

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A
BIOMECHANIKY

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND BIOMECHANICS

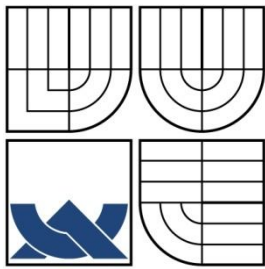
PŘEHLED VYUŽÍVÁNÍ SINGULÁRNÍCH FUNKCÍ PŘI VÝUCE DEFORMAČNÍCH CHARAKTERISTIK NOSNÍKU

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE
BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE
AUTHOR

ŠTĚPÁN SEJBAL

BRNO 2009



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A
BIOMECHANIKY

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND
BIOMECHANICS

PŘEHLED VYUŽÍVÁNÍ SINGULÁRNÍCH FUNKCÍ PŘI VÝUCE DEFORMAČNÍCH CHARAKTERISTIK NOSNÍKU

OVERVIEW OF APPLICATION OF SINGULARITY FUNCTIONS IN EDUCATION OF THE
BEAM DEFORMATION CHARACTERISTICS

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE
BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE
AUTHOR

ŠTĚPÁN SEJBAL

VEDOUCÍ PRÁCE
SUPERVISOR

Ing. JANA HORNÍKOVÁ, Ph.D.

BRNO 2009

Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství

Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky

Akademický rok: 2008/2009

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

student(ka): Štěpán Sejbal

který/která studuje v bakalářském studijním programu

obor: **Mechatronika (3906R001)**

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Přehled využívání singulárních funkcí při výuce deformačních charakteristik nosníku.

v anglickém jazyce:

Overview of application of singularity functions in education of the beamdeformation characteristics.

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Shromáždění literárních podkladů k zavádění singulárních funkcí při výpočtu deformace prutu a porovnání jejich užití na zahraničních vysokých školách a ve světové literatuře.

Cíle bakalářské práce:

Porovnání literárních podkladů k zavádění singulárních funkcí a jejich užití na zahraničních vysokých školách a ve světové literatuře. Popsat některé příklady užití těchto funkcí při výpočtech deformačních charakteristik.

Seznam odborné literatury:

Shigley JE, Mischke CR, Budynas RG: Mechanical Engineering Design, McGraw-Hill, 2004.
Internet.

Vedoucí bakalářské práce: Ing. Jana Horníková, Ph.D.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2008/2009.

V Brně, dne 18.11.2008

L.S.

prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc.
Ředitel ústavu

doc. RNDr. Miroslav Doupovec, CSc.
Děkan fakulty

Abstrakt

Účelem práce je shromáždění a porovnání literárních podkladů k zavádění singulárních funkcí a jejich užití na zahraničních vysokých školách a ve světové literatuře.

Klíčová slova

Macaulayho funkce, singulární funkce, ohyb nosníku

Abstract

The purpose of this work is gathering and comparing of literary foundations to implementing of singular functions and their applications at foreign universities and in world literature.

Keywords

Macaulay functions, singularity functions, beam deflection

Citace

SEJBAL, Š. *Přehled využívání singulárních funkcí při výuce deformačních charakteristik nosníku*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2009. 27 s. Vedoucí bakalářské práce Ing. Jana Horníková, Ph.D.

Prohlášení

Tímto prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracoval sám za pomoci vedoucí závěrečné práce Ing. Jany Horníkové, Ph.D. a za pomoci literatury, která mi byla zapůjčena, nebo jsem vyhledal.

Štěpán Sejbal

Poděkování

Děkuji všem, kteří mi pomohli, nebo poradili při psaní bakalářské práce. Obzvláště děkuji své vedoucí bakalářské práce Ing. Janě Horníkové, Ph.D., bez jejíž pomoci by tato práce jen stěží spatřila světlo světa.

Obsah

Abstrakt a klíčová slova	1
Citace	2
Prohlášení	3
Poděkování.....	4
Obsah.....	5
1 Úvod	6
2 Zavedení singulárních funkcí	7
2.1 Definování pojmů	7
2.2 Úvod k Macaulayho metodě.....	7
2.3 Zobecněné funkce	7
2.4 Nespojivosti v zatížení – Macaulayho přístup.....	9
2.5 Nespojivosti při rotaci a posunutí	11
2.6 Vázaný nosník	11
3 Užití singulárních funkcí	16
3.1 Analýza výpočtového toku v lineárních plánech	16
3.2 Lomová mechanika	16
3.3 Únava materiálů	16
3.4 Mechanické vlastnosti kovových látek	16
3.5 Statistická fyzika	17
4 Příklad	18
4.1 Zadání příkladu	18
4.2 Standardní řešení	18
4.3 Řešení užitím singulárních funkcí	23
5 Závěr	26
Použitá literatura	27

1 Úvod

Cílem práce je shromáždění a porovnání literárních podkladů k zavádění singulárních funkcí a jejich užití na zahraničních vysokých školách a ve světové literatuře.

Singulární funkce představují matematickou metodu používanou v celé řadě technických vědních disciplín. Je známo, že nejčastěji jsou aplikovány při popisu zatížení nosníku. V této práci byly shromážděny některé údaje o jejich používání i v jiných disciplínách, ale hlavní důraz je kladen na určení ohybové čáry nosníku namáhaného ohybem.

Po zavedení singulárních funkcí a popisu Macaulayho přístupu jsou uvedeny výsledky literární rešerše a užití v oblasti Pružnosti a pevnosti je demonstrováno na porovnání standardního řešení ohybové čáry staticky neurčitě uloženého nosníku s řešením pomocí Macaulayho přístupu.

Ohybová diferenciální rovnice představuje jeden ze základních kamenů teorie mechaniky těles. Rovnice ohybové čáry je popsána diferenciální rovnicí druhého řádu, když je zatížení charakterizováno pomocí funkce vyjadřující průběh ohybového momentu. Využijí-li se vztahy Schwedlerovy věty, rovnice ohybové čáry jsou pak popsány diferenciální rovnicí čtvrtého řádu, ve které je zatížení charakterizováno pomocí zatěžovací funkce $q(x)$.

Obvyklý přístup řešení spočívá v sepsání diferenciálních rovnic 2. řádu zvlášť pro každou část nosníku, ve které je zatížení spojitě. Jestliže rozdělíme nosník na n částí, musíme počítat se $2n$ integračními konstantami a potřebujeme $2n$ dalších podmínek. Pokud je tedy nosník zatížen velkým počtem nespojitých zatížení, stává se výpočet obtížným.

Alternativním přístupem je Macaulayho metoda, ta je založena na použití zobecněných funkcí, které nás mají zbavit velkého počtu nespojitostí a snížit počet integračních konstant na čtyři.

2 Zavedení singulárních funkcí

2.1 Definování pojmů

V literatuře narazíme nejčastěji na dva pojmy, singulární funkce a Macaulayho funkce. Tyto funkce jsou označovány jako funkce nespojitosti. My k řešení použijeme Macaulayho funkce [1].

2.2 Úvod k Macaulayho metodě

Macaulayho metoda je, jak bylo napsáno výše, založena na použití zobecněných funkcí. Jednou z nejvíce užívaných zobecněných funkcí je Diracova delta funkce, ze které jsou pak odvozeny všechny zobecněné funkce použité v Macaulayho metodě. Použití Macaulayho metody dovoluje přistupovat k nespojitým zatížením jako ke spojitým.

2.3 Zobecněné funkce

Jednou z nejvíce používaných zobecněných funkcí v mnoha oblastech vědy je Diracova delta funkce, neboli *impulsní* funkce $\delta(x - x_0)$. Diracova delta funkce je definována pomocí následujících tří vlastností:

$$\begin{aligned}\delta(x - x_0) &= 0 \quad \text{pro } x \neq 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0) dx &= 1 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0) f(x) dx &= f(x_0)\end{aligned}\tag{2.1}$$

Impuls $\delta(x - x_0)$ není funkcí v pravém slova smyslu. Z tohoto důvodu se Dirac přiklonil k termínu nevlastní funkce. Tudiž výše uvedený integrál nedává smysl, dokud není deklarována úmluva:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi\left(\frac{x - x_0}{\tau}\right) dx = 1\tag{2.2}$$

kde funkce $\Pi((x - x_0)/\tau)$ je obdélníková funkce o výšce τ^{-1} a bázi τ na úseku x_0 . Tato funkce má evidentně jednotkový obsah:

$$\Pi\left(\frac{x-x_0}{\tau}\right) = \begin{cases} 0, & x < x_0 - \frac{\tau}{2} \\ 1, & x_0 - \frac{\tau}{2} < x < x_0 + \frac{\tau}{2} \\ 0, & x > x_0 + \frac{\tau}{2} \end{cases} \quad (2.3)$$

V tomto případě lze Diracovu delta funkci brát jako limitu jednotkové obdélníkové funkce.

Na základě uvážení této konvence ze základního vztahu mezi Diracovou delta funkcí a jednotkovou krokovou funkcí $H(x - x_0)$ pro x_0 získáme následující:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(y - x_0) dy = H(x - x_0) \quad (2.4)$$

nebo v inverzní formě:

$$\delta(x - x_0) = H'(x - x_0) \equiv H_{,1}(x - x_0) \quad (2.5)$$

Derivace v posledním vztahu nesmí být brána v přísně analytickém smyslu, ale ve výše definovaném smyslu; z tohoto důvodu budeme na ni odkazovat jako na zobecněnou (nebo formální) derivaci. V tomto lze říct, že Diracova delta je derivací jednotkové krokové funkce.

Stejným způsobem může být proveden formální integrál jednotkové skokové funkce, ze kterého se pak obdrží rostoucí funkce $\langle x - x_0 \rangle$ definovaná následně:

$$\langle x - x_0 \rangle^1 = \begin{cases} 0, & x < x_0 \\ x - x_0, & x \geq x_0 \end{cases} \quad (2.6)$$

tudíž následný formální vztah lze zapsat takto:

$$\langle x - x_0 \rangle^0 = H(x - x_0) \\ \langle x - x_0 \rangle^1 = \int_{-\infty}^x H(y - x_0) dy \quad (2.7)$$

Když tento vztah otočíme, lze snadno ověřit, že rostoucí funkci lze brát jako zobecněnou derivaci partikulární zobecněné funkce definované následně:

$$\langle x - x_0 \rangle^2 = \begin{cases} 0 & x < x_0 \\ (x - x_0)^2 & x \geq 0 \end{cases} \quad (2.8)$$

Následně:

$$\frac{\langle x - x_0 \rangle^2}{2} = \int \langle x - x_0 \rangle^1 dx \quad (2.9)$$

Funkci $\langle x - x_0 \rangle^2$ lze definovat jako rostoucí parabolu.

Pokud je zobecněná integrace provedena na rostoucí parabole $\langle x - x_0 \rangle^2$, lze jednoduše ukázat, že výsledkem je zobecněná funkce $\langle x - x_0 \rangle^3$, která se nazývá rostoucí kubickou funkcí. Ta je definována následně:

$$\begin{aligned} \langle x - x_0 \rangle^3 &= 0 & x < x_0 \\ \langle x - x_0 \rangle^3 &= (x - x_0)^3 & x \geq x_0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

z čehož vyplývá:

$$\frac{\langle x - x_0 \rangle^2}{3} = \int \langle x - x_0 \rangle^2 dx \quad (2.11)$$

Následná zobecněná integrace rostoucí kubickou funkcí zvyšuje na rostoucí funkci čtvrtého řádu $\langle x - x_0 \rangle^4$, která je definována následovně:

$$\begin{aligned} \langle x - x_0 \rangle^4 &= 0 & x < x_0 \\ \langle x - x_0 \rangle^4 &= (x - x_0)^4 & x \geq x_0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

Rozšíření těchto závěrů na zobecněný integrál rostoucí funkce n -tého řádu $\langle x - x_0 \rangle^n$ potvrzuje, že to je rostoucí funkce n -tého řádu, definována takto:

$$\begin{aligned} \langle x - x_0 \rangle^n &= 0 & x < x_0 \\ \langle x - x_0 \rangle^n &= \frac{(x - x_0)^n}{n} & x \geq x_0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

2.4 Nespojivosti v zatížení – Macaulayho přístup

Diferenciální rovnice čtvrtého řádu vedoucí k určení průhybu elastického nosníku $w(x)$ vystaveného spojitému příčnému zatížení $q(x)$, má následující znění:

$$w''''(x) \equiv w_{,4}(x) = \frac{q(x)}{EJ} \quad (2.14)$$

Za předpokladu, že tuhost v ohybu EJ je po celé délce konstantní.

Pokud je zatížení nosníku konstantní a jediná nelinearita je po délce mezi $x = a$ a $x = b$, pak se zatěžovací funkce vyjádří:

$$q(x) = p(\langle x - a \rangle^0 - \langle x - b \rangle^0) \quad (2.15)$$

Dosazením tohoto výrazu do rovnice (2.14) a opakovaným užíváním integrálního výpočtu se získá rovnice ohybové čáry:

$$w_{,i}(x) = \frac{p}{EJ} (\langle x - a \rangle^{4-i} - \langle x - b \rangle^{4-i}) + \Delta_i(x), \quad i = 0, 1, 2, 3 \quad (2.16)$$

kde $\Delta_i(x)$, která obsahuje integrační funkci a je nezávislá na zatížení, se vyjádří takto:

$$\Delta_i(x) = \sum_{j=1}^{4-i} \frac{C_j}{(4-j-i)!} \langle x-x_0 \rangle^{4-j-i} \quad (2.17)$$

Hodnota čtyř konstant C_i souvisí s okrajovými a deformačními podmínkami. Je důležité zdůraznit, že pokud se použije obvyklý přístup, musí se v tomto případě vypočítat šest konstant, zatímco použitím zobecněných funkcí počítáme stále jen se čtyřmi konstantami.

Dále je velice výhodné použít zobecněné funkce v případě, kdy příčným zatížením je bodová síla F působící v bodě se souřadnicí x_0 . V tomto případě je zatěžovací funkce $q(x)$ je vyjádřeno následovně:

$$q(x) = F \langle x-x_0 \rangle^{-1} \quad (2.18)$$

Dosazením tohoto výrazu do rovnice (2.14) a opakovanou integrací dostaneme:

$$w_i(x) = \frac{F}{EJ} \langle x-x_0 \rangle^{3-i} + \Delta_i(x), \quad i = 0,1,2,3 \quad (2.19)$$

Dalším výhodným využitím zobecněných funkcí je případ, kdy v bodě se souřadnicí x_0 působí silová dvojice M . Pak zatěžovací funkci $q(x)$ lze adekvátně zapsat:

$$q(x) = M \langle x-x_0 \rangle^{-2} \quad (2.20)$$

Ze zobecněných integrálů se následně dostane:

$$w_i(x) = \frac{M}{EJ} \langle x-x_0 \rangle^{2-i} + \Delta_i(x), \quad i = 0,1,2,3 \quad (2.21)$$

Snadno lze dokázat, že tento případ dovoluže řešit problémy, ve kterých funkce natočení střednice vykazuje singularity. Například, když je nosník namáhán tepelným zatížením, lineárně se měnícím podél jeho výšky a konstantním v úsecích $x = a$ a $x = b$, načež se objevuje skok v natočení střednice a následně i v druhé derivaci rovnice posunutí. To znamená, že toto zatížení se užije ve tvaru:

$$w_{,4}(x) = \kappa \left(\langle x-a \rangle^{-2} - \langle x-b \rangle^{-2} \right) \quad (2.22)$$

kde κ je křivost způsobená proměnností tepelného zatížení. Řešení rovnice může být odvozeno:

$$w_{,i}(x) = \kappa \left(\langle x-a \rangle^{2-i} - \langle x-b \rangle^{2-i} \right) + \Delta_i(x) \quad i = 0,1,2,3. \quad (2.23)$$

Rovnice (2.23) je zobecněním výrazu získaného z rovnice (2.21).

V případě, že zatížení je kombinací N_p rovnoměrných spojitých zatížení p_i působících v intervalech a_i a b_i , N_F osamělých sil F_j s působišti x_j a z N_M osamělých silových dvojic M_k s působišti x_k , bude rovnice ohybové čáry $w(x)$ v následujícím tvaru:

$$w(x) = \sum_{i=1}^{N_p} \frac{P_i}{EJ} \left(\langle x - a_i \rangle^4 - \langle x - b_i \rangle^4 \right) + \sum_{j=1}^{N_F} \frac{F_j}{EJ} \langle x - x_j \rangle^3 + \sum_{k=1}^{N_M} \frac{M_k}{EJ} \langle x - x_k \rangle^2 + \Delta_4(x) \quad (2.24)$$

a hodnoty čtyř konstant C_i získáme užitím okrajových a deformačních podmínek.

2.5 Nespojivosti při rotaci a posunutí

Další případ, kdy je výhodné použít zobecněné funkce je nespojivost křivosti střednice nebo jejího tvaru. Například nespojivost křivosti v bodě x_0 způsobí přídavný skok $\Delta\varphi$ ve funkci natočení střednice:

$$w_{,1}(x) = \Delta\varphi \langle x - x_0 \rangle^0 \quad (2.25)$$

což vede k rovnicím:

$$w_{,i}(x) = \Delta p \langle x - x_0 \rangle^{-i} + \Delta_i(x) \quad i = 0, 1, 2, 3, 4 \quad (2.26)$$

Na druhou stranu, pokud vnější zatížení způsobí skok Δw v posunutí v místě x_0 , pak:

$$w_{,i}(x) = \Delta w \langle x - x_0 \rangle^{-i} + \Delta_i(x) \quad i = 0, 1, 2, 3, 4 \quad (2.27)$$

Důležité je, že pro jakýkoliv typ vnějšího zatížení a pro jakoukoliv kombinaci externích zatížení, je možné užitím zobecněných funkcí získat jedinou diferenciální rovnici čtvrtého řádu. Jejíž řešení vyžaduje ve všech možných případech zatížení určit právě čtyři integrační konstanty.

2.6 Vázaný nosník

Zobecněné funkce lze také výhodně použít v případě, že je nosník vázán n vazbami. Pokud je například nosník vázán v bodě x_0 obecnou vazbou, zatěžovací funkce má tvar $q(x)$, pak je tento případ popsán diferenciální rovnicí následujícího tvaru:

$$w_{,4}(x) = \frac{q(x)}{EJ} + \frac{\hat{F}}{EJ} \langle x - x_0 \rangle^{-1} \equiv \frac{q(x)}{EJ} + \rho_3 \langle x - x_0 \rangle^{-1} \quad (2.28)$$

Řešením rovnice (2.28) se získá:

$$w_{,i}(x) = \frac{1}{EJ} \int \dots \int p(x) dx + \rho_3 \langle x - x_0 \rangle^{3-i} + \Delta_i(x) \quad i = 0, 1, 2, 3 \quad (2.29)$$

V rovnici (2.28) veličina $\hat{F} \equiv \rho_3 EI$ je styková síla uvolněné rotační vazby; ta je stejně jako čtyři konstanty C_i neznámá. Předepisuje se tedy další podmínka $w(x_0) = 0$.

Pokud je v bodě x_0 přítomna dvouložisková podpora (vazba zamezuje natočení nosníku, ale dovoluje krut), pak má diferenciální rovnice následující tvar:

$$w_{,4}(x) = \frac{q(x)}{EJ} + \frac{\hat{M}}{EJ} \langle x - x_0 \rangle^{-2} \equiv \frac{q(x)}{EJ} + \rho_2 \langle x - x_0 \rangle^{-2} \quad (2.30)$$

Následné řešení rovnice (2.30):

$$w_i(x) = \frac{1}{EJ} \int \dots \int q(x) dx + \rho_2 \langle x - x_0 \rangle^{-2} + \Delta_i(x) \quad i = 0, 1, 2, 3 \quad (2.31)$$

V rovnici (2.31) hodnota $\hat{M} \equiv \rho_2 EI$ je neznámá styková silová dvojice uvolněné vazby. Předepisuje se tedy nezbytná podmínka $w_{,1}(x_0) = 0$.

I pro tento typ nosníku lze zvážit různé kombinace N_C vazeb a použití zobecněných funkcí vede k zredukování počtu neznámých konstant na $N_C + 4$.

Přítomnost čepů a ložiskových spojů podél osy nosníku způsobí nespojitosti v posunutí nebo ve funkci natočení, a to v bodě x_0 , kde jsou tyto prvky přítomny. Jejich působení je třeba také zahrnout do řešení. Pokud je například v bodě x_0 čep, pak nespojitost souvisí s natočením, tedy s funkcí $w_{,1}(x)$. To popisuje diferenciální rovnice:

$$w_{,4}(x) = \frac{q(x)}{EJ} + \Delta \hat{\varphi} \langle x - x_0 \rangle^{-3} \equiv \frac{q(x)}{EJ} + \rho_1 \langle x - x_0 \rangle^{-3}, \quad (2.32)$$

kde $\Delta \hat{\varphi} \equiv \rho_1$ odpovídá relativnímu natočení v bodě x_0 a je další veličinou kromě čtyř konstant C_i , která musí být určena. Nezbytná podmínka definující rotační vazbu. Určení této neznámé vyžaduje tedy další podmínku, kterou zapíšeme ve tvaru:

$$w_{,2}(x_0) = 0 \quad (2.33)$$

Následné řešení rovnice (2.32):

$$w_i(x) = \frac{1}{EJ} \int \dots \int q(x) dx + \rho_1 \langle x - x_0 \rangle^{-1} + \Delta_i(x) \quad i = 0, 1, 2, 3 \quad (2.34)$$

Pokud je v bodě x_0 ložisko, pak se objeví nespojitost v posuvu a diferenciální rovnice má následující formu:

$$w_{,i}(x) = \frac{q(x)}{EJ} + \Delta \hat{u} \langle x - x_0 \rangle^{-4} \equiv \frac{q(x)}{EJ} + \rho_0 \langle x - x_0 \rangle^{-4}, \quad (2.35)$$

kde $\Delta \hat{u} \equiv \rho_0$ je neznámá velikost relativního posunutí v bodě x_0 . Řešení rovnice (2.35) je následující:

$$w_i(x) = \frac{1}{EJ} \int \dots \int q(x) dx + \rho_0 \langle x - x_0 \rangle^{0-i} + \Delta_i(x) \quad i = 0, 1, 2, 3 \quad (2.36)$$

s deformační podmínkou:

$$u_{,3}(x_0) = 0. \quad (2.37)$$

Je zřejmé, že jakákoliv kombinace těchto prvků může být umístěna ve stejném bodě, nebo v různých bodech. Tato skutečnost dokazuje výhodné použití singulárních funkcí.

Je-li nosník vázán v bodě x_0 rotační pružnou podporou, bude příslušná diferenciální rovnice:

$$w_{,4}(x) = \frac{q(x)}{EJ} + \rho_3 \langle x - x_0 \rangle^{-1} \quad (2.38)$$

s řešením:

$$w_{,i}(x) = \frac{1}{EJ} \int \dots \int q(x) dx + \rho_3 \langle x - x_0 \rangle^{3-i} + \Delta_i(x) \quad i = 0, 1, 2, 3 \quad (2.39)$$

K okrajovým a deformačním podmínkám pro určení čtyř konstant C_i přibude další podmínka pro určení stykové síly od pružiny $\hat{F} \equiv \rho_3 EI$:

$$\rho_3 = -\frac{K}{EJ} w(x_0) \quad (2.40)$$

kde K je tuhost pružiny.

Případ nosníku vázaného pružnou dvouložiskovou podporou je velice podobný předchozímu případu. Ve skutečnosti je rovnice charakterizující tento problém shodná s rovnicí (2.30), jejíž řešení je dáno rovnicí (2.31). Následná nutná podmínka je tato:

$$\rho_2 = -\frac{K_\varphi}{EJ} w_{,1}(x_0) \quad (2.41)$$

kde K_φ je tuhost úhlové pružiny.

Smíšený typ omezení nastane, pokud je nosník vázán současně ložiskovým spojem a pružinovým závěsem. Řešení takto vázaného nosníku je shodné s případem, který vede k rovnici (2.32). Odpovídající řešení je dáno rovnicí (2.34). Další nezbytnou podmínkou k výpočtu relativního natočení $\Delta\hat{\varphi} \equiv \rho_1$ je:

$$\rho_1 = \frac{EJ}{K_\varphi} w_{,2}(x_0) \quad (2.42)$$

Diferenciální rovnice pro nosník s vázanou pružnou ložiskovou vazbou v bodě x_0 je shodná s rovnicí (2.35), jejíž řešení je dáno rovnicí (2.36). Další nezbytnou podmínkou k výpočtu relativního posunutí $\Delta\hat{u} \equiv \rho_0$ je následující:

$$\rho_0 = \frac{EJ}{K} w_{,3}(x_0) \quad (2.43)$$

Pro jakoukoliv nespojitost lze psát diferenciální rovnici vedoucí k rovnici ohybové čáry nosníku v následujícím tvaru:

$$w_{,j}(x) = \frac{q(x)}{EJ} + \rho_j \langle x - x_0 \rangle^{j-4} \quad j = 0, 1, 2, 3 \quad (2.44)$$

Případ pro $j = 0$ vykazuje nespojitost v posunutí, která může být známa (rovnice (2.27)), nebo neznáma (rovnice (2.32)). Případ pro $j = 1$ odkazuje na případ nespojitosti funkce natočení, která může být známa (rovnice (2.26)), nebo neznáma (rovnice (2.32)). Případ pro $j = 2$ odkazuje na nespojitosti ve funkci zatížené silovými dvojicemi, které mohou být známé (rovnice (2.21)), nebo neznámé (rovnice (2.30)). Případ pro $j = 3$ odkazuje na nespojitost od zatěžujících smykových sil, která může být známa (rovnice (2.19)),

nebo neznáma (rovnice (2.28)). V kterémkoliv z těchto případů se píše řešení rovnice (2.44) v následujícím tvaru:

$$w_i(x) = \frac{1}{EJ} \int \dots \int q(x) dx + \rho_j \langle x - x_0 \rangle^{j-i} + \Delta_i(x) \quad (2.45)$$
$$i = 0, 1, 2, 3 \quad j = 0, 1, 2, 3$$

Pokud je nespojitost známa, k výpočtu čtyř konstant C_i se uvažují pouze čtyři okrajové a deformační podmínky. Pokud nespojitost známa není, uvažuje se další podmínka.

Tabulka singulárních a Macaulayho funkcí (1)

	Jméno	Definice	Graf	Derivace a integrály
Singulární funkce	Impulsová funkce druhého řádu	$F_{-2}(x) = \langle x - a \rangle^{-2} = \begin{cases} 0 & x \neq a \\ \pm\infty & x = a \end{cases}$		$\int_{-\infty}^x F_{-2} dx = F_{-1}$
	Jednotková impulsová funkce (osamělá síla)	$F_{-1}(x) = \langle x - a \rangle^{-1} = \begin{cases} 0 & x \neq a \\ \pm\infty & x = a \end{cases}$		$\int_{-\infty}^x F_{-1} dx = F_0$
Macaulayho funkce	Funkce jednotkového skoku	$F_0(x) = \langle x - a \rangle^0 = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ 1 & x \geq a \end{cases}$		$\int_{-\infty}^x F_0 dx = F_1$
	Jednotková lineárně rostoucí funkce	$F_1(x) = \langle x - a \rangle^1 = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ x - a & x \geq a \end{cases}$		$\begin{aligned} \frac{d}{dx} F_1 &= F_0 \\ \int_{-\infty}^x F_1 dx &= \frac{F_2}{2} \end{aligned}$
	Funkce druhého stupně	$F_2(x) = \langle x - a \rangle^2 = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ (x - a)^2 & x \geq a \end{cases}$		$\begin{aligned} \frac{d}{dx} F_2 &= 2F_1 \\ \int_{-\infty}^x F_2 dx &= \frac{F_3}{3} \end{aligned}$
	Všeobecná Macaulayho funkce	$F_n(x) = \langle x - a \rangle^n = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ (x - a)^n & x \geq a \end{cases}$ $n = 0, 1, 2, 3, \dots$		$\begin{aligned} \frac{d}{dx} F_n &= nF_{n-1} \\ n &= 1, 2, 3, \dots \\ \int_{-\infty}^x F_n dx &= \frac{F_{n+1}}{n+1} \\ n &= 0, 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$

3 Užití singulárních funkcí

Práce se zabývá užitím singulárních funkcí při stanovení ohybové čáry prutu namáhaného ohybem. Matematické principy, na nichž jsou singulární funkce založeny, umožňují jejich aplikaci v podstatně širší oblasti, kde se vyskytují závislosti, které mají nespojitý průběh.

Dále jsou uvedeny příklady univerzit, v jejichž studijních programech jsou předměty, ve kterých se užití singulárních funkcí vyučuje.

3.1 Analýza výpočtového toku v lineárních plánech

Fakulta Stavebního Inženýrství Americké Katolické Univerzity (Department of Civil Engineering The Catholic University of America)

Na této fakultě se využívají singulární funkce při řešení výpočtového toku v lineárním plánování. Lineární plánovací metod (LPM) je grafická metoda zaměřující se na využití spojitých zdrojů v opakujících se činnostech. Tato metoda se používá hlavně ve stavebním průmyslu, obzvláště při stavbě dálnic, výškových budov, atd. Pomocí LPM s využitím metody kritické cesty se plánují hlavně tyto činnosti: maximální využití zdrojů, minimalizování přerušení běžících projektů a to včetně najímání a propouštění pracovníků. Hlavní výhoda singulárních funkcí spočívá v tom, že mohou snadno popsat mnohonásobné změny každé činnosti [2].

3.2 Lomová mechanika

Univerzita Pierre a Marie Curieových (Université Pierre-et-Marie-Curie)

Singulární funkce usnadňují popis pole hustoty mikrotrhlin v materiálu vystaveném cyklickému mechanickému a teplotnímu namáhání [3].

3.3 Únava materiálů

Stavební fakulta, Universita Case Western Reserve

Singulární funkce se užívají při stanovování únavové životnosti konstrukčních částí vystavených vícetému namáhání [4].

3.4 Mechanické vlastnosti kovových látek

Fakulta Strojního Inženýrství, Univerzita Keimyung (Department of Mechanical Engineering Keimyung University)

Při popisu cyklické viskoplasticity umožňují funkce najít jednotné konstitutivní pravidlo [5].

3.5 Statistická fyzika

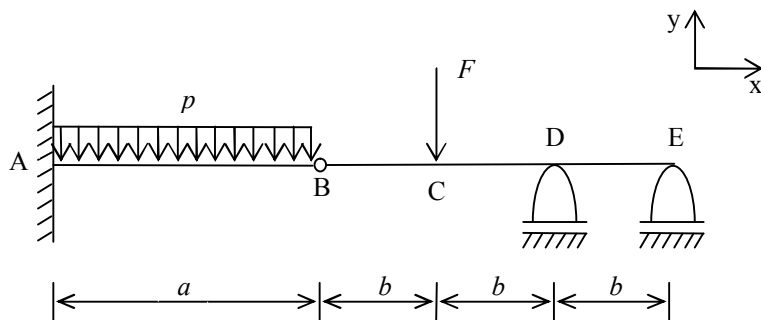
Fakulta Teoretické Fyziky Münsterské Univerzity (Institute for Theoretical Physics University of Münster)

Singulární funkce se využívají při řešení Fokker-Planckových rovnic v oblasti popisující časový vývoj a hustotu pravděpodobnosti polohy částice. Jsou využitelné v řadě vědních oblastí, např. v dynamice plastů, při fázových transformacích, difúzi v plazmatu a při určování stochastických vlastností částicových shluků v elektronových paměťových prvcích [6,7,8].

4 Příklad

4.1 Zadání příkladu

Výpočet ohybové čáry homogenního prizmatického prutu uloženého dle obrázku, zatíženého spojitým silovým zatížením \vec{p} a silou \vec{F} .

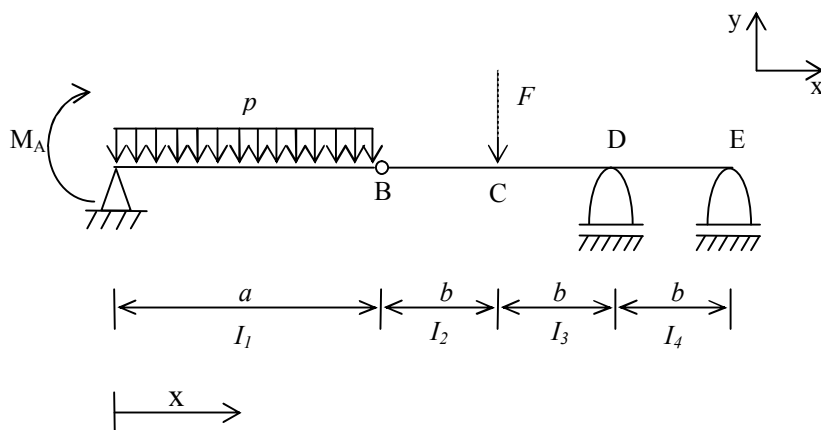


Obr. 1

Kde $a = 4 \text{ m}$, $b = 2 \text{ m}$, $F = 100 \text{ kN}$, $p = 20 \text{ kNm}^{-1}$

4.2 Standardní řešení

Provede se částečné uvolnění, I_1 až I_4 jsou označení jednotlivých intervalů, které rozdělují nosník tak, aby v každém intervalu bylo zatížení spojitě:

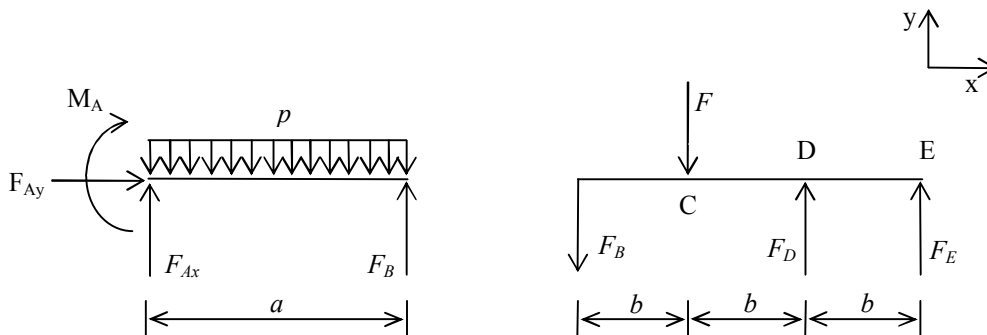


Obr. 2

Deformační podmínka:

$$\varphi_A = 0 \quad (4.1)$$

Provede se úplné uvolnění:



Obr.3

Sepíší se rovnice statické rovnováhy (SR):

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0: \quad F_{Ax} &= 0 \\ \sum F_y = 0: \quad F_{Ay} + F_B - ap &= 0 & \sum F_y = 0: \quad F_C + F_D - F_B - F &= 0 \quad (4.2) \\ \sum M_A = 0: \quad F_B \cdot a - \frac{pa^2}{2} - M_A &= 0 & \sum M_C = 0: \quad F_B \cdot 2b + Fb + F_D b &= 0 \end{aligned}$$

Odkud se získá:

$$\begin{aligned} F_{Ax} &= 0 \\ F_B &= \frac{M_A}{a} + \frac{pa}{2} \\ F_{Ay} &= p \cdot a - \frac{M_A}{a} - \frac{pa}{2} = \frac{1}{2} pa - \frac{M_A}{a} \\ F_D &= -2F_B - F \\ F_C &= F + F_B + 2F_B + F = 2F + \frac{3M_A}{a} + \frac{3}{2} pa \end{aligned} \quad (4.3)$$

Vypočítá se ohybový moment M_o v jednotlivých intervalech I_1 až I_4 :

$$\begin{aligned} I_1: \quad x \in (0; a) \\ M_o^I &= F_{Ay}x + M_A - \frac{px^2}{2} = \frac{1}{2} pax - \frac{M_A}{a}x + M_A - \frac{px^2}{2} \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} I_2: \quad x \in (a; a+b) \\ M_o^{II} &= F_{Ay}x + M_A - pa \left(x - \frac{a}{2} \right) = \frac{1}{2} pax - \frac{M_A}{a}x + M_A - pa \left(x - \frac{a}{2} \right) \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$I_3: x \in (a+b; a+2b)$$

$$\begin{aligned} M_o''' &= F_{Ay}x + M_A - pa \left(x - \frac{a}{2} \right) - F(x-a-b) = \\ &= \frac{1}{2}pax - \frac{M_A}{a}x + M_A - pa \left(x - \frac{a}{2} \right) - F(x-a-b) \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$I_4: x \in (a+2b; a+3b)$$

$$\begin{aligned} M_o^{IV} &= F_{Ay}x + M_A - pa \left(x - \frac{a}{2} \right) - F(x-a-b) + F_C(x-a-2b) = \\ &= \frac{1}{2}pax - \frac{M_A}{a}x + M_A - pa \left(x - \frac{a}{2} \right) - F(x-a-b) + \frac{3M_A}{a}(x-a-2b) + \\ &\quad + \frac{3}{2}pa(x-a-2b) \end{aligned} \quad (4.7)$$

Deformační podmínka:

$$\begin{aligned} \varphi_A &= \frac{\partial W}{\partial M_A} = \int_{\gamma} \frac{M_o}{EJ} \cdot \frac{\partial M_o}{\partial M_A} dx = \\ &= \frac{1}{EJ} \int_0^a \left(\frac{1}{2}pax - \frac{M_A}{a}x + M_A - \frac{px^2}{2} \right) \left(-\frac{x}{a} + 1 \right) dx + \\ &\quad + \int_a^{a+b} \left[\frac{1}{2}pax - \frac{M_A}{a}x + M_A - pa \left(x - \frac{a}{2} \right) \right] \left(-\frac{x}{a} + 1 \right) dx + \\ &\quad + \int_{a+b}^{a+2b} \left[\frac{1}{2}pax - \frac{M_A}{a}x + M_A - pa \left(x - \frac{a}{2} \right) - F(x-a-b) \right] \left(-\frac{x}{a} + 1 \right) dx + \\ &\quad + \int_{a+2b}^{a+3b} \left[\frac{1}{2}pax - \frac{M_A}{a}x + M_A - pa \left(x - \frac{a}{2} \right) - F(x-a-b) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{3M_A}{a}(x-a-2b) + \frac{3}{2}pa(x-a-2b) \right] \left[-\frac{x}{a} + 1 + \frac{3}{a}(x-a-2b) \right] dx = 0 \end{aligned} \quad (4.8)$$

Z rovnice deformační podmínky (4.8) se získá velikost momentu M_A .

Funkce ohybových momentů (4.4) až (4.8) se dosadí do diferenciální rovnice ohybové čáry:

Interval I_1 :

$$\begin{aligned}
 w_1'' &= -\frac{M_o^I}{EJ} = -\frac{1}{2EJ} pax_1 + \frac{M_A}{aEJ} x_1 - \frac{M_A}{EJ} + \frac{px_1^2}{2EJ} \\
 w_1' &= -\frac{1}{4EJ} pax_1^2 + \frac{M_A}{2aEJ} x_1^2 - \frac{M_A}{EJ} x_1 + \frac{px_1^3}{6EJ} + C_1 \\
 w_1 &= -\frac{1}{12EJ} pax_1^3 + \frac{M_A}{6aEJ} x_1^3 - \frac{M_A}{2EJ} x_1^2 + \frac{px_1^4}{24EJ} + C_1 x_1 + C_2
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

Interval I_2 :

$$\begin{aligned}
 w_{II}'' &= -\frac{M_o^{II}}{EJ} = -\frac{1}{2EJ} pax_{II} + \frac{M_A}{aEJ} x_{II} - \frac{M_A}{EJ} + \frac{pa}{EJ} \left(x_{II} - \frac{a}{2} \right) \\
 w_{II}' &= -\frac{1}{4EJ} pax_{II}^2 + \frac{M_A}{2aEJ} x_{II}^2 - \frac{M_A}{EJ} x_{II} + \frac{pa}{EJ} \left(\frac{x_{II}^2}{2} - \frac{ax_{II}}{2} \right) + C_3 \\
 w_{II} &= -\frac{1}{12EJ} pax_{II}^3 + \frac{M_A}{6aEJ} x_{II}^3 - \frac{M_A}{2EJ} x_{II}^2 + \frac{pa}{EJ} \left(\frac{x_{II}^3}{6} - \frac{ax_{II}^2}{4} \right) + C_3 x_{II} + C_4
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

Interval I_3 :

$$\begin{aligned}
 w_{III}'' &= -\frac{M_o^{III}}{EJ} = -\frac{1}{2EJ} pax_{III} + \frac{M_A}{aEJ} x_{III} - \frac{M_A}{EJ} + \frac{pa}{EJ} \left(x_{III} - \frac{a}{2} \right) + \frac{F}{EJ} (x_{III} - a - b) \\
 w_{III}' &= -\frac{1}{4EJ} pax_{III}^2 + \frac{M_A}{2aEJ} x_{III}^2 - \frac{M_A}{EJ} x_{III} + \frac{pa}{EJ} \left(\frac{x_{III}^2}{2} - \frac{ax_{III}}{2} \right) + \\
 &\quad + \frac{F}{EJ} \left(\frac{x_{III}^2}{2} - ax_{III} - bx_{III} \right) + C_5 \\
 w_{III} &= -\frac{1}{12EJ} pax_{III}^3 + \frac{M_A}{6aEJ} x_{III}^3 - \frac{M_A}{2EJ} x_{III}^2 + \frac{pa}{EJ} \left(\frac{x_{III}^3}{6} - \frac{ax_{III}^2}{4} \right) + \\
 &\quad + \frac{F}{EJ} \left(\frac{x_{III}^3}{6} - \frac{ax_{III}^2}{2} - \frac{bx_{III}^2}{2} \right) + C_5 x_{III} + C_6
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

Interval I_4 :

$$\begin{aligned}
w_{IV}'' &= -\frac{M_o^{IV}}{EJ} \frac{1}{2} p a x_{IV} - \frac{M_A}{a} x_{IV} + M_A - p a \left(x_{IV} - \frac{a}{2} \right) - F(x_{IV} - a - b) + \\
&\quad + \frac{3M_A}{a} (x_{IV} - a - 2b) + \frac{3}{2} p a (x_{IV} - a - 2b) \\
w_{IV}' &= -\frac{M_o^{IV}}{EJ} \frac{1}{4} p a x_{IV}^2 - \frac{M_A}{2a} x_{IV}^2 + M_A x_{IV} - p a \left(\frac{x_{IV}^2}{2} - \frac{a x_{IV}}{2} \right) - \\
&\quad - F \left(\frac{x_{IV}^2}{2} - a x_{IV} - b x_{IV} \right) + \frac{3M_A}{a} \left(\frac{x_{IV}^2}{2} - a x_{IV} - 2b x_{IV} \right) + \\
&\quad + \frac{3}{2} p a \left(\frac{x_{IV}^2}{2} - a x_{IV} - 2b x_{IV} \right) + C_7 \\
w_{IV} &= -\frac{M_o^{IV}}{EJ} \frac{1}{12} p a x_{IV}^3 - \frac{M_A}{6a} x_{IV}^3 + \frac{M_A}{2} x_{IV}^2 - p a \left(\frac{x_{IV}^3}{6} - \frac{a x_{IV}^2}{4} \right) - \\
&\quad - F \left(\frac{x_{IV}^3}{6} - \frac{a x_{IV}^2}{2} - \frac{b x_{IV}^2}{2} \right) + \frac{3M_A}{a} \left(\frac{x_{IV}^3}{6} - \frac{a x_{IV}^2}{2} - b x_{IV}^2 \right) + \\
&\quad + \frac{3}{2} p a \left(\frac{x_{IV}^3}{6} - \frac{a x_{IV}^2}{2} - b x_{IV}^2 \right) + C_7 x_{IV} + C_8
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Z rovnic (4.9) až (4.12) plyne, že je nutno vypočítat celkem 8 integračních konstant a tudíž je potřeba sestavit 8 dalších rovnic, které vyplývají z okrajových podmínek a z podmínek hladkosti a spojitosti ohybové čáry [9]:

$$\begin{aligned}
w_I(x=0) &= 0 \\
w_I'(x=0) &= 0 \\
w_{II}(x=a) &= w_{III}(x=a) \\
w_{II}'(x=a) &= w_{III}'(x=a) \\
w_{III}(x=a+2b) &= 0 \\
w_{IV}(x=a+2b) &= 0 \\
w_{III}'(x=a+2b) &= w_{IV}'(x=a+2b) \\
w_{IV}(x=a+3b) &= 0
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Lze vidět, že bez pomoci výpočetní techniky je výpočet takového příkladu pomocí klasického přístupu velice zdoluhavý a numericky náročný.

4.3 Řešení užitím singulárních funkcí

Sestaví se zatěžovací funkce $q(x)$. Konstantní liniové zatížení p zapíšeme podle rovnice (2.15). Pro popis osamělé síly F použijeme rovnici (2.18).

$$q(x) = p\langle x-0 \rangle^0 - p\langle x-a \rangle^0 + F\langle x-a-b \rangle^{-1} \quad (4.14)$$

Rotační vazbu v bodě B popisuje rovnice (2.32) a obecnou vazbu v bodě D rovnice (2.28). Čtvrtá derivace rovnice ohybové čáry pak bude mít tvar:

$$w_{,4} = \frac{1}{EJ} \left(p\langle x-0 \rangle^0 - p\langle x-a \rangle^0 + F\langle x-a-b \rangle^{-1} \right) + \rho_3 \langle x-a-2b \rangle^{-1} + \rho_1 \langle x-a \rangle^{-3} \quad (4.15)$$

Nyní se provedou čtyři integrace podle tabulky 1, konstanty se zapisují podle rovnice (2.17).

$$w_{,3} = \frac{1}{EJ} \left(p\langle x-0 \rangle^1 - p\langle x-a \rangle^1 + F\langle x-a-b \rangle^0 \right) + \rho_3 \langle x-a-2b \rangle^0 + \rho_1 \langle x-a \rangle^{-2} + C_1 \langle x-0 \rangle^0 \quad (4.16)$$

$$w_{,2} = \frac{1}{EJ} \left(\frac{p}{2} \langle x-0 \rangle^2 - \frac{p}{2} \langle x-a \rangle^2 + F\langle x-a-b \rangle^1 \right) + \rho_3 \langle x-a-2b \rangle^1 + \rho_1 \langle x-a \rangle^{-1} + C_1 \langle x-0 \rangle^1 + C_2 \langle x-0 \rangle^0 \quad (4.17)$$

$$w_{,1} = \frac{1}{EJ} \left(\frac{p}{6} \langle x-0 \rangle^3 - \frac{p}{6} \langle x-a \rangle^3 + \frac{F}{2} \langle x-a-b \rangle^2 \right) + \frac{\rho_3}{2} \langle x-a-2b \rangle^2 + \rho_1 \langle x-a \rangle^0 + \frac{C_1}{2} \langle x-0 \rangle^2 + C_2 \langle x-0 \rangle^1 + C_3 \langle x-0 \rangle^0 \quad (4.18)$$

$$w_{,0} = \frac{1}{EJ} \left(\frac{p}{24} \langle x-0 \rangle^4 - \frac{p}{24} \langle x-a \rangle^4 + \frac{F}{6} \langle x-a-b \rangle^3 \right) + \frac{\rho_3}{6} \langle x-a-2b \rangle^3 + \rho_1 \langle x-a \rangle^1 + \frac{C_1}{6} \langle x-0 \rangle^3 + \frac{C_2}{2} \langle x-0 \rangle^2 + C_3 \langle x-0 \rangle^1 + C_4 \langle x-0 \rangle^0 \quad (4.19)$$

Sestavení okrajových podmínek nutných k výpočtu konstant C_1 až C_4 a vazebných členů ρ_1 a ρ_3 :

$$\begin{aligned}
w_{,0}(0) &= 0 \\
w_{,0}(a+2b) &= 0 \\
w_{,0}(a+3b) &= 0 \\
w_{,1}(0) &= 0 \\
w_{,2}(a) &= 0 \\
w_{,2}(a+3b) &= 0
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Výpočet konstant:

$$0 = C_4 \tag{4.21}$$

$$\begin{aligned}
0 = \frac{1}{EJ} &\left(\frac{p}{24} \langle a+2b \rangle^4 - \frac{p}{24} \langle 2b \rangle^4 + \frac{F}{6} \langle b \rangle^3 \right) + \rho_1 \langle 2b \rangle^1 + \\
&+ \frac{C_1}{6} \langle a+2b \rangle^3 + \frac{C_2}{2} \langle a+2b \rangle^2 + C_3 \langle a+2b \rangle^1
\end{aligned} \tag{4.22}$$

$$\begin{aligned}
0 = \frac{1}{EJ} &\left(\frac{p}{24} \langle a+3b \rangle^4 - \frac{p}{24} \langle 3b \rangle^4 + \frac{F}{6} \langle 2b \rangle^3 \right) + \frac{\rho_3}{6} \langle b \rangle^3 + \rho_1 \langle 3b \rangle^1 + \\
&+ \frac{C_1}{6} \langle a+3b \rangle^2 + \frac{C_2}{2} \langle a+3b \rangle^2 + C_3 \langle a+3b \rangle^1
\end{aligned} \tag{4.23}$$

$$0 = C_3 \tag{4.24}$$

$$0 = \frac{1}{EJ} \left(\frac{p}{2} \langle a \rangle^2 \right) + \rho_1 \delta(0) + C_1 \langle a \rangle^1 + C_2 \tag{4.25}$$

$$\begin{aligned}
0 = \frac{1}{EJ} &\left(\frac{p}{2} \langle a+3b \rangle^2 - \frac{p}{2} \langle 3b \rangle^2 + F \langle 2b \rangle^1 \right) + \rho_3 \langle b \rangle^1 + \rho_1 \delta(3b) + \\
&+ C_1 \langle a+3b \rangle^1 + C_2 \langle a+3b \rangle^0
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Dosazení číselných hodnot za p , F , a a b dle zadání:

$$C_3 = 0 \tag{4.27}$$

$$C_4 = 0 \tag{4.28}$$

$$0 = \frac{1}{EJ} \left(\frac{20}{24} (4+2 \cdot 2)^4 - \frac{20}{24} (2 \cdot 2)^4 + \frac{100}{6} (2)^3 \right) + \rho_1 (2 \cdot 2) + \frac{C_1}{6} (4+2 \cdot 2)^3 + \frac{C_2}{2} (4+2 \cdot 2)^2 + C_3 (4+2 \cdot 2) \quad (4.29)$$

$$0 = \frac{1}{EJ} \left(\frac{20}{24} (4+3 \cdot 2)^4 - \frac{20}{24} (2 \cdot 2)^4 + \frac{100}{6} (2 \cdot 2)^3 \right) + \frac{\rho_3}{6} 2^3 + \rho_1 3 \cdot 2 + \frac{C_1}{6} (4+3 \cdot 2)^2 + \frac{C_2}{2} (4+3 \cdot 2)^2 + C_3 (4+3 \cdot 2) \quad (4.30)$$

$$0 = \frac{1}{EJ} \left(\frac{20}{2} 4^2 \right) + 0 + C_1 4 + C_2 \quad (4.31)$$

$$0 = \frac{1}{EJ} \left(\frac{20}{2} (4+3 \cdot 2)^2 - \frac{20}{2} (3 \cdot 2)^2 + 100 \cdot 2 \cdot 2 \right) + \rho_3 2 + 0 + C_1 (4+3 \cdot 2) + C_2 (4+3 \cdot 2)^0 \quad (4.32)$$

Z rovnic (4.27) až (4.32) se získají výsledné hodnoty:

$$C_3 = C_4 = 0$$

$$C_1 = -\frac{181}{2EJ}$$

$$C_2 = \frac{202}{EJ}$$

$$\rho_1 = -\frac{518,67}{EJ}$$

$$\rho_3 = \frac{-168,5}{EJ} \Rightarrow F_D = -168,5 \text{ kN}$$

Rovnice ohybové čáry:

$$w_{,0} = \frac{1}{EJ} \left(\frac{5}{6} \langle x-0 \rangle^4 - \frac{5}{6} \langle x-4 \rangle^4 + \frac{50}{3} \langle x-6 \rangle^3 \right) - \frac{518,67}{6EJ} \langle x-8 \rangle^3 - \frac{168,5}{EJ} \langle x-4 \rangle^1 - \frac{90,5}{6EJ} \langle x-0 \rangle^3 + \frac{202}{2EJ} \langle x-0 \rangle^2 \quad (4.33)$$

5 Závěr

Předložená práce se zabývá singulárními funkcemi. Ve druhé kapitole je podrobně shrnuto jejich matematické zavedení pomocí Diracovy funkce. Třetí kapitola představuje literární rešerši užití singulárních funkcí na zahraničních univerzitách v různých vědních oblastech. Bylo zjištěno, že jejich užití sice není časté, ale umožňuje výrazné zjednodušení matematického popisu řady speciálních problémů. V oblasti mechaniky těles je takovým případem např. řešení ohybové čáry prutů uložených staticky určitě i staticky neurčitě. Ve čtvrté kapitole je na příkladu staticky neurčitě uloženého prutu porovnáno řešení standardním přístupem s Macaulayho metodou využívající singulární funkce. Z tohoto porovnání je jasné vidět, že pokud je příklad jen trochu složitější, tzn. v zatížení se objevuje více nespojitostí, řešení využívající Macaulayho funkce je podstatně méně numericky náročné.

Použitá literatura

- [1] Gere J.M., Timoshenko S.P: **Mechanics of Materials**, Chapman & Hall, 1991
- [2] Lucko G. A Peña Orozco A. A.: **Calculating Float in Linear Schedules with Singularity Functions**. Ve sb. „*Proceedings of the 2008 Winter Simulation Conference*“, ed. S. J. Mason, R. R. Hill, L. Mönch, O. Rose, T. Jefferson, J. W. Fowler, IEEE, 2008, s. 2512 – 2518
- [3] Malésys N., Vincent L. a Hild F.: **A probabilistic model of predict the formativ and propagation of crack networks in thermal fatigue**. *International Journal of Fatigue* 31 (2009) 565-574.
- [4] Papadopoulos I.V. a Panoskaltsis V. P.: **Invariant Formulation of a Gradient Dependent Multiaxial High-Cycle Fatigue Criterion**. *Engineering Fracture Mechanics* 55 (1996) 513-528.
- [5] Ho Kwangsoo: **A unified constitutive law for cyclic viscoplasticity**. *International Journal of Solids and Structures* 46 (2009) 1007-1018.
- [6] Frank T.D.: **Dynamic mean field models: H-theorem for stochastic processes and basins of attraction of stationary processes**. *Physica D* 195 (2004) 229-243.
- [7] Frank T.D.: **Fluctuation-dissipation theorems for nonlinear Fokker-Planck equations of the Desai-Zwanzig type and Vlasov-Fokker-Planck equations**. *Physics Letters A* 329 (2004) 475-485
- [8] Frank T.D.: **Short-time correlations of many-body systems described by nonlinear Fokker-Planck equations and Vlasov-Fokker-Planck equations**. *Physics Letters A* 337 (2005) 224-234
- [9] Janíček P., Ondráček E., Vrbka J., Burša J.: **Mechanika těles – Pružnost a pevnost I**, VUT Brno, FSI, 2004