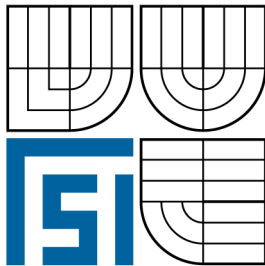


**VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ**  
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



**FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ**  
**ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A**  
**BIOMECHANIKY**

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING  
INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND  
BIOMECHANICS

## **POSOUZENÍ RIZIKA ZTRÁTY VZPĚRNÉ STABILITY PRUTU ZE DVOU RŮZNÝCH MATERIÁLŮ**

EVALUATION OF BUCKLING RISK AT BEAMS MADE OF TWO VARIOUS MATERIALS

**BAKALÁŘSKÁ PRÁCE**  
BACHELOR'S THESIS

**AUTOR PRÁCE**  
AUTHOR

**MARTIN ZVĚŘINA**

**VEDOUCÍ PRÁCE**  
SUPERVISOR

**doc. Ing. JIŘÍ BURŠA, Ph.D.**

BRNO 2008

## **Abstrakt**

Cílem této práce je posouzení rizika ztráty vzpěrné stability prutu ze dvou různých materiálů a vymezení hranice pro kritickou sílu vzpěru prutu ze dvou různých materiálů pomocí vztahů pro prizmatický prut. Dále je zde zpracováno analytické určení kritické síly vzpěru u volného prutu ze dvou různých materiálů a také analytické určení kritické síly vzpěru u vázaného prutu ze dvou různých materiálů.

Klíčová slova: Vzpěrná stabilita, vázaný prut, volný prut, kritická síla

## **Abstract**

Aim of this work is evaluation of buckling risk at beams made of two various materials and delimitation limits for critical power buckling beam from two various materials by the help of relations for prismatic beam. Further is here processed analyst determination critical force buckling for free beam from two various materials and also analyst determination critical force buckling for fixed beam from two various materials.

Keywords: Buckling risk, fixed beam, free beam, critical force

## **Bibliografická citace:**

ZVĚŘINA, M.: *Posouzení rizika ztráty vzpěrné stability prutu ze dvou různých materiálů.*  
Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2008. 40 s. Vedoucí  
bakalářské práce doc. Ing. Jiří Burša, Ph.D.

## Čestné prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně, pod vedením vedoucího bakalářské práce, a že jsem uvedl všechny použité zdroje.

V Brně dne 1. února 2008

.....

## **Poděkování**

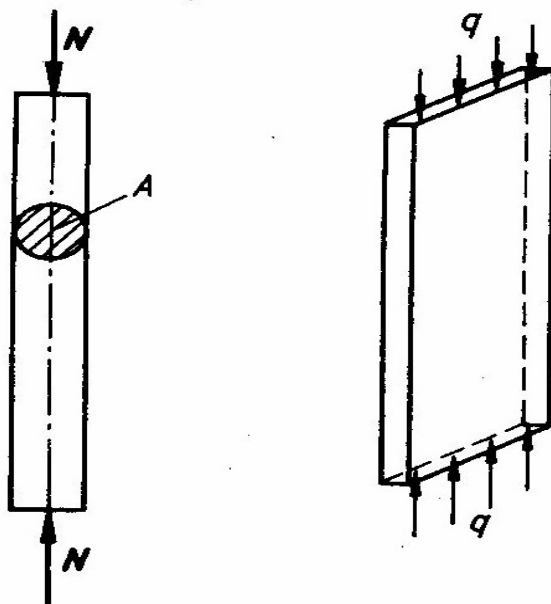
Tímto bych chtěl poděkovat vedoucímu bakalářské práce panu doc. Ing. Jiřímu Buršovi, Ph.D. za podporu, obětavou pomoc a cenné připomínky a rady při zpracování práce.

# Obsah

<b>Zadání</b>	2
<b>Licenční smlouva</b>	4
<b>Abstrakt</b>	6
<b>Bibliografická citace</b>	7
<b>Čestné prohlášení</b>	8
<b>Poděkování</b>	9
<b>Obsah</b>	10
<b>1. Úvod</b>	11
<b>2. Mezní stavy související s deformací tělesa</b>	12
<b>3. Vzpěrná stabilita prutu</b>	14
3.1 Základní formulace	14
3.2 Ideální tlakové namáhání ideálního volného homogenního prutu	15
3.3 Vzpěrná síla volného prutu ze dvou materiálů	20
3.4 Vzpěrná síla vázaného homogenního prutu	23
<b>4. Odvození vzpěrné síly vázaného prutu ze dvou materiálů</b>	29
<b>5. Volba numerické metody</b>	33
<b>6. Numerické řešení konkrétního případu</b>	35
6.1 Volný prut ze dvou materiálů	35
6.2 Vázaný prut ze dvou materiálů	37
<b>7. Závěr</b>	39
<b>Literatura</b>	40

# 1. Úvod

Každý nosný systém se vlivem zatížení deformuje. V základních případech namáhání prutů, tj. v tahu (tlaku), ohybu, krutu a smyku, jsme při výpočtu napětí a deformací v pružné oblasti běžně zanedbávali vliv malých deformací systému. Pružné deformace v těchto případech byly přímo úměrné zatížení. Tento předpoklad však nemůžeme aplikovat na případy, kdy deformace ovlivňují velikost napětí, např. u štíhlého (tenkého) přímého prutu namáhaného tlakovou silou  $N$  působící v jeho ose nebo u tenké desky namáhané tlakovým zatížením ve střední rovině (obr. 1). Deformace v těchto případech nejsou již přímo úměrné velikosti zatížení a neplatí zákon superpozice posuvů. Fyzikální podstatu i metodiku výpočtu těchto případů si ukážeme na tenkém přímém prutu namáhaném osovou tlakovou silou  $N$ . Tento případ nazýváme obecně ztrátou stability nebo vzpěrem a takto namáhaný prut vzpěrou.



Obr. 1  
Upraveno podle [2].

## 2. Mezní stavy související s deformací tělesa

Posouzení rizika ztráty vzpěrné stability prutu patří do oblasti mezních stavů souvisejících s deformací tělesa podle členění mezních stavů [1]. Tyto mezní stavy lze rozdělit na: (obr. 2).

### 1. Mezní stav deformace tělesa

- Je takový jeho stav, ve kterém se deformace funkčně přípustné mění na deformace funkčně nepřípustné.

Funkčně přípustná deformace tělesa je, jestliže podstatně nemění funkční vlastnosti soustavy (konstrukce), jejíž je prvkem.

Funkčně nepřípustná deformace tělesa je, jestliže dosáhne deformace jisté velikosti, která je dána vlastnostmi a určením soustavy, charakter soustavy se podstatně změní. Buď se změní pohyblivost soustavy, nebo jsou překročeny meze deformace, určené pro soustavu vzhledem k jejich funkci.

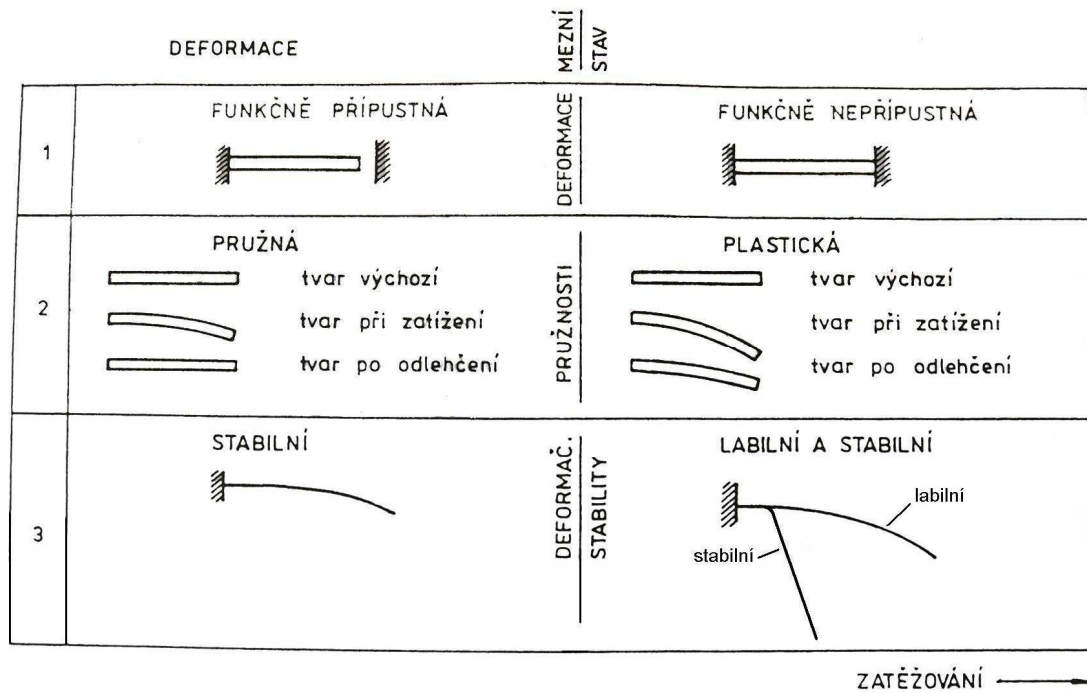
### 2. Mezní stav pružnosti tělesa

- Je takový jeho stav, při jehož překročení vznikají plastické deformace (po uskutečnění zatěžovacího cyklu).

### 3. Mezní stav deformační stability

- Při zatěžování tělesa můžeme za jistých okolností pozorovat, že při jistém zatížení se mění charakter jeho deformace. Je to např. případ tlakového namáhání štíhlých prutů a tenkostěnných součástí. Podrobnějším rozbořením zjistíme, že až do jisté hodnoty zatížení má deformované těleso v jistém smyslu stejnou konfiguraci. Po překročení jistého zatížení se tato původní konfigurace stává nestabilní a deformované těleso získává novou, stabilní konfiguraci. Náhlý přechod z jedné stabilní konfigurace do jiné znamená v řadě případů vyřazení soustavy z provozu, v jiných případech je naopak tato vlastnost využívána (vypínače, úchytky apod.).
- Celý obor deformace tělesa můžeme proto rozdělit na oblast stabilní deformace a oblast, kde původní geometrická konfigurace je labilní, ale existuje jiná geometrická konfigurace, která je stabilní. Rozhraní mezi těmito oblastmi je mezním stavem deformační stability.





Obr. 2

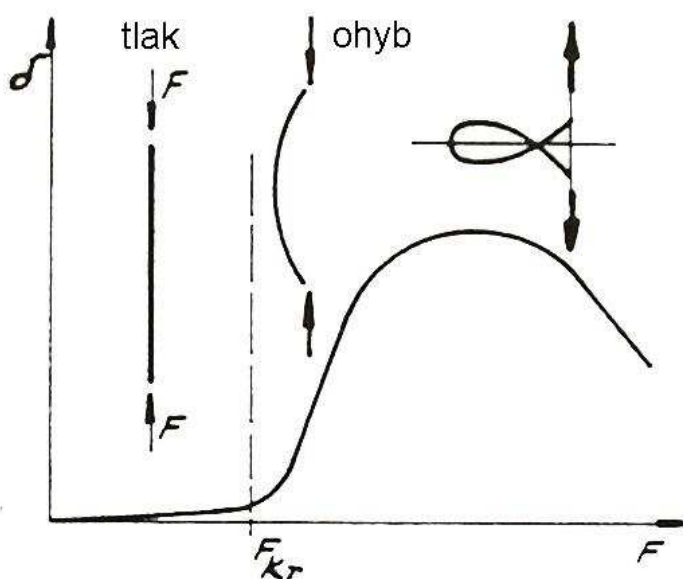
Schématiké zobrazení oblasti deformace tělesa z hlediska stability a mezního stavu deformační stability, upraveno podle [1].

### 3. Vzpěrná stabilita prutu

#### 3.1 Základní formulace

Tato kapitola je zpracována podle [1].

Ze základního namáhání prostým tlakem se příčné průřezy pouze přibližovaly. Stačí však vzít jakoukoliv relativně tenkou tyč (poměr  $d/l$  je malý) a pokusit se namáhat ji tlakem. Co zjistíme? To, že od určitého okamžiku zatěžování se bude tyč prohýbat. Každý z nás se s touto skutečností mnohokrát setkal. Nyní si musíme tuto skutečnost začít uvědomovat z pružnostních hledisek. Například tak, že budeme prohýbání tyče blíže sledovat a při zvětšujícím se zatížení budeme měřit maximální průhyb. Dostaneme závislost, která je zobrazena na obr. 3.



Obr. 3

Závislost maximálního průhybu na zvětšující se zátěžné síle, upraveno dle [1].

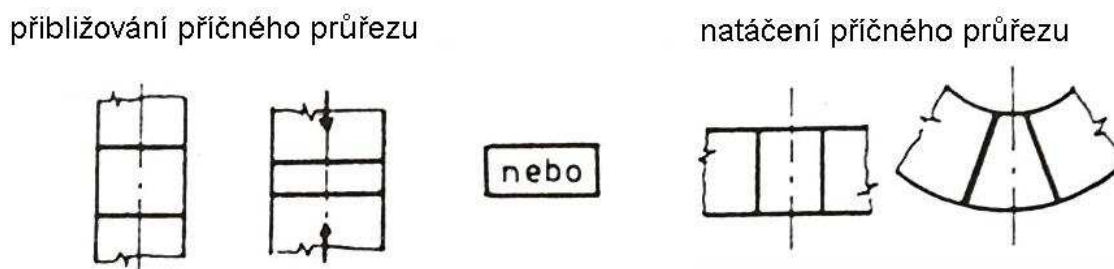
Vidíme, že v počáteční fázi zatěžování, je průhyb na hranici rozlišitelnosti, zatím co po překročení jisté síly  $F_{KR}$  průhyb rychle narůstá až do maximální hodnoty. Při dalším zatěžování se na prutu vytváří smyčka a průhyb se zmenšuje, a to tak dlouho, až nastane lom nebo velké plastické deformace. Deformace je při zatěžování stále jednoznačná a staticky rovnovážná, ale v průběhu zatěžování se mění charakter deformace.

V počáteční fázi je podstatné stlačování střednice a nepodstatný její průhyb, při větších silách je tomu naopak, průhyb je podstatný a stlačování střednice nepodstatné. Rozhraní těchto dvou stavů budeme označovat jako mezní stav vzpěrné stability.

Budeme-li experiment opakovat, zjistíme, že nejde o jev náhodný, ale že v prohýbání tlakově namáhaného prutu je zákonitost. Dochází tak k závažnému rozporu, reálně se prut při tlakovém namáhání prohýbá, ale axiómem dosavadní teorie je, že se neprohýbá.

Chceme-li zformulovat teorii, která by byla použitelná, musíme vzít realitu prohýbání jako základ teorie. To však vede k nutnosti uvolňovat prvek v prohnutém stavu.

Obecně bychom měli uvolňovat prvek v reálném deformovaném stavu, kdy se příčné průřezy nejen natáčejí (prohýbání), ale i přibližují. Lze ukázat, že v prohnutém stavu je přibližování příčných průřezů nepodstatné (na naší rozlišovací úrovni). Proto základní teorii tlakového namáhání prutu zformulujeme za předpokladu, že se příčné průřezy bud přibližují nebo natáčejí (obr. 4).



Obr. 4

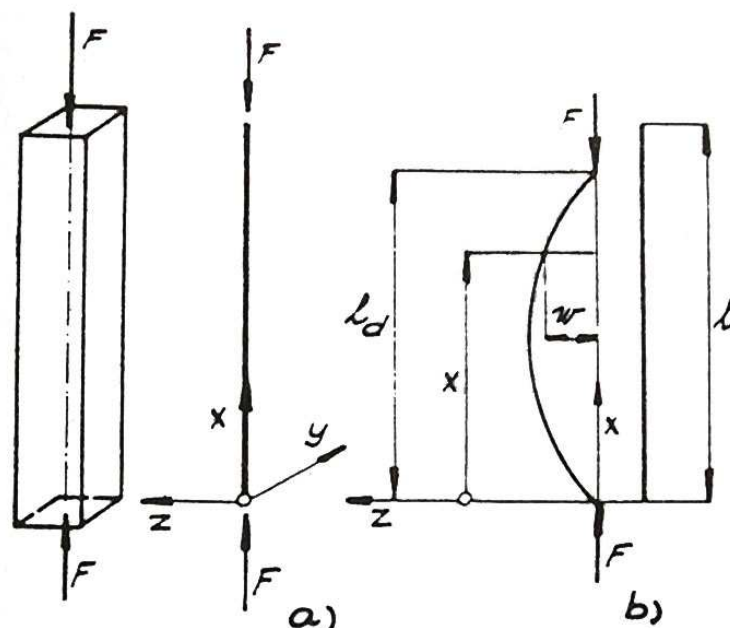
Znázornění předpokladu o příčných průřezích, upraveno dle [1].

### 3.2 Ideální tlakové namáhání ideálního volného homogenního prutu

Vyšetřujeme tento případ volného prutu namáhaného na tlak:

- a) střednice prutu je v nezátíženém stavu ideálně přímá
- b) prut je prizmatický a nešroubový
- c) průřez prutu je tlustostěnný (tj. všechny rozměry příčného průřezu jsou řádově stejně velké)
- d) prut je zatížen dvěma rovnovážnými osamělými silami  $F$ , které působí v těžištích čel prutu a jejichž nositelky jsou totožné se střednicí prutu v nezátíženém stavu
- e) materiál prutu je homogenní, lineárně pružný a dokonale pevný
- f) v průběhu celého zatěžování platí prutové předpoklady prostého namáhání prutů

Tento případ označíme jako ideální tlakové namáhání ideálního prutu. Případ je schématicky znázorněn na obr. 5.



Obr. 5

Schématický náčrt tlakového namáhání ideálního prutu dle [1].

V souladu s výkladem v odstavci 3.1 musíme pro formulaci statických podmínek rovnováhy uvolňovat prvek prutu v deformovaném, tj. prohnutém stavu. Protože v prohnutém stavu je střednice zakřivená, působí v příčných průřezích posouvající síla  $T$ . Prut je tedy namáhán kombinací tlaku, ohybu a smyku. Tím se řešení stává komplikovaným.

Cílem řešení je především určit, kdy podstatnou deformací prutu je jeho stlačování a kdy ohýbání. Proto se z výsledných vnitřních účinků omezíme na podstatné, kterými jsou:

při stlačování – normální síla  $N = F$

při ohýbání – ohybový moment  $M_o$

Napjatost a deformace prutu při stlačování bez ohybu střednice je prostý tlak. Všimněme si proto především ohybu. S ohledem na předpoklady o homogenosti, prizmatickosti a nešroubovitosti můžeme předpokládat, že průhybovka bude rovinná křivka. Souřadnicový systém zvolme tak, jak je naznačeno na obr. 5, přičemž předpokládáme, že ohyb nastane v rovině  $zx$ , takže průhyb střednice označíme  $w$ . Pak je zřejmé, že ohybový moment v místě  $x$  je:

$$M_o(x) = F \cdot w \quad , \text{ kde } w = w(x) \quad (3.1)$$

Vzhledem k přijatým předpokladům (body b, c, f) je případ ohýbání prutu prostým ohybem, takže platí diferenciální rovnice, která má po dosazení za  $M_o$  z (3.1) tvar:

$$\frac{w'''}{(1 + w'^2)^{3/2}} = -\frac{Fw}{J_y} \quad (3.2)$$

kde  $E$  ... modul pružnosti v tahu

$J_y$  ... kvadratický moment k těžišti

Je to nelineární diferenciální rovnice druhého řádu pro určení průhybu  $w$ . Jak známe z matematiky, obecné řešení této diferenciální rovnice obsahuje dvě integrační konstanty  $C_1$ ,  $C_2$  a má tedy tvar:

$$w = w(x, F, C_1, C_2) \quad (3.3)$$

K určení integračních konstant  $C_1$  a  $C_2$  musíme napsat okrajové podmínky, které mají podle obr. 5 tvar:

$$x = 0 \quad w = 0, \quad x = l_d \quad w = 0 \quad (3.4)$$

Protože předpokládáme prostý ohyb, délka střednice se při průhybu nemění, takže platí:

$$l = \int_0^{l_d} \sqrt{1 + w'^2} \, dx \quad (3.5)$$

Řešení diferenciální rovnice (3.2) s okrajovými podmínkami (3.4) při podmínce (3.5) je v analytickém tvaru velmi obtížné a v uzavřeném tvaru nemožné. Pro určitá zjednodušení zavádíme  $l \approx l_d$ .

Síla  $F_v$  se označuje jako síla kritická. Je to hodnota pro praxi velice důležitá, neboť určuje, jakou silou můžeme ideální prut namáhat na tlak, aniž by nastalo prohýbání. Její velikost vyplývá z řešení z diferenciální rovnice (3.2) při okrajových podmínkách (3.4). Pokud nás zajímá jen určení síly  $F_v$  a nezajímá nás chování při  $F > F_v$ , můžeme řešení podstatně zjednodušit. Stačí totiž předpokládat velmi malé průhyby, tj. řešit deformaci pouze v bezprostředním okolí po překročení síly  $F_v$ . Pak můžeme zanedbat  $w'^2$  vzhledem k 1, tj.  $w'^2 \ll 1$ , takže diferenciální rovnice (3.2) se zjednoduší takto:

$$w'' + \frac{F}{EJ} w = 0 \quad (3.6)$$

A protože  $l \approx l_d$ , okrajové podmínky můžeme vyjádřit ve tvaru:

$$x = 0 \quad w = 0, \quad x = l \quad w = 0 \quad (3.7)$$

Po tomto zjednodušení (malé průhyby a tedy i malé změny síly  $F$ ) je průhyb popsán lineární homogenní diferenciální rovnicí druhého řádu s konstantními koeficienty.

Označíme-li:

$$p^2 = \frac{F}{EJ} \quad (3.8)$$

Můžeme diferenciální rovnici (3.6) psát ve tvaru:

$$w'' + p^2 w = 0 \quad (3.9)$$

Obecné řešení předpokládáme ve tvaru:

$$w = C_1 \cdot \sin px + C_2 \cdot \cos px \quad (3.10)$$

Integrační konstanty  $C_1$  a  $C_2$  určíme z okrajových podmínek (3.7). Po dosazení do (3.10) dostaneme:

Pro  $x = 0, w = 0$ :

$$0 = C_1 \sin 0 + C_2 \cos 0 \rightarrow C_2 = 0$$

Pro  $x = l, w = 0$ :

$$0 = C_1 \sin pl + C_2 \cos pl \rightarrow C_1 \sin pl = 0$$

Aby tedy mohly být splněny okrajové podmínky (3.7) při průhybu prutu musí platit:

$$C_1 \sin pl = 0 \Rightarrow C_1 \sin \left( \sqrt{\frac{F}{EJ}} l \right) = 0 \quad (3.11)$$

Nyní si rozebereme, kdy tato podmínka bude splněna. Jsou možné tři případy:

a)  $C_1 = 0, \sin pl \neq 0$

pak  $w = 0$ , přičemž argument u funkce  $\sin$ , tj.  $\sqrt{\frac{F}{EJ}} l$  může být libovolný. Znamená to, že při libovolné působící síle  $F$  zůstává prut přímý.

b)  $C_1 \neq 0, \sin pl = 0$

Průhyb prutu nastává pouze tehdy, bude-li splněno:

$$\sin pl = 0 \Rightarrow \sqrt{\frac{F}{EJ}} l = 0, \pi, 2\pi \dots$$

protože  $l, E, J$  jsou pro prut veličiny dané, znamená to, že musí platit:

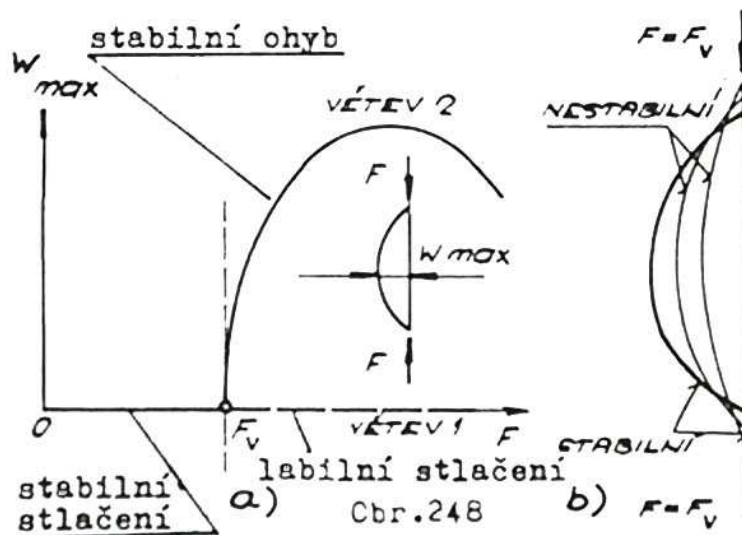
$$F = \frac{(k\pi)^2 EJ}{l^2}, \quad \text{pro } k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.12)$$

Pro  $k = 0$  je  $F = 0 \rightarrow$  prut je nezátížený a nemůže se tedy deformovat. Proto  $w = 0$ .

$$\text{Pro } k = 1 \text{ je } F = F_v = \frac{\pi^2 EJ}{l^2} \neq 0 \quad (3.13)$$

Znamená to, že při stálé síle  $F = F_v$  je  $w \neq 0$ , ale průhyb je neurčitý. Srovnáme-li tento výsledek s obecným řešením znázorněným na obr. 6 vidíme, že souhlasí v okolí bodu  $F_v$  pro velmi malé průhyby, neboť tečna ke křivce průhybu je v bodě  $F_v$  kolmá na osu  $F$ . Znamená to, že z přibližného řešení jsme získali přesnou hodnotu kritické síly (ovšem pro ideální, ideálně zatížený prut).

Při dalších hodnotách ( $k > 1$ ) by síla  $F$  vyhovující podmínce (3.12) byla vyšší než  $F_v$ , což znamená, že při těchto silách by deformační stav byl nestabilní (labilní). Jediným stabilním prohnutým stavem je stav při  $F_v$ .



Obr. 6

Závislost maximálního průhybu  $w_{max}$  na síle  $F$  získané pomocí Lagrangeova řešení dle [1].

c)  $C_1 = 0, \sin pl = 0$

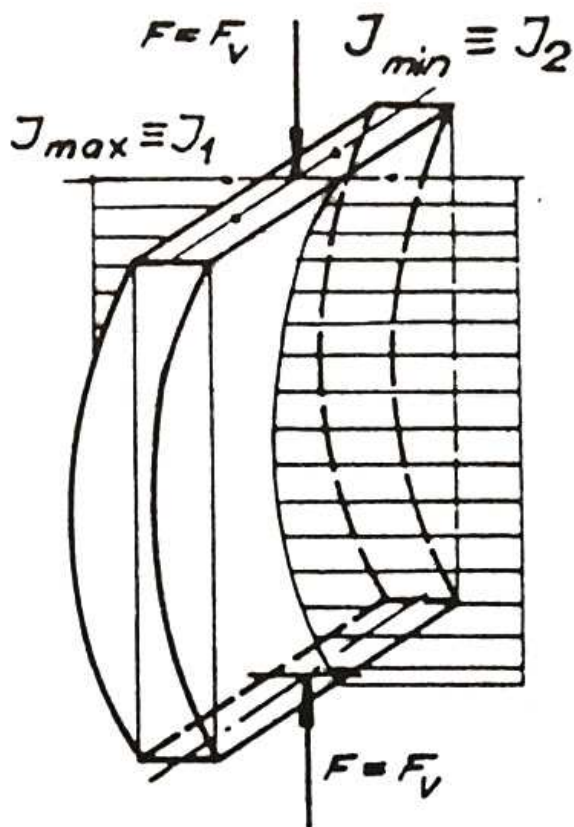
pak je  $F = F_v$  a současně  $w = 0$ , což znamená, že při  $F = F_v$  může zůstat prut také přímý (obr. 6a).

Z uvedeného rozboru získáváme tento závěr:

Předpokládáme-li při výpočtu průhybu ideálního prutu malé průhyby ( $w^2 \ll 1$ ), pak obdržíme správnou hodnotu síly  $F_v$ , při níž nastává rozdělení rovnováhy, ale neobdržíme správný popis průhybu pro  $F > F_v$ . Proto platí, že předpoklad  $w^2 \ll 1$  je použitelný pouze pro určení kritické síly  $F_v$ .

Zbývá ještě určit, ve které rovině průhyb ideálního prutu nastane. Je zřejmé, že to bude taková rovina průhybu, pro kterou bude  $F_v$  minimální. Průhyb v jiných rovinách může sice nastat, ale je opět nestabilní. Ze vztahu (3.12) je zřejmé, že  $F_v$  je minimální, jestliže je minimální  $J$ . Znamená to, že je to minimální z obou hlavních centrálních kvadratických momentů a odpovídá hlavní centrální ose, kterou si označíme  $J_2$ . Z toho vyplývá, že osa  $J_2$  bude neutrální osou průřezu. Podle teorie prostého ohybu, nastane ohyb v rovině kolmé k rovině obsahující neutrální osy průřezu a tou je rovina vytvořená hlavními centrálními osami podél střednice prutu k níž je maximální kvadratický osový moment  $J_{max}$  (obr. 7).

Proto stabilní průhyb ideálního prutu namáhaného ideálním tlakem nastane v rovině tvořené hlavními centrálními osami, k nimž je  $J$  maximální ( $J_1$ ).



Obr. 7

Zobrazení roviny v níž dojde k průhybu prutu dle [1].

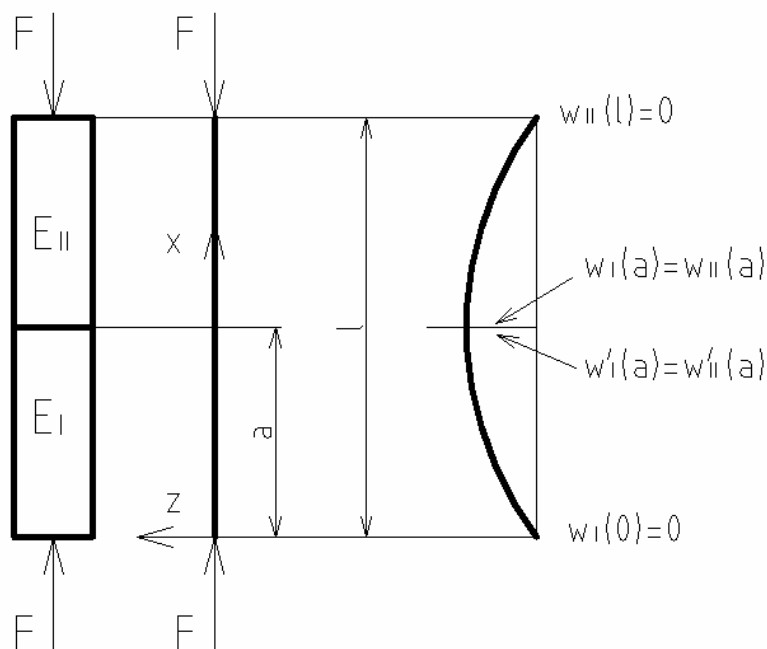
### 3.3 Vzpěrná síla volného prutu ze dvou materiálů

#### Vliv proměnnosti modulu pružnosti $E$

Předpokládejme, že prut má po délce proměnný modul pružnosti tak, že můžeme s dostatečnou přesností použít vztahy odvozené pro prostý ohyb. Je to v případech, kdy modul pružnosti je málo proměnný nebo je-li modul pružnosti odstupňovaný. Pak proměnnost modulu pružnosti se projeví v tom, že  $E = E(x)$ . Člen  $\frac{F}{EJ}$  diferenciální rovnice průhybové čáry pak je funkcí  $x$ . Diferenciální rovnice (3.6) je pak lineární diferenciální rovnicí druhého řádu s proměnnými koeficienty. Řešení těchto rovnic v uzavřeném tvaru je možné jen ve zcela speciálních případech. Proto i kritická síla  $F_v$  se musí určovat numerickými metodami.

Abychom ukázali vliv proměnnosti modulu pružnosti, uvažujeme přímý prut s odstupňovaným modulem pružnosti – v úseku I je  $E_I$ , v úseku II je  $E_{II}$  (obr. 8).





Obr. 8

Schématické znázornění přímého prutu s odstupňovaným modulem pružnosti.

Pak průhyb je popsán vztahy:

$$\text{Pro úsek I} \quad w_I = C_1 \sin p_I x + C_2 \cos p_I x \quad \text{kde } p_I = \sqrt{\frac{F}{E J_I}} \quad (3.14)$$

$$\text{Pro úsek II} \quad w_{II} = D_1 \sin p_{II} x + D_2 \cos p_{II} x \quad \text{kde } p_{II} = \sqrt{\frac{F}{E J_{II}}} \quad (3.15)$$

Přičemž musí být splněny tyto okrajové podmínky:

$$\text{- pro uložení konců prutů} \quad w_I(0) = 0 \quad w_{II}(l) = 0$$

$$\text{- pro spojitost a hladkost střednice} \quad w_I(a) = w_{II}(a) \quad w'_I(a) = w'_{II}(a)$$

Po dosazení okrajových podmínek do rovnic průhybu dostáváme:

$$w_I(0) = 0 \quad C_2 = 0 \quad (3.16)$$

$$w_{II}(l) = 0 \quad D_1 \sin(p_{II} l) + D_2 \cos(p_{II} l) = 0 \quad (3.17)$$

$$w_I(a) = w_{II}(a) \quad C_1 \sin(p_I a) = D_1 \sin(p_{II} a) + D_2 \cos(p_{II} a) \quad (3.18)$$

$$w'_I(a) = w'_{II}(a) \quad C_1 p_I \cos(p_I a) = D_1 p_{II} \cos(p_{II} a) - D_2 p_{II} \sin(p_{II} a) \quad (3.19)$$

Rovnice (3.17), (3.18) a (3.19) tvoří homogenní soustavu rovnic pro konstanty  $C_1$ ,  $D_1$ ,  $D_2$ . V bodě rozdělení rovnováhy je malý průhyb neurčitý, a proto determinant soustavy musí být nulový.

Musí tedy platit:

$$\begin{vmatrix} 0 & \sin(p_{II} l) & \cos(p_{II} l) \\ \sin(p_I a) & -\sin(p_{II} a) & -\cos(p_{II} a) \\ p_I \cos(p_I a) & -p_{II} \cos(p_{II} a) & p_{II} \sin(p_{II} a) \end{vmatrix} = 0$$

Pro přehlednější odvození rovnice zavedeme tyto zjednodušení:

$$X = p_{II} l$$

$$Y = p_{II} a$$

$$Z = p_I a$$

$$-p_{II} \sin Z \cos X \cos Y - p_I \sin X \cos Y \cos Z + p_I \sin Y \cos X \cos Z - p_{II} \sin X \sin Y \sin Z = 0$$

$$-p_{II} \sin Z \cos X \cos Y - p_{II} \sin X \sin Y \sin Z = p_I \sin X \cos Y \cos Z - p_I \sin Y \cos X \cos Z$$

$$-p_{II} [\sin Z \cos X \cos Y + \sin X \sin Y \sin Z] = p_I [\sin X \cos Y \cos Z - \sin Y \cos X \cos Z]$$

$$\frac{p_I}{p_{II}} = - \frac{\sin Z \cos X \cos Y + \sin X \sin Y \sin Z}{\sin X \cos Y \cos Z - \sin Y \cos X \cos Z}$$

$$\frac{p_I}{p_{II}} = - \frac{\sin Z (\cos X \cos Y + \sin X \sin Y)}{\cos Z (\sin X \cos Y - \sin Y \cos X)}$$

$$\sin(X - Y) = \sin X \cos Y - \cos X \sin Y$$

$$\cos(X + Y) = \cos X \cos Y + \sin X \sin Y$$

$$\operatorname{tg} Z = \frac{\sin Z}{\cos Z} \quad \operatorname{cotg}(X - Y) = \frac{\cos(X - Y)}{\sin(X - Y)}$$

$$- \operatorname{tg} Z \frac{\cos(X - Y)}{\sin(X - Y)} = \frac{p_I}{p_{II}}$$

$$- \operatorname{tg} Z \operatorname{cotg}(X - Y) = \frac{p_I}{p_{II}}$$

Po zpětném dosazení za  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ ,  $p_I$ ,  $p_{II}$  a úpravě dostáváme tento konečný tvar:

$$\operatorname{tg} \left( a \sqrt{\frac{F}{E_I J}} \right) \operatorname{cotg} \left[ \sqrt{\frac{F}{E_{II} J}} (l - a) \right] + \sqrt{\frac{E_{II}}{E_I}} = 0 \quad (3.20)$$

Tuto rovnici musíme řešit numericky vzhledem ke kritické síle  $F_v$ . Jelikož existuje řešení této rovnice, existuje i bod rozdělení rovnováhy a tedy i kritická síla  $F_v$ , která je závislá na  $E_I$ ,  $E_{II}$ ,  $a$ ,  $l$ .

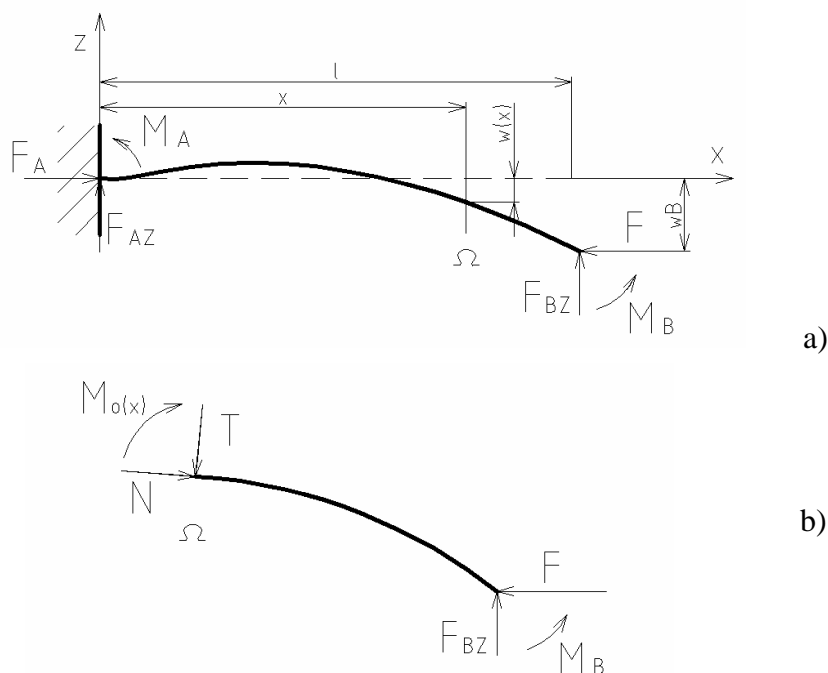
### 3.4 Vzpěrná síla vázaného homogenního prutu

Až dosud jsme se zabývali nejjednodušším případem – volným prutem, zatíženým dvěma rovnovážnými silami na společné nositelce. Malé průhyby prutu byly pak popsány diferenciální rovnicí (3.6) a okrajovými podmínkami (3.7). Kromě zatížení tlakovou silou v ose prutu může být prut vázán k základnímu tělesu. Jak jsme již ukázali, vazba je popsána vazbovou podmínkou, ve které u prutů vystupuje posuv bodu střednice nebo úhel natočení, a to obecně ve třech směrech.

Uvažujme nyní ideální prut (přímý, prizmatický, nešroubový, z homogenního, izotropního, lineárně pružného materiálu) těchto vlastností:

- Střednicí prutu je úsečka  $AB$ , jejíž délka je  $l$ .
- Tlaková síla  $F$  působí v bodě  $B$  a její nositelka je rovnoběžná s přímkou  $AB$  v nezatíženém stavu.
- Prut je vázán k základnímu tělesu pouze v bodech  $A$  a  $B$ .

Situace je schématicky znázorněná na obr. 9 a). Z předpokladu vyplývá, že pokud nastane průhyb prutu, pak průhybovkou bude rovinná křivka v rovině os maximálního kvadratického momentu průřezu. Zvolme nyní souřadnicový systém prutu tak, že (obr. 9) počátek je v bodě  $A$ , střednice leží v kladné ose  $x$  a rovina os maximálního kvadratického momentu je rovinou  $xz$ . Pak stačí uvažovat průhyb  $w$  a vazbové podmínky vyjadřující  $w$  a  $w'$  ve vazbových bodech  $A$ ,  $B$ .



Obr. 9 Schéma vázaného prutu

Pro určení kritické síly  $F_v$  stačí předpokládat malé průhyby. Musíme však sestavit diferenciální rovnici průhybové čáry a okrajové podmínky. Zcela obecně postupujeme takto: (obr. 9)

1. Odhadneme a obecně označíme průhyb střednice tak, aby byly respektovány vazby, tj. aby byly splněny vazbové podmínky.
2. Prut úplně uvolníme tak, že odstraníme vazby, napíšeme vazbové podmínky a zavedeme reakce podle typu vazby.
3. Vyjádříme použitelné podmínky statické rovnováhy. Protože vyšetřujeme pouze  $F_v$ , vyjádříme tyto podmínky vzhledem k nedeformovanému stavu. V obecném případě mají tvar:

$$\begin{aligned} F_A - F &= 0 \\ F_{AZ} - F_{BZ} &= 0 \\ F_{BZ} l - F w_B + M_B + M_A &= 0 \end{aligned} \quad (3.21)$$

4. Vyjádříme ohybový moment v obecném místě málo prohnuté střednice.

$$-M_O(x) = -M_B - F_{BZ}(l-x) + F(w_B - w(x))$$

5. Napíšeme rovnici průhybové čáry pro malé průhyby:

$$\begin{aligned} w'' E J &= -M_B - F_{BZ}(l-x) + F(w_B - w(x)) \\ w'' + \frac{F}{E J} w(x) &= \frac{1}{E J} [-F_{BZ}(l-x) + F w_B - M_B] \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$p^2 = \frac{F}{E J}$$

Protože vycházíme z diferenciální rovnice s pravou stranou, předpokládané řešení se skládá z řešení homogenní diferenciální rovnice a partikulární části:

$$\begin{aligned} w(x) &= w_{hom} + w_{part} \\ w_{hom} &= C_1 \sin px + C_2 \cos px \end{aligned}$$

Partikulární řešení předpokládáme ve tvaru:

$$\begin{aligned} w_{part} &= A(l-x) + B \\ w'_{part} &= A \\ w''_{part} &= 0 \end{aligned}$$

Po dosazení do diferenciální rovnice (3.22) a po vyjádření konstant  $A$  a  $B$  dostáváme tyto výrazy:

$$\frac{F}{E J} (A(l-x) + B) = \frac{1}{E J} (-F_{BZ}(l-x) + F w_B - M_B)$$

$$A = -\frac{F_{BZ}}{F} \quad B = w_B - \frac{M_B}{F}$$

Po zpětném dosazení za neznámé konstanty dostáváme obecný tvar diferenciální rovnice průhybové čáry pro vázaný prut:

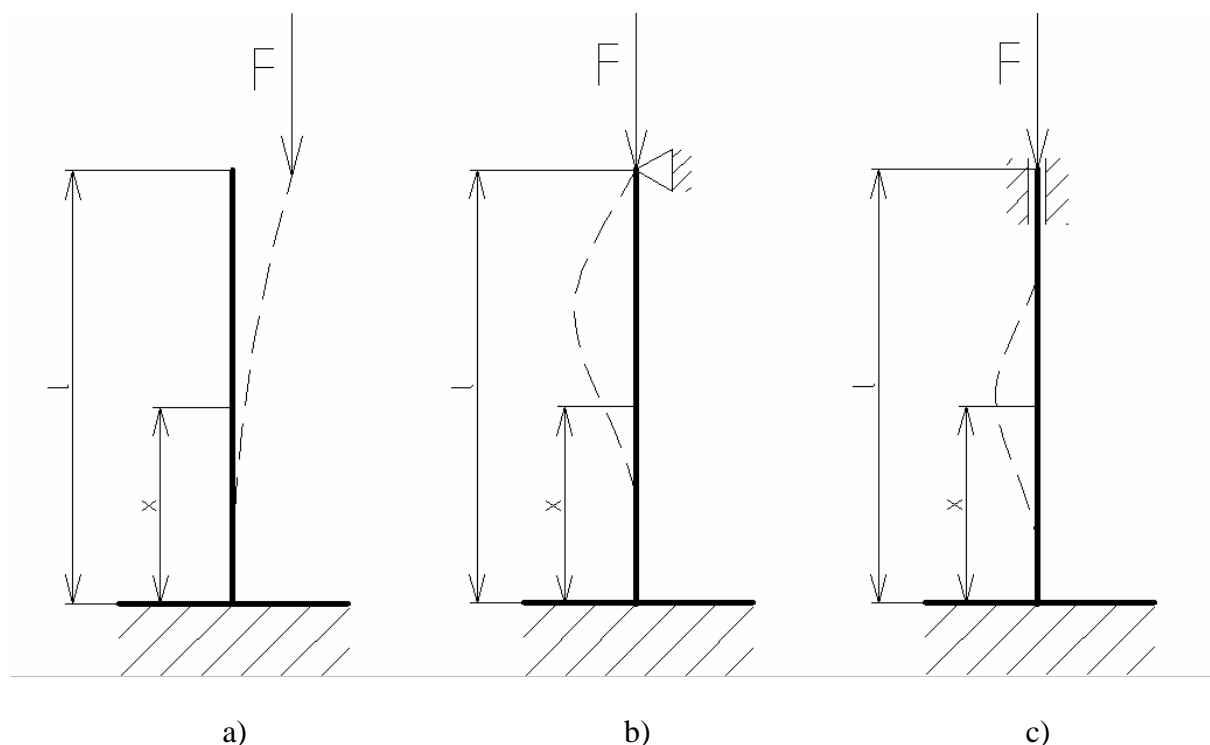
$$w(x) = C_1 \sin \sqrt{\frac{F}{EJ}} x + C_2 \cos \sqrt{\frac{F}{EJ}} x - \frac{F_{BZ}}{F} (l-x) + w_B - \frac{M_B}{F} \quad (3.23)$$

V této rovnici je obecně celkem pět parametrů:

- integrační konstanty  $C_1, C_2$
- parametry vazbových reakcí  $F_{BZ}, M_B$
- průhyb koncového bodu  $w_B$

Pro jejich určení je nutné sestavit vazbové podmínky pro oba konce prutu.

Dále si v této kapitole ukážeme vyjádření kritické síly  $F_v$  pro tři základní případy uložení konců prutu (obr. 10). Čtvrtý případ uložení prutu s kloubovými vazbami na obou koncích je matematicky shodný s řešením volného prutu. Proto zde tento případ uložení dále neuvádíme.



Obr. 10  
Základní případy uložení konců prutu

- a) I případ vzpěru – prut je na jednom konci vetknutý, na druhém konci volný
- b) II případ vzpěru – prut je na jednom konci vetknutý, na druhém konci uložen v kloubové vazbě
- c) III případ vzpěru – prut je vetknutý na obou koncích

## I případ vzpěru – prut je na jednom konci vetknutý, na druhém konci volný

Okrajové podmínky:

$$\begin{aligned}x = 0 &\Rightarrow w = 0 \\x = 0 &\Rightarrow w' = 0 \\x = l &\Rightarrow w(l) = w_B \\F_{BZ} &= 0 \\M_B &= 0\end{aligned}$$

Obecná diferenciální rovnice po dosazení za nulové konstanty:

$$\begin{aligned}w &= C_1 \sin px + C_2 \cos px + w_B \\w' &= p C_1 \cos px - p C_2 \sin px\end{aligned}$$

Dosazení okrajových podmínek do diferenciální rovnice:

$$\begin{aligned}0 &= C_1 \sin p0 + C_2 \cos p0 + w_B &\Rightarrow C_2 &= -w_B \\0 &= p C_1 \cos p0 - p C_2 \sin p0 &\Rightarrow C_1 &= 0\end{aligned}$$

Po matematických úpravách dostáváme vztah pro kritickou sílu  $F_v$ :

$$\begin{aligned}w_B &= -w_B \cos pl + w_B \\w_B \cos pl &= 0 \Rightarrow w_B = 0 \Rightarrow \\&\Rightarrow pl = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sqrt{\frac{F}{EJ}} l = \frac{\pi}{2} \Rightarrow F_v = \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 EJ}{l^2}\end{aligned}\quad (3.24)$$

## II případ vzpěru – prut je na jednom konci vetknutý, na druhém konci uložen v kloubové vazbě

Okrajové podmínky:

$$\begin{aligned}x = 0 &\Rightarrow w = 0 \\x = l &\Rightarrow w_B = 0 \\x = 0 &\Rightarrow w' = 0 \\M_B &= 0 \\w_B &= 0\end{aligned}$$

Obecná diferenciální rovnice po dosazení za nulové konstanty:

$$\begin{aligned}w(x) &= C_1 \sin px + C_2 \cos px - \frac{F_{BZ}}{F} (l - x) \\w'(x) &= p C_1 \cos px - p C_2 \sin px + \frac{F_{BZ}}{F}\end{aligned}$$

Dosazení okrajových podmínek do diferenciální rovnice:

$$0 = C_2 - \frac{F_{BZ}}{F} l$$

$$0 = C_1 \sin pl + C_2 \cos pl$$

$$0 = p C_1 + \frac{F_{BZ}}{F}$$

Řešením determinantu této matice získáme kritickou sílu  $F_v$ :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -\frac{l}{F} \\ \sin pl & \cos pl & 0 \\ p & 0 & \frac{1}{F} \end{vmatrix} = 0$$

$$\frac{l}{F} p \cos pl - \sin pl \frac{1}{F} = 0$$

$$l p \cos pl - \sin pl = 0$$

$$pl - \operatorname{tg} pl = 0 \quad \Rightarrow pl \approx \sqrt{2} \pi$$

$$F_v = \frac{2\pi^2 E J}{l^2} \quad (3.25)$$

### III případ vzpěru – prut je vetknutý na obou koncích

Okrajové podmínky:

$$x = 0 \quad \Rightarrow w = 0$$

$$x = l \quad \Rightarrow w_B = 0$$

$$x = 0 \quad \Rightarrow w' = 0$$

$$x = l \quad \Rightarrow w'(l) = 0$$

$$w_B = 0$$

Obecná diferenciální rovnice po dosazení za nulové konstanty:

$$w(x) = C_1 \sin px + C_2 \cos px - \frac{F_{BZ}}{F} (l-x) - \frac{M_B}{F}$$

$$w'(x) = p C_1 \cos px - p C_2 \sin px + \frac{F_{BZ}}{F}$$

Dosazení okrajových podmínek do diferenciální rovnice:

$$0 = C_2 - \frac{F_{BZ}}{F} l - \frac{M_B}{F}$$

$$0 = C_1 \sin pl + C_2 \cos pl - \frac{M_B}{F}$$

$$0 = p C_1 + \frac{F_{BZ}}{F}$$

$$0 = p C_1 \cos pl - p C_2 \sin pl + \frac{F_{BZ}}{F}$$

Řešením determinantu této matice získáme kritickou sílu  $F_v$ :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -\frac{l}{F} & -\frac{1}{F} \\ \sin pl & \cos pl & 0 & -\frac{1}{F} \\ 1 & 0 & \frac{1}{F} & 0 \\ p \cos pl & -p \sin pl & \frac{1}{F} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$1 - \cos pl = \frac{pl}{2} \sin pl$$

$$\Rightarrow pl = 2\pi \quad \Rightarrow F_v = \frac{4\pi^2 E J}{l^2} \quad (3.26)$$



## 4. Odvození vzpěrné síly vázaného prutu ze dvou materiálů

V této kapitole se pokusíme o vyjádření rovnice pro kritickou sílu  $F_v$  pro tři základní případy uložení konců prutu ze dvou různých materiálů.

Průhyb je popsán vztahy:

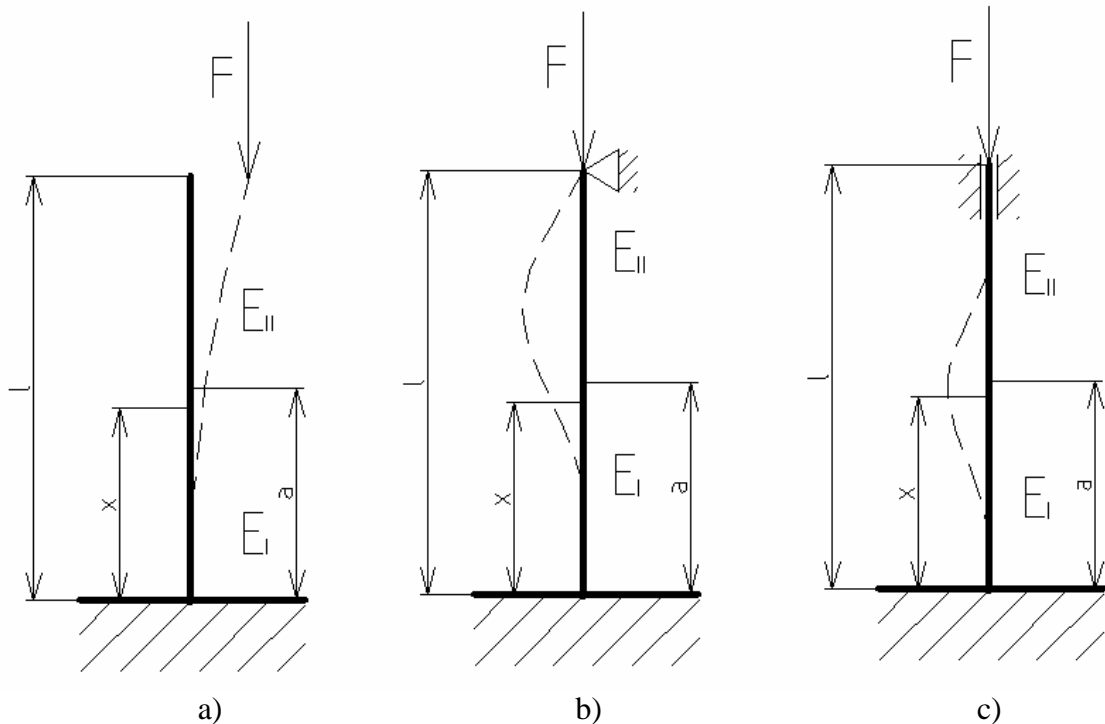
$$\text{- pro úsek I} \quad w_I(x) = C_1 \sin p_I x + C_2 \cos p_I x - \frac{F_{BZ}}{F} (l-x) + w_B - \frac{M_B}{F} \quad (3.27)$$

$$\text{kde } p_I = \sqrt{\frac{F}{E_I J}}$$

$$\text{- pro úsek II} \quad w_{II}(x) = D_1 \sin p_{II} x + D_2 \cos p_{II} x - \frac{F_{BZ}}{F} (l-x) + w_B - \frac{M_B}{F} \quad (3.28)$$

$$\text{kde } p_{II} = \sqrt{\frac{F}{E_{II} J}}$$

V této soustavě dvou rovnic se vyskytuje sedm neznámých parametrů, které získáme po sepsání okrajových podmínek pro daný případ vázaného prutu (obr 11).

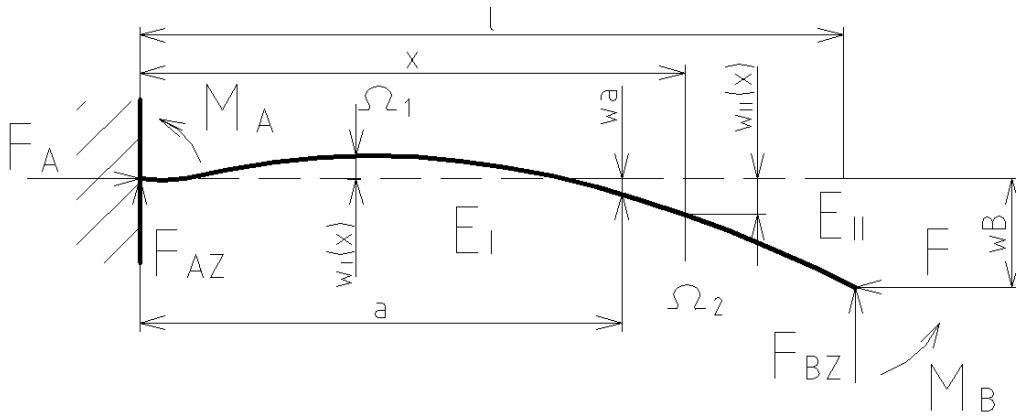


Obr. 11

Základní případy uložení konců prutu ze dvou různých materiálů.

- a) prut je na jednom konci vetknutý, na druhém konci volný
- b) prut je na jednom konci vetknutý, na druhém konci uložen v kloubové vazbě
- c) prut je vetknutý na obou koncích

**Prut je na jednom konci vetknutý, na druhém konci volný**



Obr. 12

Sestavení okrajových podmínek:

$$\begin{aligned}
 x=0 &\Rightarrow w_I=0 \\
 x=0 &\Rightarrow w'_I=0 \\
 x=l &\Rightarrow w_{II}(l)=w_B \\
 x=a &\Rightarrow w_I(a)=w_{II}(a) \\
 x=a &\Rightarrow w'_I(a)=w'_{II}(a) \\
 F_{BZ} &=0 \\
 M_B &=0
 \end{aligned}$$

Obecná diferenciální rovnice průhybové křivky pro daný případ:

$$\begin{aligned}
 w_I(x) &= C_1 \sin p_I x + C_2 \cos p_I x + w_B \\
 w'_I(x) &= p_I C_1 \cos p_I x - p_I C_2 \sin p_I x \\
 w_{II}(x) &= D_1 \sin p_{II} x + D_2 \cos p_{II} x + w_B \\
 w'_{II}(x) &= p_{II} D_1 \cos p_{II} x - p_{II} D_2 \sin p_{II} x
 \end{aligned}$$

Dosazení okrajových podmínek do diferenciální rovnice:

$$\begin{aligned}
 0 &= C_2 + w_B &\Rightarrow C_2 &= -w_B \\
 0 &= p_I C_1 &\Rightarrow C_1 &= 0 \\
 w_B &= D_1 \sin p_{II} l + D_2 \cos p_{II} l + w_B \\
 C_1 \sin p_I a + C_2 \cos p_I a + w_B &= D_1 \sin p_{II} a + D_2 \cos p_{II} a + w_B \\
 p_I C_1 \cos p_I a - p_I C_2 \sin p_I a &= p_{II} D_1 \cos p_{II} a - p_{II} D_2 \sin p_{II} a
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_1 \sin p_{II} l + D_2 \cos p_{II} l &= 0 & \Rightarrow D_2 &= -D_1 \operatorname{tg} p_{II} l \\
-w_B \cos p_I a - D_1 \sin p_{II} a - D_2 \cos p_{II} a &= 0 \\
p_I w_B \sin p_I a - p_{II} D_1 \cos p_{II} a + p_{II} D_2 \sin p_{II} a &= 0 \\
-w_B \cos p_I a - D_1 \sin p_{II} a + D_1 \operatorname{tg} p_{II} l \cos p_{II} a &= 0 \\
p_I w_B \sin p_I a - p_{II} D_1 \cos p_{II} a - p_{II} D_1 \operatorname{tg} p_{II} l \sin p_{II} a &= 0 \Rightarrow \\
\Rightarrow D_1 &= \frac{p_I w_B \sin p_I a}{p_{II} (\cos p_{II} a + \operatorname{tg} p_{II} l \sin p_{II} a)}
\end{aligned}$$

Po výpočtu soustavy rovnic dostáváme tento tvar rovnice pro výpočet kritické síly  $F_v$ :

$$-\cos \sqrt{\frac{F}{E_I J}} a + \sqrt{\frac{E_{II}}{E_I}} \frac{\sin \sqrt{\frac{F}{E_I J}} a \left( \operatorname{tg} \sqrt{\frac{F}{E_{II} J}} l \cos \sqrt{\frac{F}{E_{II} J}} a - \sin \sqrt{\frac{F}{E_{II} J}} a \right)}{\cos \sqrt{\frac{F}{E_{II} J}} a + \operatorname{tg} \sqrt{\frac{F}{E_{II} J}} l \sin \sqrt{\frac{F}{E_{II} J}} a} = 0 \quad (3.29)$$

Ze získané rovnice nelze vyjádřit kritickou sílu  $F_v$  analyticky (transcendentní rovnice), proto ji musíme řešit numericky.

V uvedených dalších dvou případech uložení konců prutu ze dvou materiálů sestavíme pouze okrajové podmínky a k tomu příslušné rovnice, protože by řešení těchto soustav rovnic bylo velmi obtížné, dále je neřešíme.

### Prut je na jednom konci vetknutý, na druhém konci uložen v kloubové vazbě

Okrajové podmínky:

$$\begin{aligned}
x=0 &\Rightarrow w_I = 0 \\
x=0 &\Rightarrow w'_I = 0 \\
x=l &\Rightarrow w_{II}(l) = 0 \\
x=a &\Rightarrow w_I(a) = w_{II}(a) \\
x=a &\Rightarrow w'_I(a) = w'_{II}(a) \\
M_B &= 0 \\
w_B &= 0
\end{aligned}$$

Obecná diferenciální rovnice průhybové křivky pro daný případ:

$$w_I(x) = C_1 \sin p_I x + C_2 \cos p_I x - \frac{F_{BZ}}{F} (l-x)$$

$$w'_I(x) = p_I C_1 \cos p_I x - p_I C_2 \sin p_I x + \frac{F_{BZ}}{F}$$

$$w_{II}(x) = D_1 \sin p_{II} x + D_2 \cos p_{II} x - \frac{F_{BZ}}{F} (l-x)$$

$$w'_{II}(x) = p_{II} D_1 \cos p_{II} x - p_{II} D_2 \sin p_{II} x + \frac{F_{BZ}}{F}$$

Sestavení soustavy rovnic:

$$0 = C_2 - \frac{F_{BZ}}{F} l$$

$$0 = p_I C_1 + \frac{F_{BZ}}{F}$$

$$0 = D_1 \sin p_{II} l + D_2 \cos p_{II} l$$

$$C_1 \sin p_I a + C_2 \cos p_I a - \frac{F_{BZ}}{F} (l-a) = D_1 \sin p_{II} a + D_2 \cos p_{II} a - \frac{F_{BZ}}{F} (l-a)$$

$$p_I C_1 \cos p_I a - p_I C_2 \sin p_I a + \frac{F_{BZ}}{F} = p_{II} D_1 \cos p_{II} a - p_{II} D_2 \sin p_{II} a + \frac{F_{BZ}}{F}$$

**Prut je vetknutý na obou koncích**

Okrajové podmínky:

$$x=0 \Rightarrow w_I = 0$$

$$x=0 \Rightarrow w'_I = 0$$

$$x=l \Rightarrow w_{II}(l) = 0$$

$$x=l \Rightarrow w'_{II}(l) = 0$$

$$x=a \Rightarrow w_I(a) = w_{II}(a)$$

$$x=a \Rightarrow w'_I(a) = w'_{II}(a)$$

$$w_B = 0$$

Obecná diferenciální rovnice průhybové křivky pro daný případ:

$$w_I(x) = C_1 \sin p_I x + C_2 \cos p_I x - \frac{F_{BZ}}{F} (l-x) - \frac{M_B}{F}$$

$$w'_I(x) = p_I C_1 \cos p_I x - p_I C_2 \sin p_I x + \frac{F_{BZ}}{F}$$

$$w_{II}(x) = D_1 \sin p_{II} x + D_2 \cos p_{II} x - \frac{F_{BZ}}{F} (l-x) - \frac{M_B}{F}$$

$$w'_{II}(x) = p_{II} D_1 \cos p_{II} x - p_{II} D_2 \sin p_{II} x + \frac{F_{BZ}}{F}$$

Sestavení soustavy rovnic:

$$0 = C_2 - \frac{F_{BZ}}{F} l - \frac{M_B}{F}$$

$$0 = p_I C_1 + \frac{F_{BZ}}{F}$$

$$0 = D_1 \sin p_{II} l + D_2 \cos p_{II} l - \frac{M_B}{F}$$

$$0 = p_{II} D_1 \cos p_{II} l - p_{II} D_2 \sin p_{II} l + \frac{F_{BZ}}{F}$$

$$C_1 \sin p_I a + C_2 \cos p_I a - \frac{F_{BZ}}{F} (l-a) - \frac{M_B}{F} = D_1 \sin p_{II} a + D_2 \cos p_{II} a - \frac{F_{BZ}}{F} (l-a) - \frac{M_B}{F}$$

$$p_I C_1 \cos p_I a - p_I C_2 \sin p_I a + \frac{F_{BZ}}{F} = p_{II} D_1 \cos p_{II} a - p_{II} D_2 \sin p_{II} a + \frac{F_{BZ}}{F}$$

## 5. Volba numerické metody

Tato kapitola je zpracována podle [3].

Pro numerické řešení námi odvozených rovnic lze použít několik různých numerických metod:

- metoda půlení intervalů (bisekce)
- metoda regula falsi
- metoda sečen
- Newtonova metoda
- obecná iterační metoda

Jako výpočtovou metodu pro zjištění kritické síly  $F_v$  jsem zvolil metodu bisekce (známou jako metodu půlení intervalů).

Výhody této metody:

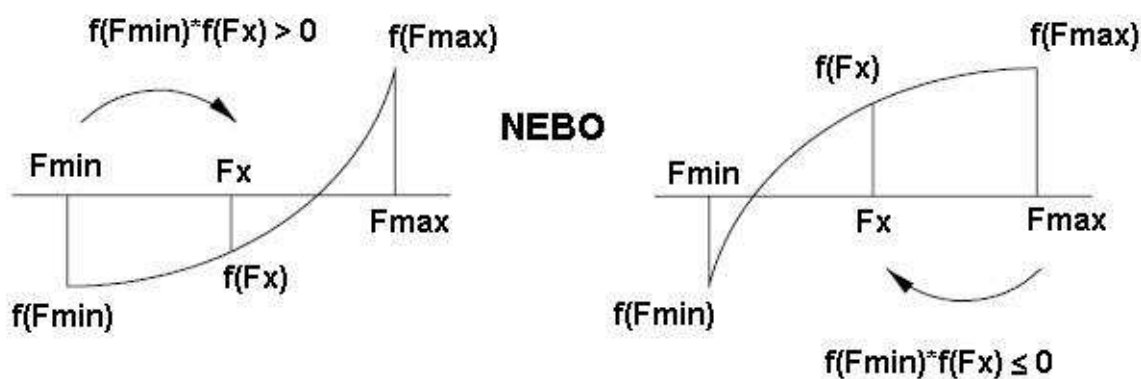
- jednoduchá metoda s relativně jednoduchým algoritmem, který lze snadno naprogramovat
- prostý odhad chyby
- není citlivá na vlastnosti funkce
- většinou spolehlivě konverguje, podmínkou je, abychom znali interval v němž leží řešení

Nevýhody:

- konverguje pomalu
- pokud na daném intervalu existuje více kořenů, tak metodou půlení určíme pouze jeden

Princip metody půlení intervalů (obr. 13)

$$F_x = (F_{\min} + F_{\max})/2$$



Obr. 13

Za předpokladu, že funkce  $f(F)$  je na intervalu  $\langle F_{min}, F_{max} \rangle$  spojitá a že platí

$$f(F_{min}) \cdot f(F_{max}) < 0,$$

tj. že v něm leží alespoň jeden kořen rovnice  $f(F) = 0$ . Interval rozpůlíme bodem o souřadnici

$$Fx = (F_{min} + F_{max})/2$$

a zjistíme jeho funkční hodnotu  $f(Fx)$ . Tím jsme dostali dva podintervaly

$$\langle F_{min}, Fx \rangle \text{ a } \langle Fx, F_{max} \rangle.$$

Kořen se bude nacházet v tom intervalu, ve kterém mají funkční hodnoty v krajních bodech intervalu rozdílná znaménka. Interval s rozdílnými znaménky označíme za

$$\langle F_{min}, F_{max} \rangle.$$

Tento postup budeme opakovat dokud délka intervalu nebude menší než požadovaná přesnost  $\varepsilon$ , to znamená:

$$|F_{min} - F_{max}| < 2 \cdot \varepsilon$$

Pak střed tohoto intervalu považujeme za kořen řešené rovnice.

## 6. Numerické řešení konkrétního případu

Pro ověření námi odvozených vztahů (3.20) a (3.29), provedeme výpočet na reálném prutu, kde budeme plynule měnit modul pružnosti.

Abychom mohli použít námi zvolenou metodu bisekce, musíme si nejprve určit, v kterém intervalu se bude pohybovat kritická síla  $F_v$ . Interval určíme ze vztahů, které jsme odvodili pro pruty pouze z jednoho materiálu a za které dosadíme nejprve modul pružnosti  $E_I$  a dále  $E_{II}$ .

Pro volný prut se interval spočítá takto:

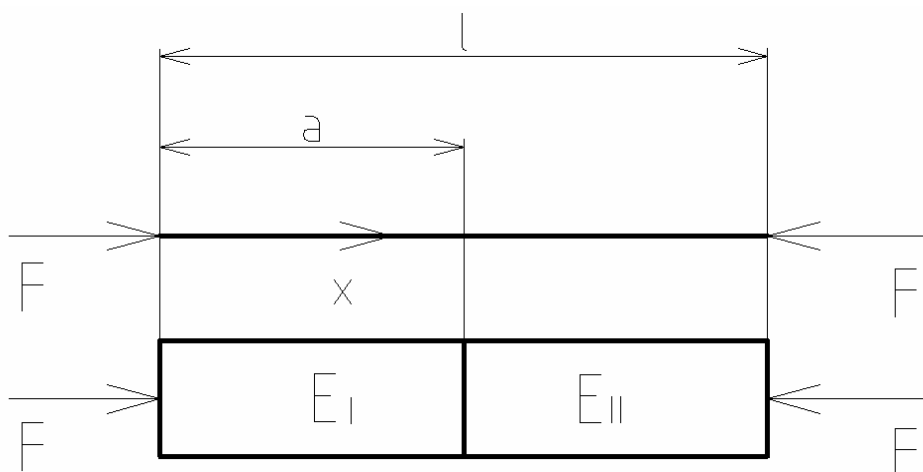
$$F_{\min} = \frac{\pi^2 E_I J}{l^2} \qquad F_{\max} = \frac{\pi^2 E_{II} J}{l^2}$$

Pro prut vetknutý na jednom konci a na druhém konci volný se interval spočítá takto:

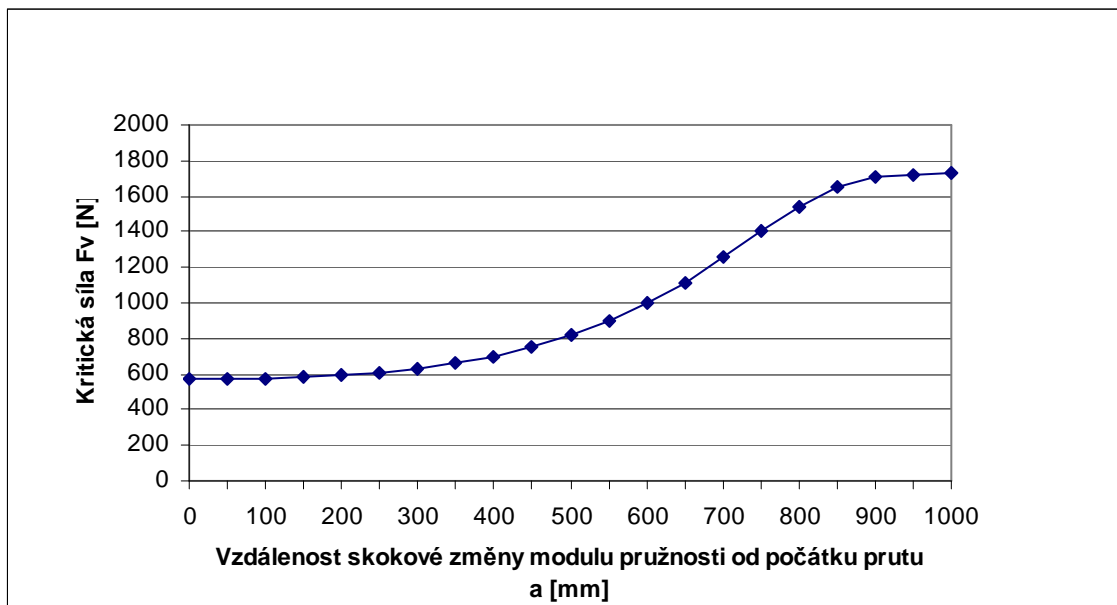
$$F_{\min} = \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 E_I J}{l^2} \qquad F_{\max} = \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 E_{II} J}{l^2}$$

Pro ukázkou výpočtu volíme prut délky  $l = 1 \text{ m}$ , čtvercového průřezu o straně  $A = 10 \text{ mm}$ . Jako materiály jsme si vybrali hliník s modulem pružnosti  $E_I = 70\,000 \text{ MPa}$  a ocel s modulem pružnosti  $E_{II} = 210\,000 \text{ MPa}$ .

### 6.1 Volný prut ze dvou materiálů



Obr. 14



Graf 1  
Závislost kritické síly prutu na délce úseků modulu pružnosti

Vztah pro kritickou sílu:

$$F_v = \frac{\pi^2 E J}{l^2}$$

Kvadratický moment průřezu:

$$J = \frac{A^4}{12} = \frac{10^4}{12} = 833.33 \text{ mm}^4$$

Minimální kritická síla (a = 0 mm):

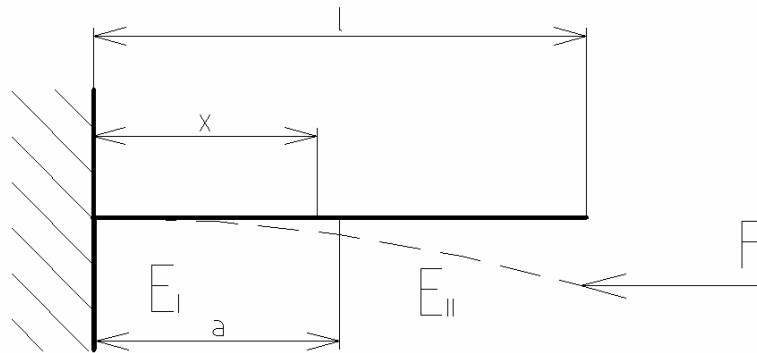
$$F_{\min} = \frac{\pi^2 E_I J}{l^2} = \frac{\pi^2 \cdot 70\,000 \cdot 833.33}{1\,000^2} = 575 \text{ N}$$

Maximální kritická síla (a = 1 000 mm):

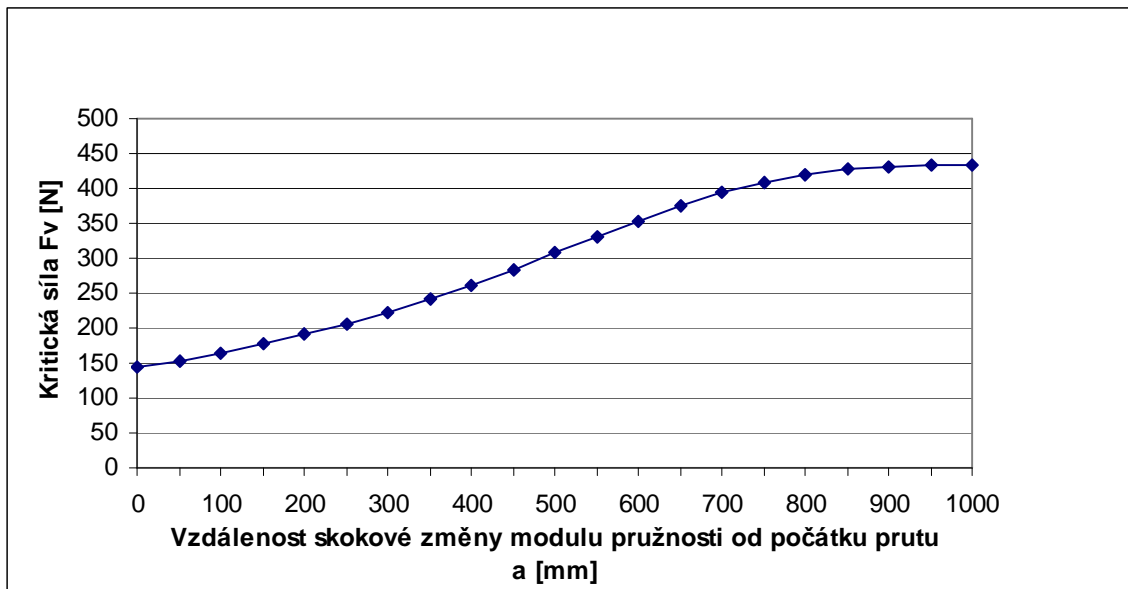
$$F_{\max} = \frac{\pi^2 E_{II} J}{l^2} = \frac{\pi^2 \cdot 210\,000 \cdot 833.33}{1\,000^2} = 1\,727 \text{ N}$$



## 6.2 Vázaný prut ze dvou materiálů



Obr. 15



Graf 2

Závislost kritické síly prutu na délce úseků modulu pružnosti

Vztah pro kritickou sílu:

$$F_v = \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 E J}{l^2}$$

Kvadratický moment průřezu:

$$J = \frac{A^4}{12} = \frac{10^4}{12} = 833.33 \text{ mm}^4$$

Minimální kritická síla ( $a = 0$  mm):

$$F_{\min} = \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 E_I J}{l^2} = \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cdot 70\,000 \cdot 833.33}{1\,000^2} = 144\, N$$

Maximální kritická síla ( $a = 1\,000$  mm):

$$F_{\max} = \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 E_{II} J}{l^2} = \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cdot 210\,000 \cdot 833.33}{1\,000^2} = 432\, N$$

## 7. Závěr

Cílem této bakalářské práce bylo určení kritické síly vzpěrné stability volného a vázaného prutu ze dvou různých materiálů.

Nejdříve bylo úkolem určení kritické síly volného prutu z jednoho materiálu, kterou lze vyjádřit explicitně. Poté jsem si vyjádřil pomocí diferenciální rovnice průhybové křivky a pomocí okrajových podmínek pro volný prut ze dvou materiálů rovnicí pro řešení kritické síly, kterou nelze vyjádřit explicitně, ale lze ji řešit pouze numerickými metodami. Pro její vyjádření jsem si zvolil numerickou metodu bisekce.

Dále jsem řešil vyjádření kritické síly tří daných případů uložení vázaného prutu z jednoho materiálu.

Protože jsem v žádné dostupné literatuře nenašel rovnici pro určení kritické síly vázaných prutů ze dvou různých materiálů, pokusil jsem se o jejich odvození. Jako matematicky nejschůdnější se jevila soustava rovnic pro vázaný prut na jednom konci vetknutý a na druhém konci volný. Došel jsem k rovnici, která obsahuje námi hledanou kritickou sílu, kterou však nelze vyjádřit explicitně a proto jsem ji řešil stejnou numerickou metodou.

U numerického řešení jsem postupoval tak, že jsem si nejprve pomocí vztahů pro kritickou sílu prutu z jednoho materiálu určil interval, ve kterém leží kritická síla pro prut ze dvou různých materiálů. Na toto numerické řešení jsem použil matematický software Maple. Problém nastal s numerickou metodou bisekce, která umí najít pouze jeden kořen v daném intervalu. Proto bylo nutné najít nejmenší kořen dané funkce, při kterém nastane ztráta vzpěrné stability. Výsledkem je získání dvou grafů pro kritickou sílu volného a vázaného prutu ze dvou různých materiálů v závislosti na poloze skokové změny modulu pružnosti.

Na konec je třeba říci, že veškeré výpočty uvedené v této bakalářské práci jsou omezeny na ideální tlakové namáhání ideálního prutu. V praxi je však nutno počítat se zakřivením střednice, působením síly  $F$  mimo těžiště čel a omezením platnosti Hookova zákona. Protože matematické řešení deformace prutu s těmito odchylkami je velice obtížné, mohou se pro malé hodnoty odchylek zohlednit zvýšením součinitele bezpečnosti.

## **Literatura**

- [1] Janíček, P., Ondráček, E., Vrbka, J., Burša, J., *Mechanika těles – Pružnost a pevnost I*, CERM s.r.o Brno, 2004, ISBN 80-214-2592-X
- [2] Hájek, E., Rief, P., Valenta, F., *Pružnost a pevnost I*, STNL v Praze, 1988
- [3] Maroš, B., Marošová, M., *Numerické metody I*, CERM s.r.o. Brno, 2003, ISBN 80-214-2388-9