

# VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ  
ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A BIOMECHANIKY

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING  
INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND BIOMECHANICS

VYUŽITÍ MULTI-BODY SIMULAČNÍCH NÁSTROJŮ VE VÝUCE  
PŘEDMĚTU DYNAMIKA

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE  
BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE  
AUTHOR

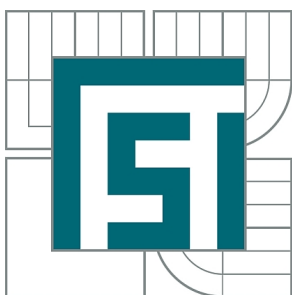
L'UBOŠ LOKŠENINEC

BRNO 2013



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ  
ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A  
BIOMECHANIKY

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING  
INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND  
BIOMECHANICS

## VYUŽITÍ MULTI-BODY SIMULAČNÍCH NÁSTROJŮ VE VÝUCE PŘEDMĚTU DYNAMIKA

UTILIZATION OF MULTI-BODY SIMULATION TOOLS IN SUBJECT DYNAMICS

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

ĽUBOŠ LOKŠENINEC

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Ing. LUKÁŠ BŘEZINA, Ph.D.

BRNO 2013

Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství

Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky  
Akademický rok: 2012/2013

## **ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE**

student(ka): Luboš Lokšeninec

který/která studuje v **bakalářském studijním programu**

obor: **Strojní inženýrství (2301R016)**

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

### **Využití multi-body simulačních nástrojů ve výuce předmětu Dynamika**

v anglickém jazyce:

#### **Utilization of multi-body simulation tools in subject Dynamics**

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

V současné době jsou ve výuce předmětu Dynamika používány příklady vytvořené v multi-body systému Matlab/SimMechanics. Cílem práce bude tyto příklady modernizovat a rozšířit o další. K tomuto účelu bude zvolen vhodný multi-body systém, popř. bude využita kombinace více těchto systémů.

Cíle bakalářské práce:

1. Seznámit se s možnostmi dostupných multi-body simulačních nástrojů
2. Aktualizovat a doplnit stávající počítačové příklady o další

Seznam odborné literatury:

Siciliano, B. : Robotics Modeling, planning and control, Springer, 2010

Malenovský, E., Kratochvíl, C. : Sbíрка úloh z dynamiky, CERM, 2002

Vedoucí bakalářské práce: Ing. Lukáš Březina, Ph.D.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2012/2013.

V Brně, dne 5.11.2012

L.S.

---

prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc.  
Ředitel ústavu

---

prof. RNDr. Miroslav Doupovec, CSc., dr. h. c.  
Děkan fakulty

## **ABSTRAKT**

Bakalárska práca je vypracovaná za účelom modernizácie metód výučby teórie dynamiky pomocou multi-body simulačných systémov. Práca oboznamuje študenta s dostupnými simulačnými systémami a poskytuje návod ako zostavovať virtuálne modely sústav. So základnými možnosťami daného multi-body systému sa študent zoznamuje pomocou vypracovaných príkladov zameraných na valenie, kmitanie, moment zotrvačnosti. Práca nadväzuje na súčasné metódy výučby, pričom modely sú zostavené v systéme Matlab/Simulink s podknižnicou SimMechanics.

## **ABSTRACT**

The bachelor's thesis is conducted in purpose of modernization the dynamics theory teaching methods by the multi-body simulation systems. Thesis acquaints student with accessible simulation systems and provides a manual how to compose virtual models of physic frameworks. Student is introduced to the basic options of current multi-body system by means of pre-processed examples focused on rolling, oscillation and inertia moment. Thesis refers to present teaching methods with models composed in Matlab/Simulink system with SimMechanics sublibrary.

## **Kľúčové slová**

Simulačný model, multi-body systém, blok, pohybové rovnice, výstupný signál, Simulink, SimMechanics

## **Key words**

Simulation model, multi-body system, block, kinetic equations, output signal, Simulink, SimMechanics

## Bibliografická citácia

LOKŠENINEC, L. *Využití multi-body simulačních nástrojů ve výuce předmětu Dynamika*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2013. 42 s. Vedúci bakalárskej práce Ing. Lukáš Březina, Ph.D..

## ČESTNÉ PREHLÁSENIE

Prehlasujem, že som bakalársku prácu *Využití multi-body simulačních nástrojů ve výuce předmětu Dynamika* vypracoval samostatne pod dohľadom vedúceho bakalárskej práce a uvedol som všetku použitú odbornú literatúru.

V Brne dňa 24. 5. 2012

.....  
Ľuboš Lokšeninec

## **POĎAKOVANIE**

Týmto by som rád poďakoval vedúcemu bakalárskej práce Ing. Lukáši Březinovi Ph.D. za konzultácie, poskytnuté zdroje a cenné rady.

---

**Obsah**

1.	Úvod .....	10
2.	Dostupné multi-body systémy .....	11
2.1.	Simulačný model SimMechanics.....	11
2.2.	Simulačný model Simulink.....	11
2.3.	MSC.Adams.....	11
3.	Valenie.....	12
3.1.	Guľa na naklonenej rovine.....	13
3.2.	Maticové riešenie .....	14
3.3.	Riešenie v systéme matlab .....	14
3.4.	Výsledky simulácie a vstupné parametre.....	15
3.5.	Návrhy úloh na modifikáciu programu valenia .....	16
3.5.1.	Úloha číslo 3.1 .....	16
3.5.2.	Úloha číslo 3.2 .....	16
4.	Kyvadlo .....	17
4.1.	Zostavenie modelu kyvadla v SimMechanics.....	18
4.2.	Zostavenie modelu kyvadla v Simulinku.....	21
4.3.	Výsledky simulácie a vstupné parametre.....	22
4.4.	Návrhy úloh na modifikáciu modelu kyvadla.....	23
4.4.1.	Úloha číslo 4.1 .....	23
4.4.2.	Úloha číslo 4.2 .....	23
5.	Moment zotrvačnosti .....	24
5.1.	Moment zotrvačnosti dosky, disku, kvádra a gule.....	24
5.2.	Zostavenie modelov telies v SimMechanics.....	25
5.3.	Výsledky simulácie a vstupné parametre.....	26
5.4.	Návrhy úloh na modifikáciu modelu momentu zotrvačnosti.....	27
5.4.1.	Úloha číslo 5.1 .....	27
6.	Smykadlo .....	28
6.1.	Zostavenie modelu smykadla v Simulinku .....	30
6.2.	Výsledky simulácie a vstupné parametre.....	31
6.3.	Návrhy úloh na modifikáciu modelu smykadla .....	32



6.3.1. Úloha číslo 6.1 .....	32
6.3.2. Úloha číslo 6.2 .....	32
7. Kmitanie .....	33
7.1. Zostavenie modelu kmitania v Simulinku .....	34
7.2. Zostavenie modelu kmitania v SimMechanics .....	35
7.3. Výsledky simulácie a vstupné parametre.....	36
7.4. Návrhy úloh na modifikáciu modelov kmitania .....	37
7.4.1. Úloha číslo 7.1 .....	37
7.4.2. Úloha číslo 7.2 .....	37
8. Záver.....	38
Zoznam použitej literatúry.....	40
Zoznam použitých symbolov.....	41
Zoznam príloh.....	43

## 1. Úvod

Cieľom tejto bakalárskej práce je zmodernizovať výučbu dynamiky, využitím multi-body systému Matlab/SimMechanics s podknižnicou SimMechanics. V praxi sú reálne problémy dynamiky riešené pomocou simulačných systémov. Práca by mala rozšíriť práve podporu simulačného modelovania vo výuke dynamiky.

Modelovanie sústav v multi-body systémoch prináša užívateľovi množstvo výhod. Správne zostavený model simuluje fyzické správanie sústavy, dokáže sledovať vybrané parametre a vyhodnocovať požadované tolerancie, či bezpečnosti sústavy. Prepisovaním vstupných parametrov je možné uskutočniť mnoho testov, ktoré by inak museli byť skúmané na fyzických modeloch. Systémy tiež poskytujú vizualizáciu chodu sústavy, čím užívateľ získava predstavu o fyzickom modeli.

Prvá kapitola stručne charakterizuje dostupné multi-body systémy. V ostatných kapitolách sa zaoberáme príkladmi z predmetu dynamika. Príklady sú najskôr riešené analyticky kde študent z pohybových rovníc získava predstavu akým spôsobom daná sústava pracuje. Ďalej objasňuje, ako správanie tohto fyzického modelu preniesť do virtuálneho prostredia a ďalej s ním pracovať.

Po zoznámení sa s vypracovanými príkladmi získa študent základný prehľad o možnostiach daného multi-body systému a fyzického zostavovaní modelov v týchto systémoch.

## **2. Dostupné multi-body systémy**

### **2.1. Simulačný model SimMechanics**

SimMechanics pracuje s modelom kinematiky a dynamiky mechanizmov na základe blokovej schémy. Jednotlivé bloky reprezentujú väzby, telesá, senzory fyzikálnych veličín a iné. Na zostavenie blokov schémy v SimMechanics nie je potrebná znalosť pohybových rovníc. Postačuje znalosť kinetickej štruktúry daného mechanizmu s hmotnostnými parametrami jednotlivých telies a vonkajších zaťažení [1].

Hlavnou devízou systému je, že na základe blokovej schémy vytvára matematický model a vizualizáciu. Vhodným pripojením senzorov na výstupné signály je možné pozorovať meniace sa fyzikálne veličiny v čase. V jednotlivých blokoch je možné parametre voľne prepisovať, čím sa model stáva flexibilným a je možné interaktívne sledovať správanie variácií tejto sústavy bez jej fyzického zostavenia.

### **2.2. Simulačný model Simulink**

Simulačný model v Simulinku vychádza z pohybových rovníc a jeho prepis do systému sa realizuje pomocou vybraných blokov z knižnice Simulinku. Vhodnou konšteláciou blokov v modeli vzniká vzťah pohybovej rovnice, s ktorým je možné ďalej pracovať [2]. Zavedením blokov „Scope“ na jednotlivé vetvy je možné sledovať danú veličinu, ktorá je signálom tejto vetvy.

Tak, ako v SimMechanics, veličiny v blokoch je možné meniť a sledovať reakcie sústavy na rôzne vstupy. Simulink pracuje len s matematickým modelom a neposkytuje vizualizáciu modelu.

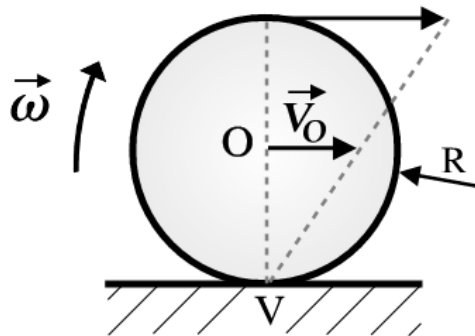
### **2.3. MSC.Adams**

Je program na simuláciu mechanických sústav s interaktívnym prostredím. Disponuje automatickou optimalizáciou a analýzou dynamických sústav. Blokové schémy pracujú na rovnakom princípe ako u SimMechanics. Hlavnou výhodou systému je že obsahuje množstvo podknižníc ktorých špecifikácia blokov dokáže obsiahnuť takmer každé strojárské odvetvie. Poskytuje výstupnú vizualizáciu a grafy sledovaných veličín.

Aby práca nadviazala na doterajšiu výuku boli pre modelovanie dynamických sústav zvolené programy Simulink a SimMechanics.

### 3. Valenie

Valenie je pohyb telesa pozdĺž povrchu iného telesa, pri ktorom sa tieto telesá neustále dotýkajú. Valiace sa teleso sa otáča okolo okamžitej osi otáčania, ktorá je daná dotykovou priamkou na povrchu podložky. Jej poloha sa v čase mení a táto zmena je závislá na rýchlosti valenia. Vystupuje kolmo z obrázku 3.1 v bode V. Ťažisko valiaceho sa telesa sa za predpokladu kruhového prierezu pohybuje priamočiarym pohybom po priamke rovnobežnej s podložkou vo vzdialenosti  $R$ .



Obr. 3.1: Okamžitá os valenia

Aby mohlo byť valenie realizované, musí byť splnená podmienka valenia opísaná vzťahom 455. Valivé trenie musí byť menšie ako šmykové. Teleso si vždy vyberá cestu menšieho odporu a pokiaľ je valivé trenie menšie ako šmykové, bude sa valiť. V prípade, že táto podmienka splnená nie je, teleso začína na podložke prešmykovať. Šmykové trenie nie je dost' veľké na to, aby vytváralo okamžitú os otáčania a pomyselná trecia väzba v bode V nevzniká.

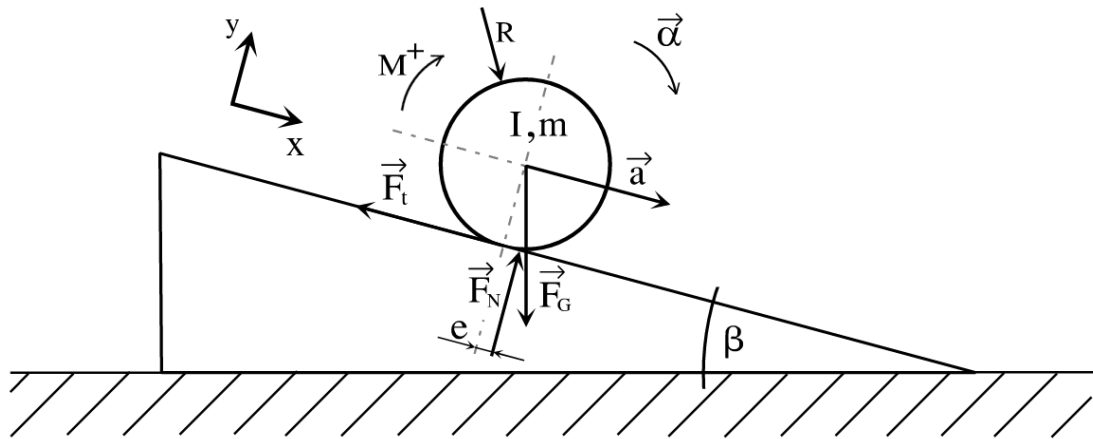
$$F_t < F_N f \quad (3.1)$$

Všetky body telesa majú rovnakú uhlovú rýchlosť  $\omega$ . Rýchlosť  $v$  lineárne rastie spolu s polomerom. Pre bod O je rýchlosť opísaná vzťahom:

$$v_o = \omega R \quad (3.2)$$

Rameno valivého odporu  $e$  je vzdialenosť pôsobiska normálovej sily od pólu valenia. Zisťuje sa experimentálne a závisí na dvojici materiálov podložky a valiaceho sa telesa.

### 3.1. Guľa na naklonenej rovine



Obr 3.2: Valenie gule po naklonenej rovine

Oceľová guľa s hmotnosťou  $m$  a polomerom  $R$  sa valí po naklonenej rovine s oceľovým povrchom. Rameno valivého odporu má pri kontakte dvoch oceľových telies dĺžku  $e$ . Sily pôsobiace na valiacu sa guľu sú znázornené na obrázku 3.2. Naklonená rovina zvierá s podložkou uhol s veľkosťou  $\beta$ . Tiažovú silu je potrebné rozložiť do zložiek  $x$  a  $y$  pomocou goniometrických funkcií. Ak sa má guľa valiť, musí byť splnená podmienka valenia **5463**. Opis sústavy pohybovými rovnicami v tomto súradnicovom systéme je nasledovný

$$\begin{aligned} F_x : ma &= -F_t + F_G \sin \beta \\ F_y : \emptyset &= F_N - F_G \cos \beta \\ M_z : I\alpha &= F_t R - F_N e \end{aligned} \quad (3.3)$$

Doplnková rovnica vyjadruje vzťah zrýchlenia k uhlovému zrýchleniu popisuje nasledovný vzťah

$$a = \alpha R \quad (3.4)$$

Po dosadení doplnkovej rovnice je získaná sústava troch rovníc s troma neznámymi. Použitím matematických úprav a elimináciou rovníc nakoniec získavame rovnicu pre výsledné zrýchlenie

$$a = \frac{F_G \sin \beta - \frac{F_G \cos \beta e}{R}}{m + \frac{I}{R^2}} \quad (3.5)$$

### 3.2. Maticové riešenie

Najskôr je potrebné upraviť pohybové rovnice (3.3) na tvar, vhodný pre zápis do matic. Neznáme členy sú prevedené na ľavú stranu, na pravej strane ostávajú členy známych parametrov. Rovnice majú nasledovný tvar

$$\begin{aligned} F_x : F_t + 0 + ma &= F_G \sin \beta \\ F_y : 0 + F_N + 0 &= F_G \cos \beta \\ M_z : F_t R - F_N e - I \frac{a}{R} &= 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Z ľavej strany pohybových rovníc je vyňatý stĺpcový vektor  $\mathbf{X}$  neznámych parametrov  $F_t, F_N$  a  $a$ . Maticový zápis tak získava nasledovný tvar

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & m \\ 0 & 1 & 0 \\ R & -e & -I/R \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} F_t \\ F_N \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_G \sin \beta \\ F_G \cos \beta \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

$$\mathbf{A} * \mathbf{X} = \mathbf{B}$$

Vynásobením rovnice zľava inverznou maticou  $\mathbf{A}$  je vektor  $\mathbf{X}$  osamostatnený na ľavej strane. Dopočítaním sú získané neznáme parametre  $F_t, F_N$  a  $a$ . Výsledný výpočet má nasledovný priebeh

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{X} &= \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \\ \mathbf{X} &= \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \end{aligned} \quad (3.8)$$

### 3.3. Riešenie v systéme matlab

Riešenie v Matlabe začína vytvorením nového „Script“ kde sú následne zadefinované vstupné parametre  $m, e, R, \beta$  a veľkosti gravitačného zrýchlenia  $g$ . Musí byť tiež definovaný vzťah pre výpočet gravitačnej sily  $F_G$  a momentu zotrvačnosti  $I$ . Ďalej sa definujú matice  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{B}$  z rovníc (3.7).

Výpočet je uskutočnený pomocou vzťahu (3.8), ktorý má v Matlabe zápis (3.9).

Kompletný program má nasledovný zápis:

```

clear all;
clc;

% vstupne parametre
m = 25;           %[kg]
R = 0.1;         %[m]
e = 0.0005;      %[m]
beta = 30*(pi/180); %[rad]

% gravitacne zrychlenie
g = 9.81;        %[m*s^-2]

% moment zotrvačnosti
I = 2/5*(m*R^2); %[kg*m^2]

% gravitacna sila
Fg = m*g;

% definicia matice
A = [1 0 m; 0 1 0; R -e -I/R];
B = [Fg*sin(beta); Fg*cos(beta); 0];

% vypocet
x = inv(A)*B      %x = [Ft; Fn; a]

```

(3.9)

### 3.4. Výsledky simulácie a vstupné parametre

$m = 25 \text{ kg}$   
 $R = 0,1 \text{ m}$   
 $e = 0.0005 \text{ m}$   
 $\beta = 30^\circ$   
 $g = 9.81 \text{ ms}^{-2}$

Matlab vypisuje neznáme parametre  $F_t$ ,  $F_N$  a  $a$ . v poradí stĺpcového vektoru  $\mathbf{X}$ . Výsledné sily a zrýchlenie pre vybrané parametre sú

```

x =

= 71.9737
= 212.3927
= 2.0261

```

### 3.5. Návrhy úloh na modifikáciu programu valenia

Hlavnou výhodou simulačných systémov je variabilnosť parametrov. Prepisovaním vstupných hodnôt je možné sledovať správanie variácií sústavy.

S modelom je preto možné ďalej pracovať a uskutočniť rôzne testy a merania.

#### 3.5.1. Úloha číslo 3.1

Zistíte závislosť zrýchlenia na momente zotrvačnosti. Z tabuľky 3.1 vyberte teleso, ktoré budete simulovať. V scripture zmeňte moment zotrvačnosti. Definujte nové neznáme, ktoré charakterizujú zmenený moment zotrvačnosti. Sledujte zmeny výstupných parametrov  $F_t, F_N$  a  $a$ . Momenty zotrvačnosti sú definované k osi vystupujúcej kolmo zo stredú kruhového profilu telies.

TELESO	MOMENT ZOTRVAČNOSTI
Dutá valcová plocha	$I = mR^2$
Valec	$I = \frac{1}{2}mR^2$
Dutá guľa	$I = \frac{2}{3}mR^2$
Toroid (pestenec) *a,c veľký a malý polomer	$I = \frac{1}{8}(4a^2 + 5c^2)m$

Tabuľka 3.1

#### 3.5.2. Úloha číslo 3.2

Zmenou dĺžky ramena valivého odporu  $e$  pozorujte vplyv materiálu podložky a valiaceho sa telesa na výsledné zrýchlenie. Súčinitele pre dvojice materiálov sú uvedené v tabuľke 3.2.

TELESO/PODLOŽKA	RAMENO VALIVÉHO ODPORU $e$ [m]
liatina/liatina	0,000005
ocel'/ocel'	0,0005
polymér/ocel'	0,002
guma/betón	0,015-0,02

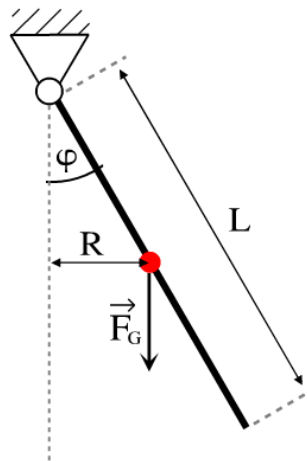
Tabuľka 3.2



## 4. Kyvadlo

Kyvadlo je teleso, ktoré kmitá okolo rovnovážnej polohy. Pri jeho pohybe sa mení striedavo kinetická energia na potenciálnu energiu. Jedinou reakčnou silou v tejto sústave je gravitačná sila, ktorá pôsobí v ťažisku. Energia sústavy je preto podmienená jej počiatočnou polohou, teda potenciálnou energiou.

Kyvadlo pozostáva z tuhého telesa - tenkej tyče s hmotnosťou  $m$  a dĺžkou  $L$ , ktorej koncový bod je spojený s rotačnou väzbou, umiestnenou nad telesom vid' obrázok 4.1. Väzba je pevne spojená so zemou. Okamžitá výchylka uhlu je  $\varphi$ .



Obr. 4.1: Kyvadlo

Zmena polohy, rýchlosti a zrýchlenia je opísaná diferenciálnou pohybovou rovnicou. Pohybová rovnica dáva do rovnosti dva momenty. Zrýchlenie je vyjadrené pomocou druhej derivácie uhlovej výchylky.

$$I\ddot{\varphi} = F_g \sin \varphi \frac{L}{2} \quad (4.1)$$

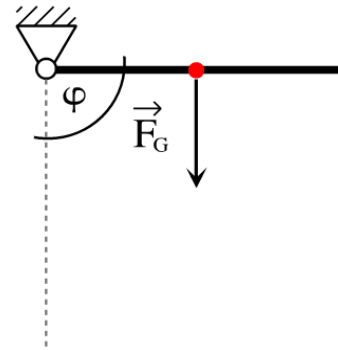
V každej novej polohe je nutné prepočítavať pôsobiaci moment od tiažovej sily, pretože dĺžka ramena  $R$  sa v čase mení. Pre získanie uhlového zrýchlenia je pohybová rovnica delená momentom zotrvačnosti a získava nasledovný tvar:

$$\ddot{\varphi} = \frac{mg \sin \varphi \frac{L}{2}}{I} \quad (4.2)$$

Za počiatočnú polohu kyvadla bol zvolený uhol  $90^\circ$  vid' obrázok 4.2. V tejto polohe je uhlová rýchlosť nulová, a teda aj kinetická energia sa rovná nule. Naopak potenciálna energia kyvadla je maximálna. Uhlová rýchlosť sa mení z nulovej hodnoty na nenulovú a jeho zrýchlenie je v tomto bode maximálne. Veličiny charakteristické pre tento stav sú opísané v tabuľke 4.1.

$\varphi$	$90^\circ$
$\dot{\varphi}$	0
$\ddot{\varphi}$	$max$
$E_k$	0
$E_p$	$max$

Tabuľka 4.1

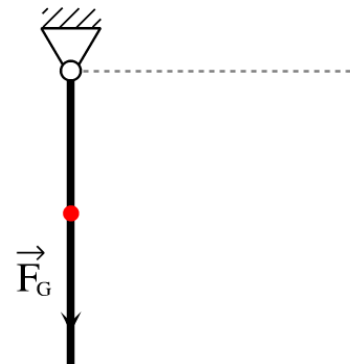


Obr. 4.2: Kyvadlo v polhe  $\varphi = 90^\circ$

V polohe vid'. obrázok 4.3, kde  $\varphi$  sa rovná  $0^\circ$ , je výsledný moment od tiažovej sily rovný 0, pretože sila  $F_G$  pôsobí na rameno s nulovou dĺžkou. Z pohybovej rovnice vyplýva, že aj zrýchlenie bude nulové. V tabuľke 4.2 sú opísané veličiny charakteristické pre tento okamžitý stav kmitania.

$\varphi$	$0^\circ$
$\dot{\varphi}$	$max$
$\ddot{\varphi}$	0
$E_k$	$max$
$E_p$	0

Tabuľka 4.2

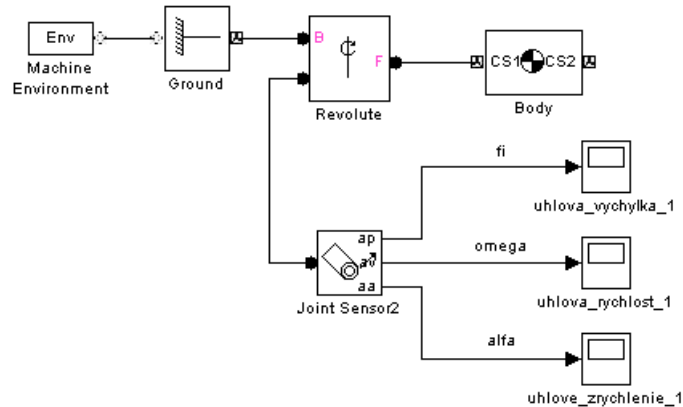


Obr. 4.3: Kyvadlo v polhe  $\varphi = 0^\circ$

#### 4.1. Zostavenie modelu kyvadla v SimMechanics

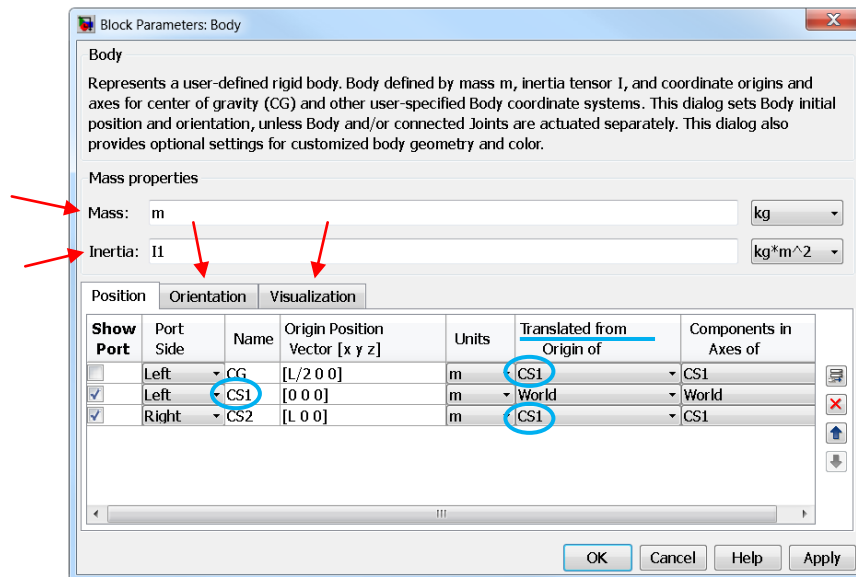
Zostavený model kyvadla v SimMechanics sa skladá zo základných blokov, ktoré sa používajú takmer pri každom zostavovaní modelu. Blokovo schéma kyvadla je zobrazená na obrázku 4.4.

Kyvadlo pozostáva z dvoch hlavných prvkov: rotačnej väzby a tuhého telesa - tenkej tyče. V Matlabe je vytvorený nový „Model“. Do modelu je z knižnice Simulinku vložený prvý blok „Body“, ktorý je umiestnený v podknižnici Simulinku Simscape ↳ SimMechanics ↳ Bodies. Tento blok reprezentuje teleso.



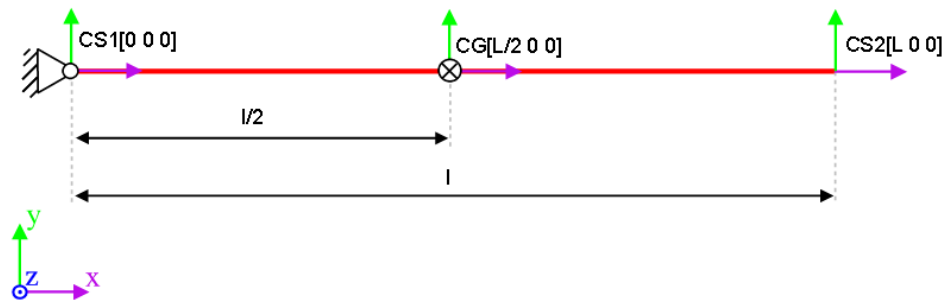
Obr. 4.4: Schéma modelu kyvadla v SimMechanics

V nastaveniach bloku „Body“ vid'. obrázok 4.5 sa najskôr definuje hmotnosť „Mass“ a moment zotrvačnosti „Inertia“. Hodnoty všetkých parametrov, s ktorými SimMechanics pracuje, musia byť definované v „Scripte“ Matlabu.



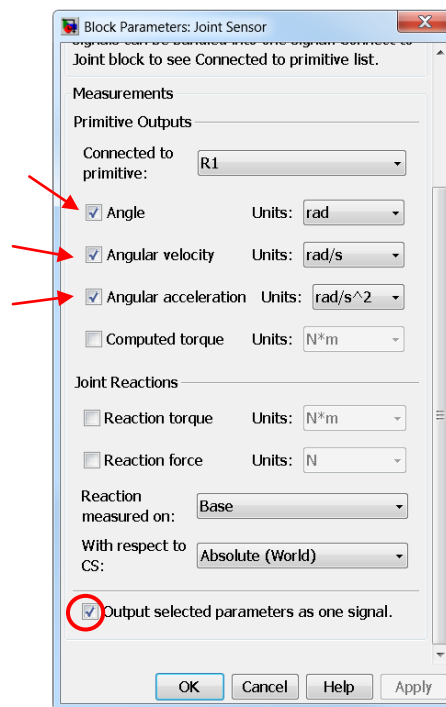
Obr. 4.5: Nastavenia bloku „Body“

Karta „Position“ pracuje so súradnicovými systémami. Najskôr je zvolený počiatkový súradnicový systém, ktorý reprezentuje bod, kde sa tyč spája s väzbou. V tomto prípade je to CS1 so súradnicami [0 0 0]. V posuve voči iným súradnicovým systémom sa zvolí „World“ pričom CS1 so súradnicami [0 0 0] je totožný so svetovým súradnicovým systémom. CG je posunutý v smere x od CS1 o  $L/2$ , leží v strede tyče so súradnicami [L/2 0 0] a predstavuje súradnicový systém ťažiska. Koncový bod telesa má súradnicový systém CS2 a je vzdialený od počiatkového CS1 o  $L$ . Jeho súradnice sú preto [L 0 0]. Definovanie hraníc telesa je zobrazené na obrázku 4.6



Obr. 4.6: Definovanie hraníc telesa

Rovnakým spôsobom sa súradnicové systémy môžu natáčať voči pôvodným osiam v karte „Orientation“. V karte „Visualization“ je možné meniť farbu telesa a spôsob zobrazovania telesa počas vizualizácie, kde systém vychádza z jeho momentu zotrvačnosti, alebo sa riadi hranicami z karty „Position“. SimMechanics dokáže pracovať aj s externým súborom 3D modelu telesa vymodelovaného v inom programe. Ďalej je potrebné vytvoriť rotačnú väzbu. Z knižnice SimMechanics je preto z podknižnice „Joints“ vybraná rotačná väzba „Revolute“, v ktorej sa definuje os so stupňom voľnosti. V danom prípade je to os z. Taktiež musí byť definovaný súradnicový systém, z ktorého blok vychádza. Ďalším nastavením je nastavenie počtu portov, ku ktorým môžu byť neskôr pripojené iné bloky. Väzba je pripojená k portu CS1 bloku „Body“.

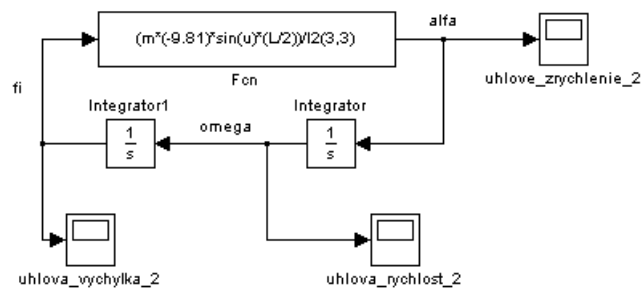


Obr. 4.7: Nastavenia bloku „Joint Sensor“

Aby sústava mohla pracovať potrebuje pevný bod(uzemnenie). Túto funkciu plní blok „Ground“, ktorý je pripojený k bloku väzby. Posledný blok „Machine enviroment“ definuje celej sústave prostredie, v ktorom sa nachádza. Najčastejšie je volené prostredie Zeme s gravitačným zrýchlením  $g$ . Model po spustení simulácie zobrazuje simuláciu danej sústavy v zvolenom časovom rozpätí. Aby bolo možné sledovať zmeny hodnôt fyzikálnych veličín v čase, je na blok väzby „Revolute“ pripojený blok „Joint Sensor“. Tento blok dokáže sledovať meniace sa fyzikálne veličiny vo väzbe. Počet výstupných portov je rovný počtu vybraných veličín, ktoré budú pozorované. V nastaveniach bloku vid'. obrázok 4.7 je taktiež nastavené, vzhľadom na ktorý súradnicový systém majú byť pozorované. Ak nie je posledné nastavenie aktívne, „Joint Sensor“ spája všetky merané veličiny do jedného výstupného signálu.

V tomto prípade bola sledovaná uhlová výchylka, uhlová rýchlosť a uhlové zrýchlenie. Vznikli teda tri výstupné porty, ku ktorým boli pripojené bloky „Scope“. Bloky vykresľujú grafy v závislosti pozorovanej veličiny od času. V modeli je možné nastaviť čas simulácie. Po spustení simulácie sa zobrazí vizualizácia, ktorá zobrazuje chod sústavy s danými parametrami.

## 4.2. Zostavenie modelu kyvadla v Simulinku



Obr. 4.8: Schéma modelu kyvadla v Simulinku

Zostavenie virtuálneho modelu v Simulinku reprezentuje prepis pohybovej rovnice do blokov, ktoré uskutočňujú matematické operácie.

Model kyvadla v Simulinku vychádza z jeho pohybovej rovnice (4.2). Táto rovnica zrýchlenia je diferenciálnou rovnicou druhého rádu. Zostavenie modelu začína blokom „Fcn“ vybraného z podknižnice Simulinku. Následne je tomuto bloku definovaný vzťah celej pravej strany rovnice v tvare, ktorý vidíme na obrázku 4.8. Tento blok pracuje s premennou hodnotou cez symbol „u“, reprezentujúci v danom prípade uhlovú výchylku, ktorá bude neskôr do bloku spätne privedená. Výstupný signál bloku je uhlové zrýchlenie  $\ddot{\varphi}$ . Uhlové zrýchlenie je druhou deriváciou výchylky uhlu. Výstup z „Fcn“ je preto dvakrát zintegrovaný pomocou blokov „Integrator“. Prvou integráciou dostávame uhlové zrýchlenie  $\omega$ . Druhou integráciou je signál uhlovej výchylky  $\varphi$ , ktorý je spätne vrátený do bloku „Fcn“.

Pripojením blokov „Scope“ na každú z vetiev sú po spustení simulácie vykresľované tri grafy: graf uhlovej výchylky, uhlovej rýchlosti a graf uhlového zrýchlenia.

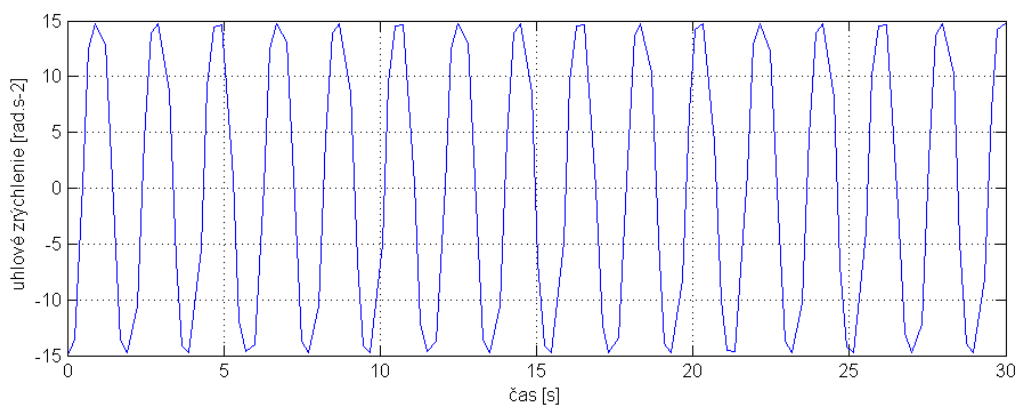
### 4.3. Výsledky simulácie a vstupné parametre

$$m = 2 \text{ kg}$$

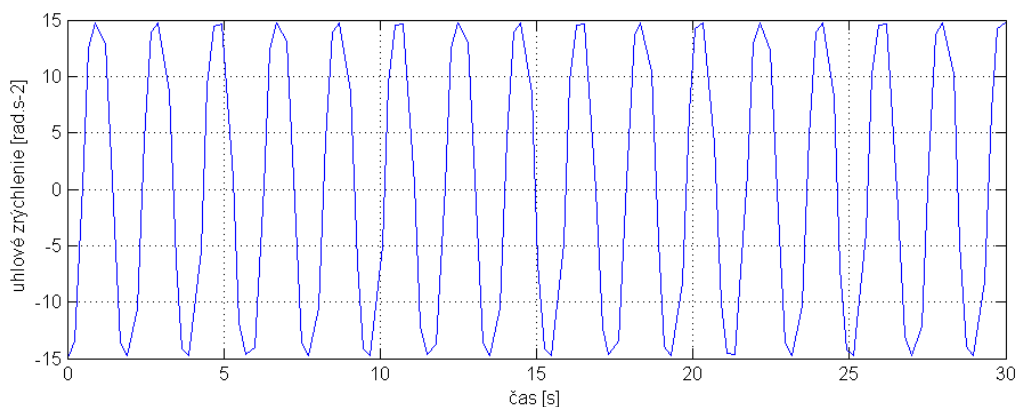
$$L = 1 \text{ m}$$

$$\varphi = 90^\circ$$

Pre zvolené vstupné parametre sú výsledné uhlové zrýchlenia zobrazené v grafoch na obrázkoch 4.9 a 4.10.



Obr. 4.9: Graf uhlového zrýchlenia kyvadla modelu SimMechanics



Obr. 4.10: Graf uhlového zrýchlenia kyvadla modelu Simulink

Grafy uhlového zrýchlenia obidvoch modelov sú totožné. Blokové schémy boli správne zostavené a pracujú s tou istou pohybovou rovnicou.

## **4.4. Návrhy úloh na modifikáciu modelu kyvadla**

### **4.4.1. Úloha číslo 4.1**

Pozorujte zmenu uhlovej rýchlosti a dĺžky periódy kmitu na modeli SimMechanics pri zmene počiatového uhla kyvadla. Uhol je možné meniť v rozpätí  $0^\circ - 90^\circ$ . Uhlové zrýchlenie rastie so zväčšujúcou sa vstupnou energiou (počiatovou polohou kyvadla), dĺžka periódy však zostáva nezmenená.

### **4.4.2. Úloha číslo 4.2**

K modelu vytvorenému v SimMechanics pripojte blok čapového trenia. Blok „Normal Friction Actuator“. Nachádza sa v knižnici help ↪ SimMechanics ↪ Demos ↪ Friction Models ↪ Static and Kinetics Friction Library. Vo nastaveniach parametru „Revolute“ pridajte ďalší port, do ktorého bude blok trenia privedený. V bloku definujte koeficienty statického a kinetického trenia. Pozorujte účinky trenia vo väzbe na výsledné zrýchlenie.

## 5. Moment zotrvačnosti

Moment zotrvačnosti telesa  $I$  je veličina ktorá, vystupuje v rovniciach rotačného pohybu. Popisuje rozloženie hmoty okolo osi otáčania a závisí na hmotnosti, tvare telesa a osi otáčania, okolo ktorej teleso rotuje[4].

Pri výpočtoch kinetickej energie rotujúcich telies hrá vo výpočte kinetickej energie posuvného pohybu podobnú úlohu ako hmotnosť. Kinetická energia rotujúceho telesa je súčet kinetických energií všetkých jeho nekonečne malých častí, na ktoré je možné toto teleso rozdeliť. Rýchlosť týchto častí závisí na vzdialenosti  $R$  od osi otáčania. Pre každý z nich je možné vyjadriť jeho rýchlosť pomocou vzťahu  $v_k = \omega r_k$ . Ak je tento vzťah dosadený do rovnice kinetickej energie pre posuvný pohyb, stáva sa z neho vzťah umožňujúci výpočet kinetickej energie rotujúcich telies. Rovnica kinetickej energie, kde sú časti očíslované od 1 do  $n$ , naberá tvar

$$E_k = \frac{1}{2}m_1R_1^2\omega^2 + \frac{1}{2}m_2R_2^2\omega^2 + \dots + \frac{1}{2}m_nR_n^2\omega^2 \quad (5.1)$$

Izolovaním momentu zotrvačnosti v zátvorke, je získaný vzťah na jeho výpočet

$$E_k = \frac{1}{2}(m_1R_1^2 + \dots + m_nR_n^2)\omega^2 \quad (5.2)$$

$$I = m_1R_1^2 + \dots + m_nR_n^2$$

Telesá majú hmotu spojito rozloženú v objeme. Z tohto dôvodu ich nie je možné rozdeliť na časti s rovnakou hmotnosťou. Na výpočet sa preto používa integračný počet, ktorým sa integruje naprieč celým objemom telesa

$$I = \int R^2 dm \quad (5.3)$$

### 5.1. Moment zotrvačnosti dosky, disku, kvádra a gule.

V tomto príklade bude skúmaný vplyv momentu zotrvačnosti na uhlové zrýchlenie. Dva rovinné útvary, doska a disk, a dve priestorové telesá, kváder a guľa, rotujú okolo osi  $y$ , ktorá prechádza ich ťažiskom.

Rozmery telies dĺžky a strán  $a$  a  $c$  a polomer  $R$  boli zvolené tak, aby plošné obrazce mali rovnaký obsah a priestorové telesá rovnaký objem. Všetky telesá majú rovnakú hmotnosť  $m$  a sú roztáčané rovnakým momentom o veľkosti  $M$ . Príslušné momenty zotrvačnosti daných telies sú uvedené v tabuľke 5.1.



TELESO	OBRÁZOK TELESA	MOMENT ZOTRVAČNOSI
Doska		$I = \frac{1}{12}(a^2 + b^2)m$
Disk		$I = \frac{1}{2}R^2m$
Kváder		$I = \frac{1}{12}(a^2 + b^2)m$
Guľa		$I = \frac{2}{5}R^2m$

Tabuľka 5.1

Moment zotrvačnosti je počítaný z profilu kolmého na os otáčania, preto sú momenty zotrvačnosti kvádra a obdĺžnika totožné. Pri počítaní zrýchlenia vychádzame z pohybovej rovnice, ktorá má tvar

$$\alpha = \frac{M}{I}$$

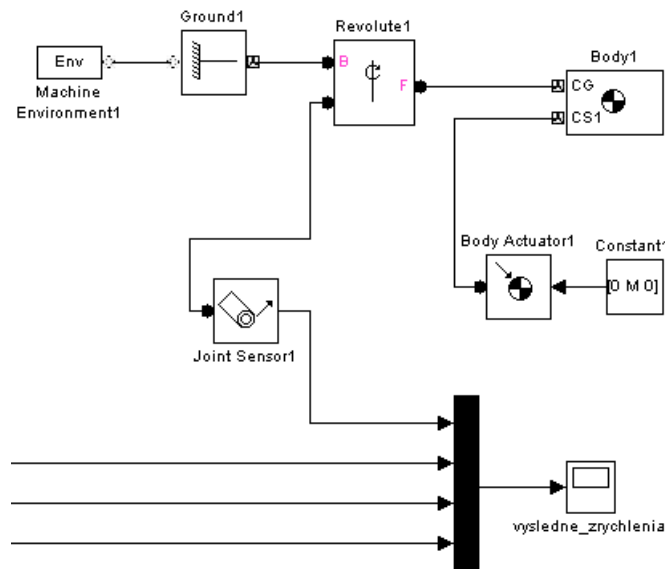
(5.4)

## 5.2. Zostavenie modelov telies v SimMechanics

V programe SimMechanics sú postupne zostavené štyri rovnaké modely vid' obrázok 5.1 pre obdĺžnik, disk, kváder a guľu. Líšiť sa budú len v momente zotrvačnosti, ktorý je definovaný v bloku „Body“ pre konkrétny model telesa

Z podknižníc sú vybrané bloky rotačnej väzby „Revolute“, v rámci ktorej je vybraná os otáčania a blok „Body“, v ktorom sa definuje hmotnosť  $m$  a príslušný model zotrvačnosti

podľa vybraného telesa, ktorému model prislúcha. Väzba je spojená s blokom „Ground“, ktorý je následne pripojený k bloku „Machine Enviroment“ s nulovým vektorom pre zrýchlenie prostredia. Zrýchlenie prostredia výsledné uhlové zrýchlenie nijak neovplyvňuje.



Obr. 5.1: Schéma modelu rotujúceho telesa

Telesá sú roztáčané rovnakým momentom  $M$ . K bloku telesa je pripojený blok „Body Actuator“, ktorý je budiacim prvkom blokovej schémy. V nastaveniach je zvolená ako reakčná veličina moment. Veľkosť budiaceho momentu je privedená do bloku pomocou bloku „Constant“, kde sa v súradnici osi  $y$  zvolí veľkosť momentu, z veľkosťou  $M$ . Sledovanie uhlového zrýchlenia je docielené pripojením bloku „Joint Sensor“ na väzbu, v ktorej je vybraná sledovaná veličina uhlové zrýchlenie. Zvolené jednotky pozorovania sú  $\text{rad}\cdot\text{s}^{-2}$ . Pre porovnanie jednotlivých zrýchlení sa výstupy bloku „Body Sensor“ jednotlivých modelov spájajú pomocou bloku „Mux“ do jedného signálu. „Mux“ je potom pripojený na „Scope“ a do jného grafu sú vykresľované uhlové zrýchlenia všetkých štyroch modelov súčasne.

Vo vizualizácii telesá splývajú do jednej priamky. Pri zvolení pohľadu zhora je možné sledovať celý priebeh rotácie.

### 5.3. Výsledky simulácie a vstupné parametre

$$m = 1 \text{ kg}$$

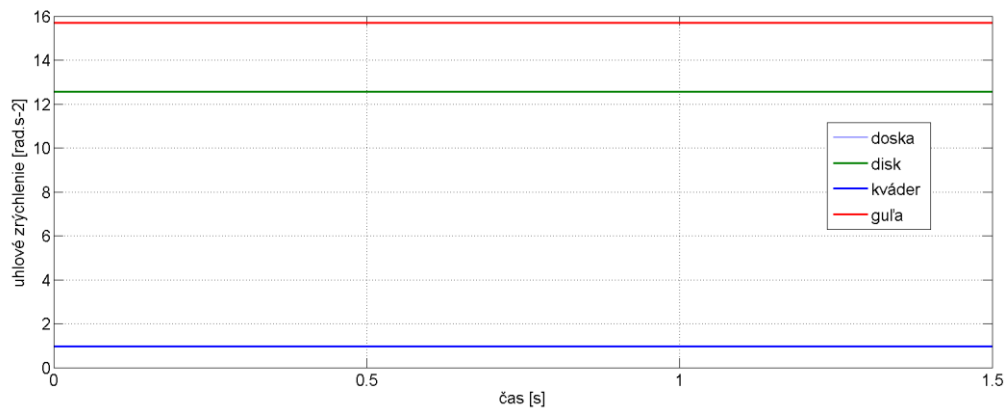
$$R = 0,5642 \text{ m}$$

$$a = 0,2 \text{ m}$$

$$c = 5 \text{ m}$$

$$M = 2 \text{ N}\cdot\text{m}$$

Graf na obrázku 5.2 vykresľuje výsledné uhlové zrýchlenia v čase pre zvolené vstupné parametre.



Výsledné zrýchlenia sú konštantné, to však neplatí pre uhlovú rýchlosť a uhlovú výchylku, ktoré v čase lineárne rastú. Z rovnice 4545 vyplýva, že zrýchlenie od momentu zotrvačnosti závisí nepriamoúmerne. Z toho dôvodu má najväčšie zrýchlenie guľa. Jej moment zotrvačnosti je vzhľadom na iné telesá najmenší. Hodnoty zrýchlení kvádra a dosky sú najmenšie a splývajú.

## 5.4. Návrhy úloh na modifikáciu modelu momentu zotrvačnosti

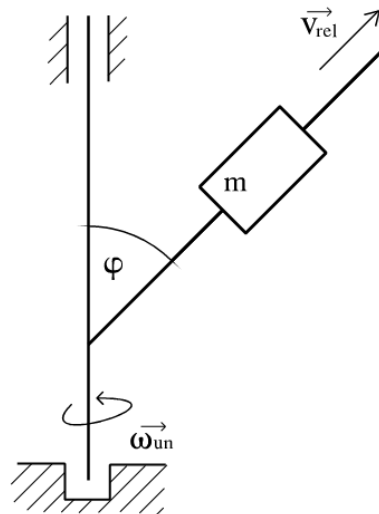
### 5.4.1. Úloha číslo 5.1

Pozorujte zmenu uhlového zrýchlenia pri posuve osi rotácie daných telies z tabuľky 5.1 od osi ťažiska. Nový moment zotrvačnosti musí byť prepočítaný k novej osi pomocou Steinerovej vety ktorá, má tvar

$$I = I_T + mR_T^2 \quad (5.5)$$

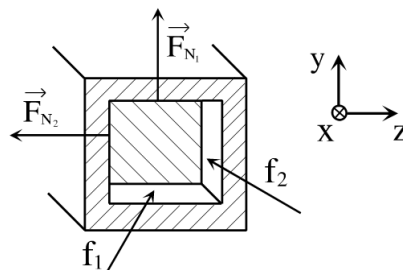
## 6. Smykadlo

Sústava smykadla sa skladá z tyče zaväzbenej na obidvoch koncoch rotačnou väzbou s jedným stupňom voľnosti. Tyč rotuje s uhlovou rýchlosťou  $\omega_{un}$ . K tyči je privarená oceľová vodiaca tyč so štvorcovým prierezom pod uhlom  $\varphi$ . Oceľový náboj s hmotnosťou  $m$  je nasunutý na vodiacu tyč vid'. obrázok 6.1, pričom sa dotýkajú dvoma stenami od ktorých, pôsobia normálové sily.



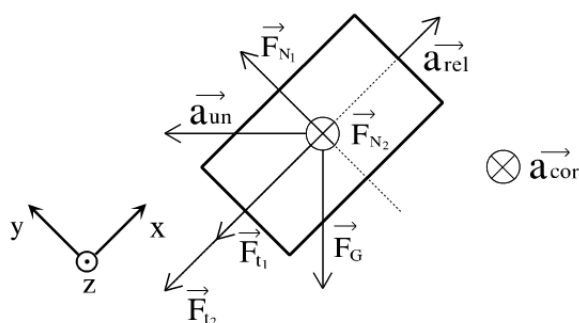
Obr. 6.1: Sústava smykadla

Koeficient trenia dvoch oceľových plôch má veľkosť  $f$  vid'. obrázok 6.2.



Obr. 6.2: Prierez náboja a vodiacej tyče

Dostredivé zrýchlenie  $a_{un}$  pôsobí kolmo na os rotácie a je kolmé na okamžité zrýchlenie náboja. Náboj sa po vodiacej tyči pohybuje v smere  $x$ . Zrýchlenie tohto výsledného pohybu náboja je relatívne zrýchlenie  $a_{rel}$  vid'. obrázok 6.3 Pomocou pravidla pravej ruky je určené coriolisove zrýchlenie  $a_{cor}$ . Trecie sily pôsobia proti pohybu náboja



Obr. 6.3: Silové pôsobenie na náboj

Opis sústavy vychádza z Newtonovho princípu [3].

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{a}m$$

$$\vec{F}_{t1} + \vec{F}_{t2} + \vec{F}_{N1} + \vec{F}_{N2} + \vec{F}_G = m(\vec{a}_{rel} + \vec{a}_{un} + \vec{a}_{cor}) \quad (6.1)$$

Pohybové rovnice pre danú sústavu majú tvar

$$\begin{aligned} x: -F_{t1} - F_{t2} - F_G \cos \varphi &= m(a_{rel} - a_{un} \sin \varphi) \\ y: F_{N1} - F_G \sin \varphi &= m(a_{un} \cos \varphi) \\ z: -F_{N2} &= m(-a_{cor}) \end{aligned} \quad (6.2)$$

Doplnkové rovnice pre tiažovú silu a trecie sily sú nasledovné:

$$\begin{aligned} F_{t1} &= f_1 F_{N1} \\ F_{t2} &= f_2 F_{N2} \\ F_G &= mg \end{aligned} \quad (6.3)$$

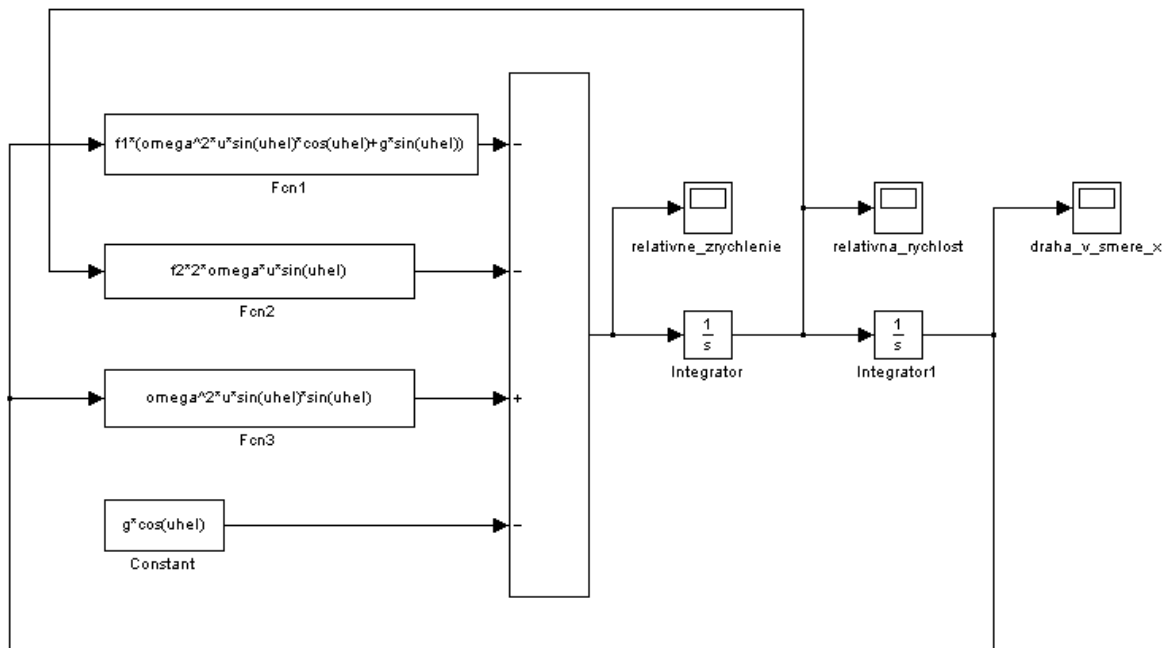
Dráha  $x$  je dráha, ktorú prejde náboj po vodiacej tyči. V doplnkových rovniciach pracujeme s dráhou  $x$  a jeho prvou a druhou deriváciou, ktoré predstavujú relatívnu rýchlosť  $\dot{x}$  a relatívne zrýchlenie  $\ddot{x}$ . Doplnkové rovnice zrýchlení majú tvar

$$\begin{aligned} a_{un} &= \omega_{un}^2 x \sin \varphi \\ a_{rel} &= \ddot{x} \\ a_{cor} &= 2\omega_{un} \dot{x} \sin \varphi \end{aligned} \quad (6.4)$$

Postupným dosadzovaním a elimináciou rovníc je vyjadrené relatívne zrýchlenie popísané vzťahom

$$\ddot{x} = -f_1 (\omega_{un}^2 x \sin \varphi \cos \varphi + g \sin \varphi) - f_2 (2\omega_{un} \dot{x} \sin \varphi) - g \cos \varphi + \omega_{un}^2 x \sin \varphi \sin \varphi \quad (6.5)$$

## 6.1. Zostavenie modelu smykadla v Simulinku



Obr. 6.3: Schéma modelu smykadla v Simulinku

Model smykadla v Simulinku vid'. obrázok 6.3 vzniká prepisom sčítancov z rovnice (6.5) do blokov. Sčítance, ktoré obsahujú premennú  $x$  a  $\dot{x}$ , čiže veličiny meniace sa v čase sú zapísané do blokov „Fcn“, kde premennú veličinu reprezentuje symbol „ $u$ “. Posledný sčítanec bez premennej je zapísaný do bloku „Constant“.

Ďalej je nutné týmto sčítancom priradiť znamienka a spojiť ich do jedného signálu. Použijeme blok „Sum“, kde definujeme počet vstupov príslušajúce znamienko. Bloky sčítancov sú privedené do príslušných portov sumy a výsledným signálom sa stáva relatívna rýchlosť  $\dot{x}$ . Vetvu dvakrát zintegrujeme pomocou blokov „Integrator“. Signály v zintegrovaných vetvách predstavujú relatívne zrýchlenie a dráhu  $x$ . Podľa pohybovej rovnice sú tieto signály spätne privedené do blokov „Fcn“.

Bloky „Scope“ sú pripojené k jednotlivým častiam výstupného signálu a po prebehnutí simulácie vykresľujú príslušné veličiny.

## 6.2. Výsledky simulácie a vstupné parametre

$$\varphi = 30^\circ$$

$$m = 1 \text{ kg}$$

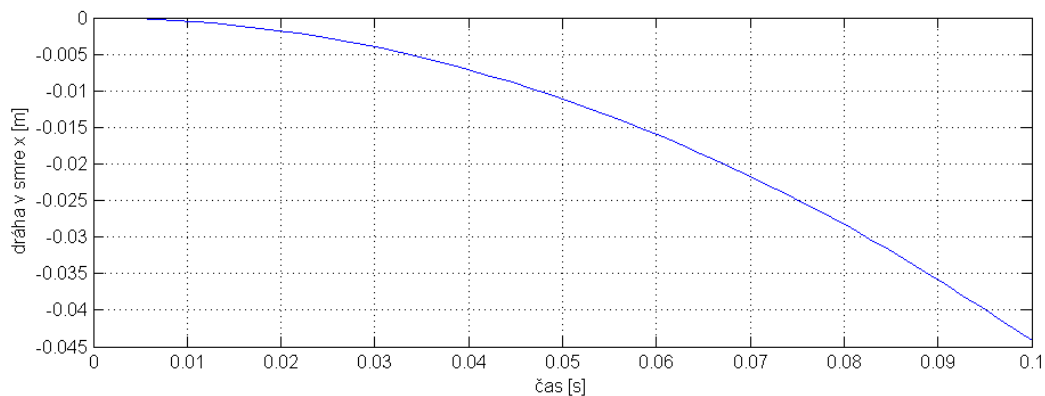
$$f_1 = 0,1$$

$$f_2 = 0,1$$

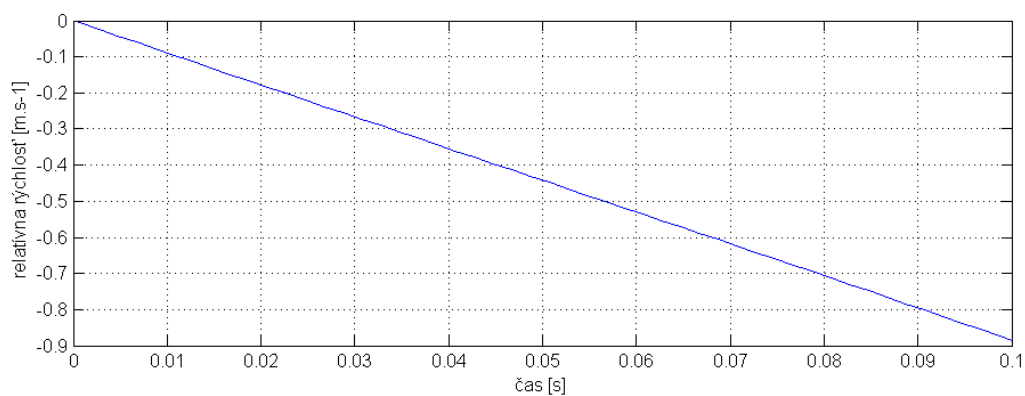
$$\omega = 10 \text{ rad.s}^{-1}$$

$$g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$$

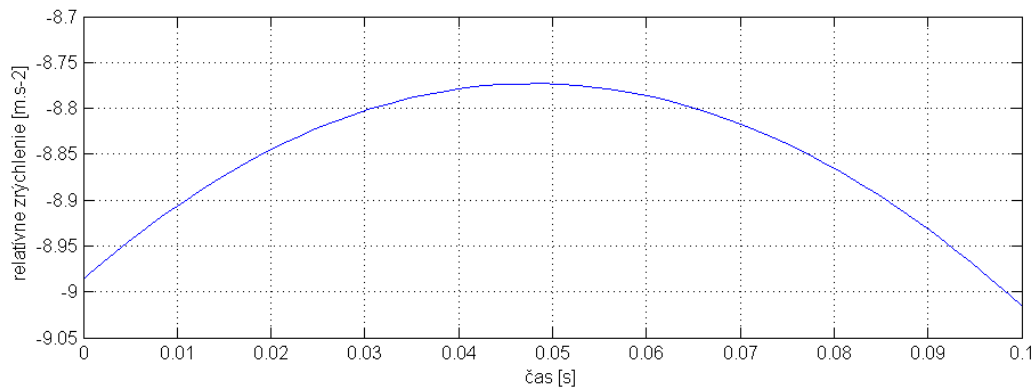
Na obrázkoch 6.4, 6.5 a 6.6 sú znázornené priebehy pohybových veličín smykadla v čase za daných parametrov.



Obr. 6.4: Graf dráhy náboja po vodiacej tyči



Obr. 6.5: Graf relatívnej rýchlosti náboja



Obr. 6.6: Graf relatívneho zrýchlenia náboja

### 6.3. Návrhy úloh na modifikáciu modelu smykadla

#### 6.3.1. Úloha číslo 6.1

Zmeňte konšteláciu sústavy naklopením vodiacej tyče o ľubovoľný uhol. Pozorujte aký má táto zmena vplyv na merané veličiny.

#### 6.3.2. Úloha číslo 6.2

Z tabuľky 6.1 vyberte dvojicu materiálov. V skripte Matlabu zmeňte koeficient statického trenia  $f$ . Zistite ako materiál ovplyvňuje výsledné zrýchlenie.

NÁBOJ/VODIACA TYČ	SÚČINITEĽ STATICKÉHO TRENIJA $f$
teflón/ocel'	0,04
ocel'/ocel'	0,1
koža/liatina	0,40-0,60
guma/asfalt	0,60-0,80

Tabuľka 6.1

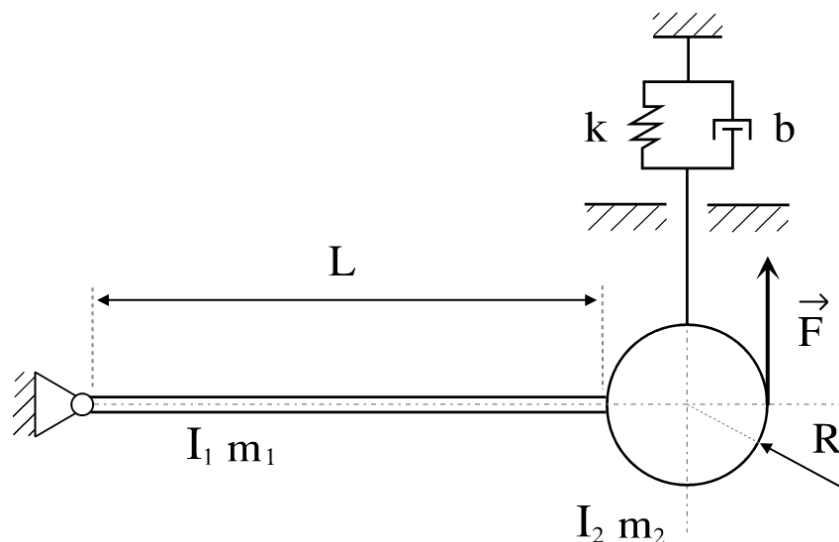


## 7. Kmitanie

Kmitanie je periodický pohyb hmotného bodu okolo rovnovážnej polohy, v ktorej zotrúva pokým je v pokoji. Časť kmitavého pohybu, kedy teleso prejde všetkými polohami a vráti sa späť do počiatočnej polohy, sa nazýva kmit. Kyv je pohyb z jednej krajnej polohy do druhej. Čas jedného kmitu sa nazýva perióda. Frekvencia určuje počet kmitov za sekundu a je prevrátenou hodnotou periódy. Okamžitá výchylka hmotného bodu od rovnovážnej polohy sa periodicky mení v čase. Najväčšia okamžitá výchylka sa nazýva amplitúda.

Daná sústava pozostáva z telesa zvarného z disku s polomerom  $R$  a hmotnosťou  $m_2$  a tenkej tyče s dĺžkou  $l$  a hmotnosťou  $m_1$ , ktorá je na konci rotačnou väzbou pevne spojená so zemou. Budiaca sila  $F$  pôsobí na konci disku kolmo nahor.

Nežiadané kmitanie sústav je optimalizované tlmiacimi sústavami. V tomto prípade sa jedná o tlmič s koeficientom tlmenia  $b$  a pružinu s tuhosťou  $k$  pripojených paralelne k telesu vid'. obrázok 7.1



Obr. 7.1: Schéma sústavy kmitania

Pre výpočet uhlového zrýchlenia tejto sústavy bola zvolená Langrangeova metóda, ktorá vychádza z určenia kinetickej a potenciálnej energie, tlmej funkcie a práce vonkajších síl [6].

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_K}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial E_K}{\partial q} + \frac{\partial E_P}{\partial q} + \frac{\partial E_D}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial A}{\partial q} \quad (7.1)$$

Langrangeova rovnica pracuje so zobecnenými súradnicami v tomto tvare

$$\begin{aligned} q &= \varphi \\ \dot{q} &= \omega \\ \ddot{q} &= \alpha \end{aligned} \quad (7.2)$$

Kinetická energia je vyjadrená vzťahom

$$E_k = \frac{1}{2}(I_1 + I_2) \dot{q}^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{3}m_1l^2 + \frac{1}{2}m_2R^2 + m_2(l + R)^2 \right) \dot{q}^2 \quad (7.3)$$

Potenciálna energia

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}k(l + R)^2q^2 \quad (7.4)$$

Energia tlmenej funkcie má tvar

$$E_D = \frac{1}{2}bv^2 = \frac{1}{2}b(l + R)^2\dot{q}^2 \quad (7.5)$$

Práca vonkajších síl kde budiaca sila  $F$  je harmonickou funkciou času je popísaná vzťahom

$$A = Fv_f = F(l + 2R)\dot{q} \quad (7.6)$$

Dosadením a zderivovaním týchto vzťahov podľa langrangeovej rovnice je získaná výsledná pohybová rovnica pre danú sústavu.

$$\left( \frac{1}{3}m_1l^2 + \frac{1}{3}m_2R^2 + m_2(l + R)^2 \right) \ddot{q} + b(l + R)^2\dot{q} + k(l + R)^2q = F(l + 2R) \quad (7.7)$$

Z výslednou rovnicou sa ďalej pracuje literatúra [6] v maticovom tvare

$$\mathbf{M}\ddot{q} + \mathbf{B}\dot{q} + \mathbf{K}q = \mathbf{Q}(t) \quad (7.8)$$

Z maticovej rovnice je vyjadrené uhlové zrýchlenie. S týmto tvarom pracuje aj program Simulink

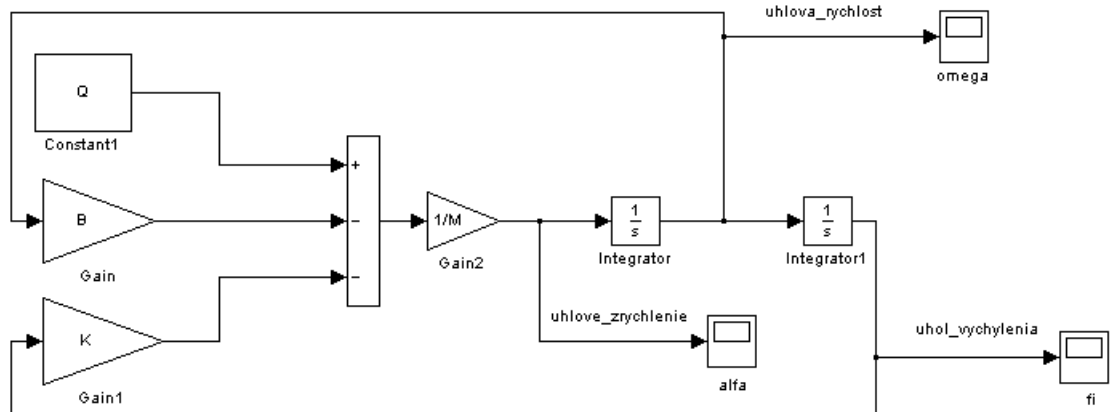
$$\ddot{q} = \frac{(\mathbf{Q} - \mathbf{B}\dot{q} - \mathbf{K}q)}{\mathbf{M}} \quad (7.9)$$

## 7.1. Zostavenie modelu kmitania v Simulinku

Pri zostavovaní modelu sa vychádza z maticového tvaru pohybovej rovnice zrýchlenia (7.9). Matice  $\mathbf{B}$  a  $\mathbf{K}$  sú násobene uhlovou rýchlosťou a uhlovou výchylkou, ktoré sú prvou a druhou integráciou uhlového zrýchlenia. V modeli budú tieto hodnoty spätne privedené do prislúchajúcich blokov.

Modelovanie začína definovaním matíc  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{B}$  a  $\mathbf{K}$  podľa vzťahov (7.6) a (7.9). Pre matice  $\mathbf{B}$  a  $\mathbf{K}$  je vybraný blok „Gain“ z dôvodu spätného násobenia matíc zobecnou

súradnicou. Rovnica matice  $Q$  je zapísaná do bloku „Constant“ vid'. obrázok 7.3. Blokom „Sum“ sú maticiam priradené odpovedajúce znamienka a matice sú automaticky sčítané.

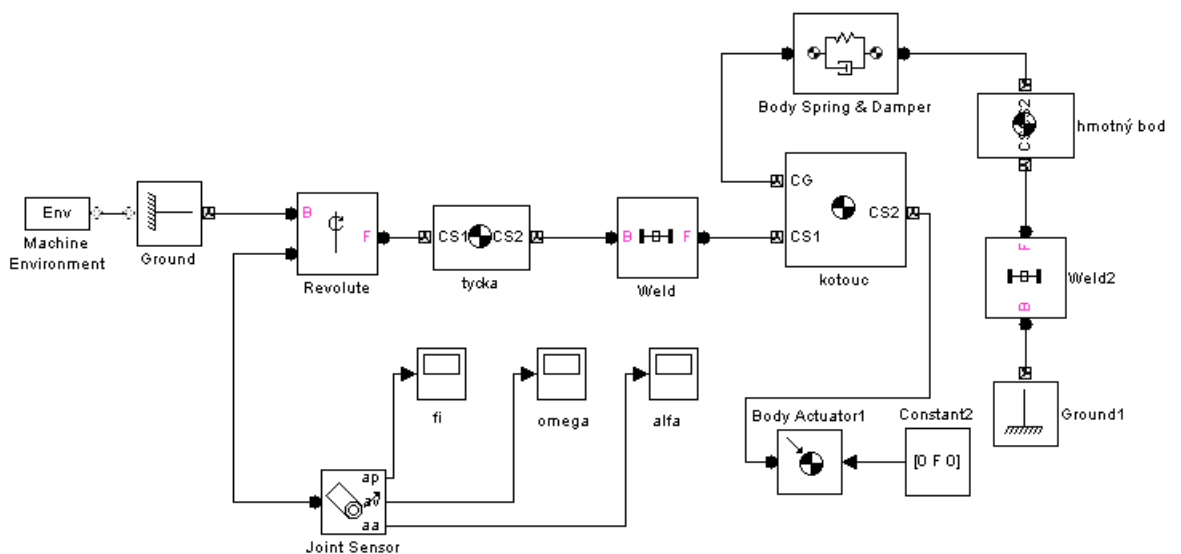


Obr. 7.3: Schéma modelu kmitania v Simulinku

Z pohybovej rovnice (7.9) plynie, že tento menovateľ musí byť podelený maticou  $M$ . Je preto pridaný ďalší blok „Gain“, ktorému je definovaný vzťah  $1/M$ . Pripojením sumy k tomuto bloku získavame výstup v podobe uhlového zrýchlenia. Dvojitou integráciou tohto výstupu postupne získavame uhlovú rýchlosť a uhlovú výchylku. Tieto vetvy sú spätne násobené matice  $B$  a  $K$  podľa pohybovej rovnice.

Grafy veličín sú vykresľované pomocou blokov „Scope“ pripojených k častiam výstupného signálu.

## 7.2. Zostavenie modelu kmitania v SimMechanics



Obr. 7.2: Schéma modelu kmitania v SimMechanics

Zostavenie modelu začína prvým telesom, tyčou. Jej rozmery, hmotnosť a moment zotrvačnosti sú definované v bloku „Body“. Následne je k bloku pripojený blok rotačnej väzby „Revolte“ so stupňom voľnosti v osi z. Väzba musí byť uzemnená, preto je pridaný ďalší blok „Ground“ a k nemu pripojený „Machine environment“ kde bude tento krát zrýchlenie definované nulovým vektorom, pretože na výsledné kmitanie sústavy nebude mať žiaden vplyv.

Tuhé teleso pozostáva z tenkej tyče privarenej ku disku. Zvar je v SimMechanics nahradený pevnou väzbou, blokom „Weld“. Blok tyče je teda spojený s blokom pevnej väzby a z opačnej strany je k nemu pripojený ďalší blok „Body“, v ktorom definujeme charakteristické parametre disku.

Budenie sústavy bude realizované blokom „Body Actuator“. V nastaveniach sa ako budiaci signál zvolí sila. Do bloku je privedený blok „Constant“ s veľkosťou budiaceho signálu  $F$  v osi y. V parametroch bloku disku je v pozícii vybrané zobrazovanie portu CS2 ktorého, súradnice od zvaru sú  $R*2$ , inými slovami v mieste pôsobenia budiacej sily. „Body Sensor“ je pripojený k tomuto portu, čím je zabezpečené budenie sústavy. Z podknižnice Force Element je vybraný blok „Body Spring & Damper“. Tento blok predstavuje paralelne zapojenie tlmiča a pružiny. V jeho nastaveniach je zvolená tuhosť pružiny  $k$  a koeficient tlmenia  $b$ . Blok je následne pripojený ku bloku disku do portu reprezentujúceho ťažisko CG.

Tlmiacia sústava musí byť spojená so zemou aby tlmenie mohlo byť realizované. Samotný blok tlmenia nie je možné spojiť so zemou, preto je vytvorený hmotný bod blokom „Body“, ktorý nemá hmotnosť ani moment zotrvačnosti. Tento hmotný bod je cez ďalšiu pevnú väzbu „Weld“ uzemnený do „Ground“.

Na sledovanie uhlovej výchylky, uhlovej rýchlosti a uhlového zrýchlenia sa k rotačnej väzbe pripája „Body Sensor“ obsahujúci veličiny, ktoré budú sledované. Ku každému portu je pripojený „Scope“, ktorý tieto veličiny po simulácii zobrazí v grafoch.

### 7.3. Výsledky simulácie a vstupné parametre

$$m_1 = 1 \text{ kg}$$

$$m_2 = 10 \text{ kg}$$

$$l = 1 \text{ m}$$

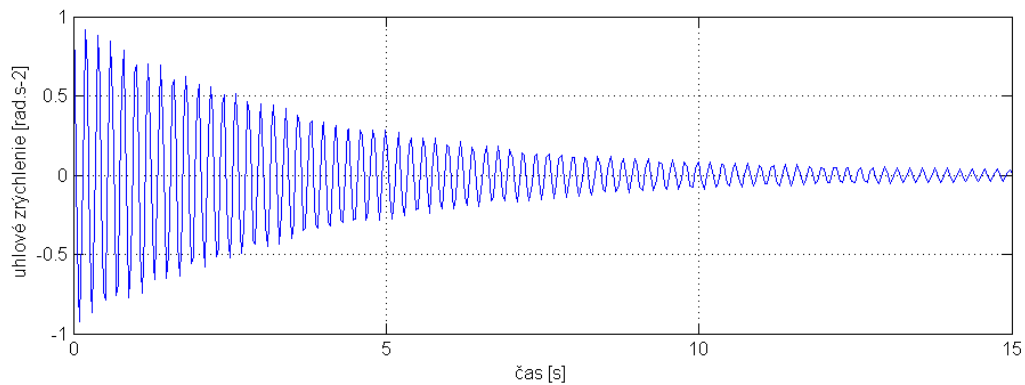
$$R = 0.1 \text{ m}$$

$$k = 10000 \text{ N.m}^{-2}$$

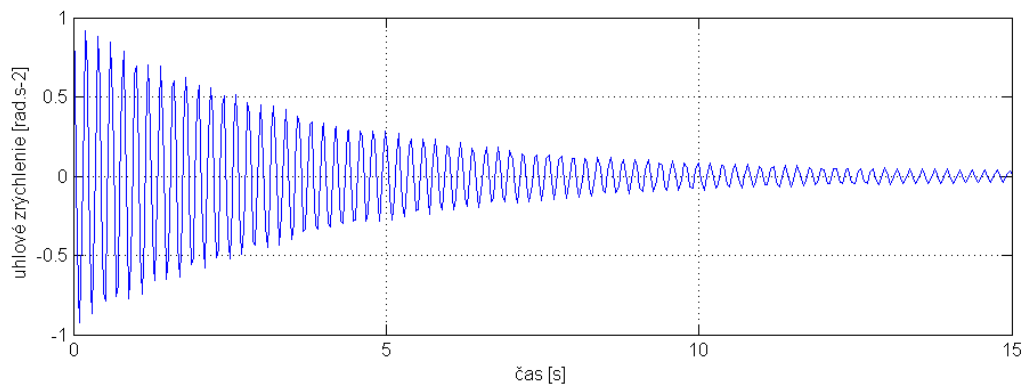
$$b = 5 \text{ N.s.m}^{-1}$$

$$F = 10 \text{ N}$$

Porovnaním grafov uhlového zrýchlenia na obrázkoch 7.4 a 7.5 je potvrdená správnosť zostavenia oboch blokových schém. Grafy sú totožné. Zostavenie modelu v SimMechanics simuluje pohybovú rovnicu, ktorá bola správne prepísaná do modelu Simulinku. Výsledné zrýchlenie je tlmené a amplitúdy s každou periódou klesajú.



Obr. 7.4: Graf uhlového zrýchlenia kmitania modelu SimMechanics



Obr. 7.4: Graf uhlového zrýchlenia kmitania modelu Simulink

## 7.4. Návrhy úloh na modifikáciu modelov kmitania

### 7.4.1. Úloha číslo 7.1

Pozorujte závislosť výsledného kmitania na parametroch tlmiacej sústavy. Meňte tuhosť pružiny a koeficient tlmenia. Zistite aký majú tieto zmeny vplyv na výsledné uhlové zrýchlenie.

### 7.4.2. Úloha číslo 7.2

Z blokovej schémy Simulinku separujte blok s maticou **B** alebo **K**. Vzniká model s jedným prvkom tlmiacej sústavy. Pozorujte výstupné parametre a zistite ako ovplyvňuje kmitanie sústavy ponechaný prvok.

## 8. Záver

Cieľom práce je oboznámiť študentov s možnosťami dostupných multi-body systémov a zmodernizovať výučbu dynamiky rozšírením súčasnej databázy príkladov o nové. Vypracovanie príkladov nadväzuje na doterajšie osnovy. Sústavy sú modelované v programe Matlab/Simulink s podnižnicou SimMechanics.

Úvod práce oboznamuje študenta s multi-body systémami, ktoré sú na školách bežne dostupné. Stručne charakterizuje základné princípy zostavovania blokových schém v programoch Simulink, SimMechanics a MSC.Adams a poukazuje na ich výhody a nedostatky. Vo zvyšných kapitolách sú spracované príklady, prostredníctvom ktorých sa študent zoznamuje s modelovaním blokových schém. Kapitoly dynamické sústavy opisujú najskôr analyticky prostredníctvom pohybových rovníc. Práve z výslednej pohybovej rovnice je nutné vychádzať pri zostavovaní modelu v Simuliku, ktorého postup je v kapitolách opísaný. Sústavy sú vymodelované v systéme SimMechanics, ktorý pohybovú rovnicu nepoužíva. Kapitoly príkladov sú zoradené podľa náročnosti modelovania od základných operácií v systémoch až po modelovanie zložitejších blokových schém tak, aby študent postupne obsiahol základnú znalosť multi-body systémov. Práca nabáda študenta na samostatnú prácu s modelom prostredníctvom úloh na modifikáciu blokových schém. Prvý príklad valenia je spracovaný v tretej kapitole. V úvode je opísané ako a za akých podmienok valenie vzniká. Sústava je následne opísaná pohybovými rovnicami, ktoré sú zapísané do maticového tvaru. V Matlabe je vytvorený „Script“, kde sú definované vstupné parametre, matice a výpočtový vzťah. Prostredníctvom tejto kapitoly má študent možnosť získať predstavu o tom ako pracovať so súborom vstupných parametrov, z ktorého vychádzajú bloky Simulinku a SimMechanics.

Kapitola štyri rieši modelovanie kyvadla v oboch použitých systémoch. Analytický opis pohybovou rovnicou uhlového zrýchlenia utvára predstavu o hodnotách fyzikálnych veličín v jeho charakteristických polohách. Ďalej je opísaný postup zostavenia jednoduchých modelov v Simulinku a SimMechanics. Správnosť zostavenia modelov je overená porovnaním grafov uhlového zrýchlenia oboch modelov.

Piaty príklad skúma vplyv momentu zotrvačnosti na výsledné uhlové zrýchlenie. Moment zotrvačnosti je odvodený z kinetickej energie, pohybová rovnica opisuje vzťah momentu zotrvačnosti k uhlovému zrýchleniu. Modely simulovaných telies disku, gule, kvádra a dosky sú vytvorené v SimMechanics. Výsledné zrýchlenia sú vykresľované do spoločného grafu, na ktorom je demonštrovaný nepriamoúmerný vzťah momentu zotrvačnosti k uhlovému zrýchleniu.

Kapitola šesť opisuje sústavu smykadla. Na základe Newtonovho princípu sú zostavené pohybové rovnice. Spolu s doplnkovými rovnicami sústavy je vyjadrený výsledný vzťah pre relatívne zrýchlenie. Tento vzťah je prepísaný do virtuálneho prostredia Simulinku a pozorované veličiny relatívneho zrýchlenia, relatívnej rýchlosti a dráhy sú vykresľované do grafov.

Posledná kapitola zostavuje modely kmitania v oboch vybraných multi-body systémoch. Analytické riešenie vychádza z Lagrangeovej metódy, kde sú určené energie sústavy a pomocou zovšeobecnených súradníc je vyjadrená pohybová rovnica uhlového

zrýchlenia. Zostavenie oboch modelov je po krokoch vysvetlené a výstupné signály oboch modelov sú porovnané prostredníctvom ich grafov.

Ďalšia práca môže nadviazať na základné znalosti používania multi-body systémov získané prostredníctvom tejto práce a obohatiť magisterskú výuku o zložitejšie príklady simulovanými v Matlab/Simulink.

Na záver môžeme skonštatovať, že vytýčené ciele boli splnené.

## Zoznam použitej literatúry

- [1] Grepl R.: Modelování mechatronických systémů v Matlab SimMechanics, Praha, 2007
- [2] Křupka J., Kašparová M.: Modelování v kostce pro Matlab a Simulink, Pardubice, 2009
- [3] Švancara P.: Dynamika hmotného bodu, složený pohyb bodů [on-line] 2007  
[Citováno dne 2013-05-20].  
Dostupné z: [http://www.umt.fme.vutbr.cz/~pkrejci/opory/dynamika/kapitola\\_1.html](http://www.umt.fme.vutbr.cz/~pkrejci/opory/dynamika/kapitola_1.html)
- [4] Švancara P.: Momenty setrvačností a momenty deviační [on-line] 2007  
[Citováno dne 2013-05-20].  
Dostupné z: [http://www.umt.fme.vutbr.cz/~pkrejci/opory/dynamika/kapitola\\_3.html](http://www.umt.fme.vutbr.cz/~pkrejci/opory/dynamika/kapitola_3.html)
- [5] Houfek L.: Dynamika tuhého tělesa [on-line] 2007  
[Citováno dne 2013-05-20].  
Dostupné z: [http://www.umt.fme.vutbr.cz/~pkrejci/opory/dynamika/kapitola\\_4.html](http://www.umt.fme.vutbr.cz/~pkrejci/opory/dynamika/kapitola_4.html)
- [6] Brepta R., Půst L., Turek F.: Mechanické kmitání, Sobotáles, 1994



## Zoznam použitých symbolov

$m$	hmotnosť [kg]
$L$	dĺžka [m]
$a$	dĺžka [m]
$c$	dĺžka [m]
$\beta$	uhol [deg]
$f$	koeficient statického trenia
$e$	rameno valivého odporu [m]
$I$	moment zotrvačnosti [kg.m <sup>2</sup> ]
$\varphi$	uhlová výchylka [rad]
$\omega$	uhlová rýchlosť [rad.s <sup>-1</sup> ]
$\alpha$	uhlové zrýchlenie [rad.s <sup>-2</sup> ]
$F$	budiaca sila [N]
$F_G$	tiažová sila [N]
$F_t$	dotyčná sila od normálovej [N]
$F_N$	normálová sila [N]
$\dot{\varphi}$	uhlová rýchlosť [rad.s <sup>-1</sup> ]
$\ddot{\varphi}$	uhlové zrýchlenie [rad.s <sup>-2</sup> ]
$x$	dráha [m]
$\dot{x}$	relatívna rýchlosť [m.s <sup>-1</sup> ]
$\ddot{x}$	relatívne zrýchlenie [m.s <sup>-2</sup> ]
$a$	zrýchlenie [m.s <sup>-2</sup> ]
$v$	rýchlosť [m.s <sup>-1</sup> ]
$a_{rel}$	relatívne zrýchlenie [m.s <sup>-2</sup> ]
$a_{cor}$	coriolisove zrýchlenie [m.s <sup>-2</sup> ]
$a_{un}$	unášavé zrýchlenie [m.s <sup>-2</sup> ]
$\omega_{un}$	unášavá uhlová rýchlosť [rad.s <sup>-1</sup> ]
$b$	koeficient tlmenia [N.s.m <sup>-1</sup> ]
$k$	tuhosť pružiny [N.m <sup>-1</sup> ]

$E_D$	energia tlmiacej funkcie (disipatívna energia) [J]
$E_k$	kinetická energia [J]
$E_p$	potenciálna energia [J]
$A$	práca vonkajších síl [J]
$q$	zobecnená súradnica uhlovej výchylky [rad]
$\dot{q}$	zobecnená súradnica uhlovej rýchlosti [rad.s <sup>-1</sup> ]
$\ddot{q}$	zobecnená súradnica uhlového zrýchlenia [rad.s <sup>-2</sup> ]
$M$	budiaci moment [N.m]
$B$	matica tlmenia
$K$	matica tuhosti pružiny
$M$	matica hmotnosti
$Q$	matica budenia
$X$	stĺpcový vektor neznámych parametrov

## Zoznam príloh

Príloha 1 - súbor vypracovaných príkladov so vstupnými parametrami a modelmi  
Simulinku a SimMechanics