

---

## ABSTRAKT

Tato bakalářská práce se zabývá animací záběru rovinného evolventního ozubení. V práci je uveden teoretický základ pro pochopení problematiky ozubených kol. Úvod práce je zaměřen na popis geometrie a záběru nekorigovaného rovinného ozubení se zaměřením na dráhu záběru. Postupně je popsán záběr soukolí s vnějším, vnitřním a hřebenovým ozubením. Následuje záběr rovinného kola s výrobním ozubeným hřebenem, tedy vytváření boků zubů odvalem. V další části je popsána problematika interference s přechodovou křivkou a její vliv na počet zubů ozubeného kola. Poslední část se věnuje korekci ozubení pomocí posunutí profilu a jejímu vlivu na záběrové poměry ozubení.

**Klíčová slova:** evolventní ozubení, dráha záběru, podřezání, korekce posunutím profilu, ozubený hřeben

## ABSTRACT

The bachelor thesis deals with the animation of planar involute gearing. The thesis gives a theoretical basis for understanding the problems of gears. Introduction of the work is focused on the description of the geometry and mesh of uncorrected planar gears focusing on the line of action. Gradually meshing of gear pairs with external, internal and rack gearing is described. Following part describes mesh of planar wheel with manufacturing rack, thus creating teeth flanks by rolling. The next section describes the problems of interference with the root curve and its impact on the gear's teeth number. The last part deals with correction of teeth by shifting profile and its effect on meshing ratios.

**Key words:** involute gearing, line of action, undercutting, rack, correction by profile shift

## Bibliografická citace:

FIALA, V. *Animace záběru rovinného ozubení*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2015. 38 s. Vedoucí bakalářské práce prof. Ing. Martin Hartl, Ph.D.

---



---

## **ČESTNÉ PROHLÁŠENÍ**

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracoval samostatně pod vedením vedoucího bakalářské práce prof. Ing. Martina Hartla, Phd. a uvedl v seznamu literatury všechny odborné a literární zdroje.

V Brně dne 22. května 2015

.....  
Vlastimil Fiala





---

## **PODĚKOVÁNÍ**

Na tomto místě bych rád poděkoval prof. Ing. Martinu Hartlovi, Phd. za odborné vedení mé práce, podnětné připomínky a cenné rady, kterými přispěl k vypracování této bakalářské práce.

---



**OBSAH**

|  |           |
|--|-----------|
| <b>ÚVOD.....</b>   | <b>12</b> |
| <b>1 PŘEHLED SOUČASNÉHO STAVU POZNÁNÍ.....</b>             | <b>13</b> |
| 1.1 Záběrové poměry u soukolí s vnějším ozubením.....      | 13        |
| 1.1.1 Základní geometrie vnějšího ozubení.....             | 13        |
| 1.1.2 Záběr soukolí s vnějším ozubením.....                | 14        |
| 1.2 Záběrové poměry u soukolí s vnitřním ozubením.....     | 15        |
| 1.2.1 Základní geometrie vnitřního ozubení.....            | 16        |
| 1.2.2 Záběr soukolí s vnitřním ozubením.....               | 16        |
| 1.3 Záběrové poměry u soukolí s hřebenovým ozubením.....   | 16        |
| 1.3.1 Základní geometrie ozubeného hřebene.....            | 17        |
| 1.3.2 Záběr soukolí s hřebenovým ozubením.....             | 18        |
| 1.4 Výroba čelního ozubení hřebenovým obrážecím nožem..... | 18        |
| 1.4.1 Konstrukce výrobního hřebene.....                    | 19        |
| 1.5 Podřezání paty zubu.....                               | 19        |
| 1.6 Korekce zubů kol posunutím profilu.....                | 20        |
| 1.6.1 Soukolí N.....                                       | 20        |
| 1.6.2 Soukolí VN.....                                      | 21        |
| 1.6.3 Soukolí V.....                                       | 21        |
| <b>2 ANALÝZA PROBLÉMU A CÍL PRÁCE.....</b>                 | <b>22</b> |
| <b>3 METODY.....</b>                                       | <b>23</b> |
| <b>4 VÝSLEDKY.....</b>                                     | <b>26</b> |
| 4.1 Záběrové poměry u soukolí s vnějším ozubením.....      | 26        |
| 4.2 Záběrové poměry u soukolí s vnitřním ozubením.....     | 28        |
| 4.3 Záběrové poměry u soukolí s hřebenovým ozubením.....   | 29        |
| 4.4 Výroba ozubení hřebenovým nástrojem.....               | 31        |
| 4.5 Podřezání paty zubu.....                               | 32        |
| 4.6 Korekce posunutím profilu.....                         | 33        |
| <b>5 ZÁVĚR.....</b>  | <b>35</b> |
| <b>6 SEZNAM POUŽITÝCH ZDROJŮ.....</b>                      | <b>36</b> |
| <b>7 SEZNAM POUŽITÝCH ZKRATEK, SYMBOLŮ A VELIČIN.....</b>  | <b>37</b> |
| <b>8 SEZNAM OBRÁZKŮ A GRAFŮ.....</b>                       | <b>38</b> |

## ÚVOD

Ve strojírenství hrají ozubená kola velmi důležitou roli jako součásti pro přenos krouticího momentu a otáčivého pohybu mezi dvěma hřídeli. Zvyšující se nároky na ozubená soukolí vedla ke zdokonalování jejich geometrie. Nejdůležitější požadavek kladený na ozubená soukolí je konstantní převodový poměr. Tento požadavek splňuje ozubení evolventní.

Pro základní pochopení funkce ozubených soukolí lze vycházet z ozubení rovinného. Toto je základem pro vyšetřování geometrie, kinematiky a sil působících v soukolí. Získané poznatky pak lze aplikovat na složitější soukolí jako jsou např. válcová ozubená kola se šikmými zuby, kuželová kola s přímými či šikmými zuby nebo soukolí šneková.

Z důvodu lepší představivosti je vhodné sledovat záběr rovinného ozubení v pohybu, což umožňují animace. Tato práce popisuje vybrané úlohy z teorie rovinného ozubení na 2D animacích.

## 1 PŘEHLED SOUČASNÉHO STAVU POZNÁNÍ

Základní požadavek kladený na ozubená soukolí je konstantní převodový poměr. Toho lze dosáhnout pouze užitím sdruženého profilu zubů. Nejpoužívanějším sdruženým profilem je evolventní profil. Jeho výhodou je jeho snadná výroba a nezávislost převodového poměru na změně osové vzdálenosti. Evolventa je křivka vytvořená odvalováním přímky po kružnici.

Menší z kol se nazývá pastorek a ve většině případů je hnací, větší kolo se označuje jednoduše kolo. Veličiny spojené s pastorkem jsou značeny indexem 2, zatímco pro kolo je použit index 3.

### 1.1 Záběrové poměry u soukolí s vnějším ozubením

Soukolí s vnějším ozubením, tedy pastorek a kolo, se používají pro přenos kroutícího momentu a otáček mezi dvěma rovnoběžnými hřídeli, přičemž smysly otáčení hnací a hnané hřídele nejsou shodné. Příklad takového soukolí ukazuje obr. 1-1.



Obr. 1-1 Soukolí s vnějším ozubením

#### 1.1.1 Základní geometrie vnějšího ozubení

Ozubené kolo je dáno počtem zubů  $z$  a modulem  $m$ . Průměr roztečné kružnice  $d$  kola

$$d = m z, \quad (1-1)$$

Evolventa je vytvářena od základní kružnice  $d_b$ , pro kterou platí

$$d_b = m z \cos \alpha, \quad (1-2)$$

kde  $\alpha$  je úhel záběru. Výška hlavy zubu  $h_a$  je obvykle rovna modulu, proto pro průměr hlavové kružnice  $d_a$  platí

$$d_a = d + 2m. \quad (1-3)$$

Výška paty zubu  $h_f$  je  $1,25m$ , průměr patní kružnice  $d_f$  je

$$d_f = d - 2,5m. \quad (1-4)$$

Základní kružnice může být větší než kružnice patní. Jelikož evolventa není pod základní kružnicí definována, je bok zubu pod touto nahrazen radiální úsečkou. Přechod mezi neevolventní částí boku zubu a patní kružnicí se nazývá přechodová křivka, pro jejíž poloměr dle [1] platí

$$\rho_f = 0,38m. \quad (1-5)$$

Zuby jsou po obvodě kola rozmístěny s roztečí  $p$ , což je vzdálenost mezi dvěma stejnolehlými boky zubů měřená na oblouku roztečné kružnice. Tloušťka zubu  $s$  měřená na oblouku roztečné kružnice odpovídá polovině rozteče. Potom šířka zubové mezery  $e$  je rovna tloušťce zubu, platí

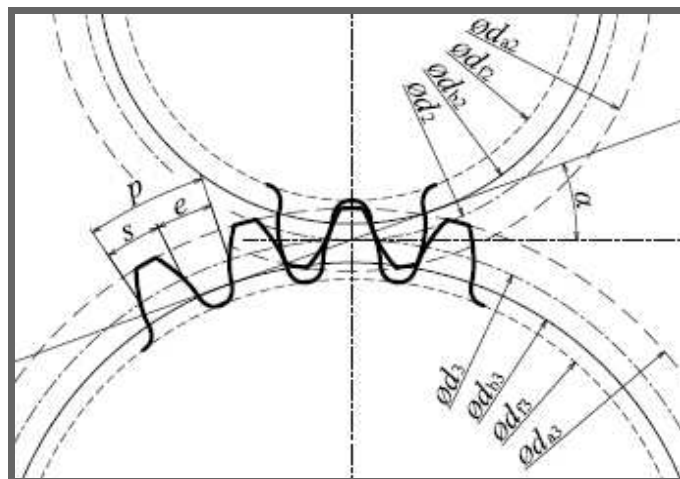
$$p = \pi m, \quad (1-6)$$

$$s = e = \frac{p}{2}. \quad (1-7)$$

Roztečné kružnice pastorku a kola se po sobě odvalují bez skluzu, osová vzdálenost  $a$  měřená mezi středy roztečných kružnic  $O_2O_3$  je

$$a = \frac{d_2 + d_3}{2}. \quad (1-8)$$

Základní rozměry na vnějším ozubení ilustruje obr. 1-2.



Obr. 1-2 Základní rozměry vnějšího ozubení

### 1.1.2 Záběr soukolí s vnějším ozubením

Geometrickým místem všech stykových bodů spoluzabírajícího páru zubů je dráha záběru  $g_a$ , která leží na přímce záběru. Přímka záběru je odkloněna od spojnice  $O_2O_3$  o úhel  $(90^\circ - \alpha)$ . Dráha záběru je vymezena bodem A, ležícím na průsečíku přímky záběru s hlavovou kružnicí kola, a bodem B, který leží na průsečíku stejné přímky s

hlavovou kružnicí pastorku. Spustíme-li ze středu  $O_2$ , respektive  $O_3$  normálu k přímce záběru, vznikne průsečík  $N_2$ , respektive  $N_3$ . Úsečka, kterou tyto dva body vytínají představuje maximální možnou dráhu záběru. Pro správnou funkci soukolí musí body  $A$  a  $B$  ležet mezi body  $N_2$  a  $N_3$ , v opačném případě by se hlava zubu jednoho kola dostala do kontaktu s přechodovou křivkou zubu druhého kola, a v důsledku toho by došlo k nesprávnému záběru [1].

Pól  $P$  leží v dotykovém bodě roztečných kružnic a dělí osovou vzdálenost v převodovém poměru soukolí

$$i = \frac{d_3}{d_2} = \frac{z_3}{z_2} . \quad (1-9)$$

Dráhu záběru je možno rozdělit na dva úseky. Úsečka  $AP$  se nazývá dráha náběhu  $g_f$ , úsečka  $BP$  dráha výběhu  $g_a$  [1].

Jinou možností charakterizující délku záběru je oblouk záběru  $q_a$ , který je vymezen body  $Q$  a  $G$ . Tyto leží na stejnolehých bocích zubu,  $Q$  pro zub na začátku záběru a  $G$  pro zub na konci záběru. I oblouk záběru je možné rozdělit na dva úseky, tedy oblouk náběhu  $q_f$  mezi body  $AP$  a oblouk výběhu  $q_a$  mezi body  $BP$  [1].

Kvalitu chodu ozubeného soukolí popisuje součinitel záběru  $\varepsilon_\alpha$ , který vyjadřuje průměrný počet párů zubů v záběru. Čím vyšší je jeho hodnota, tím je chod klidnější a tišší. Jeho hodnota by neměla klesnout pod 1,2. Pro záběr pastorku s kolem lze psát

$$\varepsilon_\alpha = \frac{q_\alpha}{p} = \frac{g_\alpha}{p_b} = \frac{\sqrt{d_{a2}^2 - d_{b2}^2} + \sqrt{d_{a3}^2 - d_{b3}^2} - 2 a \sin \alpha}{2 \pi m \cos \alpha} , \quad (1-10)$$

kde  $p_b$  je základní rozteč, což je rozteč měřená na přímce záběru [1].

## 1.2 Záběrové poměry u soukolí s vnitřním ozubením

Kolo u soukolí s vnitřním ozubením se nazývá korunové kolo. Zuby korunového kola se od vnějšího ozubení liší tím, že mají vydutý tvar. Při záběru pastorku s korunovým kolem leží středy kol na stejné straně od pólu, přičemž smysl otáčení je pro obě kola stejný. Jako využití vnitřního ozubení lze jmenovat hlavně planetové převodovky. Příklad soukolí s vnitřním ozubením je na obr. 1-3.



Obr. 1-3 Soukolí s vnitřním ozubením [9]

### 1.2.1 Základní geometrie vnitřního ozubení

Roztečná kružnice korunového kola se vypočte stejně jako pro vnější ozubení podle rovnice (1-1). Hlavní rozdíl spočívá v tom, že průměr hlavové kružnice je tentokrát menší než průměr roztečné kružnice. Podle [3] nemůže být výška hlavy zubu nikdy rovna modulu, neboť by nastala interference s přechodovou křivkou pastorku. Tento jev se nazývá primární interference. Hlavová kružnice má tedy jistou minimální hodnotu poloměru, která se určí podle následujícího vztahu

$$r_{a3min} = \sqrt{\left(\frac{1}{2} z_3 m \cos \alpha\right)^2 + m^2 \left(\frac{z_3 \sin \alpha}{2} - \frac{1}{\sin \alpha}\right)^2}. \quad (1-11)$$

Průměr patní kružnice je naopak větší než průměr roztečné kružnice a vypočte se

$$d_f = d + 2,5m. \quad (1-12)$$

Základní kružnice vypočtená podle (1-2) je menší než patní, to znamená, že evolventa je definována až k patě zubu. Přechod mezi evolventou a patní kružnicí je definován obloukem  $\rho_f$  o stejném poloměru jako u vnějšího ozubení.

Rozteč, respektive tloušťka zubu a šířka zubové mezery se stanoví stejně jako u vnějšího ozubení z rovnice (1-6), respektive (1-7).

Jak již bylo uvedeno výše, středy obou kol leží na stejné straně od pólu, osová vzdálenost se potom vypočte

$$a = \frac{d_3 - d_2}{2}. \quad (1-13)$$

### 1.2.2 Záběr soukolí s vnitřním ozubením

Krajní body dráhy záběru jsou dány stejně jako u soukolí s vnějším ozubením, tedy bod  $A$  jako průsečík hlavové kružnice korunového kola s přímkou záběru a bod  $B$  jako průsečík hlavové kružnice pastorku s toutéž přímkou. Body  $N_2$  a  $N_3$ , dané průsečíky normál spuštěných ze středů kol  $O_2$  a  $O_3$  s přímkou záběru, leží na stejné straně od pólu. Pozornost je třeba věnovat bodu  $N_2$ , protože hlavová kružnice korunového kola musí mít poloměr stejný nebo větší než vzdálenost  $O_3N_2$ . Bod  $A$  tedy může být totožný s bodem  $N_2$  nebo se může posouvat směrem k pólu, a to z důvodu uvedených v kapitole 1.2.1. Pól  $P$  leží v tečném bodě roztečných kružnic, které se po sobě bezskluzově odvalují.

Dráhu záběru lze rozdělit na dva úseky definované stejně jako pro soukolí s vnějším ozubením a totéž platí o oblouku záběru.

Součinitel záběru profilu vyjadřující průměrný počet párů zubů v záběru je dle [2] dán

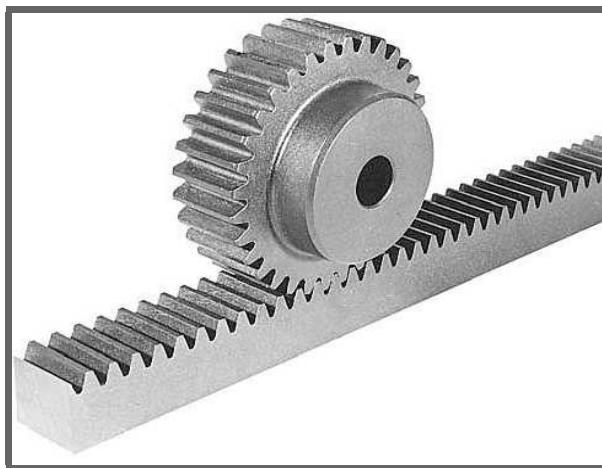
$$\varepsilon_\alpha = \frac{q_\alpha}{p} = \frac{g_\alpha}{p_b} = \frac{\sqrt{d_{a3}^2 - d_{b3}^2} - \sqrt{d_{a2}^2 - d_{b2}^2} + 2a \sin \alpha}{2\pi m \cos \alpha}. \quad (1-14)$$

### 1.3 Záběrové poměry u soukolí s hřebenovým ozubením

Ozubený hřeben je speciální případ ozubeného kola, jehož střed leží v nekonečnu.

Evolventy přechází v přímky a tedy tvar boků zubů hřebene je přímkový. Tvar ozubeného hřebene je základem pro normalizaci ozubení.

Tento typ soukolí se používá pro změnu otáčivého pohybu na přímočarý nebo naopak. Zvláštním případem je pak výrobní hřeben, který se používá k výrobě ozubení. Příklad soukolí s hřebenovým ozubením je na obr. 1-4.



Obr. 1-4 Soukolí s hřebenovým ozubením [11]

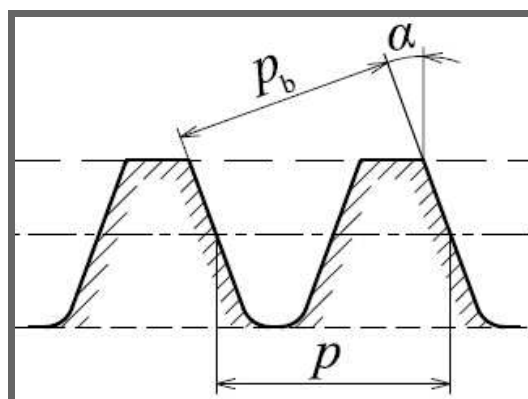
### 1.3.1 Základní geometrie ozubeného hřebene

1.3.1

Všechny charakteristické kružnice ozubeného kola přejdou na ozubeném hřebenu v přímky. Roztečná přímka dělí zub na dvě části. Hlava zuby má výšku modulu a je ohraničena hlavovou přímkou. Pata zuby má výšku  $1,25m$  a je ohraničena patní přímkou. Přejití přímkové části boku zuby do patní přímky je opět provedeno obloukem  $\rho_f$ . Problematika znázornění základní přímky u ozubeného hřebene zůstává podle [2] nevyřešena.

Normály k plochým bokům zubů jsou od roztečné přímky skloněny o úhel profilu  $\alpha$ . Na ozubeném hřebenu je možné změřit dvě rozteče. První je rozteč  $p$  měřená na roztečné přímce mezi dvěma stejnohlými boky sousedních zubů, její velikost je stanovena podle (1-6). Základní rozteč  $p_b$  je měřena na přímce záběru, tj. kolmo ke stejnohlým bokům dvou sousedních zubů, dle [1] platí

$$p_b = p \cos \alpha . \quad (1-15)$$



Obr. 1-5 Základní rozteč

Rozteč a základní rozteč na ozubeném hřebeni je na obr. 1-5. Pro tloušťku zubu a šířku zubové mezery platí vztah (1-7). Obě veličiny jsou měřeny na roztečné přímce.

### 1.3.2 Záběr soukolí s hřebenovým ozubením

Dráha záběru je vymezena body  $A$  a  $B$ . Bod  $A$  je dán průsečíkem přímky záběru s hlavovou přímkou hřebene. Bod  $B$  je dán průsečíkem přímky záběru s hlavovou kružnicí pastorku. Pól  $P$  leží v tečném bodě roztečné přímky hřebene a roztečné kružnice pastorku, které se po sobě bezskluzově odvalují. Bod  $N_2$  vznikne jako průsečík přímky záběru s normálou spuštěnou ze středu  $O_2$  pastorku. Bod  $N_3$  leží v nekonečnu, neboť i střed  $O_3$  leží v nekonečnu. Pro správný záběr soukolí je nezbytné, aby vzdálenost  $AP$  byla menší než vzdálenost  $N_2P$ . Potom hlava zubu hřebene nezasáhne do přechodové křivky zubu pastorku a převodový poměr bude konstantní.

Dráhu i oblouk záběru je možné rozdělit na dva úseky, přičemž platí totéž, co pro soukolí s vnějším ozubením.

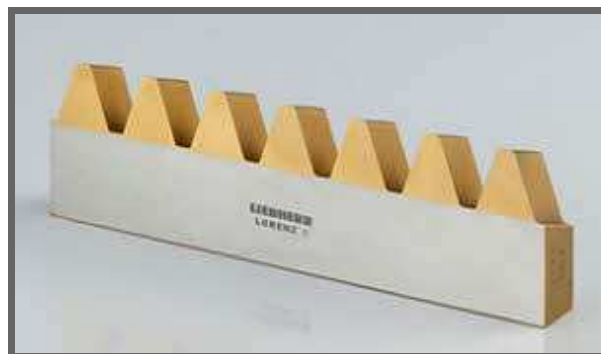
Součinitel záběru profilu má dle [6] tvar

$$\varepsilon_{\alpha} = \frac{g_{\alpha}}{p_b} = \frac{\frac{h_a}{\cos \alpha} + \sqrt{\left(\frac{d_{a2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{d_2 \cos \alpha}{2}\right)^2} - \frac{d_2 \sin \alpha}{2}}{\pi m \cos \alpha}, \quad (1-16)$$

kde  $h_a$  je výška hlavy zubu hřebene.

### 1.4 Výroba čelního ozubení hřebenovým obrážecím nožem

Jedná se o obrázení odvalovacím způsobem, přičemž podle [1] jde o jeden z nejpřesnějších způsobů výroby čelního ozubení. Metoda nese název Maag. Výrobní hřeben koná přímočarý vratný pohyb, zatímco vyráběné kolo se otáčí. Vzájemné odvalování zajišťuje mechanismus výrobního stroje. Hřeben, který je nastaven na výšku zubů vyráběného kola, má počet zubů odpovídající počtu zubových mezer vyrobených jedním průchodem nástroje. Po jednom průchodu hřebene se tento vrátí do výchozí polohy a cyklus se opakuje, dokud nejsou vyrobeny všechny zubové mezery.



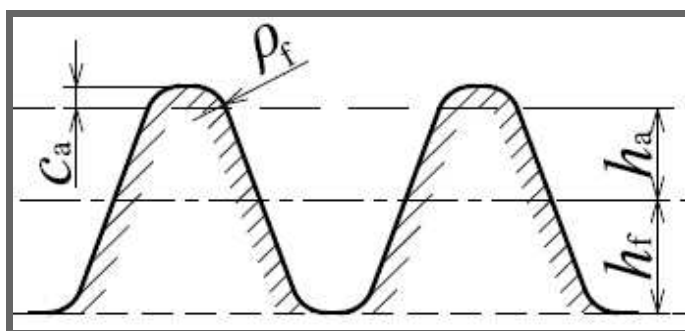
Obr. 1-6 Výrobní hřeben firmy Liebherr [10]

Na obrázcím stroji lze jedním nástrojem vyrábět kola s libovolným počtem zubů, nekorigovaná i korigovaná, s přímými či šikmými zuby. Pro výrobu šikmých zubů se nástroj sklání o úhel sklonu zubů  $\beta$  [7]. Příklad výrobního hřebene je na obr. 1-6.

#### 1.4.1 Konstrukce výrobního hřebene

1.4.1

Vychází se ze základního profilu ozubeného hřebene, výrobní hřeben má však navíc hlavovou nastavbu. Ta má výšku  $c_a$ , což je hlavová vůle. Přejechod mezi bokem zubu a hlavovou nastavbou je proveden obloukem o jistém poloměru. Je-li hlavová vůle obvyklých  $0,25m$ , potom tento poloměr odpovídá poloměru  $\rho_f$  stanovenému z rovnice (1-5). Geometrie výrobního hřebene je znázorněna na obr. 1-7.



Obr. 1-7 Hlavová nastavba

#### 1.5 Podřezání paty zubu

1.5

Podřezání je nežádoucí jev, který vzniká při výrobě. Leží-li bod A, tedy začátek dráhy záběru pastorku s ozubeným hřebenem, za bodem  $N_2$ , dojde ke kolizi hlavy zubu hřebene s patou zubu pastorku. Nástroj, v tomto případě výrobní hřeben, odřízne část patní přechodové křivky zubu a malou část evolventy, která by se jinak účastnila záběru. To má za následek zkrácení dráhy záběru. Mezi jeho další negativní účinky patří zeslabení paty zubu a vznik nové hrany a s tím spojené koncentrace napětí. O podřezání se hovoří jako o výrobní interferenci.

Existuje jistý mezní počet zubů, kdy ještě nedojde k podřezání. Pro pastorek zabírající s výrobním hřebenem platí

$$z_{2\min} \geq \frac{2(h_a^* - x)}{\sin^2 \alpha}, \quad (1-17)$$

kde  $h_a^*$  je součinitel výšky hlavy zubu. Běžně je jeho hodnota 1, pro ozubení se sníženou výškou hlavy zubu pak  $h_a^* = 0,8$ . Bezrozměrná veličina  $x$  je jednotkové posunutí profilu [4].

Pro nekorigované soukolí s úhlem záběru  $20^\circ$  a standardní výškou hlavy zubu je nejmenší počet zubů pastorku bez podřezání

$$z_{2\min} = \frac{2(1 - 0)}{\sin^2 20^\circ} = 17,1 \approx 17.$$

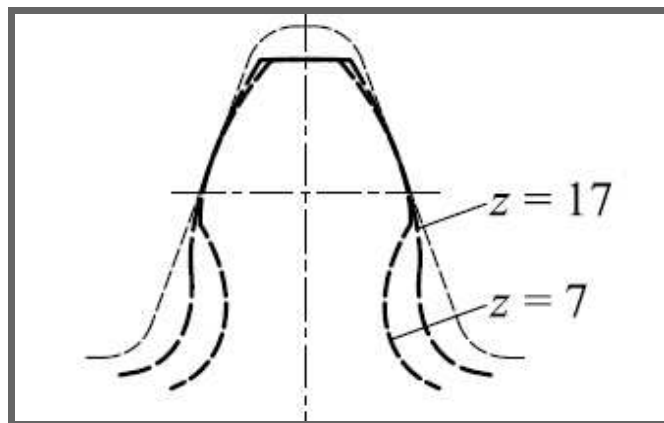
V praxi se však malé podřezání připouští, potom praktický mezní počet zubů pastorku je dle [4] dán

$$z'_{2\min} \geq 14 \left( 1 - \frac{6}{5}x \right). \quad (1-18)$$

Pro nekorigované soukolí s úhlem záběru  $20^\circ$  a standardní výškou hlavy zubu je nejmenší praktický počet zubů pastorku

$$z'_{2\min} = 14 \left( 1 - \frac{6}{5}0 \right) = 14.$$

Podle [4] platí, že podřezání závisí na veličinách  $z$ ,  $x$ ,  $\alpha$  a  $h_a^*$ . Tvar zubu pro pastorek s různým počtem zubů, ale stejným modulem ukazuje obr. 1-8. Zub  $z = 17$  je na hranici podřezání, zatímco zub  $z = 7$  je podřezán.



Obr. 1-8 Podřezání zubu

## 1.6 Korekce zubů kol posunutím profilu

Korekce posunutím profilu je v podstatě posunutí výrobního nástroje vůči vyráběnému kolu o hodnotu součinu  $xm$ , kde  $x$  je jednotkové posunutí a  $m$  modul. Kladné posunutí je směrem od středu kola, přičemž takto vyrobené kolo se označuje jako +V. Kolo -V se získá záporným posunutím, tj. směrem do středu kola. Nekorigované kolo se označuje jako N. Sdružením kol N, +V a -V mohou vzniknout tři různá soukolí N, VN a V [5].

Korekce posunutím profilu se provádí z mnoha různých důvodů. Např. z důvodu zabránění podřezání, snížení kontaktních tlaků či zvýšení ohybové pevnosti zubů. Vždy se však provádí za účelem zlepšení vlastností soukolí.

### 1.6.1 Soukolí N

Pro nekorigované soukolí platí, že ani pastorek ani kolo nejsou korigovány, takže platí

$$x_{\Sigma} = x_2 + x_3 = 0 - 0 = 0.$$

Osová vzdálenost se nemění a je dána rovnicí (1-8).

**1.6.2 Soukolí VN**

Nazývá se jednoduše korigované soukolí. Dle [1] platí, že jednotkové posunutí pastorku má stejnou velikost jako jednotkové posunutí kola, ale je opačného znaménka

$$x_2 = -x_3.$$

I zde platí, že celkové jednotkové posunutí je rovno nule

$$x_{\Sigma} = x_2 + x_3 = 0.$$

Nejmenší korekce potřebná pro zamezení podřezání se dle [1] stanoví

$$x_{min} \geq \frac{17 - z_2}{17}. \quad (1-19)$$

Připustí-li se malé podřezání, nejmenší počet zubů pastorku je potom podle rovnice (1-18) 14 zubů. Praktická nejmenší korekce potom změni tvar na

$$x'_{min} \geq \frac{14 - z_2}{17}, \quad (1-20)$$

přičemž musí platit podmínka  $z_1 + z_2 \geq 28$ . Osová vzdálenost se nemění, je stejná jako pro soukolí N. Celková výška zubů zůstává  $h = 2,25m$ , nicméně měni se výška hlavy i paty zubu ( $h_a \neq m$ ,  $h_f \neq 1,25m$ ) [5].

**1.6.3 Soukolí V**

U obecně korigovaného soukolí má pastorek jiné jednotkové posunutí než kolo, takže platí

$$x_{\Sigma} = x_2 + x_3 \neq 0.$$

Osová vzdálenost se změni, kola musí být při montáži ustavena na provozní vzdálenost os  $a_v$ , která se neshoduje se vzdáleností z rovnice (1-8) [5].

## 2 ANALÝZA PROBLÉMU A CÍL PRÁCE

Z přehledu současného stavu poznání je vidět, že geometrie aplikovaná u evolventního ozubení je komplexním problémem náročným na představivost. Např. body záběru jednotlivých párů zubů se pohybují po přímce záběru, jejich poloha se mění v čase. Také výroba ozubení, či podřezání paty zubu je dynamický proces. Náročnost pochopení záběru ozubených kol navíc zvyšuje korigování těchto kol, kdy se záběrové poměry oproti nekorigovanému soukolí mění. Z toho vyplývá, že je obtížné dostatečně dobře ilustrovat záběrové poměry ozubených soukolí na statických obrázcích.

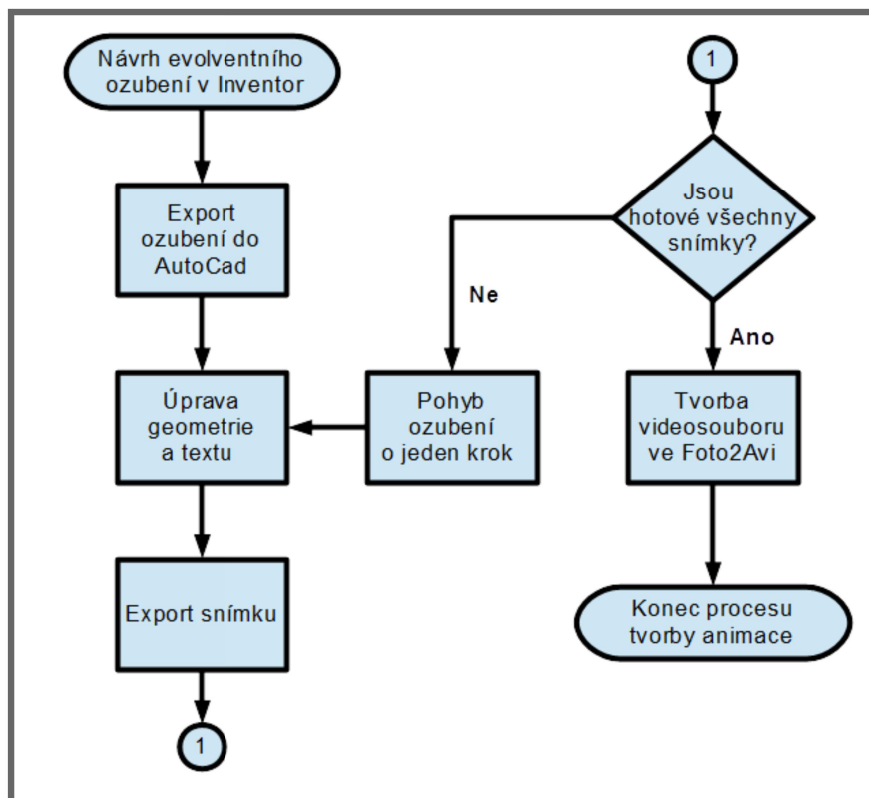
Společný záběr ozubených kol je dynamický proces vyvíjející se v čase. Cílem práce je proto vytvořit animace, které záběr ozubených kol popisují v pohybu, což vede k lepšímu pochopení zákonitostí uplatňujících se při jejich záběru. Vytvořené animace mohou být použity jako pomůcka pro výuku teorie ozubení, např. v předmětu 5KS na fakultě strojního inženýrství v Brně.

Názvy animací spolu s jejich krátkým popisem uvádí následující výčet.

- Záběrové poměry u soukolí s vnějším ozubením  
Zobrazuje zejména dráhu a oblouk záběru pro pastorek s kolem.
- Záběrové poměry u soukolí s vnitřním ozubením  
Zobrazuje zejména dráhu a oblouk záběru pro pastorek s korunovým kolem.
- Záběrové poměry u soukolí s hřebenovým ozubením  
Zobrazuje zejména dráhu a oblouk záběru pro pastorek s ozubeným hřebenem.
- Výroba ozubení hřebenovým nástrojem  
Znáznorňuje průběh výroby čelního ozubení na polotovaru pomocí výrobního hřebene, jedná se o metodu Maag.
- Podřezání paty zubu  
Animace zobrazuje průběh podřezávání paty zubu pastorku výrobním hřebenem.
- Korekce posunutím profilu  
Změnu tvaru zubů, jejich posunutí vůči nekorigovanému soukolí a změnu dráhy záběru ilustruje tato animace.

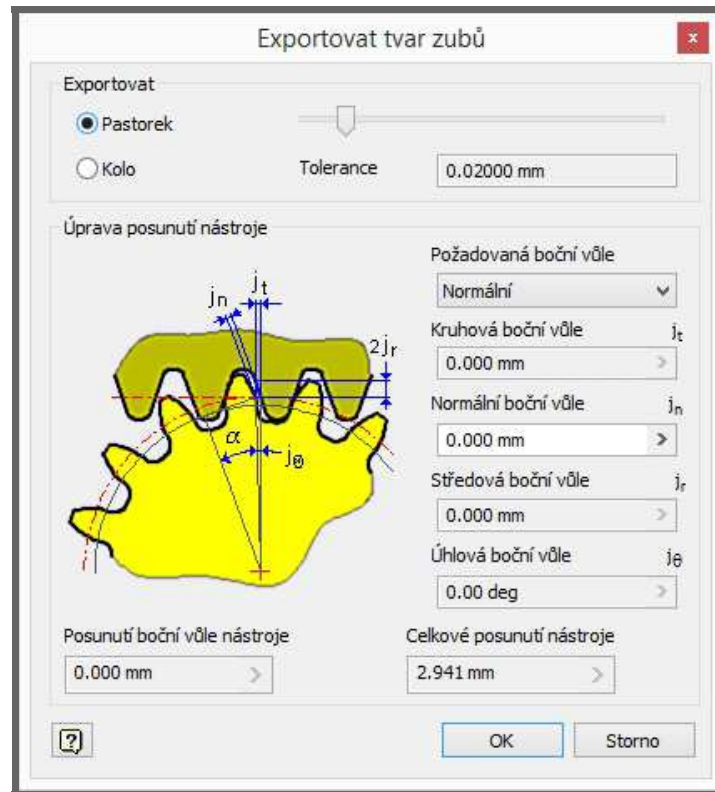
### 3 METODY

Postup tvorby těchto animací lze rozdělit na tři části. V první části je třeba vytvořit potřebnou geometrii ozubení, v tomto případě pomocí programu Autodesk Inventor. Ve druhé části se tato geometrie přenese do programu Autodesk AutoCad, kde se doplní o další nezbytné geometrické útvary a texty. Konečná geometrie potřebná pro animaci se přetržitě otáčí s konstantním krokem, přičemž po každém kroku se provede export obrázku soukolí. Série obrázků se následně ve třetí části spojí v souvislou animaci pomocí softwaru Foto2Avi. Postup práce je znázorněn ve vývojovém diagramu na obr. 3-1.



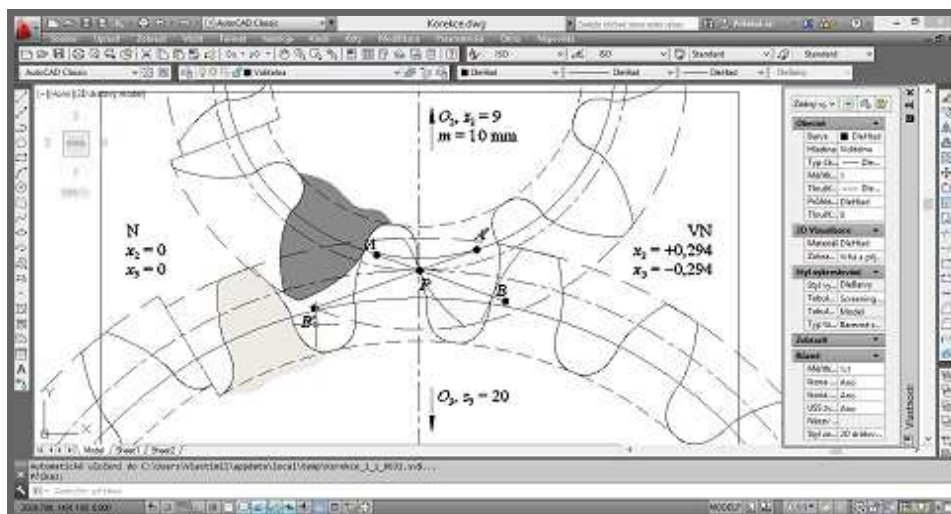
Obr. 3-1 Vývojový diagram tvorby animace

V aplikaci Autodesk Inventor vytvoříme ozubené kolo pomocí generátoru ozubených kol, který je na obr. 3-2. Z nově vytvořeného kola můžeme nechat vygenerovat tvar zubů pomocí volby „Exportovat tvar zubů“. Tento generátor vytvoří evolventní ozubení pomocí ozubeného hřebene, jehož parametry jsou již nastaveny z navrhnutého kola. Je však možné zvolit vůle v soukolí. Pro případ všech animací jsou vůle rovny nule. Vygenerované ozubení exportujeme do aplikace Autodesk AutoCad.



Obr. 3-2 Generátor evolventního ozubení

V AutoCadu se ozubení rozšíří o další geometrii jako jsou kružnice, osy, kóty atd. Je možné přidat šrafování pro lepší orientaci ve výsledné animaci a textová pole popisující základní informace, např. modul či počet zubů. Geometrii, která se má během animace pohybovat, je vhodné uložit do skupiny. Pro pohyb skupiny geometrie lze s výhodou využít makro akcí. Provede se jeden krok pohybu soukolí, makro tento pohyb zaznamená a uloží. Pro další krok už stačí použít uložené makro, které usnadňuje práci s pohybem soukolí. Po každém kroku se provede export snímku soukolí do vhodného formátu, např. JPEG. Prostředí AutoCad je na obr. 3-3.



Obr. 3-3 Prostředí AutoCad

Z vytvořené série snímků je možné vytvořit buď jednoduchou animaci ve formátu gif, nebo vytvořit video. Výhoda videa je, že lze kdykoliv přehrávání zastavit, zrychlit či zpomalit. Toto u gif animací není možné, proto jsou animace vytvořeny jako videa a to pomocí programu Foto2Avi (obr. 3-4). Jednotlivé snímky mají rozlišení  $1321 \times 726$  pixelů, rychlost přehrávání je nastavena na 10 snímků za sekundu.



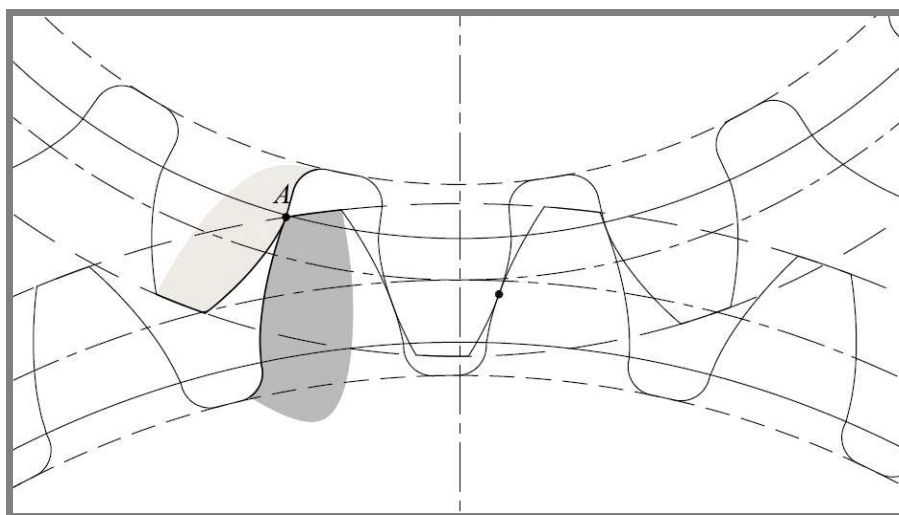
Obr. 3-4 Prostředí Foto2Avi

## 4 VÝSLEDKY

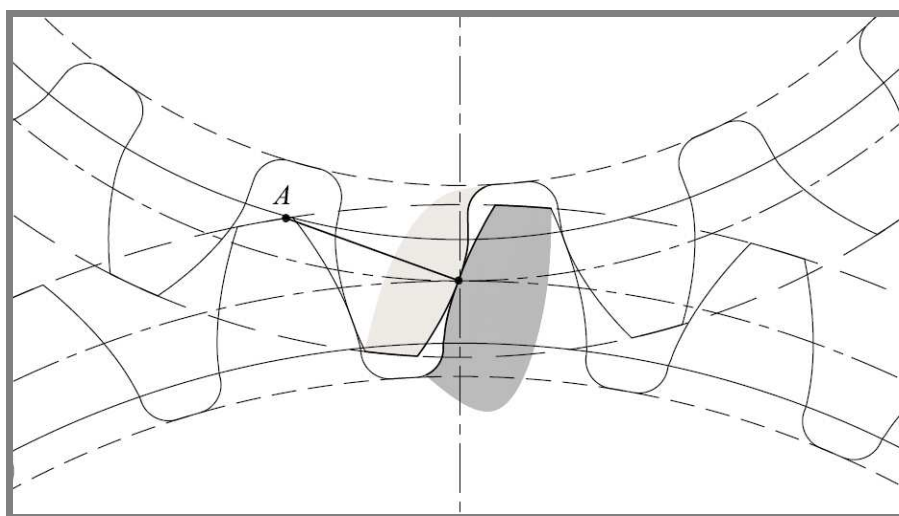
Hotové animace vytvořené postupem uvedeným v předchozí kapitole demonstrují postupně dráhu záběru (vnější, vnitřní a hřebenové ozubení), výrobu ozubení, podřezání paty zubu a nakonec korekci posunutím profilu. V této kapitole je podrobněji vyloženo obsah jednotlivých animací.

### 4.1 Záběrové poměry u soukolí s vnějším ozubením

Nejprve se postupně vykreslí všechny charakteristické kružnice ozubení, tj. roztečné, základní, hlavové a patní kružnice. Po vykreslení jednoho páru zubů následuje celé ozubení, přičemž pozornost je věnována právě jednomu páru zubů, což naznačuje použité barevné šrafování. Pastorek je v horní části, kolo ve spodní. Po uvedení soukolí do pohybu se jako první bod záběru sledovaného páru zubů objeví bod A (obr. 4-1), který je dán průsečíkem hlavové kružnice kola s přímkou záběru.



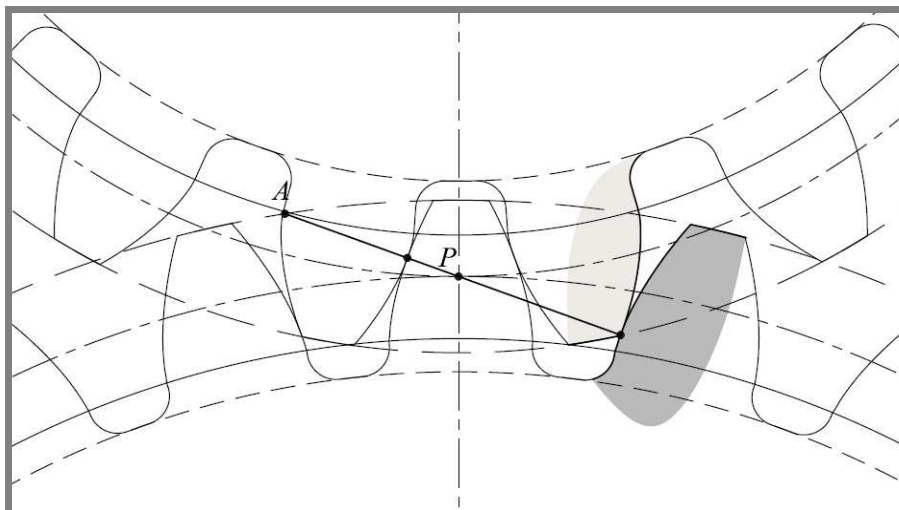
Obr. 4-1 Vnější ozubení - začátek záběru



Obr. 4-2 Vnější ozubení – pól pohybu

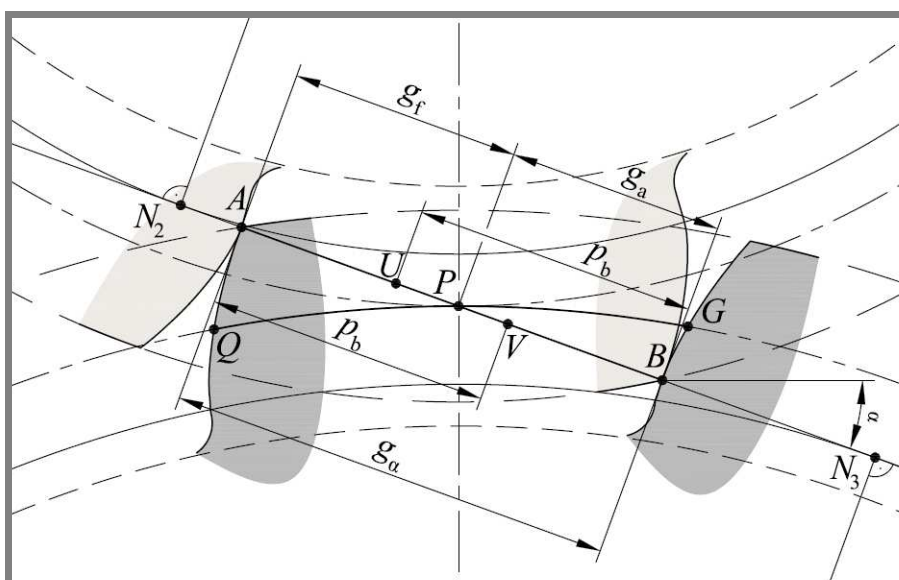
Po dalším pohybu soukolí se sledovaný bod dostane do bodu  $P$ , pólu pohybu, který leží v tečném bodě roztečných kružnic (obr. 4-2). Pól  $P$  je jediným bodem záběru, kde dochází ke zcela bezskluzovému záběru zubů.

Posledním bodem záběru je bod  $B$ , který leží na průsečíku hlavové kružnice pastorku s přímkou záběru (obr. 4-3).



Obr. 4-3 Vnější ozubení – konec záběru

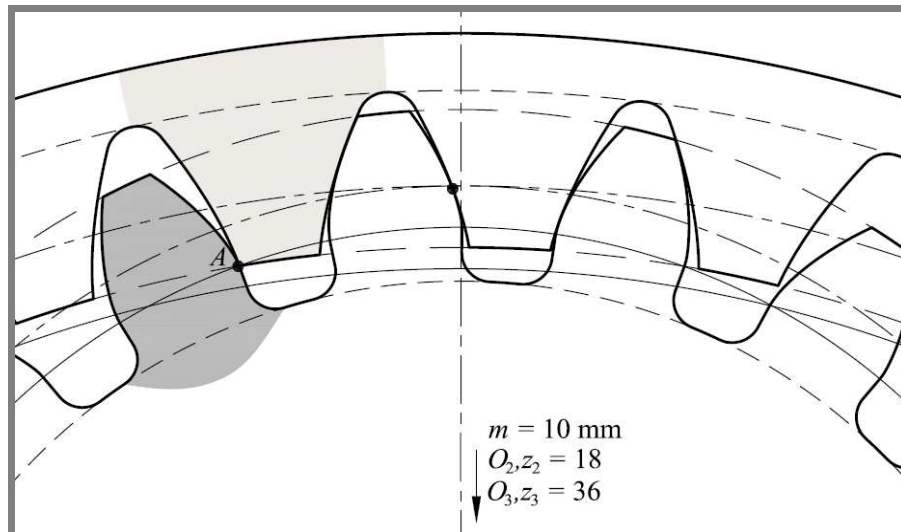
V dalším kroku se zobrazí dva páry zubů, jeden na začátku záběru a druhý na jeho konci (obr. 4-4). Postupně se objeví přímka záběru, oblouk záběru s body  $Q$  a  $G$ , dráha záběru  $g_a$ , dráha náběhu  $g_f$  a výběhu  $g_a$  a základní rozteč  $p_b$ . Podíl délky dráhy záběru a základní rozteče je součinitel záběru, což je důležitý parametr soukolí. Normály k přímce záběru, spuštěné ze středu jednotlivých kol, vytínají na této body  $N_2$  a  $N_3$ , které vymezují maximální možnou délku záběru.



Obr. 4-4 Vnější ozubení – dráha záběru

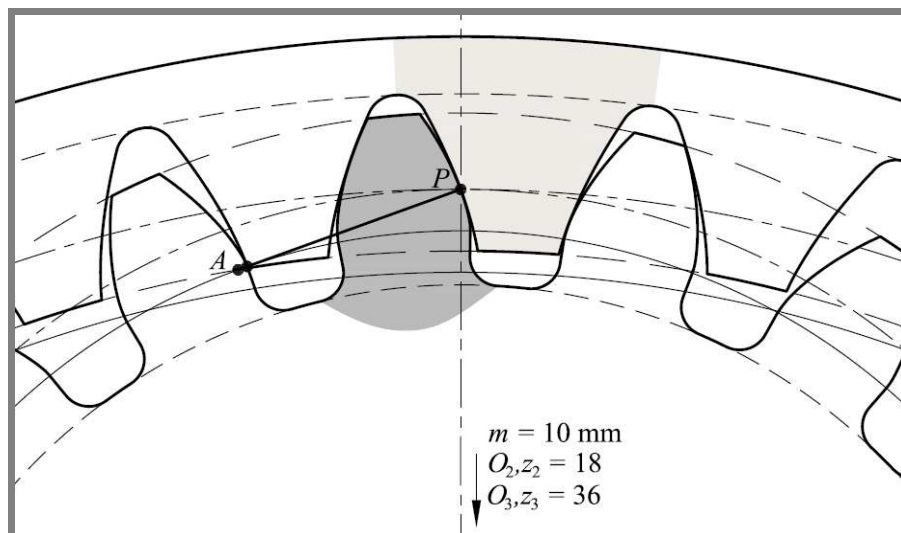
## 4.2 Záběrové poměry u soukolí s vnitřním ozubením

Zde se jedná o velmi podobný případ jako u předchozí úlohy. První bod záběru sledovaného páru zubů je bod  $A$ , který je dán průsečíkem hlavové kružnice korunného kola s přímkou záběru (obr. 4-5). V tomto případě má hlavová kružnice korunného kola nejmenší možný poloměr stanovený z rovnice (1-11).



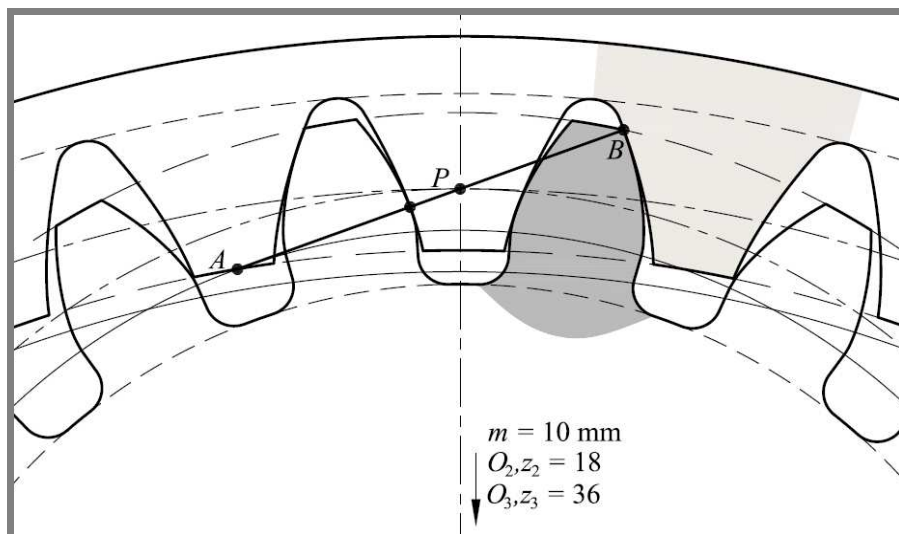
Obr. 4-5 Vnitřní ozubení – začátek záběru

Po dalším pohybu soukolí se sledovaný bod dostane do bodu  $P$ , pólu pohybu, který leží v tečném bodě roztečných kružnic (obr. 4-6). Pól  $P$  je jediným bodem záběru, kde dochází ke zcela bezsluzovému záběru zubů.



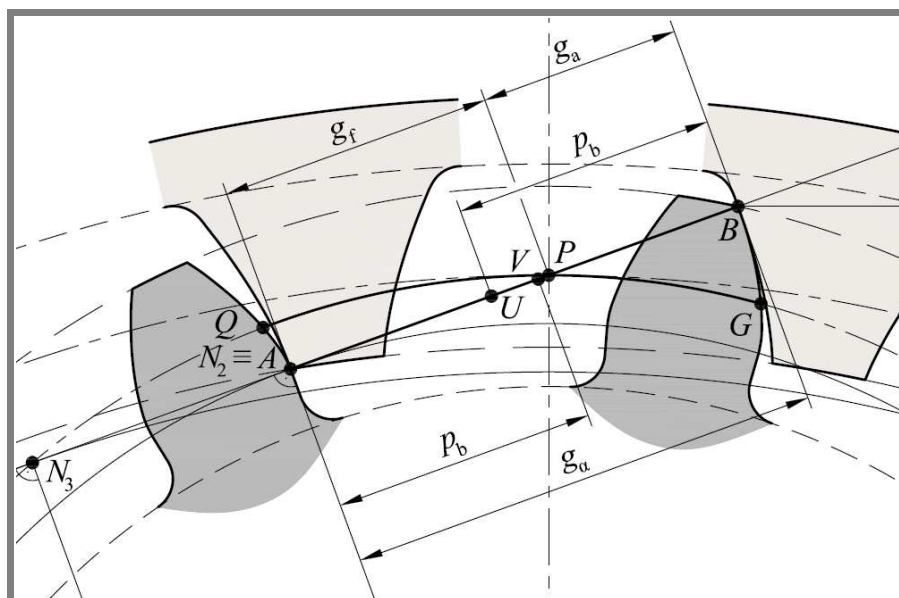
Obr. 4-6 Vnitřní ozubení – pól pohybu

Posledním bodem záběru je bod  $B$ , který leží na průsečíku hlavové kružnice pastorku s přímkou záběru (obr. 4-7).



Obr. 4-7 Vnitřní ozubení – konec záběru

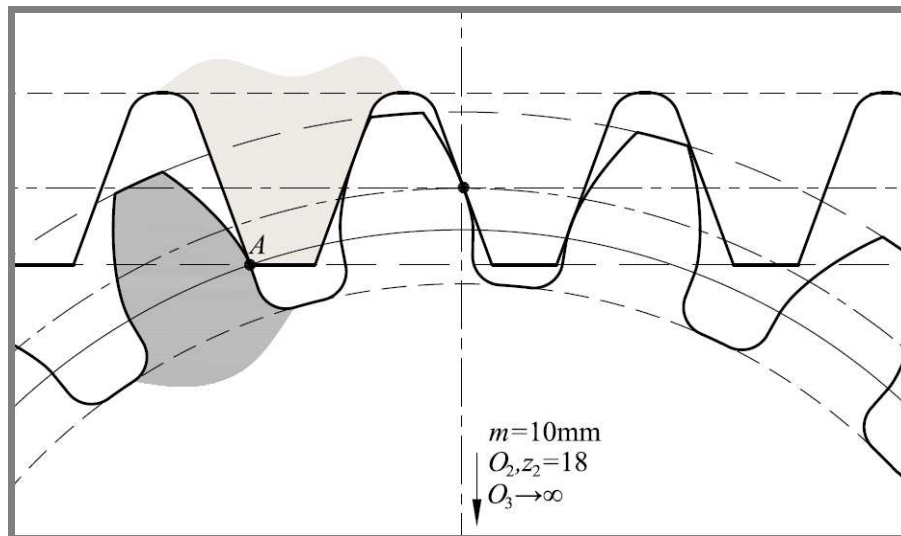
V dalším kroku se zobrazí dva páry zubů, jeden na začátku záběru a druhý na jeho konci (obr. 4-8). Postupně se objeví přímka záběru, oblouk záběru s body  $Q$  a  $G$ , dráha záběru  $g_a$ , dráha náběhu  $g_f$  a výběhu  $g_b$  a základní rozteč  $p_b$ . Normály k přímce záběru, spuštěné ze středu jednotlivých kol, vytínají na této body  $N_2$  a  $N_3$ . Zde bod  $N_2$  je totožný s bodem  $A$ .



Obr. 4-8 Vnitřní ozubení – dráha záběru

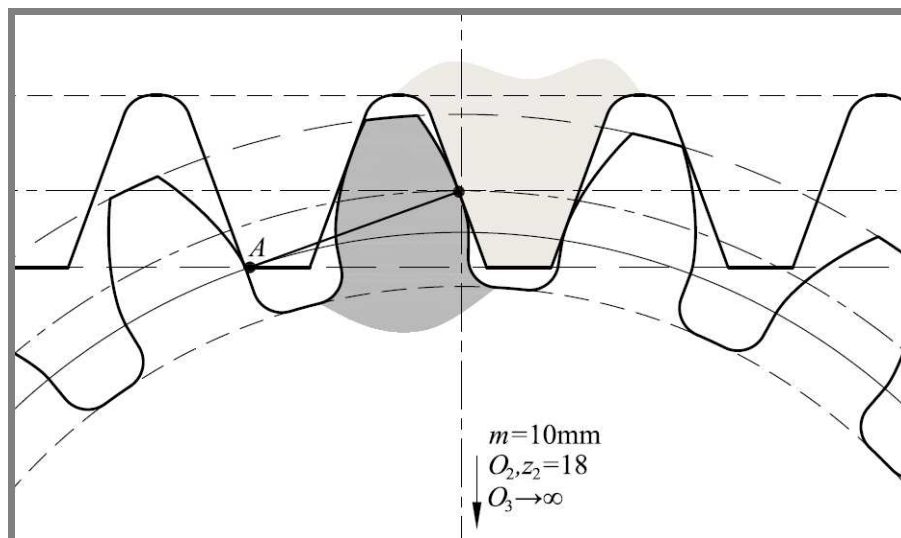
### 4.3 Záběrové poměry u soukolí s hřebenovým ozubením

Po vykreslení potřebné geometrie se soukolí dá do pohybu, přičemž je sledován opět jeden pár zubů. První bod záběru, bod  $A$ , se nachází na průsečíku hlavové přímky hřebene s přímkou záběru (obr. 4-9).



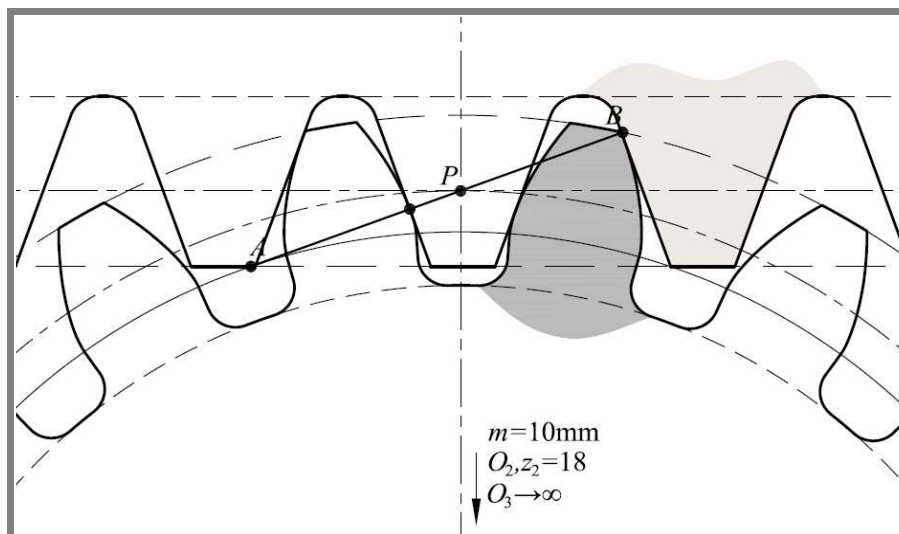
Obr. 4-9 Hřebenové ozubení – začátek záběru

Po dalším pohybu soukolí se sledovaný bod dostane do bodu  $P$ , pólu pohybu, který leží v tečném bodě roztečné kružnice pastorku s roztečnou přímkou hřebene (obr. 4-10).



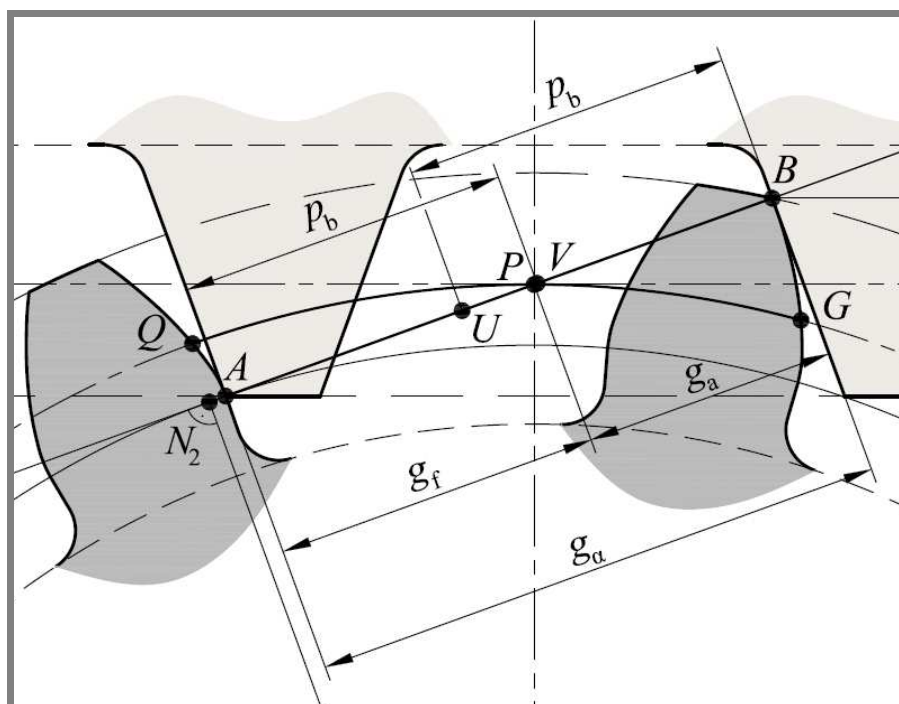
Obr. 4-10 Hřebenové ozubení – pól pohybu

Posledním bodem záběru je bod  $B$ , který leží na průsečíku hlavové kružnice pastorku s přímkou záběru (obr. 4-11).



Obr. 4-11 Hřebenové ozubení – konec záběru

V dalším kroku se zobrazí dva páry zubů, jeden na začátku záběru a druhý na jeho konci (obr. 4-12). Postupně se objeví přímka záběru, oblouk záběru s body  $Q$  a  $G$ , dráha záběru  $g_a$ , dráha náběhu  $g_f$  a výběhu  $g_a$  a základní rozteč  $p_b$ . Bod  $N_2$  je dán průsečíkem normály jdoucí ze středu pastorku s přímkou záběru. Avšak bod  $N_3$  leží v nekonečnu, neboť i střed  $O_3$  hřebene leží v nekonečnu.

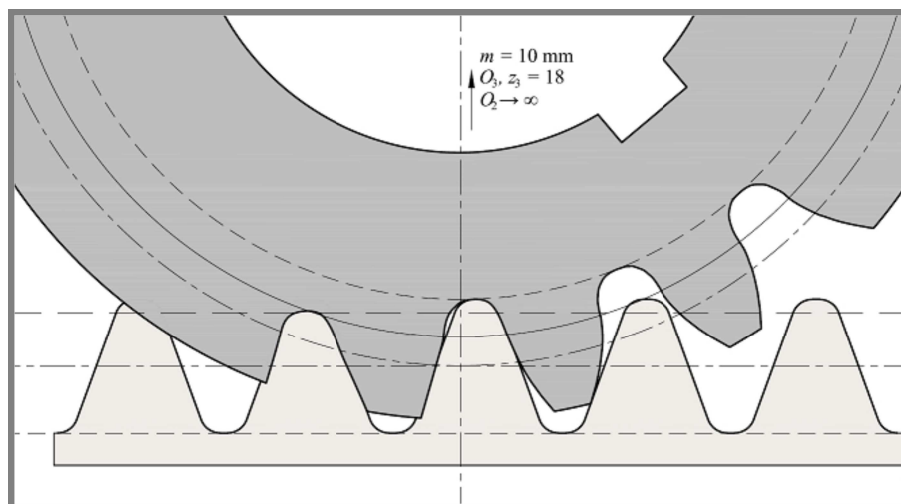


Obr. 4-12 Hřebenové ozubení – dráha záběru

#### 4.4 Výroba ozubení hřebenovým nástrojem

Animace demonstruje výrobu čelního ozubení pomocí výrobního hřebene. Jedná se o metodu Maag. Hřeben, který má pět zubů, přijíždí ke kolu a je nastaven na výšku zubu vyráběného kola. Vzájemný pohyb je proveden přetržitě, přičemž při každém

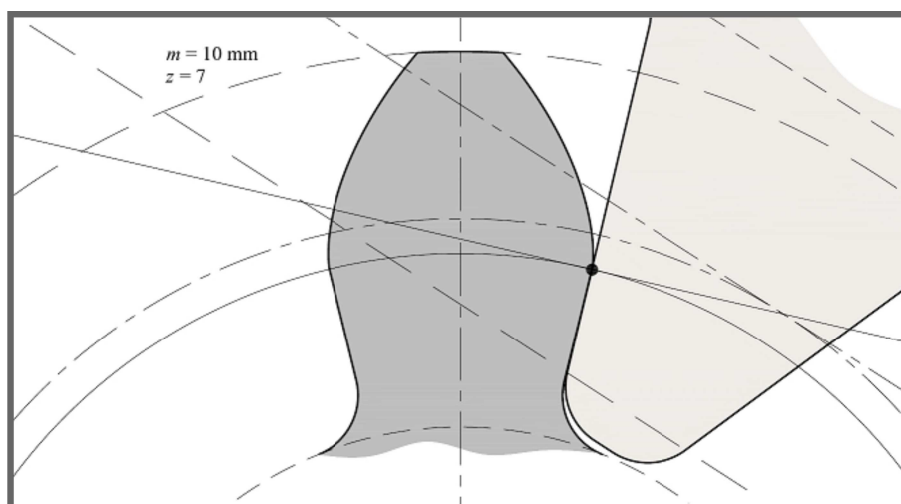
zastavení pohybu se provede odebrání materiálu z kola. Výsledný dojem je takový, že kolo obaluje hřeben, a tím se na bocích zubů kola tvoří evolventní profil. Ukázka z animace je na obr. 4-13.



Obr. 4-13 Výroba ozubení

#### 4.5 Podřezání paty zubu

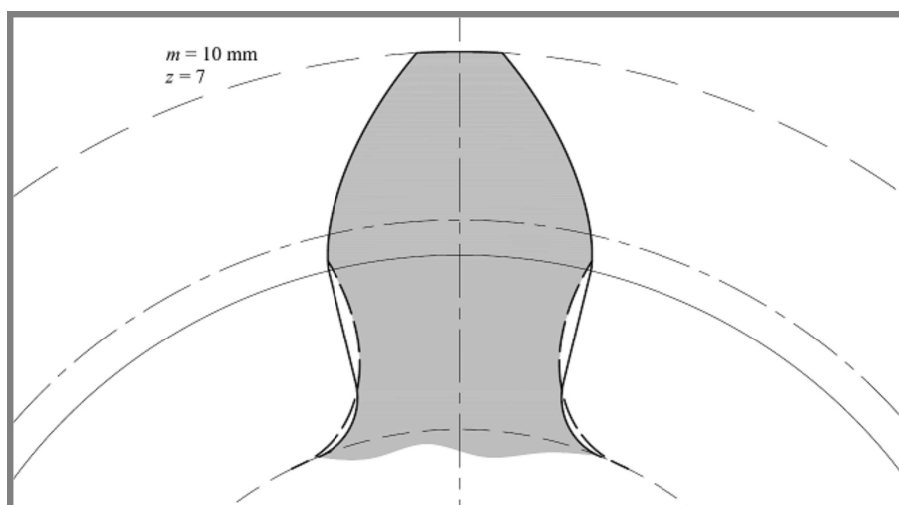
Tato animace ukazuje průběh podřezání paty zubu pastorku, který má sedm zubů, a hrozí mu tudíž nebezpečí podřezání při výrobě. Nástrojem je výrobní hřeben, v tomto případě pouze jeden zub. Zub pastorku stojí nehybně, zatímco zub nástroje koná složený pohyb. V první části se zub nástroje odvalí po boku zubu pastorku až k poslednímu bodu evolventy na pastorku. V tuto chvíli je bok zubu nástroje rovnoběžný s radiální úsečkou tvořící přechod mezi evolventou a patní přechodovou křivkou na pastorku (obr. 4-14).



Obr. 4-14 Podřezání paty zubu

Dále dochází k samotnému podřezání paty zubu. Kromě odříznutí materiálu z patní přechodové křivky se odřízne i část evolventy, která by se jinak účastnila záběru. Na

závěr je čárkovaně zobrazen tvar paty zubu vytvořený tímto nástrojem, zatímco plně je zobrazen teoretický tvar paty nepodřezaného zubu (obr. 4-15).

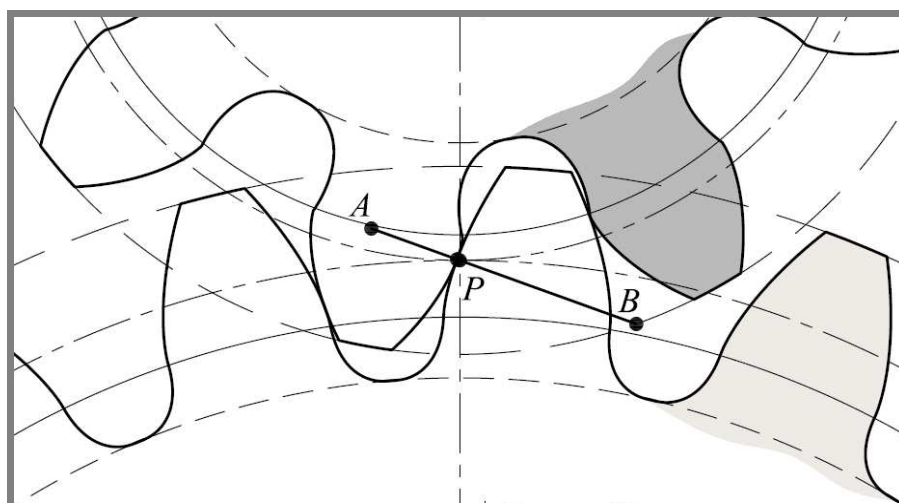


Obr. 4-15 Porovnání podřezaného a nepodřezaného zubu

#### 4.6 Korekce posunutím profilu

4.6

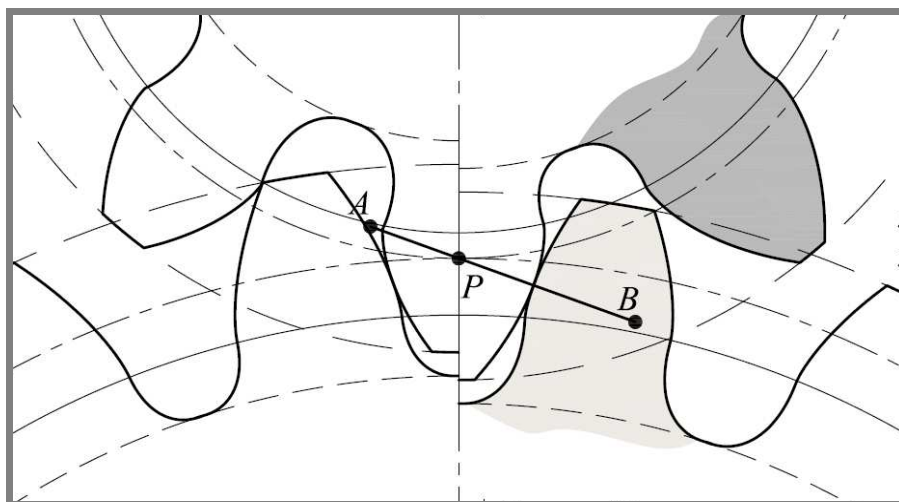
Tato animace porovnává záběr soukolí typu N se soukolím typu VN. Nejprve dojde k záběru nekorigovaného soukolí, přičemž zuby pastorku jsou podřezány. Dráha záběru je proto výrazně kratší. Bod začátku záběru *A* leží na průsečíku přímky záběru s kružnicí, jejíž poloměr je dán vzdáleností od středu pastorku k nejbližšímu bodu nepodřezané evolventy. Celou dráhu záběru nekorigovaného soukolí ukazuje obr. 4-16.



Obr. 4-16 Dráha záběru nekorigovaného soukolí

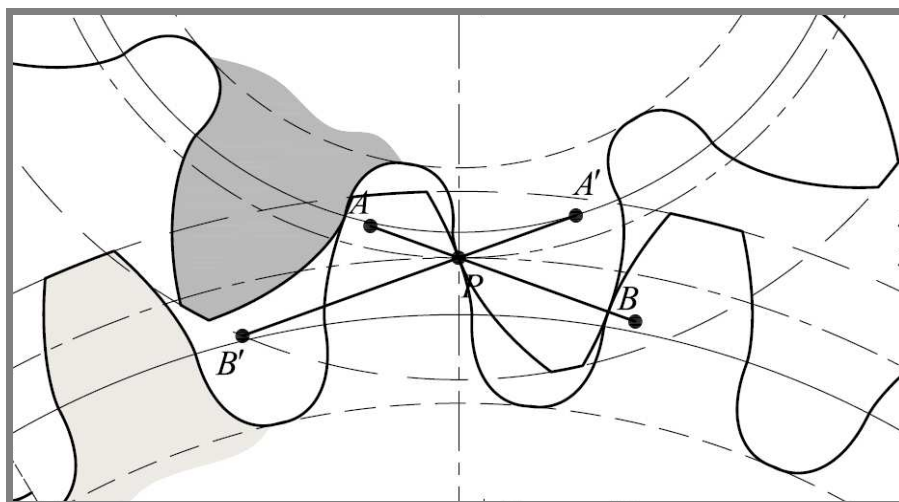
V další části se polovina soukolí zamění s jednoduše korigovaným soukolím. Velikost korekce je stanovena z rovnice (1-20), připouští se tedy malé podřezání. Kružnice základní i roztečné se nemění, stejně tak i výška zubů. Zuby pastorku se však posunou o hodnotu  $x_2m$  směrem od středu pastorku, zatímco zuby kola se

posunou o  $x_3m$  směrem do středu kola. Změní se tedy výška hlavy i paty zubů, avšak při zachování stejné výšky zubu. Srovnání obou soukolí je na obr. 4-17.



Obr. 4-17 Srovnání soukolí N se soukolím VN

Protože použitá korekce připouští malé podřezání, nemůže začátek dráhy záběru korigovaného soukolí, bod  $A'$ , ležet na průsečíku přímky záběru s hlavovou kružnicí kola, ale je dán obdobnou konstrukcí jako bod  $A$  u nekorigovaného soukolí. Po uvedení soukolí do pohybu se zobrazí dráha záběru soukolí typu VN. Dráha je výrazně delší oproti dráze soukolí typu N, tudíž tato korekce příznivě ovlivnila záběr soukolí. Porovnání obou drah je na obr. 4-18.



Obr. 4-18 Srovnání dráhy záběru soukolí N se soukolím VN

## **5 ZÁVĚR**

Cílem této bakalářské práce bylo vytvořit animace popisující záběrové poměry rovinného evolventního ozubení. Celkem vzniklo šest animací, z nichž jedna byla odzkoušena přímo ve výuce.

Záběr dvou ozubených kol je sám o sobě dynamický proces. Pro lepší představu tohoto procesu je třeba jej sledovat v pohybu. Vytvořené animace respektují tento fakt a zobrazují soukolí v pohybu, což je snazší pro pochopení v porovnání se statickými obrázky.

## 6 SEZNAM POUŽITÝCH ZDROJŮ

---

- [1] SHIGLEY, Joseph Edward, Charles R MISCHKE a Richard G BUDYNAS. *Konstruování strojních součástí*. 1. vyd. Editor Martin Hartl, Miloš Vlk. Brno: VUTIUM, 2010, 1159 s. ISBN 978-80-214-2629-0.
- [2] RADZEVICĚ, Stepan Pavlovič. *Theory of gearing: kinematics, geometry, and synthesis*. Boca Raton: CRC Press, c2013, xlviii 695 s. ISBN 978-1-4665-1448-5.
- [3] BARTOŠ, Josef. *Ozubená soukolí valivá a šroubová: příručka pro praxi a pomůcka k odbornému studiu*. 1. vyd. Praha: Práce, 1951, 365 s.
- [4] BOLEK, A., KOCHMAN, J. *Části strojů, svazek 2*. Praha: SNTL, 1990. ISBN 80-03-00426-8.
- [5] Kříž, Rudolf. *Stavba a provoz strojů II: převody*. 1. vyd. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1978. 174 s.
- [6] RATTAN, S. *Theory of Machines*. New Delhi: Tata McGraw-Hill, 2009. ISBN 13-978-0-07-014477-4.
- [7] Rybka, Libor. *Název: Technologie obrábění čelních ozubených kol*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2009. s., příloh. Doc.Ing.Jaroslav Prokop,CSc.
- [8] *Motion Dynamics* [online]. [cit. 2015-05-13]. Dostupné z: <https://www.motiondynamics.com.au/gearboxes-which-type.html>.
- [9] *Hewitt & Topham: Gear specialists* [online]. [cit. 2015-05-13]. Dostupné z: <http://www.hewitt-topham.co.uk/spur-gears.html>.
- [10] *Liebherr* [online]. [cit. 2015-05-13]. Dostupné z: [http://www.liebherr.com/GT/de-DE/products\\_gt.wfw/id-19299-0](http://www.liebherr.com/GT/de-DE/products_gt.wfw/id-19299-0).
- [11] *RoboCLOCK - Mechatronics Project* [online]. [cit. 2015-05-15]. Dostupné z: [http://mech.vub.ac.be/teaching/info/mechatronica/finished\\_projects\\_2015/team\\_6/index.html](http://mech.vub.ac.be/teaching/info/mechatronica/finished_projects_2015/team_6/index.html).

**7 SEZNAM POUŽITÝCH ZKRATEK, SYMBOLŮ A VELIČIN**

|                          |  |
|--------------------------|--|
| $A$                      | - počáteční bod dráhy záběru                               |
| $B$                      | - koncový bod dráhy záběru                                 |
| $G$                      | - koncový bod záběrového oblouku                           |
| $N$                      | - průsečík přímky záběru s normálou vedenou ze středu kola |
| $O$                      | - střed ozubeného kola                                     |
| $P$                      | - pól pohybu   |
| $Q$                      | - počáteční bod záběrového oblouku                         |
| $a$ [mm]                 | - osová vzdálenost   |
| $a_v$ [mm]               | - provozní vzdálenost os                                   |
| $c_a$ [mm]               | - hlavová vůle   |
| $d$ [mm]                 | - průměr roztečné kružnice                                 |
| $d_a$ [mm]               | - průměr hlavové kružnice                                  |
| $d_b$ [mm]               | - průměr základní kružnice                                 |
| $d_f$ [mm]               | - průměr patní kružnice                                    |
| $e$ [mm]                 | - šířka zubové mezery                                      |
| $g_a$ [mm]               | - dráha výběhu   |
| $g_f$ [mm]               | - dráha náběhu   |
| $g_\alpha$ [mm]          | - dráha záběru   |
| $h$ [mm]                 | - výška zubu   |
| $h_a$ [mm]               | - výška hlavy zubu   |
| $h_a^*$ [1]              | - součinitel výšky hlavy zubu                              |
| $h_f$ [mm]               | - výška paty zubu  |
| $i$ [1]                  | - převodový poměr  |
| $m$ [mm]                 | - modul  |
| $p$ [mm]                 | - rozteč   |
| $p_b$ [mm]               | - základní rozteč  |
| $q_a$ [mm]               | - oblouk výběhu  |
| $q_f$ [mm]               | - oblouk náběhu  |
| $q_\alpha$ [mm]          | - oblouk záběru  |
| $r_{a3min}$ [mm]         | - minimální poloměr hlavové kružnice korunového kola       |
| $s$ [mm]                 | - tloušťka zubu  |
| $x$ [1]                  | - jednotkové posunutí                                      |
| $x_\Sigma$ [1]           | - celkové jednotkové posunutí                              |
| $z$ [1]                  | - počet zubů ozubeného kola                                |
| $\alpha$ [°]             | - úhel záběru  |
| $\beta$ [°]              | - úhel sklonu zubu   |
| $\varepsilon_\alpha$ [1] | - součinitel záběru  |
| $\rho_f$ [mm]            | - poloměr přechodové křivky                                |

## 8 SEZNAM OBRÁZKŮ A GRAFŮ

---

|           |  |
|-----------|--|
| Obr. 1-1  | Soukolí s vnějším ozubením                     |
| Obr. 1-2  | Základní rozměry vnějšího ozubení              |
| Obr. 1-3  | Soukolí s vnitřním ozubením                    |
| Obr. 1-4  | Soukolí s hřebenovým ozubením                  |
| Obr. 1-5  | Základní rozteč                                |
| Obr. 1-6  | Výrobní hřeben firmy Liebherr                  |
| Obr. 1-7  | Hlavová nástavba                               |
| Obr. 1-8  | Podřezání zubu                                 |
| Obr. 3-1  | Vývojový diagram tvorby animace                |
| Obr. 3-2  | Generátor evolventního ozubení                 |
| Obr. 3-3  | Prostředí AutoCad                              |
| Obr. 3-4  | Prostředí Foto2Avi                             |
| Obr. 4-1  | Vnější ozubení - začátek dráhy záběru          |
| Obr. 4-2  | Vnější ozubení - pól pohybu                    |
| Obr. 4-3  | Vnější ozubení - konec dráhy záběru            |
| Obr. 4-4  | Vnější ozubení - dráha záběru                  |
| Obr. 4-5  | Vnitřní ozubení - začátek dráhy záběru         |
| Obr. 4-6  | Vnitřní ozubení - pól pohybu                   |
| Obr. 4-7  | Vnitřní ozubení - konec dráhy záběru           |
| Obr. 4-8  | Vnitřní ozubení - dráha záběru                 |
| Obr. 4-9  | Hřebenové ozubení - začátek dráhy záběru       |
| Obr. 4-10 | Hřebenové ozubení - pól pohybu                 |
| Obr. 4-11 | Hřebenové ozubení - konec dráhy záběru         |
| Obr. 4-12 | Hřebenové ozubení - dráha záběru               |
| Obr. 4-13 | Výroba ozubení                                 |
| Obr. 4-14 | Podřezání paty zubu                            |
| Obr. 4-15 | Porovnání podřezaného a nepodřezaného zubu     |
| Obr. 4-16 | Dráha záběru nekorigovaného soukolí            |
| Obr. 4-17 | Srovnání soukolí N se soukolím VN              |
| Obr. 4-18 | Srovnání dráhy záběru soukolí N se soukolím VN |