OD KOMPOZITNÍCH MATERIÁLŮ KE SLABÉ KONVERGENCI

JAN FRANCŮ

ABSTRAKT. Matematické modelování kompozitních materiálů využívá tzv. homogenizaci, při které heterogenní materiál s jemnou periodickou strukturou nahradíme homogenním materiálem, který má z makroskopického hlediska stejné vlastnosti. Matematický přístup spočívá ve studiu posloupnosti řešení parciálních diferenciálních rovnic s periodickými koeficienty se zmenšující se periodou. Homogenizace umožňuje počítat makroskopické vlastnosti materiálu z vlastností jednotlivých složek a jejich geometrického uspořádání.

Koeficienty se zmenšující se periodou studované při homogenizaci nekonvergují (ani bodově ani v normě), konvergují však slabě. Článek je zaměřen na tuto slabou konvergenci a její vlastnosti. Příjemnou vlastností je kompaktnost: každá omezená posloupnost funkcí obsahuje slabě konvergentní podposloupnost. Nepříjemnou vlastností je však nemožnost přechodu k limitě způsobené ztrátou informace ve slabé limitě. Pokračování tohoto článku se bude zabývat řešením tohoto problému.

1. Úvod

Kompozitní materiály hrají velmi důležitou roli v mnoha technických oborech. Kombinace látek různých vlastností umožňuje získat nové materiály výjimečných vlastností. Například ve sklolaminátu jsou pevná křehká skleněná vlákna spojena pryskyřicí do houževnatého materiálu, podobně v železobetonu je beton vyztužen ocelovými pruty, které podstatně zvyšují pevnost betonu v tahu.

Matematické modelování, tj. výpočet chování těchto materiálů, přináší základní problém: pokud bychom vycházeli z vlastností jednotlivých složek a chtěli pro výpočet popsat jemnou strukturu materiálu – tisíce tenkých vláken – museli bychom volit ještě jemnější triangulaci výpočetní oblasti, což by vedlo na milióny rovnic pro milióny neznámých. Jiný přístup spočívá ve tvorbě speciálních modelů kompozitního materiálu s řadou dalších parametrů, které je nutno měřit.

Ukazuje se však, že stačí zkoumaný heterogenní materiál nahradit myšleným „ekvivalentním“ homogenním materiálem, který je popsán konstantními koeficienty. Vzniká přitom otázka, zda tento tzv. homogenizovaný materiál lze popsat rovnicemi stejného typu s konstantními koeficienty. Pokud ano, otázkou je, jak spočítat tyto tzv. homogenizované koeficienty, abychom nemuseli vlastnosti materiálu měřit na vzorku, který by se musel vyrobit.

2010 *MSC.* Primární 35B27.

Klíčová slova. Kompozitní materiály, homogenizace, slabá konvergence.

Práce byla podporována projektem A-Math-Net – Síť pro transfer znalostí v aplikované matematice (CZ.1.07/2.4.00/17.0100).

Matematický přístup k tomuto problému navržený Ivo Babuškou [1] spočívá v tom, že místo jednoho materiálu s periodickou strukturou uvažujeme posloupnost materiálů se zjemňující se strukturou. V matematické formulaci studujeme chování řešení posloupnosti parciálních diferenciálních rovnic s periodickými koeficienty se zmenšující se periodou. Tyto koeficienty však nekonvergují v obvyklém smyslu, ale jen tzv. slabě, viz [7].

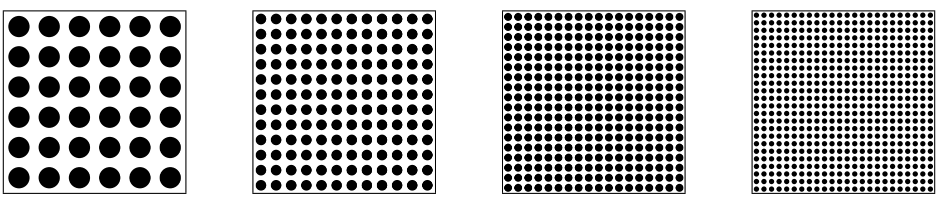
Slabá konvergence funkcí v normovaných prostorech integrovatelných funkcí má řadu vlastností, kterými se liší od obvyklé, tzv. silné konvergence. V příspěvku se budeme věnovat hlavně slabé konvergenci funkcí. Po definici slabé konvergence v normovaných prostorech si ukážeme případy slabé konvergence v konkrétních prostorech. Začneme prostory konečné dimenze, ve kterých slabá a silná konvergence splývají. V prostorech nekonečných posloupností a integrovatelných funkcí se již obě konvergence liší, což si ukážeme na příkladech.

Zatímco v prostorech konečné dimenze každá omezená uzavřená množina je kompaktní, zejména každá omezená posloupnost obsahuje konvergentní podposloupnost, v nekonečně rozměrných prostorech již toto neplatí: uvedeme příklad posloupnosti, ze které nelze vybrat konvergentní podposloupnost. V reflexivních prostorech (viz [7]) však každá omezená posloupnost obsahuje podposloupnost slabě konvergentní, což je velmi důležité v řadě aplikací. Tato „příjemná“ vlastnost slabé konvergence je „vykoupena“ problémy při limitních přechodech: například limita součinu dvou slabě konvergentních posloupností se nerovná součinu limit těchto posloupností. Řešením těchto problémů se bude zabývat pokračování tohoto článku.

Ačkoliv praktický význam mají zejména funkce na dvojrozměrné a trojrozměrné oblasti, teorie je budována pro N-rozměrný případ. My se budeme zabývat hlavně jednorozměrnými příklady, protože většina jevů se projeví již zde. Seznam literatury k tomuto tématu má tisíce položek, uvedeme proto jen několik článků v češtině a monografie [3], [2], [4], ve kterých lze najít odkazy na další literaturu.

2. Homogenizace

Homogenizací rozumíme postup, při kterém heterogenní materiál s periodickou strukturou nahradíme myšleným „ekvivalentním“ materiálem homogenním, který má na makroskopické úrovni stejné vlastnosti. V matematickém pojetí diferenciální rovnici s periodickými koeficienty nahradíme rovnicí s konstantními koeficienty dávající globálně stejné řešení.



Obr. 1. Příklad posloupnosti materiálů se zjemňující se strukturou.

Matematický přístup navržený Babuškou v roce 1973, viz [1], spočívá v tom, že místo jednoho materiálu s periodickou strukturou uvažujeme posloupnost materiálů se zjemňující se strukturou, v matematické formulaci uvažujeme posloupnost rovnic určených posloupností periodických koeficientů se zmenšující se periodou.

Než přistoupíme k formulaci problému homogenizace, zavedeme základní pojmy. Praktický význam má homogenizace rovnic na oblastech Ω v prostoru dimenze $N = 2$ a $N = 3$, teorie homogenizace však platí i pro $N > 3$. Body (prvky) prostoru $\mathbb{R}^N$ budeme označovat $x \equiv [x_1, \dots, x_N]$, $y \equiv [y_1, \dots, y_N]$, atd.

2.1. Periodické funkce se zmenšující se periodou

Pro jednoduchost základní periodou Y bude v případě $N = 2$ jednotkový čtverec a v případě $N = 3$ jednotková krychle, obecně $Y = \langle 0, 1) \times \dots \times \langle 0, 1)$.

Funkci $a(y)$ definovanou na $\mathbb{R}^N$ nazveme Y-*periodickou*, jestliže je periodická s periodou 1 v každé proměnné, tj.

$$a(y_1 + k_1, \dots, y_N + k_N) = a(y_1, \dots, y_N)\,, \quad \forall y \in \mathbb{R}^N,\ \forall k \in \mathbb{Z}^N.$$

Pokud funkce a má další proměnné, např. x, budeme říkat, že funkce $a(x, y)$ je Y-periodická v y.

Budeme se zabývat posloupností funkcí se zmenšující se periodou ε. Místo přirozených čísel budeme posloupnosti „číslovat“ klesající posloupností malých čísel $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots$ konvergujících k nule: tj. $a^{\varepsilon_1}, a^{\varepsilon_2}, a^{\varepsilon_3}, \dots$, pro lepší čitelnost budeme psát jenom a^ε. Index ε má zde význam velikosti periody εY.

Buď Ω omezená oblast v $\mathbb{R}^N$ s „rozumnou“ hranicí. Pro Y-periodickou funkci $a(y)$ a $\varepsilon > 0$ vztah

$$a^\varepsilon(x) = a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \equiv a\left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \dots, \frac{x_N}{\varepsilon}\right), \quad x \in \Omega\,, \tag{2.1}$$

definuje εY-periodickou funkci na Ω. Pro posloupnost $\{\varepsilon\}$ klesající k nule tak dostáváme posloupnost funkcí $a^\varepsilon(x)$ se zmenšující se periodou.

2.2. Modelová úloha

Uvažujme lineární eliptickou parciální diferenciální rovnici druhého řádu

$$-\operatorname{div}(a(x)\,\nabla u) \equiv -\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = f\,, \qquad x \in \Omega\,, \tag{2.2}$$

s vhodnou okrajovou podmínkou na hranici $\Gamma = \partial\Omega$, například $u|_\Gamma = 0$. Pokud koeficient $a(x)$ není spojitý, v rovnici „vnější“ derivaci musíme brát v zobecněném smyslu. Poznamenejme, že pro omezenou po částech spojitou funkci $a(x) \geq \alpha > 0$ a $f \in L^2(\Omega)$ uvedená okrajová úloha má právě jedno (tzv. slabé) řešení, viz [9].

Rovnici lze fyzikálně interpretovat jako rovnici ustáleného vedení tepla v desce tvaru Ω ($N = 2$) nebo v tělese ($N = 3$) zabírajícím objem Ω. Neznámá $u(x)$ je teplota, koeficient $a(x)$ popisuje vlastnosti izotropního materiálu (poměr tepelné vodivosti a objemového měrného tepla) a $f(x)$ hustota výkonu vnitřních zdrojů tepla. Okrajová podmínka $u = 0$ říká, že na okraji Γ je udržovaná nulová teplota. Rovnice popisuje i difuzi a kroucení tyče, viz např. [8].

2.3. Homogenizace – formulace úlohy

Při homogenizaci zkoumáme posloupnost okrajových úloh pro rovnice s koeficienty se zmenšující se periodou. Buď $a(y)$ navíc Y-periodická funkce. Potom pro každé $\varepsilon > 0$ máme εY-periodický koeficient $a^\varepsilon(x) = a(\frac{x}{\varepsilon})$ a tím i rovnici

$$-\operatorname{div}(a^\varepsilon(x)\,\nabla u^\varepsilon) \equiv -\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a^\varepsilon(x)\,\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_i}\right) = f\,, \qquad x \in \Omega\,, \tag{2.3}$$

která s okrajovou podmínkou $u^\varepsilon|_\Gamma = 0$ tvoří okrajovou úlohu pro řešení u^ε.
V tzv. slabé formulaci na prostoru funkcí $H_0^1(\Omega)$[1] tato úloha zní:

Hledáme funkci $u^\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$ *splňující integrální identitu*

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^{N} a^\varepsilon(x)\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x = \int_\Omega f v\,\mathrm{d}x\,, \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{2.4}$$

Za výše uvedených předpokladů pro každé $\varepsilon > 0$ úloha má právě jedno řešení. Pro posloupnost $\{\varepsilon\}$ parametrů $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$ tak máme posloupnost úloh (2.3), a tím odpovídající posloupnost řešení u^ε. Homogenizace se zabývá studiem chování této posloupnosti řešení.

2.4. Problémy, kterými se zabývá homogenizace

Při homogenizaci řešíme následující otázky:

1. Konverguje posloupnost řešení u^ε? Pokud ano, v jakém smyslu?
2. Pokud u^ε konverguje k nějaké funkci u^*, je limita u^* řešením okrajové úlohy stejného typu, ale s konstantními tzv. homogenizovanými koeficienty?
3. Jak lze spočítat homogenizované koeficienty?
4. Jak lze zlepšit aproximaci řešení u^ε pro konkrétní $\varepsilon > 0$ pomocí u^*?

Pro představu na uvedené otázky uvedeme jen stručné odpovědi bez důkazů. V případě homogenizace úlohy (2.3) lze odvodit, viz [5], [6], následující výsledky:

1. Posloupnost řešení u^ε pro $\varepsilon \to 0$ konverguje k funkci, kterou označíme u^*.
2. Limita u^* je řešením opět eliptické rovnice druhého řádu

   $$-\operatorname{div}(b\,\nabla u^*) \equiv -\sum_{i,j=1}^{N} b_{ij}\,\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial x_i\,\partial x_j} = f,$$

   ale místo jednoho koeficientu $a(y)$ máme matici koeficientů $\{b_{ij}\}_{i,j=1}^N$. I když původní složky materiálu jsou izotropní, homogenizovaný materiál může být anizotropní.

---

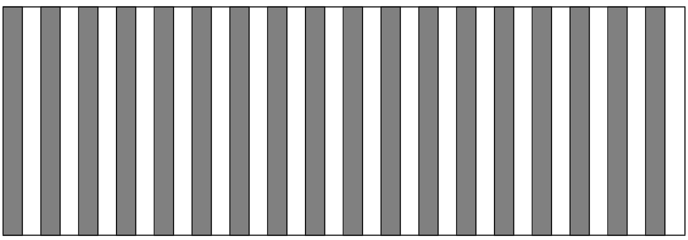
[1]Symbol $H_0^1(\Omega)$ značí Sobolevův prostor, tj. prostor funkcí $u(x)$ na Ω, které mají nulové hodnoty na hranici $\partial\Omega$ a integrovatelné druhé mocniny parciálních derivací, viz např. [9]. Prostor $H_0^1(\Omega)$ je definován jako zúplnění prostoru hladkých funkcí nulových na $\partial\Omega$ v normě

$$\|u\| = \left[\int_\Omega \left(|u(x)|^2 + \left|\frac{\partial u}{\partial x_1}(x)\right|^2 + \cdots + \left|\frac{\partial u}{\partial x_N}(x)\right|^2\right)\mathrm{d}x\right]^{1/2}.$$

3. Homogenizované koeficienty lze spočítat z vlastností jednotlivých složek a jejich geometrického rozložení v periodě Y. Lze odvodit, viz [5], [6], že
$$b_{ij} = \int_Y \Big(a(y)\, \delta_{ij} - a(y)\, \frac{\partial \chi^j}{\partial y_i}(y) \Big) \mathrm{d}y\,,$$
kde δ_{ij} je tzv. Kroneckerovo delta: $\delta_{ij} = 1$ pro $i = j$ a $\delta_{ij} = 0$ pro $i \neq j$ a pomocné funkce $\chi^j(y)$ jsou Y-periodická slabá řešení rovnice
$$-\operatorname{div}\big(a\ \nabla\chi^j\big) \equiv -\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial y_i}\Big(a(y)\, \frac{\partial \chi^j}{\partial y_i}(y) \Big) = -\frac{\partial a}{\partial y_j}(y)\,, \qquad y \in Y.$$
4. Pomocí funkcí χ^j lze k řešení u^* přidat tzv. korektor tak, že
$$U^\varepsilon(x) = u^*(x) - \varepsilon \left(\chi^1\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\, \frac{\partial u^*}{\partial x_1}(x) + \cdots + \chi^N\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\, \frac{\partial u^*}{\partial x_N}(x) \right)$$
vystihuje i lokální chování řešení $u^\varepsilon(x)$.

2.5. Příklad – vrstevnatý materiál

Ve speciálních případech lze homogenizované koeficienty odvodit intuitivně. Uvažujme dvojrozměrnou úlohu ustáleného vedení elektrického proudu, viz [8], v tenké desce složené ze dvou druhů A a B homogenního izotropního materiálu uspořádaného v úzkých svislých stejně širokých pruzích ve směru osy x_2, viz Obr. 2.



Obr. 2. Vrstevnatý materiál.

Neznámé elektrické napětí $u(x)$ potom bude splňovat rovnici
$$-\frac{\partial}{\partial x_1}\left(a\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right) \frac{\partial u}{\partial x_1}\right) - \frac{\partial}{\partial x_2}\left(a\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right) \frac{\partial u}{\partial x_2}\right) = f,$$
kde pravá strana f popisuje hustotu výkonu zdrojů proudu. Koeficient $a(x)$, který představuje elektrickou vodivost, nabývá střídavě dvou hodnot γ_A a γ_B. Jsou to převrácené hodnoty $\gamma_A = 1/\rho_A$ a $\gamma_B = 1/\rho_B$ elektrických odporů ρ_A, ρ_B. Pruhy vodivého materiálu lze považovat za elektrické „odpory“.

Pomocí známých výsledků z elementární fyziky o zapojení elektrických odporů lze odvodit „průměrné“ hodnoty odporu a vodivosti. Ve směru osy x_2 jsou tyto odpory „zapojeny“ paralelně, proto se sčítají jejich vodivosti. Celková vodivost ve směru osy x_2 je proto průměr obou vodivostí, tj. $b_2 = \frac{1}{2}(\gamma_A + \gamma_B)$. Ve směru osy x_1 jsou odpory „zapojeny“ sériově – odpory se sčítají, celkový odpor je průměr odporů, tj. $\frac{1}{2}(\rho_A + \rho_B)$. Převedením na vodivosti dostáváme koeficient

$b_1 = [\frac{1}{2}((\gamma_A)^{-1} + (\gamma_B)^{-1})]^{-1}$. Homogenizovaná rovnice potom je

$$-\frac{\partial}{\partial x_1}\left(b_1\,\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) - \frac{\partial}{\partial x_2}\left(b_2\,\frac{\partial u}{\partial x_2}\right) \equiv -b_1\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - b_2\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = f,$$

kde homogenizované koeficienty jsou (obecně a v případě poměru složek 1 : 1)

$$b_1 = \left[\int_Y \frac{\mathrm{d}y}{a(y)}\,\mathrm{d}y\right]^{-1} = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\gamma_A} + \frac{1}{\gamma_B}\right)\right]^{-1}, \quad b_2 = \int_Y a(y)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\,[\gamma_A + \gamma_B]\,.$$

Pokud vodivosti složek jsou $\gamma_A = 1$ a $\gamma_B = 9$, potom b_1 je harmonický a b_2 aritmetický průměr vodivostí:

$$b_1 = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{9}\right)\right]^{-1} = \left[\frac{10}{2\cdot 9}\right]^{-1} = 1.8 \qquad b_2 = \frac{1}{2}[1+9] = 5.$$

Homogenizací vznikl materiál anizotropní, i když obě jeho složky byly izotropní. Homogenizované koeficienty – efektivní vodivosti – tedy závisejí nejen na hodnotách složek a jejich poměru, ale i na geometrickém uspořádání složek. V případě jiného symetrického rozložení složek v periodě Y homogenizované koeficienty jsou různými „průměry" koeficientu $a(y)$. Pokud rozložení složek v periodě není symetrické, matice homogenizovaných koeficientů b_{ij} může mít všechny členy nenulové.

3. Slabá konvergence

Posloupnost koeficientů $a_n(x) = a(nx)$ ve formulaci (2.3) problému homogenizace nekonverguje v obvyklém smyslu. Tato posloupnost však konverguje tzv. slabě.

3.1. Definice

Buď V reálný lineární prostor (zvaný také vektorový prostor), tj. množina V bodů u, na které jsou definovány operace sčítání $u+v$ a násobek reálným číslem αu, které splňují jisté axiomy, viz např. [7]. Budeme se zabývat normovaným prostorem, tj. lineárním prostorem V s normou. Připomeňme, že norma je funkcionál $\|\cdot\|$ na prostoru V s hodnotami v intervalu $\langle 0, \infty)$, který splňuje jistou podmínku homogenity $\|\alpha u\| = |\alpha|\cdot\|u\|$, trojúhelníkovou nerovnost $\|u+v\| \le \|u\| + \|v\|$ a rozlišuje body: $\|u\| = 0 \Rightarrow u = 0$. Norma umožňuje zavést na V topologické pojmy jakým je okolí, otevřené a uzavřené množiny, spojitost, konvergentní a cauchyovské posloupnosti, úplnost, kompaktnost a další.

Na normovaném prostoru máme přirozenou konvergenci (zvanou také silná konvergence nebo konvergence v normě) definovanou pomocí normy

$$u_n \to u^* \qquad \Longleftrightarrow \qquad \|u_n - u^*\| \to 0\,.$$

Pro definici slabé konvergence potřebujeme pojem spojitého lineárního funkcionálu. Reálný funkcionál je zobrazení z prostoru V do reálných čísel $\mathbb{R}$. Funkcionál F na lineárním prostoru V nazveme lineární, jestliže zachovává operace součtu a skalárního násobku, tj. pro každé $u_1, u_2 \in V$ a každé $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ platí

$$F(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = \alpha_1 F(u_1) + \alpha_2 F(u_2).$$

Funkcionál F je spojitý, jestliže zachovává konvergenci

$$u_n \to u^* \qquad \Longrightarrow \qquad F(u_n) \to F(u^*)\,.$$

V případě lineárních funkcionálů je spojitost ekvivalentní omezenosti funkcionálu. Tyto funkcionály můžeme opět sčítat $F+G$ a dělat skalární násobky αF, proto množina všech spojitých lineárních funkcionálů na V tvoří opět lineární prostor, který značíme V^*, s „přirozenou" normou

$$\|F\|_* = \sup_{\|u\|\le 1} |F(u)| \equiv \sup_{u\neq 0} \frac{|F(u)|}{\|u\|}\,, \tag{3.1}$$

ve které je V^* úplný normovaný prostor, tj. Banachův prostor. V definici slabé konvergence novou konvergenci testujeme pomocí těchto funkcionálů:

Definice 3.1. Posloupnost $\{u_n\}$ *konverguje slabě* k u^*, jestliže

$$F(u_n - u^*) \to 0 \qquad \text{pro všechny funkcionály } \ F \in V^*\,.$$

Slabou konvergenci zapisujeme poloviční šipkou $u_n \rightharpoonup u^*$.

Definice (3.1) dává $F(x_n) - F(x^*) = F(x_n - x^*) \le \|F\|_* \cdot \|x_n - x^*\|$, odkud plyne, že každá (silně) konvergentní posloupnost konverguje i slabě. Obráceně to však neplatí, ne každá slabě konvergentní posloupnost konverguje i silně.

3.2. Prostor konečných vektorů $\mathbb{R}^N$

V prostoru $\mathbb{R}^N$ lze body ztotožnit s vektory $u \equiv (u_1, u_2, \dots, u_N)$ a jejich norma je $\|u\| = \left[\sum_{i=1}^N u_i^2\right]^{1/2}$. Podle definice posloupnost bodů $u_n \equiv (u_1^k, \dots, u_N^k)$ konverguje (silně) k $u^* \equiv (u_1^*, \dots, u_N^*)$, jestliže jejich vzdálenost jde k nule:

$$u_n \to u^* \qquad \Longleftrightarrow \qquad \|u_n - u^*\| \to 0\,.$$

Protože každý lineární funkcionál F na $\mathbb{R}^N$ lze napsat jako lineární kombinaci projekcí E_i na i-tou složku

$$E_i(u) \equiv E_i(u_1, \dots, u_i, \dots, u_N) = u_i\,,$$

k ověření slabé konvergence stačí vzít jen tyto projekce. Proto posloupnost vektorů $u_n = (u_1^n, \dots, u_N^n)$ *konverguje slabě* k u^*, pokud pro všechna i posloupnost $E_i(u_n) = u_i^n$ konverguje k $E_i(u^*) = u_i^*$, tj. každá složka konverguje:

$$u_n \rightharpoonup u^* \qquad \Longleftrightarrow \qquad u_1^n \to u_1^*,\ u_2^k \to u_2^*,\ \dots, u_N^n \to u_N^*.$$

A obráceně, pokud každá složka konverguje, posloupnost konverguje i v normě, protože těchto složek je konečně mnoho. Skutečně, jestliže pro $\varepsilon > 0$ jsou n_i indexy takové, že $|u_i^n - u_i^*| < \varepsilon$ pro každé $n > n_i$, potom pro $n > \max(n_1, \dots, n_N)$ platí

$$\|u_n - u^*\| = \left[\sum_{i=1}^n (u_i^n - u_i^*)^2\right]^{1/2} \le \left[\sum_{i=1}^n \varepsilon^2\right]^{1/2} = \varepsilon\sqrt{n}.$$

Přicházíme tak k důležitému výsledku:

Věta 3.2. *V normovaném prostoru konečné dimenze posloupnost konverguje slabě, právě když konverguje silně, tj. slabá a silná konvergence splývají.*

Další významnou vlastností je kompaktnost:

Věta 3.3. *Každá omezená posloupnost v normovaném prostoru konečné dimenze obsahuje konvergentní podposloupnost.*

Kompaktnost je velmi důležitá vlastnost, která se často využívá při důkazech existence řešení. Protože často nevíme, zda řešení nějaké rovnice existuje, konstruujeme posloupnost přibližných řešení. Pokud ukážeme, že tato posloupnost je omezená, díky kompaktnosti z ní vybereme konvergentní podposloupnost přibližných řešení, o jejíž limitě pak stačí ověřit, že je „přesným“ řešením dané rovnice.

3.3. Prostor nekonečných posloupností ℓ^2

Body prostoru ℓ^2 jsou nekonečné posloupnosti $u = (u_1, u_2, u_3, \dots)$, pro které platí

$$\|u\| = \left[\sum_{i=1}^{\infty} |u_i|^2\right]^{1/2} \le \infty\,.$$

V prostoru ℓ^2 existují slabě konvergentní posloupnosti, které nekonvergují (silně):

Příklad 3.4. Omezená posloupnost $\{e_1, e_2, e_3, \dots\}$, tzv. „putující jednička“

$$e_1 = (1,0,0,0,\dots),\ e_2 = (0,1,0,0,\dots),\ e_3 = (0,0,1,0,\dots),\ \dots$$

není konvergentní, protože není cauchyovská: pro $i \ne j$ platí $\|e_i - e_j\| = \sqrt{2}$. Ukážeme, že je slabě konvergentní. Každý funkcionál F na prostoru ℓ^2 má tvar

$$F(u) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i u_i = f_1u_1 + f_2u_2 + f_3u_3 + \dots\,,$$

kde $f = (f_1, f_2, f_3, \dots)$ je také prvkem ℓ^2. Pro $n \to \infty$ platí

$$F(e_n) = f_1 \cdot 0 + \dots + f_{k-1} \cdot 0 + f_n \cdot 1 + f_{k+1} \cdot 0 + \dots = f_n\,.$$

Protože řada $\sum_{i=1}^{\infty} |f_i|^2$ je konvergentní, platí $f_n \to 0$. Proto posloupnost e_n konverguje slabě k nulové posloupnosti $0 = (0,0,0,\dots)$.

Příklad také ukazuje, že omezená posloupnost nemusí obsahovat konvergentní podposloupnost. Skutečně, posloupnost $\{e_n\}$ je omezená: $\|e_n\| = 1$, ale protože $\|e_i - e_j\| = \sqrt{2}$ pro $i \ne j$, žádná její podposloupnost nemůže být cauchyovská a proto ani konvergentní. V prostoru ℓ^2 však platí následující „užitečné“ tvrzení:

Věta 3.5. *Každá omezená posloupnost v ℓ^2 obsahuje slabě konvergentní podposloupnost, tj. uzavřená koule v ℓ^2 je kompaktní vzhledem ke slabé konvergenci.*

3.4. Prostor integrovatelných funkcí $L^2(I)$

Z hlediska aplikací je velmi důležitý tzv. Lebesgueův prostor, tj. prostor integrovatelných funkcí. Pro jednoduchost se budeme zabývat jenom případem funkcí na jednorozměrné oblasti Ω, tedy funkcemi na intervalu I. Prvky prostoru $L^2(I)$ jsou funkce $u(x)$ definované na I a mající konečnou normu $\|u\|$, tj. splňující

$$\|u\| = \left[\int_I |u(x)|^2\,\mathrm{d}x\right]^{1/2} < \infty\,.$$

Prostor $L^2(I)$ je úplný normovaný prostor[2], tedy Banachův prostor.

Uveďme příklad posloupnosti funkcí konvergující slabě, ale nekonvergující silně.

[2]Pro úplnost dodejme, že integrál v definici je Lebesgueův integrál, který dovede integrovat i hodně nespojité funkce včetně Dirichletovy funkce. Funkce, které se liší jen v málo bodech (na množině míry nula), dávají stejný integrál, a uvedená norma je nerozliší. Proto tyto funkce

Příklad 3.6. Uvažujme Lebesgueův prostor $L^2(I)$ funkcí integrovatelných na intervalu $I = (0, 2\pi)$ a posloupnost $u_n(x) = \sin(nx)$. Tato posloupnost je omezená:

$$\|u_n\| = \left[\int_0^{2\pi} \sin^2(nx)\,\mathrm{d}x\right]^{1/2} = \left[\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1 - \cos(2nx))\,\mathrm{d}x\right]^{1/2} = \sqrt{\pi}\,,$$

ale není konvergentní, protože není cauchyovská: snadno lze spočítat, že pro $n \neq m$

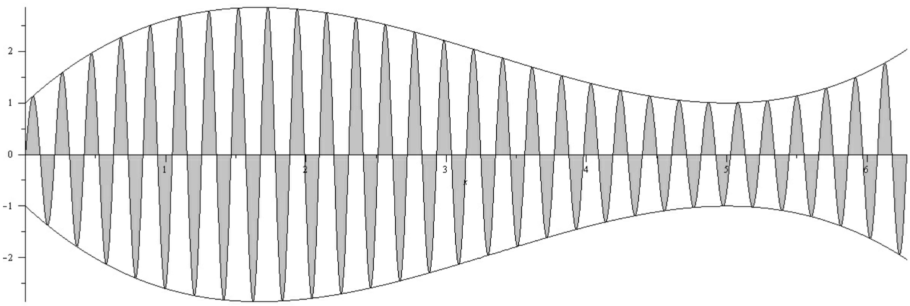
$$\|u_n - u_m\| = \left[\int_0^{2\pi} (\sin(nx) - \sin(mx))^2\,\mathrm{d}x\right]^{1/2} = \sqrt{2\pi}\,.$$

Ukážeme, že uvedená posloupnost konverguje slabě k nulové funkci. Lineární funkcionály na prostoru $L^2(I)$ mají tvar

$$F(u) = \int_I f(x)u(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

kde f je funkce z $L^2(I)$. Potřebujeme dokázat, že

$$F(u_n) = \int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x \to 0.$$



Obr. 3. Graf integrované funkce $f(x)\sin(nx)$ mezi grafy $-|f(x)|$ a $|f(x)|$.

Na Obr. 3 je graf součinu funkcí $f(x)\sin(nx)$. Je vidět, že se zmenšováním periody $2\pi/n$ oscilací přibývá, čímž se rozdíl mezi kladnými a zápornými částmi zmenšuje, proto integrál konverguje k nule.

Předchozí názorný obrázek však není důkaz. Naznačme ideu důkazu $u_n \rightharpoonup 0$. Využijeme přitom tvrzení:

Věta 3.7. *Nechť u_n je posloupnost funkcí na intervalu I omezená v normě prostoru $L^2(I)$. Jestliže pro každou hladkou funkci φ s nulami na koncích platí*

$$\int_I \varphi(x)(u_n(x) - u^*(x))\,\mathrm{d}x \to 0\,,$$

potom posloupnost u_n slabě konverguje k u^* v prostoru $L^2(I)$.

Posloupnost u_n je omezená v $L^2(I)$. Podle předchozí věty stačí dokázat konvergenci $\int_I f(x)u_n(x)\,\mathrm{d}x \to 0$ jen pro hladké funkce. Buď $f(x)$ diferencovatelná

ztotožníme. Prvky prostoru $L^2(I)$ jsou tedy třídy funkcí, které se liší jen v bodech z množiny míry nula, říkáme funkce, které se navzájem rovnají skoro všude. Je to také Hilbertův prostor.

funkce. Potom po integraci per-partes máme pro $n \to \infty$

$$\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x = \left[-f(x)\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} f'(x)\,\frac{\cos(nx)}{n}\,\mathrm{d}x \to 0\,,$$

díky členu $1/n$. Tím je slabá konvergence dokázána.

Předchozí příklad lze zobecnit na případ posloupnosti po částech konstantních koeficientů a^ε se zmenšující se periodou ε z homogenizace, tzv. „cimbuří“:

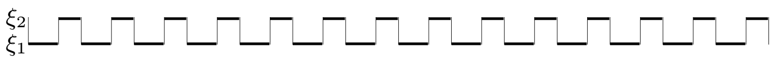
Příklad 3.8. Buď $\varphi(y)$ funkce z intervalu $\langle 0,1)$

$$\varphi(y) = \begin{cases} \xi_1 & \text{pro } y \in \langle 0,\lambda), \\ \xi_2 & \text{pro } y \in \langle \lambda,1) \end{cases}$$

periodicky rozšířená na celé $\mathbb{R}$. Pro $\varepsilon_n = \frac{1}{n} \to 0$ posloupnost funkcí

$$u_n(x) = \varphi(\tfrac{x}{\varepsilon_n}) \equiv \varphi(nx)$$

konverguje slabě v $L^2(I)$ ke konstantní funkci $u^*(x) = \lambda\xi_1 + (1-\lambda)\xi_2$.



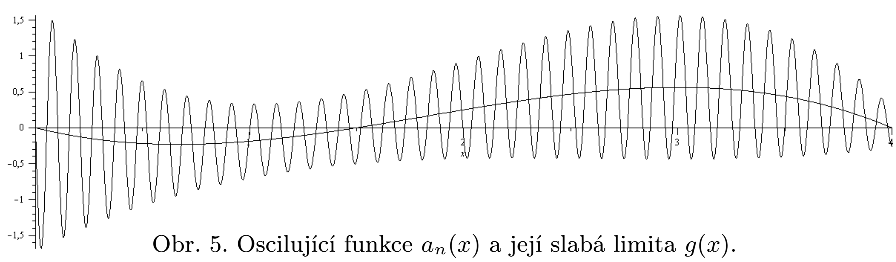
Obr. 4. Periodická funkce nabývající dvou hodnot, tzv. „cimbuří“.

Příklad zobecníme na posloupnost funkcí na oblasti Ω v $\mathbb{R}^N$ oscilujících s měnící se amplitudou $f(x)$ posunutých o $g(x)$:

Příklad 3.9. Buďte $f(x)$ a $g(x)$ funkce z $L^2(\Omega)$ a $\varphi(y)$ nenulová omezená integrovatelná Y-periodická funkce s nulovým průměrem, tj. $\int_Y \varphi(y)\,\mathrm{d}y = 0$. Potom pro $n \to \infty$ posloupnost funkcí oscilujících s amplitudou $f(x)$ posunutých o $g(x)$

$$a_n(x) = f(x)\,\varphi(nx) + g(x)$$

konverguje slabě v $L^2(\Omega)$ k funkci $g(x)$, nekonverguje však silně (kromě případu $f(x) = 0$). Oscilující část $f(x)\varphi(nx)$ nemá na slabou limitu vliv.



Obr. 5. Oscilující funkce $a_n(x)$ a její slabá limita $g(x)$.

Také v prostoru funkcí $L^2(\Omega)$ platí kompaktnost vzhledem ke slabé konvergenci:

Věta 3.10. *Každá posloupnost funkcí omezená v normě $L^2(\Omega)$ obsahuje slabě konvergentní podposloupnost.*

4. Problémy slabé konvergence

Ve srovnání se silnou konvergencí má slabá konvergence příjemnou vlastnost: umožňuje z omezené posloupnosti vybrat slabě konvergentní podposloupnost, má však některé nepříjemné vlastnosti: složení se spojitou funkcí nezachovává slabou konvergenci a v součinu dvou slabě konvergentních posloupností nelze přejít k součinu limit.

4.1. Složení se spojitou funkcí

Buď $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spojitá funkce splňující $|\Phi(\xi)| \le k\,|\xi|$ $(k > 0)$. Snadno lze ověřit, že složením funkce $u \in L^2(I)$ s Φ dostaneme funkci $\Phi(u)$, která je opět v $L^2(I)$. Toto složení zachovává silnou konvergenci, tj. pro posloupnost $\{u_n\} \subset L^2(I)$ platí

$$u_n \to u^* \qquad \Longrightarrow \qquad \Phi(u_n) \to \Phi(u^*).$$

Slabá konvergence se však při složení nezachovává, implikace

$$u_n \rightharpoonup u^* \qquad \Longrightarrow \qquad \Phi(u_n) \rightharpoonup \Phi(u^*) \tag{4.1}$$

neplatí, jak je vidět z následujícího příkladu:

Příklad 4.1. Uvažujme funkci $\Phi(\xi) = \min(\xi^2, 2)$, která splňuje podmínku $|\Phi(\xi)| \le k\,|\xi|$, a posloupnost $u_n(x) = \sin(nx)$ z Příkladu 3.6, která slabě konverguje v $L^2(I)$ k nulové funkci. Složená funkce

$$(\Phi(u_n))(x) = \sin^2(nx) = \tfrac{1}{2}(1 - \cos(2nx))$$

ale slabě konverguje k funkci $\frac{1}{2}$, která se nerovná $\Phi(\lim_{n\to\infty} u_n) = \Phi(0) = 0$.

Lze dokázat, že implikace (4.1) platí jen v případě lineární funkce $\Phi(\xi) = a\xi + b$.

4.2. Součin slabě konvergentních posloupností

Součin $w = u\,v$ funkcí $u, v \in L^2(I)$ je funkce z prostoru $L^1(I)$ funkcí, pro které $\int_I |w(x)|\,\mathrm{d}x < \infty$. Je to normovaný prostor s normou $\|w\|_1 = \int_I |w(x)|\,\mathrm{d}x$. Pro silně konvergující posloupnosti platí implikace:

$$u_n \to u^*\,, \quad v_n \to v^* \qquad \Longrightarrow \qquad u_n\,v_n \to u^* v^*,$$

kde na pravé straně je konvergence v normě $\|w\|_1$, a také konvergence integrálů

$$u_n \to u^*\,, \quad v_n \to v^* \qquad \Longrightarrow \qquad \int_I u_n v_n\,\mathrm{d}x \;\to\; \int_I u^* v^*\,\mathrm{d}x\,.$$

Obě implikace platí také v případě, kdy jedna z posloupností konverguje slabě:

$$u_n \to u^*\,, \quad v_n \rightharpoonup v^* \qquad \Longrightarrow \qquad u_n\,v_n \rightharpoonup u^* v^*.$$

V případě, kdy obě posloupnosti konvergují jenom slabě, implikace:

$$u_n \rightharpoonup u^*\,, \quad v_n \rightharpoonup v^* \quad \Longrightarrow \quad u_n\,v_n \rightharpoonup u^* v^* \tag{4.2}$$

neplatí, jak ukáže následující příklad:

Příklad 4.2. Uvažujme posloupnosti $u_n(x) = v_n(x) = \sin(nx)$ v prostoru $L^2((0, 2\pi))$. Obě posloupnosti slabě konvergují k nulové funkci, ale jejich součin

$$u_n(x)\,v_n(x) = \sin^2(nx) = \tfrac{1}{2}(1 - \cos(2nx))$$

slabě konverguje k funkci $\frac{1}{2}$, která se nerovná součinu slabých limit $0 \cdot 0$.

5. Závěr

Modelování kompozitních materiálů pomocí homogenizace vede na posloupnost úloh s koeficienty a^ε, které slabě konvergují. Ve slabé formulaci (2.4) úlohy (2.3) máme součin koeficientů a^ε a derivací $\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_i}$ řešení u^ε. Protože posloupnost těchto parciálních derivací řešení u^ε je omezená v normě prostoru $L^2(\Omega)$, posloupnost parciálních derivací u^ε obsahuje slabě konvergentní podposloupnost $\frac{\partial u^{\varepsilon'}}{\partial x_i}$. Při $\varepsilon \to 0$ potřebujeme přejít k limitě v součinu dvou slabě konvergentních posloupností, což podle předchozích příkladů představuje problém. Řešení problému přechodu k limitě ve slabě konvergentní posloupnosti složené se spojitou funkcí a v součinu dvou slabě konvergentní posloupností bude obsahem pokračování tohoto článku.

Reference

[1] I. Babuška: *Homogenization approach in engineering*, v: Computing methods in applied sciences and engineering, Lecture notes in Econ. and Math. Systems 134, Springer, Berlin, 1976, 137-153.

[2] N. Bakhvalov, G. Panasenko: *Homogenization: averaging processes in periodic media*, Mathematical Problems in the Mechanics of Composite Materials, Springer, 1989.

[3] A. Bensoussan, J. L. Lions, G. Papanicolau: *Asymptotic analysis for periodic structures*, North Holland, 1978.

[4] D. Cioranescu, P. Donato: *Introduction to homogenization*, Oxford Univ. Press, USA, 2000.

[5] J. Franců: *Homogenizace – matematická metoda výpočtu materiálů s periodickou strukturou*, Stavebnícky časopis **31** (1983), 789–814.

[6] J. Franců: *Homogenizace*, sborník 6. seminář z parciálních diferenciálních rovnic – Manětín 1981, JČSMF a KMA VŠSE Plzeň 1982, 21–63.

[7] J. Franců: *Funkcionální analýza I*, skripta FSI VUT v Brně, Akad. nakl. CERM, Brno 2009.

[8] J. Franců: *Parciální diferenciální rovnice*, skripta FSI VUT v Brně, Akad. nakl. CERM, Brno 2011.

[9] J. Franců: *Moderní metody řešení diferenciálních rovnic*, skripta FSI VUT v Brně, Akad. nakl. CERM, Brno 2006.

Jan Franců, Ústav matematiky, Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení technické v Brně, Technická 2, 616 69 Brno, Česká republika,
e-mail: `francu@fme.vutbr.cz`