VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
ÚSTAV MATEMATIKY

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
INSTITUTE OF MATHEMATICS

ANALÝZA STABILITY LINEÁRNÍCH DIFERENČNÍCH ROVNIC

LINEAR DIFFERENCE EQUATIONS: STABILITY ANALYSIS

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE
BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE — LUKÁŠ TESAŘ
AUTHOR

VEDOUCÍ PRÁCE — Ing. PETR TOMÁŠEK, Ph.D.
SUPERVISOR

BRNO 2015

Abstrakt
Tato práce pojednává o vyšetřování asymptotické stability lineárních diferenčních rovnic na základě kritéria Schurova-Cohnova a Routhova-Schurova. Obě tato kritéria jsou realizována v programu Maple a jejich použití je demonstrováno na příkladech. Na Adamsově-Bashforthově metodě pro řešení počátečních problémů obyčejných diferenciálních rovnic 1.řádu je ilustrováno použití techniky pro lokalizaci hranice oblasti asymptotické stability této metody.

Summary
This thesis deals with asymptotic stability investigation of linear difference equation. The Schur-Cohn criterion and discrete Routh-Schur criterion are introduced and demonstrated on several examples. Both criterions are implemented in Maple programming enviroment. Boundary locus technique is illustrated on a stability analysis of the Adams-Bashforth method for numerical solving of an initial value problem of first order ordinary differential equation.

Klíčová slova
diferenční rovnice, stabilita, Schurovo-Cohnovo kritérium, Routhovo-Schurovo kritérium, oblast stability

Keywords
difference equation, stability, Schur-Cohn criterion, Routh-Schur criterion, stability region

TESAŘ, L. *ANALÝZA STABILITY LINEÁRNÍCH DIFERENČNÍCH ROVNIC*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ, 2015. 32 s. Vedoucí Ing. Petr Tomášek, Ph.D.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci na téma „Analýza stability lineárních diferenčních rovnic“ vypracoval samostatně, pod dohledem svého vedoucího bakalářské práce a s pomocí zdrojů uvedených v seznamu použité literatury.

Lukáš Tesař

Děkuji svému vedoucímu panu Ing. Petru Tomáškovi, Ph.D. za věcné připomínky, cenné rady a vstřícnost při konzultacích a vypracování mé závěrečné práce.

Lukáš Tesař

Obsah

1. Úvod

Hlavním cílem této práce je analýza asymptotické stability lineárních diferenčních rovnic. Diferenční rovnice, jinak také nazývána rekurzivní rovnice, je rovnice, která definuje posloupnost rekurzivně: každý člen posloupnosti je definován jako funkce předešlých členů posloupnosti

$$x(n) = f(x(n-1), x(n-2), \cdots, x(n_0)),$$

kde $n \in D$, $D = \{i \in \mathbb{N} : i \geq n_0\}$. Diferenční rovnice je často používána k popisu evoluce určitého jevu za uplynutí určité doby. Například v populační dynamice (věda, která zkoumá krátkodobé a dlouhodobé změny v rozložení určité populace) se lze na rovnici

$$x(n) = x(n-1) + x(n-2), \quad x(0) = 1, x(1) = 1 \tag{1.1}$$

dívat jako na velice jednoduchý model pro růst a reprodukci králičí populace. Tímto modelem růstu králičí populace se zabýval italsky matematik Leonardo di Pisa, známý jako Fibonacci, ve své knize *Liber abaci* z roku 1202. Řešil zde otázku, kolik párů králíků bude mít po uplynutí ročního intervalu, bude-li začínat s jedním párem, za předpokladu, že každý pár porodí každý měsíc jeden nový pár. Řešením úlohy (1.1) je známá Fibonacciho posloupnost.

Další využití lze nalézt i v jiných vědních oborech, jako je například pravděpodobnost, počítačové vědy (příkladem velkého významu diferenčních rovnic může být například jejich použití při implementaci lineárních časově neproměnných diskrétních systémů v mikroprocesorech a signálových procesorech), aj.

Bakalářská práce má následující strukturu. Kapitola druhá uvádí teoretické základy lineárních diferenčních rovnic jako je jejich obecné řešení, lineární nezávislost tohoto řešení a v neposlední řadě uvádí definici asymptotické stability. V kapitole třetí uvedeme některá kritéria, založena na vyšetřování polohy kořenů charakteristického polynomu. Použití těchto kritérií a diferenčních rovnic je demonstrováno na příkladech v poslední kapitole. Součástí práce je realizace těchto kritérií v programu Maple, jehož ukázky kódu jsou na přiloženém CD.

2. Lineární diferenční rovnice

2.1. Lineární diferenční rovnice prvního řádu

V této sekci se zaměříme na *diferenční rovnice prvního řádu*. Lineární *homogenní* rovnice je obecně dána vztahem

$$x(n+1) = a(n)x(n), \quad x(n_0) = x_0, \quad n \in D \tag{2.1}$$

a obdobně *nehomogenní* rovnice je dána vztahem

$$y(n+1) = a(n)y(n) + g(n), \quad y(n_0) = y_0, \quad n \in D, \tag{2.2}$$

kde se u obou rovnic předpokládá, že $a(n) \neq 0$ a $\{a(n)\}_{n=n_0}^{\infty}$, $\{g(n)\}_{n=n_0}^{\infty}$ jsou reálné posloupnosti. Řešení rovnice (2.1) lze obdržet jednoduchou iterací

$$\begin{aligned} x(n_0+1) &= a(n_0)x(n_0) = a(n_0)x_0, \\ x(n_0+2) &= a(n_0+1)x(n_0+1) = a(n_0+1)a(n_0)x_0, \\ x(n_0+3) &= a(n_0+2)x(n_0+2) = a(n_0+2)a(n_0+1)a(n_0)x_0. \end{aligned}$$

Užitím matematické indukce získáme řešení ve tvaru

$$\begin{aligned} x(n) &= x(n_0 + n - n_0) \\ &= a(n-1)a(n-1)\cdots a(n_0)x_0 \\ &= \left(\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i)\right) x_0. \end{aligned}$$

Jednoznačné řešení *nehomogenní* rovnice (2.2) lze nalézt následujícím způsobem

$$\begin{aligned} y(n_0+1) &= a(n_0)y_0 + g(n_0), \\ y(n_0+2) &= a(n_0+1)y(n_0+) + g(n_0+1) \\ &= a(n_0+1)a(n_0)y_0 + a(n_0+1)g(n_0) + g(n_0+1). \end{aligned}$$

Nyní lze ukázat pomocí matematické indukce, že pro všechna $n \in D$ je

$$y(n) = \left(\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i)\right) y_0 + \sum_{r=n_0}^{n-1} \left(\prod_{i=r+1}^{n-1} a(i)\right) g(r). \tag{2.3}$$

Nechť vzorec (2.3) platí pro $n = k$. Potom z rovnice (2.2) obdržíme vztah $y(k+1) = a(k)y(k) + g(k)$, který podle (2.3) a standardně uvažovaných vztahů $\prod_{i=k+1}^{k} a(i) = 1$, $\sum_{i=k+1}^{k} a(i) = 0$ dává

$$
\begin{aligned}
y(k+1) &= a(k)\left(\prod_{i=n_0}^{k-1} a(i)\right) y_0 + \sum_{r=n_0}^{k-1}\left(\prod_{i=r+1}^{k-1} a(i)\right) g(r) + g(k) \\
&= \left(\prod_{i=n_0}^{k} a(i)\right) y_0 + \sum_{r=n_0}^{k-1}\left(\prod_{i=r+1}^{k} a(i)\right) g(r) + \left(\prod_{i=k+1}^{k} a(i)\right) g(k) \\
&= \left(\prod_{i=n_0}^{k} a(i)\right) y_0 + \sum_{r=n_0}^{k}\left(\prod_{i=r+1}^{k} a(i)\right) g(r).
\end{aligned}
$$

Z toho důvodu tedy vzorec (2.3) platí pro všechna $n \in D$.

Příklad 2.1. Nalezněte řešení diferenční rovnice

$$x(n+1) - (n+1)x(n) = 0, \quad x(0) = c,$$

kde $c \in \mathbb{R}$. Pro řešení využijeme vztahu (2.3), kde uvažujeme $y_0 = c, a(i) = (i+1)$ a $g(r) = 0$:

$$x(n) = \left(\prod_{i=0}^{n-1}(i+1)\right) c + \sum_{r=0}^{n-1}\left(\prod_{i=r+1}^{n-1}(i+1)\right) \cdot 0 = (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdots n) \cdot c + 0 = n!c.$$

2.2. Lineární diferenční rovnice vyššího řádu

Nyní se budeme zabývat lineárními diferenčními rovnicemi vyššího řádu.
Obecný tvar nehomogenní diferenční rovnice k-tého řádu je dán vztahem

$$y(n+k) + p_1(n)y(n+k-1) + \cdots + p_k(n)y(n) = g(n), \tag{2.4}$$

kde $\{p_i(n)\}$ pro $\forall i = 1, 2, 3, \ldots, k$ a $\{g(n)\}$ jsou reálné posloupnosti definované pro $n \geq n_0$ a $p_k(n) \neq 0$ pro všechna $n \in D$. Pokud je $g(n) = 0$, pak hovoříme o homogenní diferenční rovnici k-tého řádu.
Po upravení a bez újmy na obecnosti lze uvažovat, $n = 0, 1, 2, \cdots$.

$$y(n+k) = -p_1(n)y(n+k-1) - \cdots - p_k(n)y(n) + g(n) \tag{2.5}$$

Položíme-li $n = 0$ v rovnici (2.5), tak obdržíme $y(k)$ pomocí $y(k-1), y(k-2), \cdots, y(0)$. Explicitně tedy máme

$$y(k) = -p_1(0)y(k-1) - p_2(0)y(k-2) - \cdots - p_k(0)y(0) + g(0).$$

Jakmile máme vyřešeno $y(k)$, přistoupíme k dalšímu kroku a vyhodnotíme $y(k+1)$ tím, že položíme $n = 1$. Dostáváme

$$y(k+1) = -p_1(1)y(1) - p_2(1)y(k-1) - \cdots - p_k(1)y(1) + g(1).$$

Opakováním uvedeného procesu jsme schopni zjistit všechna $y(n)$ pro $n \geq k$.

Příklad 2.1. Uvažujme diferenční rovnici 3. řádu

$$y(n+3) - \frac{2n}{n+1}y(n+2) + ny(n+1) - 5y(n) = n, \tag{2.6}$$

kde $y(1) = 0, y(2) = -1$ a $y(3) = 1$. Budeme hledat hodnoty pro $y(4), y(5), y(6)$. Nejprve z rovnice (2.1) vyjádříme

$$y(n+3) = \frac{2n}{n+1}y(n+2) - ny(n+1) + 5y(n) + n.$$

Nyní položme $n = 1$, dostaneme

$$y(4) = \frac{2}{2}y(3) - y(2) + 5y(1) + 1 = 3.$$

Pro $n = 2$,

$$y(5) = \frac{4}{3}y(4) - y(3) + 5y(2) + 2 = 0.$$

Pro $n = 3$,

$$y(6) = \frac{6}{4}y(5) - y(4) + 5y(3) + 3 = 5.$$

Obecné řešení

Chceme-li formálně definovat obecné řešení rovnice (2.4), je potřeba nejdříve specifikovat počáteční podmínky. Posloupnost $\{y(n)\}_{n_0}^{\infty}$, jednodušeji $y(n)$ nazveme *řešením* rovnice (2.4), pokud splňuje danou rovnici. Jsou-li specifikovány počáteční podmínky rovnice, lze nalézt odpovídající problém počátečních hodnot

$$y(n+k) + p_1(n)y(n+k-1) + \cdots + p_k(n)y(n) = g(n), \tag{2.7}$$

$$y(n_0) = a_0, y(n_0+1) = a_1, \cdots, y(n_0+k-1) = a_{k-1}, \tag{2.8}$$

kde a_i jsou reálná čísla. S ohledem na výše uvedené platí následující tvrzení.

Věta 2.2.1. Počáteční problém (2.7) a (2.8) má jediné řešení $y(n)$.

Důkaz. Důkaz lze provést za použití rovnice (2.5) pro $n = n_0, n_0+1, n_0+2, \cdots$. Všimněme si, že libovolné $n \geq n_0 + k$ můžeme přepsat na tvar $n = n_0 + k + (n - n_0 - k)$. *Jedinečností* řešení pro $y(n)$ chápeme, že existuje-li jiné řešení $\bar{y}(n)$ problému počátečních hodnot (2.7) a (2.8), pak tedy $\bar{y}(n)$ musí být identické s $y(n)$. To lze snadno vidět ze vztahu (2.7). □

2.3. Obecná teorie homogenních diferenčních rovnic k-tého řádu

V této sekci se zaměříme na obecnou teorii homogenních diferenčních rovnic k-tého řádu, které jsou ve tvaru

$$y(n+k) + p_1(n)y(n+k-1) + p_2(n)y(n+k-2) + \cdots + p_k(n)y(n) = 0. \tag{2.9}$$

Nejdříve uvedeme několik pojmů v souvislosti se strukturou řešení rovnice (2.9).

Definice 2.3.1. Nechť jsou funkce $f_1(n), f_2(n), f_3(n) \cdots, f_r(n)$ *lineárně závislé* pro $n \in D$, jestliže existují konstanty $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_r$ z nichž je alespoň jedna nenulová tak, že

$$a_1 f_1(n) + a_2 f_2(n) + a_3 f_3(n) + \cdots + a_r f_r(n) = 0, \quad n \in D.$$

Pokud $a_j \neq 0$, pak lze rovnici (2.9) podělit a_j a dostaneme

$$f_j(n) = -\frac{a_1}{a_j} f_1(n) - \frac{a_2}{a_j} f_2(n) - \frac{a_3}{a_j} f_3(n) - \cdots - \frac{a_r}{a_j} f_r(n) = -\sum_{i \neq j} \frac{a_i}{a_j} f_i(n). \tag{2.10}$$

Zjednodušeně rovnice (2.10) říká, že každá funkce f_j s nenulovým koeficientem je *lineární kombinací* ostatních funkcí $f_i, \forall i = 1, 2, \cdots, j, \cdots, r$. Tedy dvě funkce $f_1(n)$ a $f_2(n)$ jsou lineárně závislé, pokud jedna je násobkem druhé: $f_1(n) = a f_2(n)$, pro libovolnou konstantu a. Opakem lineární závislosti je pak *lineární nezávislost*.

Definice 2.3.2. Množina k lineárně nezávislých řešení rovnice (2.9) se nazývá *fundamentální množina řešení*.

Definice 2.3.3. Casoratián [1] $W(n)$ řešení $x_1(n), x_2(n), \cdots, x_r(n)$ je determinant

$$W(n) = \det \begin{pmatrix} x_1(n) & x_2(n) & \dots & x_r(n) \\ x_1(n+1) & x_2(n+1) & \dots & x_r(n+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1(n+r-1) & x_2(n+r-1) & \dots & x_r(n+r-1) \end{pmatrix}.$$

K výpočtu Casoratiánu použijeme Abelův vzorec. Výhodou Abelova vzorce je efektivita v ověřování lineární nezávislosti řešení.

Lemma 2.3.1. (Abelova věta) Nechť $x_1(n), x_2(n), x_3(n), \cdots, x_k(n)$ jsou řešením rovnice (2.9) a nechť je $W(n)$ jejich Casoratián, pak pro $n \in D$ platí

$$W(n) = (-1)^{k(n-n_0)} \left(\prod_{i=n_0}^{n-1} p_k(i) \right) W(n_0). \tag{2.11}$$

Dále prozkoumáme vztah mezi lineární nezávislostí a Casoratiánem, ukážeme že množina k řešení je fundamentální množina řešení (tedy lineárně nezávislá), pokud je Casoratián $W(n)$ vždy nenulový.

Věta 2.3.1. Množina řešení $x_1(n), x_2(n), x_3(n), \cdots, x_k(n)$ rovnice (2.9) je fundamentální množinou řešení tehdy, pokud pro některá $n_0 \in \mathbb{Z}^+$ je Casoratián $W(n_0) \neq 0$ [4, str. 71].

Nyní se lze podívat na fundamentální větu homogenní lineární diferenční rovnice.

Věta 2.3.2. Je-li $p_k(n) \neq 0$ pro všechna $n \in D$, potom rovnice (2.9) má fundamentální množinu řešení pro $n \in D$.

[1] analogie s Wronskiánem z problematiky o diferenciálních rovnicích

Důkaz. Dle věty (2.8) existují řešení $x_1(n), x_2(n), x_3(n), \cdots, x_k(n)$ taková, že $x_i(n_0+i-1) = 1, x_i(n_0) = x_i(n_0+1) = \cdots = x_i(n_0+i-2) = x_i(n_0+i) = \cdots = x_i(n_0+k-1) = 0$, kde $1 \leq i \leq k$. Tudíž $x_1(n_0) = 1, x_2(n_0+1) = 1, x_3(n_0+2) = 1, \cdots, x_k(n_0+k-1) = 1$. Tudíž $W(n_0) = \det I = 1$, což vyplývá z věty (2.3.1), kde množina $\{x_1(n), x_2(n), x_3(n), \cdots, x_k(n)\}$ je fundamentální množinou řešení rovnice (2.9). Zde je však potřeba poznamenat, že existuje nekonečně mnoho fundamentálních řešení rovnice (2.9). V následující větě uvidíme metodu generování fundamentálních množin z jedné známé množiny. □

Lemma 2.3.2. Nechť $x_1(n)$ a $x_2(n)$ jsou dvě řešení rovnice (2.9). Pak platí následující:

(I) $x(n) = x_1(n) + x_2(n)$ je řešením rovnice (2.9),

(II) $\tilde{x}(n) = ax_1(n)$ je řešením rovnice (2.9) pro libovolnou konstantu a.

Z tohoto plyne následující tvrzení o principu superpozice.
Princip superpozice. Pokud $x_1(n), x_2(n), x_3(n), \cdots, x_r(n)$ jsou řešením rovnice (2.9), pak

$$x(n) = a_1x_1(n) + a_2x_2(n) + a_3x_3(n) + \cdots + a_rx_r(n)$$

je taktéž řešením této rovnice. Se znalostmi principu superpozice můžeme nyní definovat obecné řešení pro homogenní diferenční rovnici k-tého řádu:

Definice 2.3.4. Uvažujme fundamentální řešení diferenční rovnice (2.9) ve tvaru $\{x_1(n), x_2(n), x_3(n), \cdots, x_k(n)\}$. *Obecným řešením* rovnice (2.9) rozumíme $x(n) = \sum_{i=1}^{k} a_ix_i(n)$, kde a_i je libovolná reálná konstanta. Jakékoliv řešení rovnice (2.9) lze získat z obecného řešení vhodnou volbou konstant a_i.

Příklad 2.1. Mějme diferenční rovnici třetího řádu ve tvaru

$$x(n+3) + 3x(n+2) - 4x(n+1) - 12x(n) = 0.$$

Ukažte, že $2^n, (-2)^n, (-3)^n$ tvoří fundamentální řešení dané rovnice.

Nejprve ověříme, zda jednotlivá zadaná řešení opravdu řešením jsou, substitucí $x(n) = 2^n$ a dosazením do rovnice:

$$2^{n+3} + (3)2^{n+2} - (4)2^{n+1} - (12)2^n = 2^n[2^3 + (3)2^2 - (4)2^1 - (12)] = 2^n[8+12-8-12] = 0.$$

Nyní $x(n) = (-2)^n$:

$$(-2)^{n+3} + (3)(-2)^{n+2} - (4)(-2)^{n+1} - (12)(-2)^n = (-2)^n[-8+12+8-12] = 0,$$

obdobně pro $x = (-3)^n$:

$$(-3)^{n+3} + (3)(-3)^{n+2} - (4)(-3)^{n+1} - (12)(-3)^n = (-3)^n[-27+27-12+12] = 0.$$

Za účelem ověření lineární nezávislosti řešení sestrojíme Casoratián

$$W(n) = \det \begin{pmatrix} 2^n & (-2)^n & (-3)^n \\ 2^{n+1} & (-2)^{n+1} & (-3)^{n+1} \\ 2^{n+2} & (-2)^{n+2} & (-3)^{n+2} \end{pmatrix}.$$

Tedy

$$W(0) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \\ 4 & 4 & 9 \end{pmatrix} = -20 \neq 0.$$

Vidíme tedy, že uvedená řešení jsou lineárně nezávislá a tvoří tak fundamentální řešení.

Dále se budeme zabývat pouze rovnicemi s konstantními koeficienty.

2.4. Lineární homogenní rovnice s konstantními koeficienty

Mějme diferenční rovnici k-tého řádu

$$y(n+k) + p_1 y(n+k-1) + p_2 y(n+k-2) + \cdots + p_k y(n) = 0, \tag{2.12}$$

kde koeficienty $p_1, p_2, \cdots, p_k$ jsou reálné konstanty a $p_k \neq 0$. Naším cílem je nejen nalézt fundamentální množinu řešení, ale hlavně obecné řešení rovnice (2.12). Budeme předpokládat, že řešení rovnice (2.12) jsou ve tvaru λ^n, kde λ je komplexní číslo. Dosazením tohoto do (2.12), obdržíme

$$\lambda^k + p_1 \lambda^{k-1} + \cdots + p_k = 0. \tag{2.13}$$

Obdrželi jsme tzv. *charakteristickou rovnici* jejíž kořeny se nazývají *charakteristické kořeny*. Jelikož máme $p_k \neq 0$, tak žádný charakteristický kořen není roven nule.

Budeme-li nadále předpokládat, že charakteristické kořeny $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \cdots, \lambda_k$ jsou různé, pak lze ukázat, že množina $\{\lambda_1^n, \lambda_2^n, \lambda_3^n, \cdots, \lambda_k^n\}$ je fundamentální množina řešení. K tomu nám postačí znalosti z 2.3.1, že $W(n) \neq 0$, kde $W(n)$ je Casoratián řešení. Tedy:

$$W(0) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_k \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \ldots & \lambda_k^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \ldots & \lambda_k^{k-1} \end{pmatrix}.$$

Tomuto determinantu se říká *Vandermondův determinant*. Pomocí matematické indukce může být ukázáno, že

$$W(0) = \prod_{1 \le i < j \le k} (\lambda_j - \lambda_i).$$

Hledáme-li obecné řešení rovnice (2.12), hledáme jej ve tvaru

$$y(n) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^n (a_{i0} + a_{i1} n + a_{i2} n^2 + \cdots + a_{i,m_i-1} n^{m_i-1}), \tag{2.14}$$

kde $m_1, m_2, \cdots, m_r$ jsou násobnosti kořenů $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_r$ a platí $\sum\limits_{i=1}^{r} m_i = k$. Detailnější postup hledání obecného řešení je ukázán v příkladu (2.1).

Toto se však týká pouze rovnic, které mají *reálné kořeny*. Budeme-li chtít řešit rovnici, která má *komplexní kořeny*, je třeba postupovat následovně.
Mějme rovnici $x(n+2)+p_1x(n+1)+p_2x(n)=0$, která má komplexní kořeny tvaru

$$\lambda_1=\alpha+i\beta, \lambda_2=\alpha-i\beta.$$

Obecné řešení naší rovnice by tedy bylo

$$x(n)=c_1(\alpha+i\beta)^n+c_2(\alpha-i\beta)^n. \tag{2.15}$$

Bod (α,β) v komplexní rovině koresponduje s komplexním číslem $\alpha+i\beta$. Pomocí polárních souřadnic dostaneme

$$\alpha=r(\cos\delta), \quad \beta=r(\sin\delta), \quad r=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}, \quad \delta=\tan^{-1}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right).$$

Příklad 2.1. Řešte rovnici s danými počátečními podmínkami

$$x(n+3)-7x(n+2)+16x(n+1)-12x(n)=0,$$

$$x(0)=0, \quad x(1)=1, \quad x(2)=2.$$

Charakteristická rovnice je ve tvaru

$$\lambda^3-7\lambda^2+16\lambda-12=0,$$

jejíž charakteristické kořeny jsou $\lambda_1=\lambda_2=2, \lambda=3$, které nám dají obecné řešení tvaru

$$x(n)=a_02^n+a_1n2^n+b_13^n.$$

K nalezení konstant a_0, a_1, b_1 nyní využijeme počátečních podmínek

$$\begin{aligned} x(0)=&a_0+b_1=0,\\ x(1)=&2a_0+2a_1+3b_1=1,\\ x(2)=&4a_0+8a_1+9b_1=2. \end{aligned}$$

Po vyřešení soustavy rovnic obdržíme

$$a_0=2, a_1=\frac{3}{2}, b_1=-2.$$

Tedy řešení rovnice dostaneme ve tvaru $x(n)=2\cdot2^n+\frac{3}{2}n2^n-2\cdot3^n$.

Limitní chování řešení a asymptotická stabilita

Definice 2.4.1. Řekneme že rovnice (2.12) je *asymptoticky stabilní*, jestliže pro každé její řešení $y(n)$ platí $y(n)\to\infty$ pro $n\to\infty$.

Pro ilustraci vyšetřování limitního chování řešení rovnice (2.12) uvedeme analýzu diferenční rovnice druhého řádu

$$y(n+2)+p_1y(n+1)+p_2y(n)=0. \tag{2.16}$$

Charakteristická rovnice má dva kořeny a může nastat jedna z následujících tří možností:

a) λ_1, λ_2 jsou různé reálné kořeny. Pak $y_1(n) = \lambda_1^n, y_2(n) = \lambda_2^n$ jsou dvě nezávislá řešení pro (2.16). Pokud bude $|\lambda_1| > |\lambda_2|$, tak $y_1(n)$ nazveme *dominantním řešením* a λ_1 *dominantním charakteristickým kořenem.* Totéž platí pro $y_2(n)$,λ_2, pokud platí $|\lambda_2| > |\lambda_1|$. Nyní ukážeme, že limitní chování obecného řešení $y(n) = a_1\lambda_1^n + a_2\lambda_2^n$ je určeno chováním dominantního řešení. Předpokládejme tedy, bez ztráty na obecnosti, že $|\lambda_1| > |\lambda_2|$. Pak

$$y(n) = \lambda_1^n \left[a_1 + a_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^n \right].$$

Jelikož je

$$\left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right| < 1,$$

plyne z toho, že

$$\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^n \to 0, \quad n \to \infty.$$

Tudíž $\lim_{n\to\infty} y(n) = \lim_{n\to\infty} a_1\lambda_1^n$. Může nastat šest různých situací na základě hodnoty λ_1.

1. $\lambda_1 > 0$: Posloupnost $\{a_1\lambda_1^n\}$ diverguje k ∞.
2. $\lambda_1 = 0$: Posloupnost $\{a_1\lambda_1^n\}$ je konstantní posloupnost.
3. $0 < \lambda_1 < 1$: Posloupnost $\{a_1\lambda_1^n\}$ monotónně klesá k nule.
4. $-1 < \lambda_1 < 0$: Posloupnost $\{a_1\lambda_1^n\}$ osciluje okolo nuly (dochází ke střídání znamének) a konverguje k 0.
5. $\lambda_1 = -1$: Posloupnost $\{a_1\lambda_1^n\}$ osciluje mezi hodnotami a_1, $-a_1$.
6. $\lambda_1 < -1$: Posloupnost $\{a_1\lambda_1^n\}$ osciluje, ale roste amplituda.

b) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Obecné řešení (2.16) je dáno rovnicí $y(n) = (a_1 + a_1 n)\lambda^n$. Pokud $|\lambda| \geq 1$, tak řešení $y(n)$ diverguje buď monotónně, je-li $\lambda \geq 1$, nebo oscilačně, je-li $\lambda \leq -1$. Nicméně, pokud bude $|\lambda| < 1$, tak řešení konverguje k nule.

c) Komplexní kořeny: $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, $\beta \neq 0$. Obecné řešení (2.16), jak jsme již ukázali v (2.15), by tedy bylo

$$y(n) = c_1(\alpha + i\beta)^n + c_2(\alpha - i\beta)^n.$$

Řešení $y(n)$ zjevně osciluje, jelikož funkce kosinus osciluje.

Předešlá zjištění lze shrnout pomocí následující věty.

Věta 2.4.1. Platí následující tvrzení [4, Theorem 2.35]

(i) Všechna řešení rovnice (2.16) oscilují okolo nuly právě tehdy, když charakteristická rovnice nemá žádné kladné reálné kořeny.

(ii) Všechna řešení rovnice (2.16) konvergují k nule (tedy řešení je asymptoticky stabilní) právě tehdy, když $\max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\} < 1$.

Vzhledem ke struktuře a vlastnostem řešení lineární homogenní rovnice s konstantními koeficienty (2.12) lze uvést následující tvrzení [4, kapitola 5.1].

Věta 2.4.2. Rovnice (2.12) je asymptoticky stabilní právě tehdy, když pro všechny charakteristické kořeny λ rovnice (2.13) platí $|\lambda| < 1$.

3. Kritéria stability

V této části se seznámíme s několika kritérii pro asymptotickou stabilitu diferenčních rovnic, konkrétně jde o Schurovo–Cohnovo kritérium a kritérium Routhovo–Cohnovo. Obě uvedená kritéria jsou tzv. *algebraická*. To znamená, že posuzují stabilitu na základě koeficientů charakteristického polynomu.

3.1. Schurovo–Cohnovo kritérium

Budeme uvažovat diferenční rovnici k-tého řádu

$$x(n+k) + p_1 x(n+k-1) + p_2 x(n+k-2) + \cdots + p_k x(n) = 0, \tag{3.1}$$

kde p_i jsou reálné konstanty, a jejíž charakteristický polynom je

$$p(\lambda) = \lambda^k + p_1 \lambda^{k-1} + \cdots + p_k. \tag{3.2}$$

V této sekci uvedeme *Schurovu–Cohnovu kritériu*, které poskytuje nutnou a postačující podmínku pro kořeny polynomu k-tého stupně (3.2), aby ležely uvnitř jednotkového kruhu. Vzhledem k větě (2.4.2) získáme odpovídající podmínky pro asymptotickou stabilitu rovnice (3.1). Před samotnou formulací kritéria je však dobré si nadefinovat některé pojmy, které budeme dále užívat.

Definice 3.1.1. Vnitřkem matice budeme chápat matici, kterou z původní matice $B = (b_{ij})$ vytvoříme tak, že postupně vynecháme první a poslední řádek a první a poslední sloupec. Pro lepší ilustraci uvedeme několik ukázek:

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & \boxed{b_{22}} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} \\ b_{31} & b_{32} & \boxed{b_{33}} & b_{34} & b_{35} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} & b_{45} \\ b_{51} & b_{52} & b_{53} & b_{54} & b_{55} \end{pmatrix}.$$

Definice 3.1.2. Matici $B = (b_{ij})$ nazveme vnitřně pozitivní, jsou-li determinanty všech jejich vnitřků kladné.

Věta 3.1.1 (Schurovo–Cohnovo kritérium). Kořeny charakteristického polynomu (3.2) leží uvnitř jednotkové kružnice právě tehdy, když platí následující:

(I). $p(1) > 0$,

(II). $(-1)^k p(-1) > 0$,

(III). matice typu $(k-1)\times(k-1)$

$$B_{k-1}^{\pm}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ p_1 & 1 & \cdots & & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ p_{k-3} & & & & \\ p_{k-3} & p_{k-2} & \cdots & p_1 & 1 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & p_k \\ 0 & 0 & \cdots & p_k & p_{k-1} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & p_k & & & p_3 \\ p_k & p_{k-1} & \cdots & p_3 & p_2 \end{pmatrix}$$

jsou vnitřně pozitivní [4, Theorem 5.1].

Nyní budeme ilustrovat použití tohoto kritéria na diferenční rovnice 2. a 3. řádu na nichž si ukážeme praktický postup.

Příklad 3.1. Pro rovnici druhého řádu (tedy $k=2$)

$$x(n+2)+p_1x(n+1)+p_2x(n)=0 \tag{3.3}$$

dostaneme charakteristický polynom tvaru

$$p(\lambda)=\lambda^2+p_1\lambda+p_2=0. \tag{3.4}$$

Nyní je třeba ověřit podmínky (I), (II) a (III) kritéria, jestli se charakteristické kořeny nachází v jednotkové kružnici.

$$p(1)=1+p_1+p_2>0 \tag{3.5}$$
$$(-1)^2p(-1)=(1)(1-p_1+p_2)>0 \tag{3.6}$$
$$B_1^{\pm}=1\pm p_2>0. \tag{3.7}$$

Lze vidět, že z podmínek (3.5) a (3.6) dostaneme $1+p_2>|p_1|$ a $1+p_2>0$. Třetí podmínka (3.7) udává, že $p_2<1$. Tudíž charakteristické kořeny pro (3.3) jsou asymptoticky stabilní právě tehdy, když

$$|p_1|<1+p_2<2. \tag{3.8}$$

Příklad 3.2. Pro rovnici třetího řadu (tedy $k=3$)

$$x(n+3)+p_1x(n+2)+p_2x(n+1)+p_3x(n)=0. \tag{3.9}$$

Opět dostáváme charakteristický polynom, tentokrát je ve tvaru

$$p(\lambda)=\lambda^3+p_1\lambda^2+p_2\lambda+p_3=0. \tag{3.10}$$

Ověřením podmínek (I), (II), (III) obdržíme

$$p(1)=1+p_1+p_2+p_3>0, \tag{3.11}$$
$$(-1)^3p(-1)=(-1)(-1+p_1-p_2+p_3)=1-p_1+p_2-p_3>0. \tag{3.12}$$

Pro jednotlivé determinanty vnitřků

$$|B_2^-|=\left|\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p_1 & 1 \end{pmatrix}\right|-\left|\begin{pmatrix} 0 & p_3 \\ p_3 & p_2 \end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix} 1 & -p_3 \\ p_1-p_3 & 1-p_2 \end{pmatrix}\right|>0.$$

Z čehož dostáváme

$$1 - p_2 + p_1 p_3 - p_3^2 > 0. \tag{3.13}$$

Stejným způsobem dostaneme druhou část (III.) podmínky kritéria

$$\left|B_2^+\right| = \left|\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p_1 & 1 \end{pmatrix}\right| + \left|\begin{pmatrix} 0 & p_3 \\ p_3 & p_2 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 1 & p_3 \\ p_1 + p_3 & 1 + p_2 \end{pmatrix}\right| > 0.$$

Determinant má tedy tvar

$$1 + p_2 - p_1 p_3 p_3^2 > 0. \tag{3.14}$$

Ze vztahů (3.11) - (3.14) lze odvodit, že nutná a postačující podmínka asymptotické stability pro charakteristické kořeny je

$$|p_1 + p_3| < 1 + p_2, \quad |p_2 - p_1 p_3| < 1 - p_3^2.$$

Na implementaci tohoto kritéria v programu Maple lze nahlédnout v souboru *Schur-Cohn criterion.mw.*

3.2. Diskrétní verze Routhova–Schurova kritéria

Obdobně jako u předešlého kritéria Schurova–Cohnova se i zde využívá charakteristického polynomu (3.2). Kritérium je zjednodušeně řečeno algoritmus postupné redukce stupně charakteristického polynomu, až zůstane pouze jediný koeficient. První podmínkou stability je, že všechny kořeny tohoto polynomu ležely uvnitř jednotkové kružnice, musí tedy platit $|\lambda_k| < 1$. Na znaménka koeficientů se u diskrétní verze kritéria žádné omezení neklade (u spojité verze musí být všechna znaménka kladná), pouze se požaduje, aby absolutní člen byl menší než jedna $|p_0| < 1$. Samotný algoritmus se skládá z následujících kroků:

- z koeficientů vytvoříme schéma

$$\begin{array}{cccccc|l}
p_k & p_{k-1} & \cdots & p_2 & p_1 & p_0 & \\
p_0 & p_1 & \cdots & p_{k-2} & p_{k-1} & p_k & w = -\frac{p_0}{p_k} \\
wp_0 & wp_1 & \cdots & wp_{k-2} & wp_{k-1} & wp_k = -p_0 & \\
\hline
p_k + wp_0 & p_{k-1} + wp_1 & \cdots & p_2 + wp_{k-2} & p_1 + wp_{k-1} & 0 &
\end{array}$$

- čtvrtý řádek je součtem řádku prvního a třetího. Třetí řádek pak dostaneme vynásobením druhého koeficientem
$$w = -\frac{p_0}{p_k},$$
čímž dostáváme polynom o jeden stupeň nižší.

- Takto budeme pokračovat, dokud nezbude jediný koeficient, nebo nedostaneme záporný koeficient w. O stabilitě dané rovnice pak rozhodneme podle následující věty (viz [5, str. 98]).

Věta 3.2.1. Rovnice je asymptoticky stabilní právě tehdy, platí-li, že při každém zredukování jejího charakteristického polynomu koeficientem w, až do posledního koeficientu, je $|w| < 1$. V opačném případě je rovnice nestabilní.

Příklad 3.1. Použitím algoritmu pro diskrétní Routhovo–Schurovo kritérium rozhodněte o stabilitě diferenční rovnice

$$x(n+4) - 1,755x(n+3) + 1,012x(n+2) - 0,323x(n+1) + 0,057x(n).$$

Prvním krokem je určení charakteristického polynomu. Ten je ve tvaru

$$\lambda^4 - 1,755\lambda^3 + 1,012\lambda^2 - 0,323\lambda + 0,057.$$

Vytvoření schématu:

$$\begin{array}{cccccc}
1 & -1,755 & 1,012 & -0,323 & 0,057 & \\
0,057 & -0,323 & 1,012 & -1,755 & 1 & \big| w = -\frac{0,057}{1} \\
-0,003 & 0,018 & -0,058 & 0.100 & -0,057 & \\
\hline
0,997 & -1,737 & 0,954 & -0,223 & 0 & \\
-0,223 & 0,954 & -1,737 & 0,997 & & \big| w = 0,224 \\
-0,050 & 0,231 & -0,388 & 0,223 & & \\
\hline
0,947 & -1,523 & 0,566 & 0 & & \\
0,566 & -1,523 & 0,947 & & & \big| w = -0,598 \\
-0,338 & 0,910 & -0,566 & & & \\
\hline
0,609 & -0,613 & 0 & & & \\
-0,613 & 0,609 & & & & \big| w = 1,007
\end{array}$$

Při čtvrtém vytvoření koeficientu již došlo k porušení podmínky $|w| < 1$ a tedy podle věty 3.2.1 lze prohlásit, že se jedná o asymptoticky nestabilní rovnici.

Na implementaci tohoto kritéria v programu Maple lze nahlédnout v souboru *Routh-Schur criterion.mw*.

3.3. Metoda lokalizace hranice oblasti stability

V této sekci se budeme zabývat alternativním přístupem analýzy asymptotické stability lineární diferenční rovnice s konstantními koeficienty. Jedná se o metodu, jejímž výsledkem je stanovení hranice takové oblasti v prostoru parametrů rovnice, že pro všechny body uvnitř této oblasti je odpovídající asymptoticky stabilní. Tato analýza je hojně využívána v numerické analýze a my ji z tohoto důvodu budeme rovněž formulovat v rámci numerického schématu pro řešení počátečního problému pro ODR 1.řádu.

Definice 3.3.1. Počátečním problémem pro ODR1 rozumíme určení funkce $y(t)$, která vyhovuje diferenciální rovnici

$$y'(t) = f(t, y(t)) \tag{3.15}$$

a splňuje počáteční podmínku

$$y(a) = y_a. \tag{3.16}$$

Definice 3.3.2. Řekneme, že počáteční problém (3.15), (3.16) je stabilní vzhledem k počáteční podmínce, jestliže malá změna počáteční hodnoty y_a vyvolá malou změnu řešení. Elementárním příkladem počátečního problému je *testovací úloha*

$$y' = qy, \quad y(0) = 1,$$

kde $q = \alpha + i\beta$ je komplexní číslo se zápornou reálnou složkou, tj. $Re(q) = \alpha < 0$.

Definice 3.3.3. Pod pojmem *lineární vícekroková metoda* rozumíme předpis

$$y_n = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i y_{n-i} + h \sum_{i=0}^{k} \beta_i f(x_{n-i}, y_{n-i}),$$

který slouží pro aproximaci y_n. Pro přehlednost rozepíšeme do tvaru

$$\begin{aligned} y_n &= \alpha_1 y_{n-1} + \alpha_2 y_{n-2} + \cdots + \alpha_k y_{n-k} \\ &\quad + h\Big(\beta_0 f(x_n, y_n) + \beta_1 f(x_{n-1}, y_{n-1}) + \beta_2 f(x_{n-2}, y_{n-2}) + \cdots + \beta_k f(x_{n-k}, y_{n-k})\Big), \end{aligned}$$

kde h značí velikost kroku.

Jedná se o numerickou metodu, která slouží ke stanovení řešení pro nějaký počáteční problém pro ODR1 pomocí postupného výpočtu aproximací $y_1, y_2, y_3, \cdots, y_q$, kde $y_0 = y_a$ z počáteční podmínky. Je zvykem, že se tato metoda charakterizuje polynomy, jejichž koeficienty jsou $\alpha_{1\ldots k}, \beta_{1\ldots k}$. Standardně se tyto polynomy definují jako

$$\begin{aligned} \rho(z) &= z^k - \alpha_1 z^{k-1} - \alpha_2 z^{k-2} - \cdots - \alpha_k, \\ \sigma(z) &= \beta_0 z^k + \beta_1 z^{k-1} + \beta_2 z^{k-2} + \cdots + \beta_k. \end{aligned}$$

My však budeme používat dvojici lehce odlišných polynomů, zkráceně zapsaných $[\alpha, \beta]$

$$\begin{aligned} \alpha(z) &= 1 - \alpha_1 z - \alpha_2 z^2 - \cdots - \alpha_k z^k, \\ \beta(z) &= \beta_0 + \beta_1 z + \beta_2 z^2 + \cdots + \beta_k z^k. \end{aligned}$$

Pro $\beta_0 \neq 0$ dostaneme *implicitní metodu* a pro $\beta_0 = 0$ *metodu explicitní.*
Mezi nejznámější metody tohoto typu patří *Adamsovy metody* (viz [1]).

Definice 3.3.4. Nakonec je třeba ještě definovat *power shift* a *shift operátor*. Oba pojmy jsou z *diferenčního kalkulu*, který je analogický s kalkulem diferenciálním a integrálním. Shift operátor je tvaru

$$Ex^k(n) = x(n+k).$$

Operátor je lineární, což znamená, že platí

$$E[ax(n) + by(n)] = aEx(n) + bEy(n),$$

pro všechna $a, b \in \mathbb{R}$.

Podíváme-li se na chování polynomu stupně k v shift operátoru E, tak dostaneme

$$p(E) = a_0 E^k + a_1 E^{k-1} + \cdots + a_k I. \tag{3.17}$$

Přidáme-li k tomuto navíc podmínku b^n, pro libovolnou konstantu b, pak

$$\begin{aligned} p(E)b^n &= a_0 b^{n+k} + a_1 b^{n+k-1} + \cdots + a_k b^n \\ &= b^n(a_0 b^k + a_1 b^{k-1} + \cdots + a_k) \\ &= p(b)b^n. \end{aligned}$$

Toto zjištění lze zobecnit do následujícího Lemmatu.

Lemma 3.3.1. Nechť je $p(E)$ polynom (3.17) a nechť $g(n)$ je libovolná diskrétní funkce. Potom

$$p(E)(b^n g(n)) = b^n p(bE) g(n).$$

Metoda samotná pak slouží pro vymezení oblasti stability lineární vícekrokové metody $[\alpha, \beta]$. Diferenční rovnice pro lineární vícekrokovou metodu s testovacím problémem $y' = qy$ je

$$(1 - z\beta_0)y_n - (\alpha_1 + z\beta_1)y_{n-1} - (\alpha_2 + z\beta_2)y_{n-2} - \cdots - (\alpha_k + z\beta_k)y_{n-k} = 0 \tag{3.18}$$

a oblast stability je množinou bodů hq v komplexní rovině, pro kterou rovnice (3.18) má pouze ohraničené řešení, když $n \to \infty$. Pro zjednodušení budeme uvažovat vnitřek oblasti stability tak, že pro všechny z z množiny řešení konvergují k nule, když platí, že $n \to \infty$. Tuto oblast budeme označovat jako *otevřená oblast stability*. Napíšeme-li si diferenční rovnici ve tvaru

$$\alpha(E^{-1}) - z\beta(E^{-1}) = 0,$$

lze pozorovat, že otevřená oblast stability může být definována vztahem

$$\alpha(\lambda^{-1}) - z\beta(\lambda^{-1}) = 0. \tag{3.19}$$

Tedy z je v otevřené oblasti stability, pokud neexistuje λ mimo otevřený jednotkový kruh takové, že dvojice (z, λ) řeší (3.19). Jinak řečeno z tvrzení, že λ je mimo otevřený jednotkový kruh plyne, že z řešící (3.19) není v otevřené oblasti stability. Jako první krok v určení oblasti stability je výhodné vyhodnotit body na hranici jednotkového kruhu a uvědomit si, že zobrazení

$$\lambda \to \frac{\alpha(\lambda^{-1})}{\beta(\lambda^{-1})} \tag{3.20}$$

udává množinu bodů, které obsahují hranici oblasti stability. Jelikož zobrazení $\lambda \to \lambda^{-1}$ udává samotný jednotkový kruh za pouhé změny smyslu rotace, je vhodné (3.20) přepsat na

$$\lambda \to \frac{\alpha(\lambda)}{\beta(\lambda)}.$$

Tento proces se pak nazývá metoda lokalizace hranice oblasti stability, v literatuře známý pod názvem *boundary locus method*.

4. Aplikace

Numerické řešení diferenciálních rovnic

V předešlých kapitolách jsme si ukázali dvě kritéria stability diferenčních rovnic. Nyní si uvedeme několik praktických využití na základě již zjištěných skutečností. Budeme-li uvažovat *Adamsovu–Bashforthovu* metodu druhého řádu [1]

$$y_n = y_{n-1} + \frac{3}{2}hf(x_{n-1}, y_{n-1}) - \frac{1}{2}hf(x_{n-2}, y_{n-2}), \tag{4.1}$$

kde h značí velikost kroku. Pro testovací úlohu $y' = qy$, kde q je reálný parametr, se rovnice (4.1) přepíše na rovnici

$$y_n = y_{n-1} + \left(\frac{3}{2}\right) hqy_{n-1} - \frac{1}{2}hqy_{n-2},$$

která bude stabilní pokud $hq = z$, kde z je takové, že rovnice

$$y_n = \left(1 + \frac{3}{2}z\right) y_{n-1} - \frac{1}{2}zy_{n-2}$$

má pouze ohraničené řešení, což nastává, když kořeny polynomu

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \left(1 + \frac{3}{2}z\right) \lambda + \frac{1}{2}z$$

leží v ohraničeném jednotkovém kruhu a v kruhu bez hranic, pokud nastane jejich rovnost. Podíváme-li se nyní na kritérium Schurovo–Cohnovo pro druhý řád, tak dostaneme čtyři nerovnice, které vymezují podmínky, kde je rovnice (4.1) asymptoticky stabilní:

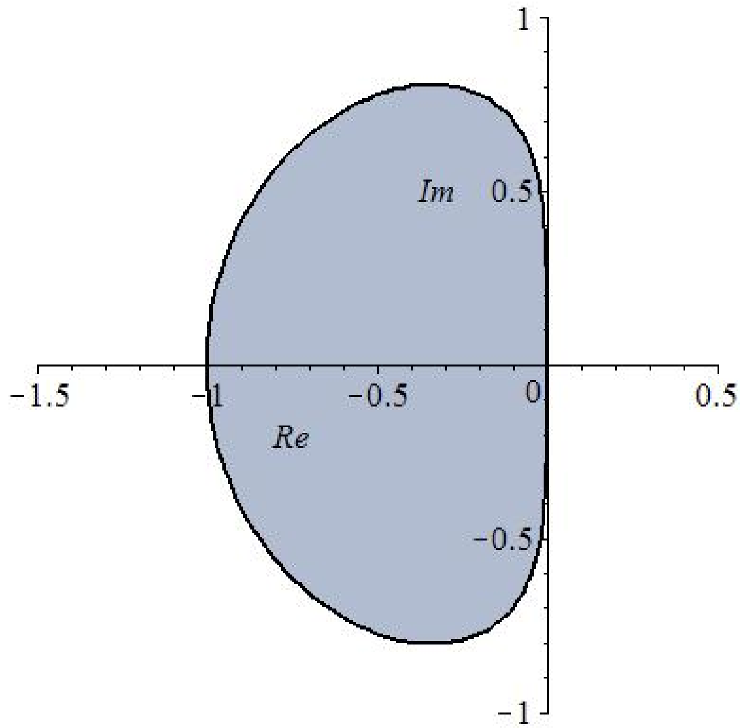
$$\begin{aligned} p(1) &= -z > 0, \\ (-1)^2 p(-1) &= 2 + 2z > 0, \\ B_1^+ &= 1 + \frac{1}{2}z > 0, \\ B_1^- &= 1 - \frac{1}{2}z > 0. \end{aligned}$$

Z nich dostaneme interval $z \in (-2, 2)$ pro asymptotickou stabilitu. Vykreslením v rovině parametrů (h, q) obdržíme oblast asymptotické stability rovnice (4.1), která udává dvojice parametrů h, q, pro něž je (4.1) asymptoticky stabilní (viz obrázek 2).

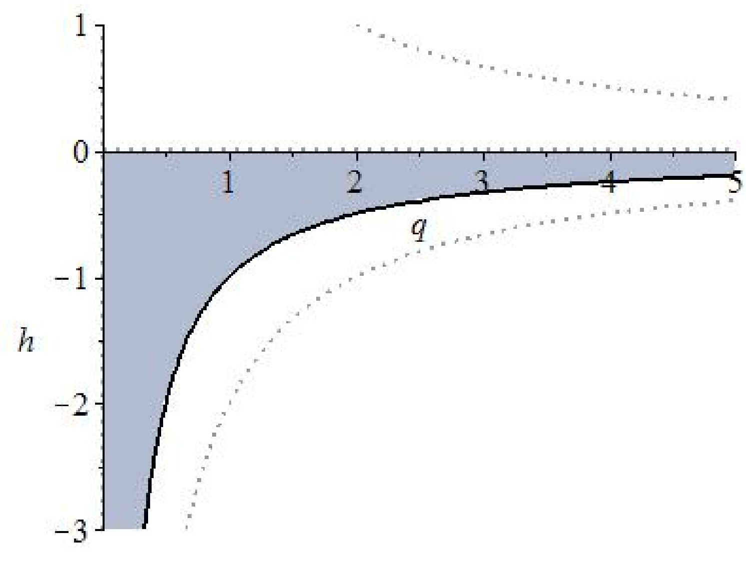
Pro další praktickou ukázku zůstaneme u Adamsovy–Bashforthovy metody druhého řádu, ale nyní budeme hledat hranici oblasti její stability. Kombinací vztahů (3.20) a (4.1) dostaneme

$$\lambda \to \frac{1 - \lambda^{-1}}{\frac{3}{2}\lambda^{-1} - \frac{1}{2}\lambda^{-2}}.$$

Pro $\lambda = \exp(i\phi)$, kde $\phi \in [0, 2\pi]$, obdržíme křivku v komplexní rovině, která vymezuje oblast asymptotické stability rovnice (4.1) (viz obrázek 1).



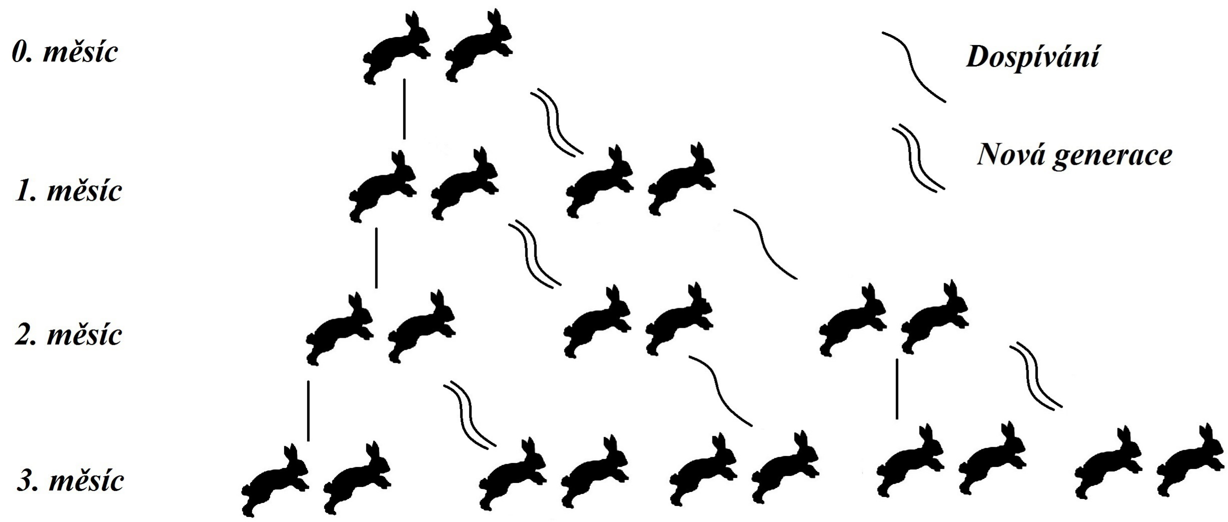
Obrázek 1: Hranice stability pro Adamsovu–Bashfordovu metodu 2. řádu



Obrázek 2: Oblast asymptotické stability v rovině (h, q) pro Adamsovu–Bashfordovu metodu 2. řádu

Populační model

V tomto příkladu se odkážeme na uvedený problém v úvodu této práce. Konkrétně na rovnici (1.1) a ukážeme si, jak by se tato úloha prakticky řešila. Naším úkolem bude zjistit, kolik párů králíků budeme mít po uplynutí ročního intervalu, začínáme-li s jedním párem, když každý pár porodí nový pár každý měsíc. Budeme dále uvažovat, že nový pár je schopen reprodukce ve věku dvou měsíců (na obrázku 3 lze vidět názornou ukázku).



Obrázek 3: Králičí problém

První pár má potomky na konci prvního měsíce, tudíž máme dva páry. Na konci druhého měsíce má potomky opět pouze původní pár, protože jejich potomci dosud nedosáhli pohlavní dospělosti. V třetím měsíci již mají potomky oba páry, máme tedy pět párů. Budeme-li takto pokračovat dále obdržíme pro roční interval tabulku 1.

Tabulka 1: Velikost králičí populace

Měsíc	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Počet párů	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377

Pokud bude číslo $F(n)$ počet párů na konci n-tého měsíce, tak rekurzivní rovnice, která reprezentuje tento model je lineární diferenční rovnicí druhého řádu

$$F(n+2) = F(n+1) + F(n), \quad F(0) = 1, \quad F(1) = 2, \quad n = 1, 2, 3, \cdots . \tag{4.2}$$

Charakteristická rovnice pro (4.2) je

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0.$$

Tato rovnice má charakteristické kořeny $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ a $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Tudíž obecné řešení je tvaru

$$F(n) = a_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + a_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n, \quad n = 1, 2, 3, \cdots .$$

S pomocí počátečních podmínek obdržíme

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad a_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Zpětným dosazením pak dostaneme rovnici pro $F(n)$

$$F(n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n).$$

Podíváme-li se na podíl $\frac{F(n+1)}{F(n)}$ z limitního hlediska, získáme $\lim_{n\to\infty}\frac{F(n+1)}{F(n)} = \alpha \approx 1.618$. Toto číslo se nazývá *zlatý řez*. Již nejméně od renesance využívají zlatý řez umělci ve svých dílech, zejména ve formě tzv. *zlatého obdélníku*, ve kterém se zlatý řez vyskytuje jako poměr stran. Zlatý řez prý totiž působí esteticky příznivým dojmem. Poměr zlatého řezu lze také pozorovat v přírodě, jeho projevem je například uspořádání semen slunečnice nebo smrkové šišky, ve kterých jsou šupiny rozmístěny jako spirála.

Rozpad radioaktivního prvku

Radium je radioaktivní prvek, který se rozpadá rychlostí 1% z původního množství každých 25 let. To znamená, že množství na začátku každého 25-ti letého období je rovno množství na počátku minulého období mínus 1% tohoto množství. Vezmeme-li $x(0)$ jako výchozí množství radia a $x(n)$ jako zbývající množství po uplynutí n 25-ti letých cyklů dostaneme diferenční rovnici

$$x(n) = x(n-1) - 0.01x(n-1) = 0.99x(n) \quad , n = 0, 1, 2 \cdots . \tag{4.3}$$

Avšak lze vidět, že

$$x(n-1) = x(n-2) - 0.01x(n-2) = 0.99x(n-2) = (0.99)^2x(n-2) = \cdots = (0.99)^n x(0)$$

a tedy s ohledem na výše uvedenou úpravu dostaneme (4.3) ve tvaru

$$x(n) = (0.99)^n x(0) \quad , n = 0, 1, 2 \cdots . \tag{4.4}$$

Předpokládejme poločas rozpadu radioaktivního prvku, jako počet let, kterých je potřeba pro rozpad poloviny původního množství. Dále předpokládejme, že T je nejmenší přirozené číslo, pro které je $x(T)$ méně než polovina původního množství radia. Tedy

$$\frac{1}{2}x(0) \geq (0.99)^T x(0),$$

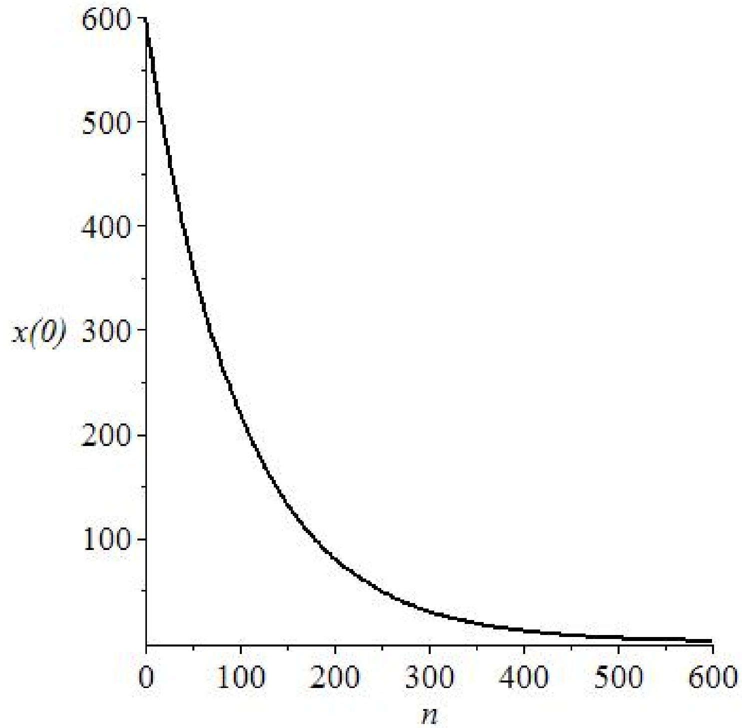
což odpovídá vztahu

$$\frac{1}{2} \geq (0.99)^T.$$

Zlogaritmováním rovnice a následnými úpravami, kde $\log(0.99) \leq 0$, dostaneme pro T vztah

$$T \geq \frac{\log(\frac{1}{2})}{\log(0.99)} = 68.98,$$

což při zohlednění předpokladu, že T je číslo přirozené dává $T = 69$. Vezmeme-li v potaz, že pracujeme s 25-ti letými časovými intervaly, dostaneme hodnotu pro poločas rozpadu pro radium, která je přibližně $25 \cdot 69 = 1725$ let. Budeme-li tedy začínat například s množstvím 600 gramů radia, tak se toto množství po 1725 letech zredukuje na 300 gramů a za dalších 1725 let na 150 gramů atd.. Tato závislost je graficky znázorněna v grafu 4.



Obrázek 4: Závislost výchozího množství $x(0)$ na uplynuté době n

Rozmnožování jednoletých rostlin

Materiál pro tento příklad pochází z [3]. Naším úkolem je navrhnout matematický model, který udává počet rostlin v požadované generaci. Víme, že rostliny produkují semena na konci jejich růstového období (v našem případě budeme uvažovat srpen), po kterém zahynou. Avšak pouze zlomek těchto semen přežije zimu a ta která přežila, začnou klíčit na začátku jara (v našem případě budeme uvažovat květen) a dají základ nové generaci. Označme

$$\begin{aligned}
\gamma &= \text{počet semen vyprudukovaných jednou rostlinou v srpnu},\\
\alpha &= \text{podíl jeden rok starých semen, která vyklíčila v květnu},\\
\beta &= \text{podíl dva roky starých semen, která vyklíčila v květnu},\\
\sigma &= \text{podíl semen, která přežila danou zimu.}
\end{aligned}$$

Bude-li $p(n)$ udávat počet rostlin n-té generace, pak

$$p(n) = (\text{rostliny z rok starých semen}) + (\text{rostliny z dva roky starých semen})\,,$$

$$p(n) = \alpha s_1(n) + \beta s_2(n), \tag{4.5}$$

kde $s_1(n)/s_2(n)$ je počet jednoletých semen/dvouletých semen v dubnu (před vyklíčením). Počet semen která zůstanou po vyklíčení, lze napsat jako

$$\text{zbylá semena} = (\text{nevyklíčená}) \times (\text{počáteční stav v dubnu}) = \tilde{s}.$$

Dostaneme tedy dvě rovnice

$$\tilde{s}_1(n) = (1-\alpha)s_1(n), \tag{4.6}$$
$$\tilde{s}_2(n) = (1-\beta)s_2(n), \tag{4.7}$$

kde $\tilde{s}_1/\tilde{s}_2$ je počet jednoletých/dvouletých semen, která zbyla poté, co některá vyklíčila. Nová semena $s_0(n)$ jsou vyprodukována v srpnu s poměrem γ na rostlinu,

$$s_0(n) = \gamma p(n). \tag{4.8}$$

Po skončení zimy semena $s_0(n)$, která byla nová v generaci n budou jeden rok stará v generaci $n+1$ a část $\sigma s_0(n)$ jich přežije. Tedy

$$s_1(n+1) = \sigma s_0(n),$$

a s použitím vztahu (4.8)

$$s_1(n+1) = \sigma\gamma p(n). \tag{4.9}$$

Obdobně

$$s_2(n+1) = \sigma\tilde{s}_1(n),$$

kde pro $\tilde{s}_1$ platí vztah (4.6) a tedy

$$\begin{aligned} s_2(n+1) &= \sigma(1-\alpha)s_1(n), \\ s_2(n+1) &= \sigma^2\gamma(1-\alpha)p(n-1). \end{aligned} \tag{4.10}$$

Dosazením vztahů (4.9) a (4.10) do rovnice (4.5) obdržíme upravený vztah

$$p(n+1) = \alpha\gamma\sigma p(n) + \beta\gamma\sigma^2(1-\alpha)p(n-1).$$

Což pro $n+2$ dává

$$p(n+2) = \alpha\gamma\sigma p(n+1) + \beta\gamma\sigma^2(1-\alpha)p(n).$$

Charakteristická rovnice této diferenční rovnice druhého řádu je

$$\lambda^2 - \alpha\gamma\sigma\alpha - \beta\gamma\sigma^2(1-\alpha) = 0,$$

jejíž charakteristické kořeny jsou

$$\lambda_1 = \frac{\alpha\gamma\sigma}{2}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{4\beta}{\gamma\alpha^2}(1-\alpha)}\ \right],$$
$$\lambda_2 = \frac{\alpha\gamma\sigma}{2}\left[1 - \sqrt{1 + \frac{4\beta}{\gamma\alpha^2}(1-\alpha)}\ \right].$$

Vidíme, že λ_1, λ_2 jsou reálné kořeny, jelikož $1-\alpha > 0$. Dále $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$. Abychom zajistili neomezený růst populace rostlin ($p(n) \to \infty$ při $n \to \infty$) je třeba aby $\lambda_1 > 1$. U λ_2 tento požadavek neklademe, jelikož je $\lambda_2 < 0$ a způsobuje nežádanou fluktuaci (oscilaci) velikosti populace rostliny. Tedy

$$\frac{\alpha\gamma\sigma}{2}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{4\beta}{\gamma\alpha^2}(1-\alpha)}\ \right] > 1 \Rightarrow \frac{\alpha\gamma\sigma}{2}\sqrt{1 + \frac{4\beta}{\gamma\alpha^2}(1-\alpha)} > 1 - \frac{\alpha\gamma\sigma}{2}.$$

Umocněním obou stran rovnice a zjednodušením dostaneme, že

$$\gamma > \frac{1}{\alpha\sigma + \beta\sigma^2(1-\alpha)}. \tag{4.11}$$

Budeme-li uvažovat $\beta = 0$, tedy žádná dva roky stará semena nevyklíčí v květnu. Podmínku (4.11) upravíme na

$$\gamma > \frac{1}{\alpha\sigma} \Rightarrow \gamma\alpha\sigma > 1. \tag{4.12}$$

Podmínka (4.12) říká, že k rozmnožení populace rostlin dojde, pokud součin vyklíčených semen rostlinou vyprodukovaných, zlomek jeden rok starých a zlomek semen, která přežila zimu, bude větší než jedna.

5. Závěr

V této práci jsme uvedli dvě početní kritéria pro analýzu asymptotické stability lineárních diferenčních rovnic s konstantními koeficienty, a sice Schurovo–Cohnovo kritérium a Routhovo–Schurovo kritérium. Tato kritéria jsou postavena na analýze dislokace kořenů charakteristického polynomu rovnice vůči jednotkovému kruhu v komplexní rovině. První kritérium je založeno na ověření tří podmínek, z nichž dvě jsou triviální a třetí vyžaduje vyčíslení a posouzení pozitivnosti posloupnosti determinantů matic, které jsou generovány z koeficientů analyzované diferenční rovnice (charakteristického polynomu). Druhé kritérium spočívá v postupné redukci charakteristického polynomu, kde je sledována velikost jistého parametru. Objem výpočtů u obou uvedených kritérií přímo závisí na řádu diferenční rovnice, tj. na stupni charakteristického polynomu. Obě kritéria jsou implementována do prostředí Maple - viz Apendix. Při realizaci algoritmů je průběžně sledováno splnění podmínek: jakmile není některá z podmínek splněna, je ověřování ukončeno se závěrem, že analyzovaná diferenční rovnice není asymptoticky stabilní. V rámci práce je uvedena i metoda lokalizace hranice oblasti asymptotické stability diferenční rovnice, jejíž použití je ilustrováno na vybrané numerické metodě řešení diferenciálních rovnic. Ve speciálních případech lineárních diferenčních rovnic (zejména rovnic s několika málo nenulovými koeficienty) lze získat efektivní sadu nutných a postačujících podmínek pro asymptotickou stabilitu (počet podmínek nezávisí na řádu diferenční rovnice). Avšak v obecném případě je použití početních kritérií dosud nezastupitelné. Řešení a analýza stability je demonstrována na vybraných aplikacích z populační dynamiky. Studovaná problematika má široké využití i v mnoha jiných oblastech. Z technického hlediska lze zmínit zejména automatizaci, diskrétní řízení a analýzu stability numerických metod.

Problematika diferenčních rovnic by se dala dále rozšířit na soustavy rovnic pomoci znalosti, že každá rovnice vyššího řádu (jde o řád dva a více) se dá převést na systém rovnic prvního řádu. Toto je velmi důležitá vlastnost diferenčních rovnic, s jejíž pomocí lze kteroukoliv diferenční rovnici druhého a vyššího řádu řešit pomocí algoritmu pro řešení soustavy diferenčních rovnic. Rovnice s jednou neznámou a jednou proměnnou jsou nevhodné k popisu složitějších problémů a je tedy třeba uvažovat rovnice se dvěma nebo více proměnnými. Tyto rovnice mají široké využití v různých vědeckých oborech, jako je například biologie (studie konkurenčních druhů v populační dynamice), fyzika (studie pohybů dvou na sebe navzájem působících těles) a v mnoha jiných oblastech.

Literatura

[1] BUTCHER, J.C.: *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations*. The University of Auckland, New Zealand: Wiley. ISBN 0-471-96758-0.

[2] ČERMÁK, L.: *Numerické metody pro řešení diferenciálních rovnic*. Brno: CERM s.r.o, 2003. ISBN 978-80-2142-087-8.

[3] EDELSTEIN - KESHET, L.: *Mathematical Models in Biology* New York: Random House, 1988.

[4] ELAYDI, S.: *An Introduction to Difference Equations*, Third Edition. New York: Springer, 2004. ISBN 0-387-23059-9.

[5] ŠVARC, I.: *Automatizace. Automatické řízení*. Brno: CERM s.r.o, 2003. ISBN 978-80-2142-087-8.

6. Seznam použitých zkratek a symbolů

D	definiční obor
W(n)	Casoratián
$\mathbb{R}$	množina reálných čísel
$\mathbb{Z}^+$	množina kladných celých čísel
w	koeficient Routhova–Schurova kritéria
ODR1	obyčejné diferenciální rovnice 1. řádu
E	shift operátor

A. Ukázky zdrojových kódů

A.1. Schur–Cohn criterion.mw

Input

restart;
Investigated polynomial

$$P := \lambda \to \lambda^6 + 0.1 \cdot \lambda^5 + 0.3 \cdot \lambda^4 + 0.05 \cdot \lambda^3 + 0.5 \cdot \lambda^2 + 0.1 \cdot \lambda^1 + 3$$

Criterion

with(LinearAlgebra):;with(PolynomialTools):;with(ArrayTools):;with(ListTools):

cl:=Reverse(CoefficientList(P(λ),λ))

$$[1, 0.10.3, 0.0.5, 0.5, 0.1, 3]$$

k := Size(cl, 2)-1

$$6$$

CondI := evalb(P(1)>0);

$$\textit{true}$$

CondII := evalb($(-1)^k$*·P(-1) > 0);*

$$\textit{true}$$

A1:=IdentityMatrix(k-1,k-1,compact=false,readonly=false)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

for s **from** 1 **to** k-2 **do**
for i **from** s+1 **to** k-1 **do**
A1(i,i-s):=cl[s+1]:
end do:
end do:
evalm(A1);

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.10 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.30 & 0.10 & 1 & 0 & 0 \\ 0.05 & 0.30 & 0.10 & 1 & 0 \\ 0.50 & 0.05 & 0.30 & 0.10 & 1 \end{bmatrix}$$

A2:=ZeroMatrix(k-1,k-1,compact=false, readonly=false)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

for *s* **from** k **by** -1 **to** 2 **do**
for *i* **from** *k*+1-*s* **to** *k*-1 **do**
A2(2·k-s-i,i):=cl[s+1]:
end do:
end do:
evalm(A2);

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0.10 \\ 0 & 0 & 3 & 0.10 & 0.50 \\ 0 & 3 & 0.10 & 0.50 & 0.05 \\ 3 & 0.10 & 0.50 & 0.05 & 0.30 \end{bmatrix}$$

B$^+$:=*A1+A2*:
evalm(B$^+$*)*;

$$\begin{bmatrix} 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 3.00 \\ 0.10 & 1.00 & 0.00 & 3.00 & 0.10 \\ 0.30 & 0.10 & 4.00 & 0.10 & 0.50 \\ 0.05 & 3.30 & 0.20 & 1.50 & 0.05 \\ 3.50 & 0.15 & 0.80 & 0.15 & 1.30 \end{bmatrix}$$

B$^-$:=*A1-A2*:
evalm(B$^-$*)*;

$$\begin{bmatrix} 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -3.00 \\ 0.10 & 1.00 & 0.00 & -3.00 & -0.10 \\ 0.30 & 0.10 & -2.00 & -0.10 & -0.50 \\ 0.05 & -2.70 & 0.00 & 0.50 & -0.05 \\ -2.50 & -0.05 & -0.20 & 0.05 & 0.70 \end{bmatrix}$$

CondIII:=*true*:
for *s* **from** 1 **to** *iquo((k),2)* ***do***
SB$^+$:=*SubMatrix*(*B*$^+$,[*iquo((k),2)-s*+1..*iquo((k),2)-s-1*],[*iquo((k),2)-s*+1..*iquo((k),2)-s-1*]);
dSBplus[*s*]:=*Determinant(SB*$^+$*)*;
SB$^-$:=*SubMatrix*(*B*$^-$,[*iquo((k),2)-s*+1..*iquo((k),2)-s-1*],[*iquo((k),2)-s*+1..*iquo((k),2)-s-1*]);
dSBminus[*s*]:=*Determinant(SB*$^-$*)*;
if(*dSBplus*[s]≤0)**or** (*dSBminus*[s]≤0) **then** *CondIII=false*;
print(dsBplus)[s],*dSBminus*[s]);
end if
end do;
evalb(CondI **and** *CondII* **and** *CondIII*;

$$[4.00]$$

$$4.00$$

$$[-2.00]$$

$$-2.00$$

$$4.00, -2.00$$

$$\begin{bmatrix} 1.00 & 0.00 & 3.00 \\ 0.10 & 4.00 & 0.10 \\ 3.30 & 0.20 & 1.50 \end{bmatrix}$$

$$-33.56$$

$$\begin{bmatrix} 1.00 & 0.00 & -3.00 \\ 0.10 & -2.00 & -0.10 \\ -2.70 & 0.0. & 0.50 \end{bmatrix}$$

$$15.20$$

$$-33.56, 15.20$$

$$\begin{bmatrix} 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 3.00 \\ 0.10 & 1.00 & 0.00 & 3.00 & 0.10 \\ 0.30 & 0.10 & 4.00 & 0.10 & 0.50 \\ 0.05 & 3.30 & 0.20 & 1.50 & 0.05 \\ 3.50 & 0.15 & 0.80 & 0.15 & 1.30 \end{bmatrix}$$

$$305.80$$

$$\begin{bmatrix} 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -3.00 \\ 0.10 & 1.00 & 0.00 & -3.00 & -0.10 \\ 0.30 & 0.10 & -2.00 & -0.10 & -0.50 \\ 0.05 & -2.70 & 0.00 & 0.50 & -0.05 \\ -2.50 & -0.05 & -0.20 & 0.05 & 0.70 \end{bmatrix}$$

$$-103.94$$

$$305.80, 103.94$$

$$\mathit{true}$$

A.2. Routh–Schur criterion.mw

Input

restart;
Investigated polynomial

$$P := \lambda \rightarrow \lambda^4 - 1.755 \cdot \lambda^3 + 1.012 \cdot \lambda^2 - 0.323 \cdot \lambda^1 + 0.0557$$

Criterion

with(LinearAlgebra):;with(PolynomialTools):;with(ArrayTools):;with(ListTools):

cl_a:=*Reverse(CoefficientList(P(λ),λ))*

$$[1, -1.755, 1.0212, -0.323, 0.057]$$

cl_b:=*(CoefficientList(P(λ),λ))*

$$[0.057, -0.323.1.0212. - 1.755.1]$$

k:=*Size*(cl_a,2)-1

$$4$$

w:=-$\frac{cl_b[1]}{cl_a[1]}$

$$-0.057$$

$cl_c := cl_b \cdot w$

$$[-0.003249, 0.018411, 0.057684, 0.100035, -0.057]$$

evalb($|w| < 1$);

$$true$$

j:=*k*
if($|w| \geq 1$ **then** *print*("Equation is not asymptotically stable");*print*("($|w| \geq 1$");
end if;

$$4$$

while($|w| < 1$) **and**($j \geq 2$) **do** cl_c:=$cl_b \cdot w$;
$cl := cl_a + cl_c$;
$cl_a := (cl_a + cl_c)[1..j]$;
cl_b :=*Reverse*(cl_a);
w:=-$\frac{cl_b[1]}{cl_a[1]}$;
if($|w| \geq 1$) **then** *print*("Equation is not asymptotically stable");*print*("($|w| \geq 1$");**break**
end if;

j:=*j*-1;
end do;

if $(|w| < 1)$ **then** *print*("Equation is asymptotically stable")
end if

$$[-0.003249, 0.018411, -0.057648, 0.100035, -0.057]$$

$$[0.996751, -1, 736589, 0.954316, -0.222965, 0]$$

$$[0.996751, -1, 736589, 0.954316, -0.222965]$$

$$[-0.222965, 0.954316, -1, 736589, 0.996751]$$

$$0.2236917746$$

$$3$$

$$[-0.04987543652, 0.2134726396, -0.3884606752, 0.2229650000S]$$

$$[0.9468755635, -1.523116360, 0.5658553248, 0]$$

$$[0.9468755635, -1.523116360, 0.5658553248]$$

$$[0.5658553248, -1.523116360, 0.9468755635]$$

$$-.05976026276$$

$$2$$

$$[-0.3381566289, 0.9102183389, -0.5658553248]$$

$$[0.6087189346, -0.6128980211, 0]$$

$$[0.6087189346, -0.6128980211]$$

$$[-0.6128980211, 0.6087189346]$$

$$1.006865380$$

'Equation is not asymptotically stable'

$$|w| \geq 1$$