozdělení hodnot pixelu každého obrazu vstupujícího do syntézy tak, aby byla celá data statisticky kompatibilní. Když je dva a více obrazu normalizovaných, mají mezi sebou srovnatelné statistické momenty, jako např. střední hodnotu nebo rozptyl. Normalizace nám vlastně umožňuje porovnávat histogramy všech obrazů s tím, že v nich nejsou rozdíly v síle signálu a hodnotách pozadí. Je to nezbytný krok před zamítnutím pixelu. Když by obrazy nebyly normalizované, jakákoliv metoda zamítnutí pixelu by dávala nesmyslné výsledky, protože by porovnávala dva neodpovídající si datové vzorky (např. pixely příslušící pozadí na jednom obraze by byly porovnávány s pixely důležitých objektů v druhém obraze).

Vlastní metody

Pro normalizaci obrazu můžeme opět použít různé metody, zde si uvedeme jen některé. Cílem normalizace je, aby obrazy byly srovnatelné, modifikovali jsme tedy jejich střední hodnotu.

Aditivní normalizace Tato normalizační metoda srovnává střední hodnoty pixelů na pozadí pro všechny vstupní obrazy. Můžeme ji zapsat jako

$$f'_i = f_i - m_i + m_0, \quad 0 \leq i < N, \quad (4.11)$$

kde f'_i je normalizovaný obraz, m_i je odhad polohy pro i -tý vstupní obraz a m_0 je odhad polohy pro referenční obraz. Jako odhad polohy jsme vždy použili medián.

Multiplikativní normalizace Tato metoda také srovnává pozadí obrazů, místo aditivních operací ale aplikuje normalizaci dělením:

$$f'_i = f_i \frac{m_0}{m_i}, \quad 0 \leq i < N. \quad (4.12)$$

Obecně vedou aditivní i multiplikativní normalizace na podobné výsledky.

Tyto normalizační metody jsou použitelné tehdy, když hodnoty pixelů na pozadí jsou přibližně stejné v celém obraze (a u všech obrazů vstupujících do syntézy). Často se ale stává, např. u snímku hvězdné oblohy díky světelnému znečištění, nebo při fotografování při východu či západu slunce, že je intenzita pozadí v obraze proměnná. Pokusíme se nyní zobecnit tyto metody právě na proměnnou intenzitu pozadí.

Zobecnění normalizace na případ proměnné intenzity pozadí

Konkrétně se budeme zabývat aditivní normalizací. Představme si, že na obraze, který budeme normalizovat, hodnoty pixelů příslušejících pozadí nejsou srovnatelné, v některých částech je světlejší (popř. tmavší) pozadí, než v ostatních. Kdybychom od všech pouze odečetli např. medián referenčního obrazu, nebyla by střední hodnota v celém obraze stejná, přetrvávaly by v něm světlejší a tmavší části. Rozdělíme si tedy obraz na $n_1 \times n_2$ obdélníků tak, abychom docílili toho, že v jednotlivých obdélnících budou už hodnoty pixelů na pozadí srovnatelné. V každém obdélníku spočteme odhad polohy, v našem případě medián.

Dostaneme tedy nový obraz o rozměru $n_1 \times n_2$ menším, než je rozměr původního obrazu. Nyní využijeme 2-D DFT, kterou jsme zavedli v Kapitole 2. Konkrétně interpolaci dat. Přímo 2-D DFT menšího obrazu si spočteme jeho spektrum a následně ho doplníme nulami do rozměru $N_1 \times N_2$. Poté spočteme inverzní 2-D DFT, čímž docílíme „roztáhnutí“ malého obrazu do rozměru $N_1 \times N_2$. Tímto způsobem jsme dostali hodnoty všech $N_1 \times N_2$ pixelů na pozadí našeho obrazu. Ten použijeme a pro normalizaci ho od každého vstupního obrazu odečteme. Abychom zabránili podtečení některých pixelů, přičteme ještě ke každému obrazu vhodně zvolenou konstantu.

$$f'_i = f_i - f_{int} + C, \quad 0 \leq i < N, \quad (4.13)$$

4.1. METODY PRO SYNTÉZU DIGITÁLNÍCH OBRAZŮ

kde f'_i je normalizovaný obraz, C je vhodně zvolená konstanta zabraňující podtečení pixelů a f_{int} je obraz získaný interpolací pomocí 2-D DFT z mediánů obdélníků v referenčním obraze.

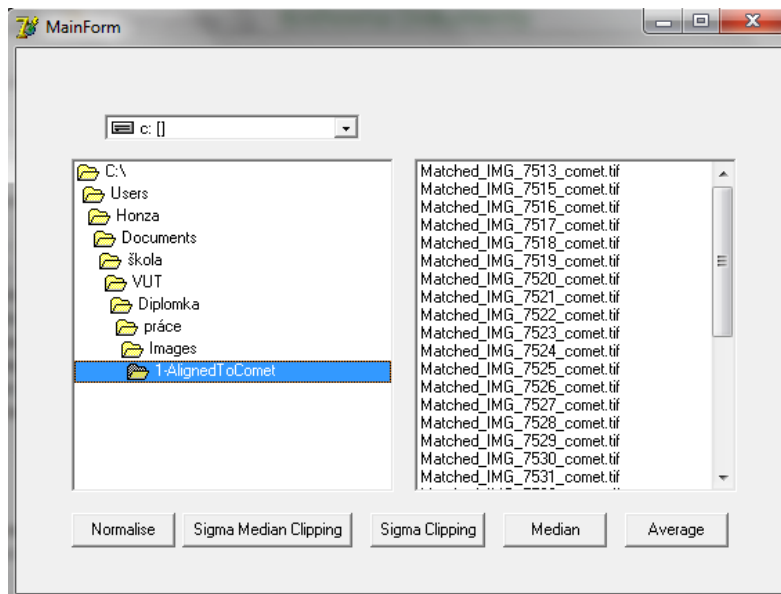
Tím jsme normalizovali všechny obrazy vstupující do syntézy a nyní už na ně můžeme použít některé z algoritmů, které jsme si popsali výše.

5. Softwarová implementace

V předchozí kapitole jsme si popsali metody, které se používají k syntéze digitálních obrazů s pohyblivým objektem a na závěr jsme tyto metody zobecnili na případ proměnné intenzity pozadí. Cílem práce bylo také vytvořit počítačový program implementující tyto metody a otestovat je na posloupnosti obrazů komety pohybující se na pozadí hvězdné oblohy. V této kapitole si program představíme, popíšeme si jeho funkce, uvedeme některé implementace dříve zmíněných algoritmů a porovnáme výsledné obrazy.

Pro vytvoření programu jsem si vybral integrované grafické vývojové prostředí Delphi firmy Borland, určené pro tvorbu aplikací na platformě MS Windows v jazyce Object Pascal. Obsahuje systém RAD (Rapid Application Development), který umožňuje vizuální návrh grafického uživatelského rozhraní, na jehož základě je vytvářena kostra zdrojového kódu, což výrazně urychluje vývojový cyklus.

Náhled prostředí programu je na Obrázku 5.1. Uživatel si nejdříve najde složku s obrazy, jež chce kombinovat v jediný, poté má na výběr několik možností (tlačítka Normalise, Average, Median, Sigma Clipping, Sigma Median Clipping).



Obrázek 5.1: Grafický vzhled prostředí programu

5.1. Procedury

5.1.1. Normalise

Stiskem tlačítka Normalise se zavolá procedura, která normalizuje označené obrazy a uloží je do složky. Na ně se poté můžou aplikovat další algoritmy.

Normalizování je naprogramováno jako zobecnění uvedených normalizačních metod pro proměnnou intenzitu pozadí. Využívá tedy 2-D DFT pro roztáhnutí obrazu složeného

5.2. VÝSLEDKY

z mediánů příslušných obdélníků, který se poté odčítá od jednotlivých obrazů vstupujících do syntézy. Pro testování jsme zvolili počty obdélníků od 100 do 1296.

5.1.2. Average

Tato procedura kombinuje označené obrazy prostým průměrováním hodnot jednotlivých prvků v pixelovém zásobníku. Poznamenejme, že před touto procedurou není nutno obrazy normalizovat, aritmetický průměr totiž není citlivý na odlišné statistické momenty jednotlivých obrazů.

5.1.3. Median

Označené obrazy kombinujeme pomocí mediánu hodnot jednotlivých prvků v pixelovém zásobníku. Zde už je nutné před provedením mediánu obrazy normalizovat. Do programu je implementován výpočet mediánu na základě algoritmu quickselect.

5.1.4. Sigma Clipping

Pixely z pixelových zásobníků v označených obrazech vyřazujeme pomocí výše zmíněného algoritmu Sigma Clipping, zde je také nutné před provedením obrazy normalizovat. Poznamenejme, že za parametry s_{low} a s_{high} jsme volili hodnoty maximálně do 3. Po vyřazení obrazy kombinujeme průměrováním.

5.1.5. Sigma Median Clipping

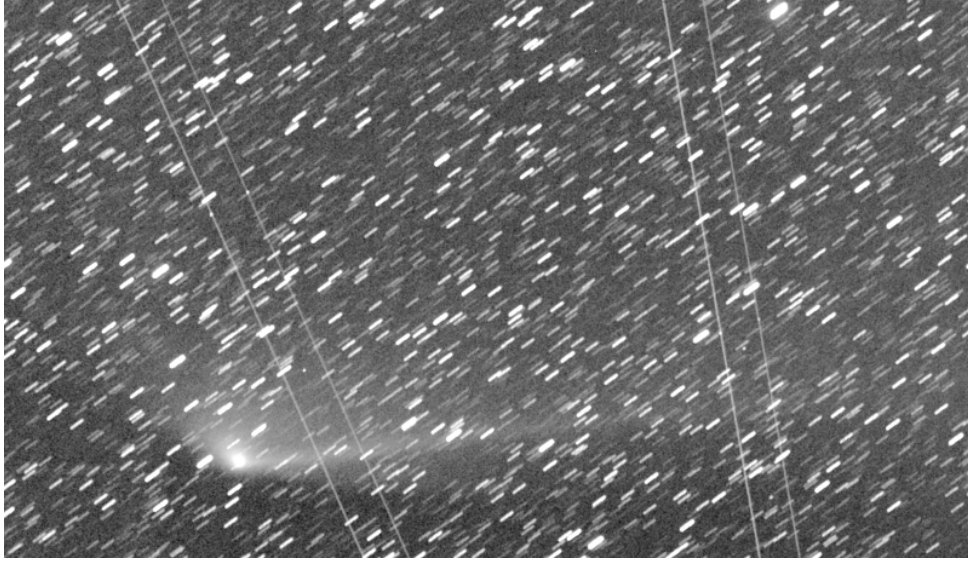
Pixely z pixelových zásobníků v označených obrazech vyřazujeme pomocí algoritmu Sigma Median Clipping, před provedením je opět nutné obrazy normalizovat. Po vyřazení obrazy opět kombinujeme průměrováním.

Důležité části zmíněných algoritmů je možné prohlédnout si v příloze.

5.2. Výsledky

Nyní si představíme výsledky, jaké jednotlivé procedury dávají. Ve všech případech jsme kombinovali obrázky sesazené na kometu. Vzhledem k velikosti původních obrazů zde vkládáme pouze výřezy z výsledného obrazu, ve kterém se nachází kometa. Na Obrázku 5.2 je výsledný obraz vzniklý průměrem všech obrazů vstupujících do syntézy. Můžeme si všimnout, že je poměrně dobře potlačen šum, ale rozmazané hvězdy příliš překrývají kometu, navíc je v obraze patrná stopa světelného znečištění, tudíž tato metoda není pro náš účel příliš vhodná.

Na Obrázku 5.3 je výsledný obraz vzniklý mediánem všech obrazů vstupujících do syntézy. Před touto procedurou už proběhla normalizace všech obrazů pomocí interpolace dat Fourierovou transformací. Zvolili jsme zde počty obdélníků 10×10 . Vidíme, že hvězdy jsou již méně rozmazané, než v případě průměru. Stopu světelného znečištění jsme touto metodou účinně potlačili.



Obrázek 5.2: Průměr



Obrázek 5.3: Medián

Na Obrázku 5.4 je výsledný obraz vzniklý procedurou Sigma Clipping. Před touto procedurou také proběhla normalizace všech obrazů o počtu obdélníků 10×10 . Hvězdy už vypadají lépe, ale můžeme si všimnout poměrně znatelného šumu.

Na Obrázku 5.5 je výsledný obraz vzniklý procedurou Sigma Median Clipping, normalizace všech obrazů proběhla také o počtu obdélníků 10×10 . Je to zřejmě nejlepší výsledek ze všech metod. Na obraze není patrný výrazný šum a kometa i hvězdy jsou poměrně ostré. Pro náš účel se tedy tato metoda hodí nejlépe.

Na následujících dvou obrázcích si můžeme ještě prohlédnout obrazy vzniklé také metodou Sigma Median Clipping, ovšem pro normalizaci byly zvoleny počty obdélníků 24×24 (Obrázek 5.6) a 36×36 (Obrázek 5.7). Při jemnějším dělení obrazu si můžeme

5.2. VÝSLEDKY



Obrázek 5.4: Sigma Clipping

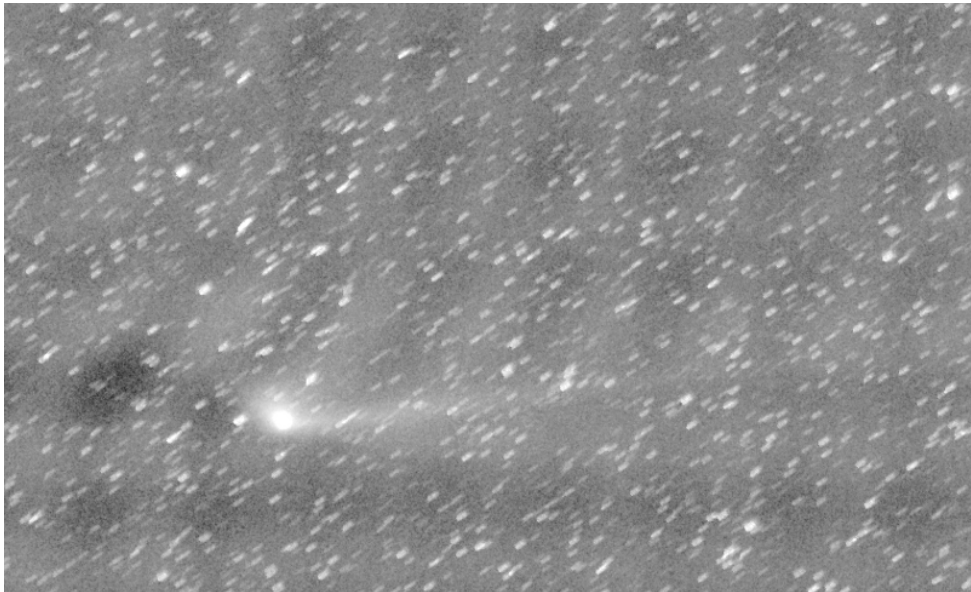


Obrázek 5.5: Sigma Median Clipping 10×10

všimnout artefaktů zůstávajících v obraze po interpolaci dat Fourierovou transformací. V případě, že do syntézy vstupují snímky, ve kterých není střední hodnota pozadí v celém obraze stejná, tzn. je zde přítomné světelné znečištění, popř. svítá, atd., je určitě výhodné před samotnou syntézou použít normalizaci pomocí interpolace dat, kterou jsme v této práci zavedli. Počet obdélníků, který si zvolíme před normalizací, závisí na předchozí analýze obrazů vstupujících do syntézy. Pokud se v obrazech hodnota pozadí mění jen málo, stačí menší počet obdélníků, např. 10×10 . S rostoucími změnami pozadí v obrazech je vhodnější zvolit jemnější dělení, tj. více obdélníků.



Obrázek 5.6: Sigma Median Clipping 24×24



Obrázek 5.7: Sigma Median Clipping 36×36

6. Závěr

V práci jsme se zabývali syntézou posloupnosti digitálních obrazů s pohyblivým objektem. Výsledkem syntézy má být jediný obraz, na kterém je ostrý jak objekt, tak pozadí. Nejdříve jsme v práci uvedli teorii potřebnou pro metody používající se pro syntézu, a sice dvojrozměrnou diskrétní Fourierovu transformaci pro zobecnění těchto metod na případ proměnné intenzity pozadí v Kapitole 2 a některé důležité statistické pojmy pro vlastní metody v Kapitole 3. V Kapitole 4 jsme si popsali samotné metody, které jsou pro syntézu vhodné. Jsou to průměr a medián, které účinně potlačují šum ve výsledném obraze, nestačí ovšem na ostrost objektu i pozadí zároveň. Uvedli jsme tedy i pokročilejší metody, Sigma Clipping a Sigma Median Clipping, které se používají pro vyřazení některých odlehlých hodnot, které poté do samotné syntézy nevstupují. Ta se po vyřazení odlehlých hodnot provádí nejlépe průměrem. Naprosto nezbytným krokem před vyřazováním odlehlých hodnot a samotnou syntézou je normalizace všech obrazů vstupujících do syntézy. Jejím výsledkem je posloupnost obrazů, které mají mezi sebou srovnatelné statistické momenty, např. střední hodnotu nebo rozptyl. Pak totiž nenastane případ, že by stejná hodnota pixelu patřila v jenom obraze důležitému objektu a v dalším pozadí. Normalizaci jsme v práci zobecnili na případ proměnné intenzity pozadí pomocí interpolace dat provedené zmíněnou dvojrozměrnou diskrétní Fourierovou transformací. Po normalizaci už můžeme přistoupit k vlastní syntéze.

Součástí práce byla i programová implementace výše popsaných metod a její testování na sérii snímků komety pohybující se na pozadí hvězdné oblohy. Ta je popsána v Kapitole 5. V počítačovém programu jsme testovali všechny uvedené metody, některé výsledky a jejich srovnání najdeme v téže kapitole. Kompletní program i se snímky před a po zpracování nalezneme na přiloženém CD.

Podle očekávání se zobecnění na případ proměnné intenzity pozadí pomocí dvojrozměrné diskrétní Fourierovy transformace podařilo. Pouhé odečtení mediánu či průměru celého obrazu totiž nemá za následek stejnou střední hodnotu v celém obraze. Světlejší (tmavší) části zůstanou i po odečtení světlejší (tmavší). Pro tento případ se jeví uvedená metoda jako ideální.

Literatura

- [1] BEZVODA, Václav. *Dvojměrná diskrétní Fourierova transformace a její použití, díl I.: Teorie a obecné užití*. Státní pedagogické nakladatelství, 1988, 181 s.
- [2] ČERNOCKÝ, Jan. *Fourierova transformace*[online]. FIT VUT, 2010[cit. 2014-05-14]. Dostupné z: <http://www.fit.vutbr.cz/study/courses/ISS/public/pred/ft/ft.pdf>
- [3] Deep Sky Image Processing - Astrodoc: Astrophotography by Ron Brecher[online]. *Astrophotographer Ron Brecher - Astrodoc: Astrophotography by Ron Brecher* [online]. 2014 [cit. 2014-05-15]. Dostupné z: <http://astrodoc.ca/deep-sky-image-processing-workflow/>
- [4] DeepSkyStacker - Free [online]. [cit. 2014-04-17]. Dostupné z: <http://deepskystacker.free.fr/english/>
- [5] *(Diskrétní) Fourierova transformace* [online]. Olomouc, 2003 [cit. 2014-05-12]. Dostupné z: <http://apfyz.upol.cz/ucebnice/down/mini/fourtrans.pdf>. Učebnice. Univerzita Palackého.
- [6] DRUCKMÜLLER, Miloslav. Studijní materiály k předmětu TNM - Numerické metody analýzy obrazů.
- [7] HLAVÁČ, Václav a Milan ŠONKA. *Počítačové vidění*. Praha: Grada, 1992, 272 s. ISBN 80-854-2467-3.
- [8] HRDLIČKOVÁ, Zuzana. *Základní rozdělení pravděpodobnosti* [online]. Brno, 2007 [cit. 2014-05-05]. Dostupné z: <http://mathonline.fme.vutbr.cz/Zakladni-rozdeleni-pravdepodobnosti/sc-1206-sr-1-a-200/default.aspx>. Studijní materiál k předmětu M4. FSI VUT.
- [9] HUDECOVÁ, Šárka. UNIVERZITA KARLOVA. *Matematická statistika*[online]. 2012[cit. 2014-05-05]. Dostupné z: http://www.karlin.mff.cuni.cz/~hudecova/education/download/chem_predn/popisna_tisk.pdf
- [10] MICHÁLEK, Jaroslav. Studijní materiály k předmětu S1P - Pravděpodobnost a statistika I.
- [11] PixInsight Reference Documentation — ImageIntegration. *PixInsight - Pleiades Astrophoto* [online]. 2011, 2014 [cit. 2014-05-19]. Dostupné z: <http://pixinsight.com/doc/tools/ImageIntegration/ImageIntegration.html>
- [12] STATSOFT. *Popisná statistika - kvantitativní veličiny*[online]. 2012[cit. 2014-05-06]. Dostupné z: http://www.statsoft.cz/file1/PDF/newsletter/2012_09_17_StatSoft_popisna_statistika.pdf
- [13] STATSOFT. *Popisná statistika - míry variability*[online]. 2012[cit. 2014-05-06]. Dostupné z: http://www.statsoft.cz/file1/PDF/newsletter/2012_10_15_StatSoft_Popisne_statistiky_-_miry_variability.pdf

LITERATURA

- [14] ŽÁK, Libor. *Popisná statistika* [online]. Brno, 2006 [cit. 2014-05-08]. Dostupné z: <http://mathonline.fme.vutbr.cz/Popisna-statistika/sc-1146-sr-1-a-139/default.aspx>. Studijní materiál k předmětu M4. FSI VUT.

7. Seznam použitých zkratek a symbolů

\mathbb{N}	množina přirozených čísel
\mathbb{N}_0	množina přirozených čísel včetně nuly
\mathbb{Z}	množina celých čísel
\mathbb{R}	množina reálných čísel
\mathbb{R}^2	reálná rovina ($\mathbb{R} \times \mathbb{R}$)
\mathbb{C}	množina komplexních čísel
$s(t_1, t_2)$	spojitý dvojdimenzionální signál
$x(n_1, n_2)$	diskrétní dvojdimenzionální signál
$\tilde{s}(t_1, t_2)$	periodický spojitý dvojdimenzionální signál
$\tilde{x}(n_1, n_2)$	periodický diskretní dvojdimenzionální signál
$L^1(\mathbb{R}^2)$	prostor absolutně integrovatelných funkcí
$L^2(\mathbb{R}^2)$	prostor kvadraticky integrovatelných funkcí
$l^1(\mathbb{R}^2)$	prostor absolutně sčitatelných posloupností
$l^2(\mathbb{R}^2)$	prostor kvadraticky sčitatelných posloupností
$\delta_{n,m}$	Kroneckerovo delta
$\mathbf{x}, \mathbf{X}, \mathbf{f}$	označení pro vektory

A. Ukázky z programu

Vytvořený program spolu se snímky před a po zpracování nalezneme na příloženém CD. Zde uvedeme některé důležité části zdrojového kódu.

A.1. Normalise

Uvádíme ukázkou výpočtu nové hodnoty pixelu v průběhu normalizování obrazu. TempImg představuje načtený obraz, BigFFTIImgR (G, B) obraz získaný interpolací mediánů v obdélnících a C vhodnou konstantu. Proměnné red, green a blue reprezentují složky pixelu v normalizovaném obrazu.

```
red := TempImg^[index + w].R - BigFFTIImgR[h + 1, w + 1] + C;
green := TempImg^[index + w].G - BigFFTIImgG[h + 1, w + 1] + C;
blue := TempImg^[index + w].B - BigFFTIImgB[h + 1, w + 1] + C;
if (red < 0) then Img[newindex + w].R := 0
  else if (red > 65535) then Img[newindex + w].R := 65535
    else Img[newindex + w].R := red;
if (green < 0) then Img[newindex + w].G := 0
  else if (green > 65535) then Img[newindex + w].G := 65535
    else Img[newindex + w].G := green;
if (blue < 0) then Img[newindex + w].B := 0
  else if (blue > 65535) then Img[newindex + w].B := 65535
    else Img[newindex + w].B := blue;
//ochrana proti pod- a pretečení
```

A.2. Average

Ukázka naplnění pixelového zásobníku a následně spočtení průměru pro každou složku pixelu výsledného obrazu.

```
for j := 0 to cnt - 1 do
  begin
    DataR[j] := PixelStack[w, j].R;
    DataG[j] := PixelStack[w, j].G;
    DataB[j] := PixelStack[w, j].B;
  end;
R := Round(Avg(DataR, cnt));
G := Round(Avg(DataG, cnt));
B := Round(Avg(DataB, cnt));
```

A.3. Median

Obdobná ukázka jako předchozí, pouze průměr je nahrazen mediánem.

```
for j := 0 to cnt - 1 do
  begin
    DataR[j] := PixelStack[w, j].R;
    DataG[j] := PixelStack[w, j].G;
    DataB[j] := PixelStack[w, j].B;
  end;
R := QuickMedian(DataR, cnt);
G := QuickMedian(DataG, cnt);
B := QuickMedian(DataB, cnt);
```

A.4. Sigma Clipping

Ukázka iterací v algoritmu Sigma Clipping. V každé iteraci spočteme medián, směrodatnou odchylku, stanovíme horní a dolní hranice a pokud hodnota pixelu nepadne do našeho intervalu, vyřadíme pixel z pixelového zásobníku. Hodnotu pixelu výsledného obrazu počítáme průměrem zbylých hodnot pixelů.

```

for it := 0 to NumOfIt - 1 do
  begin
    med.R := QuickMedian(DataR, cntR);
    med.G := QuickMedian(DataG, cntG);
    med.B := QuickMedian(DataB, cntB);

    sigma.R := MedDev(DataR, cntR);
    sigma.G := MedDev(DataG, cntG);
    sigma.B := MedDev(DataB, cntB);

    UpBound.R := med.R + sHigh * sigma.R;
    UpBound.G := med.G + sHigh * sigma.G;
    UpBound.B := med.B + sHigh * sigma.B;
    LowBound.R := med.R - sLow * sigma.R;
    LowBound.G := med.G - sLow * sigma.G;
    LowBound.B := med.B - sLow * sigma.B;

    j := 0;
    while (j <= cntR - 1) do
      if (DataR[j] < LowBound.R) OR (DataR[j] > UpBound.R) then
        MoveLeft(DataR, j, cntR)
      else inc(j);
    j := 0;
    while (j <= cntG - 1) do
      if (DataG[j] < LowBound.G) OR (DataG[j] > UpBound.G) then
        MoveLeft(DataG, j, cntG)
      else inc(j);
    j := 0;
    while (j <= cntB - 1) do
      if (DataB[j] < LowBound.B) OR (DataB[j] > UpBound.B) then
        MoveLeft(DataB, j, cntB)
      else inc(j);
  end; //for it

R := Round(Avg(DataR, cntR));
G := Round(Avg(DataG, cntG));
B := Round(Avg(DataB, cntB));

```

A.5. Sigma Median Clipping

Obdobný algoritmus jako u Sigma Clippingu s tím rozdílem, že místo vyřazení hodnoty nesplňující naši podmínku ji nahradíme mediánem.

```

for it := 0 to NumOfIt - 1 do
  begin
    med.R := QuickMedian(DataR, cnt);
    med.G := QuickMedian(DataG, cnt);
    med.B := QuickMedian(DataB, cnt);

    sigma.R := MedDev(DataR, cnt);
    sigma.G := MedDev(DataG, cnt);
    sigma.B := MedDev(DataB, cnt);

    UpBound.R := med.R + sHigh * sigma.R;
    UpBound.G := med.G + sHigh * sigma.G;
    UpBound.B := med.B + sHigh * sigma.B;
    LowBound.R := med.R - sLow * sigma.R;
    LowBound.G := med.G - sLow * sigma.G;
    LowBound.B := med.B - sLow * sigma.B;

    for j := 0 to cnt - 1 do
      if (DataR[j] < LowBound.R) OR (DataR[j] > UpBound.R) then
        DataR[j] := med.R;
    for j := 0 to cnt - 1 do
      if (DataG[j] < LowBound.G) OR (DataG[j] > UpBound.G) then
        DataG[j] := med.G;
    for j := 0 to cnt - 1 do
      if (DataB[j] < LowBound.B) OR (DataB[j] > UpBound.B) then
        DataB[j] := med.B;
  end; //for it

R := Round(Avg(DataR, cntR));
G := Round(Avg(DataG, cntG));
B := Round(Avg(DataB, cntB));

```