

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A BIOMECHANIKY

INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND BIOMECHANICS

VYUŽITÍ VÝPOČTOVÉHO PROSTŘEDÍ SALOME MECA PŘI ŘEŠENÍ ÚLOH MECHANIKY TĚLES

THE USAGE OF SALOME MECA WORKBENCH FOR TASK SOLUTION IN THE FIELD OF SOLID
MECHANICS

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Michal Nytra

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Ing. Petr Vosynek, Ph.D.

BRNO 2017

Zadání bakalářské práce

Ústav: Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky
Student: **Michal Nytra**
Studijní program: Strojírenství
Studijní obor: Základy strojírenského inženýrství
Vedoucí práce: **Ing. Petr Vosynek, Ph.D.**
Akademický rok: 2016/17

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Využití výpočtového prostředí Salome Meca při řešení úloh mechaniky těles

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Práce je zaměřena na řešení úloh mechaniky těles pomocí metody konečných prvků v programovém prostředí Salome Meca. Student v práci využije dosavadní znalosti z předmětů mechaniky těles (Pružnost Pevnost, Dynamika). Výstupem práce pak bude porovnání získaných výsledků s analytickým řešením, případně s výsledky jiného výpočtového prostředí (ANSYS nebo ANSYS Workbench).

Cíle bakalářské práce:

- základní orientace v prostředí Salome Meca
- tvorba výpočtových modelů základních úloh mechaniky těles
- analýza získaných výsledků s následnou verifikací
- popis tvorby výpočtových modelů a diskuze nad výsledky

Seznam literatury:

Aubury, J. P. (2013): Beginning with Code_Aster. A Practical Introduction to Finite Element Method Using Code_Aster, Gmsh and Salome. Framasoft

Rickard Andersson, EDF, www.code-aster.org, přístup 2. listopadu 2015

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2016/17

V Brně, dne

L. S.

prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc.
ředitel ústavu

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.
děkan fakulty

Abstrakt

Předkládaná bakalářská práce se zabývá řešením úloh z oblasti mechaniky těles ve volně dostupném výpočtovém prostředí Salome Meca a MKP řešiči Code_Aster. Na začátku práce je krátký teoretický úvod do problematiky metody konečných prvků a základní teorie k pružnosti a pevnosti. Následuje série úloh, na kterých řešič a prostředí vyzkoušíme. Dosažené výsledky srovnáme s analytickým řešením (pokud existuje), případně s dostupným komerčním softwarem Ansys. Jedná se o 3 úlohy strukturální (pruty, rotačně symetrická tělesa). Dále úloha dynamická, hledání vlastních frekvencí a kmitání desky při harmonickém buzení. Poslední je ustálená termická úloha kombinovaná se strukturální. Na závěr práce jsou shrnuty výhody a nevýhody volně dostupných softwarů. Dosažené výsledky z prostředí Salome Meca se od analyticky vypočtených hodnot vždy lišily maximálně do 10 %, což je v inženýrské praxi dostačující přesnost.

Summary

Submitted bachelors thesis deals with solution of tasks of body mechanics in open-source workbench Salome Meca and FEM solver Code_Aster. In the beginning is short theoretical introduction to finite element method a basic theory to strength of materials. Then follows series of tasks, which will test solver and workbench. We will compare results with analytical solution (if exists), eventually with available commercial software Ansys. There are 3 static structural tasks (beams, axisymmetric bodies). Next task is from dynamics, searching of natural frequencies and vibration of plate during harmonic excitation. The last one is steady-state-thermal combined with static structural. In the conclusion are summarized advantages and disadvantages of open-source softwares. Results of workbench Salome Meca vary from analytical solution maximal to 10 %, what is in engineering praxis sufficient accuracy.

Klíčová slova

metoda konečných prvků (MKP), Salome Meca, analytické řešení, staticky neurčitá úloha, Ansys

Keywords

finite element method (FEM), Salome Meca, analytical solution, statically indeterminate problem, Ansys

Bibliografická citace

NYTRA, M. *Využití výpočtového prostředí Salome Meca při řešení úloh mechaniky těles*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2017. 96 s. Vedoucí bakalářské práce Ing. Petr Vosynek, Ph.D.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem práci *Využití výpočtového prostředí Salome Meca při řešení úloh mechaniky těles* vypracoval samostatně pod vedením svého vedoucího Ing. Petra Vosynka, Ph.D. a za použití literatury uvedené v seznamu.

V Brně dne

Michal Nytra

Poděkování

Rád bych tímto poděkoval svému vedoucímu panu Ing. Petru Vosynkovi, Ph.D. za cenné rady a poskytnuté materiály pro získání orientace ve vývojovém prostředí Salome Meca a Code_Aster.

Dále bych rád poděkoval své rodině za podporu nejen při psaní bakalářské práce, ale během celého studia.

Michal Nytra

Obsah

1	Úvod	5
1.1	Instalace Salome Meca	6
1.2	Počet platných čísel	7
2	Úvod do metody konečných prvků (MKP)	9
2.1	Rovnice rovnováhy	10
2.2	Geometrické rovnice	11
2.3	Konstitutivní vztahy	11
2.4	Lagrangeův variační princip	12
2.5	Typy prvků v MKP	13
2.6	Saint-Venantův princip	14
2.7	Formulace MKP	15
2.7.1	Implicitní algoritmus	15
2.7.2	Explicitní algoritmus	16
3	Teorie prutových těles	17
3.1	Castiglianova věta	17
3.2	Diferenciální rovnice průhybové čáry	18
4	Příklad 1	21
4.1	Zadání	21
4.2	Rozbor úlohy	22
4.3	Analytické řešení	23
4.3.1	Kinematický rozbor	23
4.3.2	Statický rozbor	24
4.3.3	VVÚ	25

4.3.4	Řešení statické neurčitosti	26
4.3.5	Maximální průhyb	30
4.3.6	Bezpečnost	31
4.4	Numerické řešení	35
4.5	Zhodnocení výsledků	38
5	Příklad 2	39
5.1	Zadání	39
5.2	Rozbor úlohy	40
5.3	Analytické řešení	41
5.3.1	Statický rozbor	41
5.3.2	Řešení statické neurčitosti	43
5.3.3	Bezpečnost	44
5.4	Numerické řešení	47
5.5	Zhodnocení výsledků	50
6	Příklad 3	51
6.1	Zadání	51
6.2	Rozbor úlohy	52
6.3	Analytické řešení	53
6.3.1	Výpočtový model 1	53
6.3.2	Výpočtový model 2	55
6.4	Numerické řešení	58
6.5	Zhodnocení výsledků	62
7	Příklad 4	63
7.1	Zadání	63
7.2	Rozbor úlohy	64
7.3	Analytické řešení	64
7.3.1	Modální analýza	64
7.3.2	Harmonická analýza	65
7.4	Numerické řešení	66
7.4.1	Modální analýza	66
7.4.2	Harmonická analýza	69
7.5	Zhodnocení výsledků	73

8	Příklad 5	75
8.1	Zadání	75
8.2	Rozbor úlohy	77
8.3	Základy přenosu tepla	77
8.3.1	Formy přenosu tepla	77
8.3.2	Počáteční podmínky	80
8.3.3	Okrajové podmínky	80
8.4	Numerické řešení	81
8.5	Zhodnocení výsledků	85
9	Závěr	87
	Literatura	91
10	Seznam použitých zkratk a symbolů	93
11	Seznam příloh	95
A	Vztahy k příkladům	97
A.1	Příklad 1	97
A.1.1	Výpočet F_B -Castiglianova věta	97
A.1.2	Maximální průhyb	98
A.2	Příklad 2	100
A.2.1	Výpočet N_A a M_A -Castiglianova věta	100
A.2.2	Maximální průhyb	102
A.3	Příklad 3	103
A.3.1	Vztahy pro rotující stěnu	103
A.3.2	Určení integračních konstant	106
A.4	Odvození průřezové charakteristiky β	108
A.4.1	Kruhový průřez	108
A.4.2	Obdélníkový průřez	111
	Seznam obrázků	113
	Seznam tabulek	117

1 Úvod

Tato práce je zaměřena na řešení úloh mechaniky těles v prostředí Salome Meca, disponující řešičem Code_Aster, která je založen na metodě konečných prvků, anglicky finite element method. Code_Aster využívá tzv. implicitní formulaci MKP (viz Implicitní algoritmus na str. 15).

Metoda konečných prvků (MKP) je velice důležitou součástí řešení problémů v inženýrské praxi, např. mechaniky, vedení tepla, proudění¹ apod. My se zaměříme na řešení úloh mechaniky těles, konkrétně z oblasti pružnosti pevnosti a dynamiky. Ve světě je mnoho společností poskytujících software pro řešení úloh touto metodou. Jedná se většinou o software komerční, mnohdy velmi drahý. Mnohým společnostem podnikajících v technické sféře se investice do komerčního programu nevyplatí. Řešením pro ně by mohl být volně dostupný software Salome Meca, běžící převážně pod operačním systémem Linux. Program vyzkoušíme na sérii úloh z oblastí mechaniky těles a výsledky porovnáme s výsledky analytického řešení. Dále provedeme porovnání s řešením v komerčním softwaru Ansys.

Výhodou komerčních balíčků je ale na druhou stranu možnost řešení komplexních úloh inženýrské praxe, které vyžadují různé typy analýz. Jako příklad můžeme uvést parní turbínu, resp. její lopatky. Lopatky je nutno navrhnout tak, aby byla energie páry maximálně využita pro tvorbu výkonu na hřídeli pohánějící generátor, což vyžaduje analýzu CFD². Při obtékání parou ale dochází k buzení, které může způsobovat nežádoucí vibrace. Vybuzevané vibrace mohou vést ke ztrátám, v nejhorším případě k havárii. Cílem je stanovení vlastních frekvencí a vlastních tvarů, což je mechanická modální, resp. harmonická analýza.

Ansys disponuje prostředím pro řešení proudění Ansys CFX/Ansys Fluent. Výsledky z CFD analýzy je možno aplikovat do Ansys Mechanical pro řešení mechanické odezvy jako silové zatížení a tím obě analýzy propojit. Následně se zdeformovaný tvar použije jako nová geometrie pro analýzu proudění. Tento cyklus se opakuje do okamžiku konvergence úlohy. Tyto úlohy ale bývají často nestabilní a jejich konvergence je obtížná.

¹Proudění tekutin se častěji řeší pomocí FVM (finite volume method), česky metoda konečných objemů.

²Computational Fluid Dynamics.

Existují také volně dostupné programy pro řešení výše zmíněných CFD analýzy, z nichž nejznámější je výpočtové prostředí OpenFOAM. Tento software je ale zaměřen pouze na řešení problémů proudění tekutin. Mechanickou odezvu je nutno provést v jiném prostředí, které může být také volně dostupné, např. Salome Meca a řešič Code_Aster. Propojení může být spojeno s mnohem většími obtížemi než např. u Ansysu. Skupině rakouských výpočtářů z Ústavu energetiky a termodynamiky ve Vídni se ale povedl realizovat výpočet oběžného kola Francisovy turbíny právě pomocí programů OpenFOAM a Code_Aster [12].

Společnost EDF vyvíjí kromě řešiče Code_Aster také Code_Saturne, zaměřený právě na řešení problémů proudění. Jedná se opět pouze o řešič, proto pro tvorbu modelu (preprocessing) a vizualizaci výsledků (postprocessing) je potřeba dodatečné prostředí, např. zmíněné Salome.

1.1 Instalace Salome Meca

Jak již bylo zmíněno, primárně je tento program určen pro operační systém Linux. Uživatel má více možností, jak přidání Linuxu do svého počítače provést.

1. **Přímá instalace:** přímou instalací se myslí vytvoření samostatného diskové oddílu na pevném disku, kam se Linux nainstaluje. Při spuštění počítače má uživatel možnost volby, který operační systém chce spustit, pokud jich je na počítači nainstalovaných více, tzv. GRUB³. Tento způsob má ale nevýhodu v případě, že uživatel často pracuje v programech, které Linux nepodporují, což má za následek časté restartování počítače a tím zpomalení práce.
2. „Nepřímá“ instalace: je založená na vytvoření virtuálního diskového souboru v prostředí VirtualBox od společnosti Oracle (<https://www.virtualbox.org>). Na tento diskový soubor je možné nainstalovat operační systém a kdykoli ho spustit. Výhodou pak je možnost mít spuštěných několik operačních systémů zároveň a potřebná data si předávat pomocí sdílených složek. Omezením může být výkon počítače, protože každému virtuálnímu počítači je nutno poskytnout část výkonu procesoru a část paměti RAM.

Salome Meca je možné doinstalovat manuálně (viz <https://www.youtube.com/watch?v=s0wKyyN7Cv0>). Je možné si ale stáhnout speciální distribuci Linuxu zvanou

³GRand Unified Bootloader.

CAELinux⁴, ve které jsou předinstalovány různé programy potřebné v inženýrské praxi, včetně Salome Meca.

1.2 Počet platných číslic

Počet desetinných míst, které se v této práci vyskytuje ve výsledcích, je přehnaný. Vysoký počet desetinných míst ve výsledcích je volen s ohledem na to, abychom byli schopni postřehnout rozdíly mezi analytickým výpočtem a numerickým řešením, případně mezi softwary navzájem. V praxi tento postup nemá opodstatnění vzhledem k nejistotám vstupních parametrů jako např. materiálových vlastností. Využíváme pouze model materiálu jako např. lineární izotropní, který je homogenní. Každý materiál má ale nějaké vnitřní vady a tedy zcela homogenní není. Materiálové parametry jako E , μ a R_e jsou experimentálně získaná data, která mají určitou variabilitu. Dále jelikož metoda konečných prvků je numerická metoda založena na variačním počtu, také výstupní hodnoty jsou zatíženy chybou. Tyto faktory způsobují to, že uvádět výsledky na vyšší počet desetinných míst nemá smysl, protože numerické chyby a chyby na vstupech způsobí větší odchylku než zaokrouhlení výsledku. Proto se např. napětí jako výstup zaokrouhluje na jednotky MPa a deformace (posuvy) spíš na desetiny mm.

⁴Computer Aided Engineering Linux (www.caelinux.com).

2 Úvod do metody konečných prvků (MKP)

Metoda konečných prvků je založena na tzv. diskretizaci problému. Diskretizací se rozumí rozdělení řešeného objektu na určitý počet prvků o rozměrech konečné velikosti. Vytvořené prvky mohou být rovinné nebo prostorové a jejich geometrie je podstatně jednodušší než geometrie vyšetřovaného objektu.

Výsledkem řešení pro případ statické strukturální analýzy jsou:

1. posuvy: u, v, w [m],
2. poměrné deformace (přetvoření): $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$ [–],
3. napětí: $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$ [Pa].

Diskretizace musí být provedena tak, že jednotlivé prvky jsou navzájem disjunktní (prvky se neprotínají, mají pouze společné uzlové body, hrany nebo plochy). Zároveň ale vytvořené prvky musí co nejlépe vyplňovat původní geometrii řešeného objektu (sjednocení prvků by se mělo blížit původnímu objektu). Velikost prvku a stupeň polynomů básových funkcí ovlivňují přesnost aproximace řešení. S klesající velikostí prvku a zvyšujícím se stupněm polynomů se přesnost zvyšuje, ale časová náročnost řešení se zvyšuje. S ohledem na tyto fakty se musí zvolit kompromis, se kterým souvisí zavedení tzv. povolené chyby řešení, tj. chyby, o jakou se liší výpočtový model od analytického řešení problému. Tato chyba se pohybuje maximálně do 5 % [14].

2.1 Rovnice rovnováhy

Rovnice rovnováhy vychází z podmínek statické rovnováhy elementárního prvku o velikosti $dx \times dy \times dz$. Jelikož se jedná o prostorový prvek a silová soustava je obecná, existuje 6 podmínek statické rovnováhy (3 silové a 3 momentové). Ze silových podmínek vycházejí Cauchyho rovnice rovnováhy pro elementární prvek ((2.1a) až (2.2c)) [2, 4].

- vnitřní:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + o_x = 0 \quad (2.1a)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + o_y = 0 \quad (2.1b)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + o_z = 0 \quad (2.1c)$$

- hraniční:

$$p_{\rho x} = \sigma_x \alpha_x + \tau_{yx} \alpha_y + \tau_{zx} \alpha_z \quad (2.2a)$$

$$p_{\rho y} = \tau_{xy} \alpha_x + \sigma_y \alpha_y + \tau_{zy} \alpha_z \quad (2.2b)$$

$$p_{\rho z} = \tau_{xz} \alpha_x + \tau_{yz} \alpha_y + \sigma_z \alpha_z \quad (2.2c)$$

Při využití momentových podmínek statické rovnováhy získáváme rovnice (2.3a), (2.3b) a (2.3c).

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad (2.3a)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} \quad (2.3b)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} \quad (2.3c)$$

Těmto rovnicím se říká též věta o sdružených smykových napětí [2, 4]. Výše uvedené rovnice implikují, že tzv. tenzor napětí (\mathbf{T}_σ) je symetrický podle hlavní diagonály a jeho tvar je dle rovnice (2.4)

$$\mathbf{T}_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Má tedy 6 nezávislých složek napětí, které ho definují [2].

2.2 Geometrické rovnice

Geometrické rovnice udávají spojitost mezi posuvy a poměrnou deformací (přetvořením). Přetvoření jsou délková (ε_i) a úhlová (γ_{ij} , $i \neq j$). Geometrické rovnice jsou uvedeny jako vztahy (2.5a) až (2.5f) [4].

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.5a)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2.5b)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (2.5c)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.5d)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad (2.5e)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (2.5f)$$

2.3 Konstitutivní vztahy

Jako konstitutivní vztahy je zde uveden tzv. zobecněný Hookův zákon, který uvádí do spojitosti přetvoření a napětí (rovnice (2.6a) až (2.6f)). Tento zákon platí pro tzv. hookovský⁵ materiál [2, 4].

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)}{E} \quad (2.6a)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)}{E} \quad (2.6b)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)}{E} \quad (2.6c)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad (2.6d)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \quad (2.6e)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} \quad (2.6f)$$

Pro hookovský materiál dále platí vztah (2.7)

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}, \quad (2.7)$$

který uvádí souvislost mezi Youngovým modulem pružnosti v tahu E a Youngovým modulem pružnosti ve smyku G pomocí Poissonova poměru μ .

⁵Materiál izotropní, homogenní a lineárně pružný.

2.4 Lagrangeův variační princip

Metoda konečných prvků je metoda založená na tzv. variačních principech, konkrétně na Lagrangeově, podle kterého těleso při zatížení zaujme takový stav, ve kterém má nejmenší potenciální energii. Tato energie se označuje Π a lze vyjádřit vztahem (2.8) jako

$$\Pi = \underbrace{\frac{1}{2} \iiint_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} \, dV}_{=W} - \underbrace{\left(\iiint_{\Omega} \mathbf{u}^T \mathbf{o} \, dV + \iint_S \mathbf{u}^T \mathbf{p} \, dS \right)}_{=P}, \quad (2.8)$$

kde W je energie napjatosti akumulovaná v tělese při deformaci a P je potenciál vnějšího zatížení [4]. Tato rovnice se dá po úpravách napsat ve tvaru

$$\Pi = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} - \mathbf{F} \mathbf{u}. \quad (2.9)$$

Jelikož hledáme minimum Π , uděláme derivaci Π z rovnice (2.9) podle \mathbf{u} a položíme ji rovnu 0 [4].

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{u}} = 0$$

Výsledkem této derivace je rovnice (2.10)

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{F}, \quad (2.10)$$

což je základní rovnice MKP a jedná se o soustavu lineárních rovnic, kde \mathbf{K} je matice tuhosti soustavy, \mathbf{u} je sloupcová matice neznámých posuvů a \mathbf{F} je sloupcová matice zatížení. Pro matici \mathbf{K} musí platit, že je tzv. regulární⁶, čehož se docílí zamezením pohybu tělesa jako celku⁷. Rovnice (2.10) platí pouze pro *statickou strukturální* analýzu [4].

⁶ $\det(\mathbf{K}) \neq 0 \iff$ všechny řádky jsou lineárně nezávislé.

⁷Anglicky se toto označuje jako Rigid Body Motion. Musí být předepsáno alespoň tolik deformačních okrajových podmínek, aby těleso bylo uloženo nepohyblivě.

2.5 Typy prvků v MKP

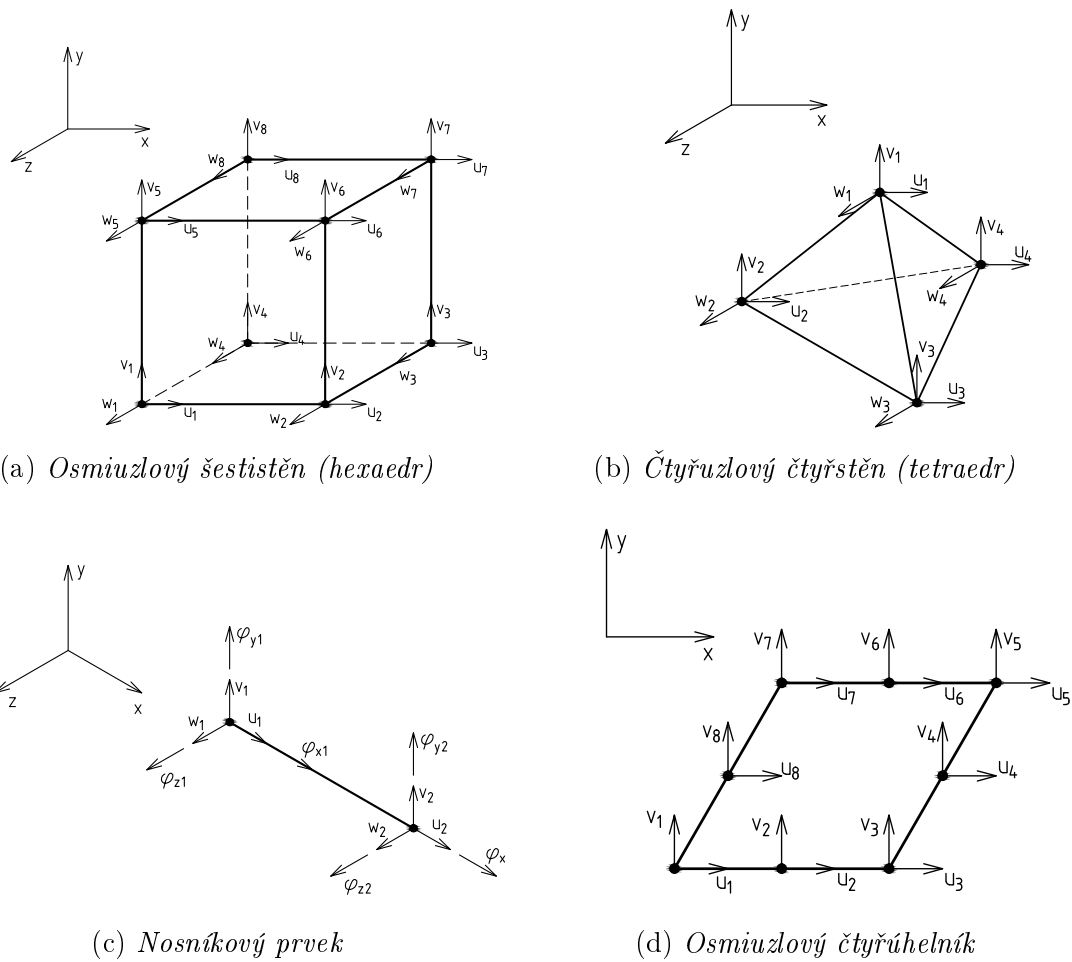
Prvky v MKP se mohou dělit podle různých kritérií.

Základní rozdělení

- prutové-např. obr. 2.1c,
- tělesové:
 - Rovinné-např. obr. 2.1d,
 - Prostorové-např. obr. 2.1a, 2.1b,
- skořepinové.

Rozdělení podle stupně polynomu bázových funkcí

- Lineární: bázovou funkcí je lineární funkce (přímka)-např. obr. 2.1a.
- Kvadratické: bázovou funkcí je kvadratická funkce (parabola) a prvky mají prostřední uzel-např. obr. 2.1d.



Obrázek 2.1: Ukázky prvků (převzato a upraveno z [4])

2.6 Saint-Venantův princip

„Nahradíme-li silovou soustavu působící v okolí bodu A jinou staticky ekvivalentní silovou soustavou v okolí bodu A, pak je napjatost tělesa pro oba zatěžovací stavy prakticky stejná s výjimkou blízkého okolí náhrady.“ [2]

2.7 Formulace MKP

2.7.1 Implicitní algoritmus

Implicitní formulace MKP („implicit“) je vhodná na simulaci dějů, kde čas nemá fyzikální podstatu, tj. statické děje nebo dynamické, které jsou pomalé. U těchto úloh stabilita řešení nezávisí na volbě časového kroku, který může být velice velký (řádově sekundy a více), tento algoritmus je tedy tzv. nepodmíněně stabilní. Nevhodně zvolený časový krok vede k nepřesnosti řešení, ale nevede k nestabilnímu chování výpočtu, to znamená, že výpočet zkonverguje nezávisle na velikosti časového kroku. Při nestabilním chování většinou dojde k tomu, že výpočet spadne po několika časových krocích. Algoritmus je vhodný pro řešení úloh s mírnějšími nelinearitami jako např. plasticita [4].

Implicitní algoritmus je založen na řešení posuvů v čase t_{n+1} z pohybové rovnice ve stejném časovém okamžiku. Toto vede ke skutečnosti, že výpočet lze těžko paralelizovat na více výpočtových center, tzv. clusterů.

2.7.2 Explicitní algoritmus

Explicitní formulace MKP („explicit“) je vhodná na simulace velmi rychlých dějů, kde mají setrvačné účinky nezanedbatelných vliv. Lze použít také v případě, kdy výpočet je silně nelineární (rázové zatížení, borcení tenkostěnných konstrukcí, ...). Časový krok výpočtu Δt zde má velký vliv na stabilitu výpočtu (je tzv. podmíněně stabilní), protože pro zvolený časový krok musí platit

$$\Delta t \leq \Delta t_{\text{krit}},$$

kde Δt_{krit} je kritický časový krok, který se určí z rovnice (2.11)

$$\Delta t_{\text{krit}} = \frac{L}{\sqrt{\frac{E}{\rho}}} = L \sqrt{\frac{\rho}{E}}, \quad (2.11)$$

kde:

- L [m] je charakteristický rozměr *nejmenšího* prvku,
- E [Pa] je Youngův modul pružnosti,
- ρ [$\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$] je hustota materiálu [4].

Kritický časový krok lze interpretovat jako dobu průchodu napěťové vlny nejmenším prvkem sítě. Délka časového kroku tedy závisí také na materiálu, který je použit pro analýzu. Jestliže je délka kroku závislá na velikosti nejmenšího prvku, cílem je vytvořit co nejvíce rovnoměrnou síť. Jednou z možností, jak časový krok zvětšit, je dle (2.11) uměle zvýšit hustotu materiálu při zachování velikosti prvku a E . Tento krok vede ale ke zkreslení výsledků. Pokud ale dovolíme odchylku výsledků, která může značně ušetřit výpočetní čas, je žádoucí časový krok zvýšit [4].

Výhodou explicitního algoritmu je to, že posuvy v čase t_{n+1} se získávají z pohybové rovnice psané pro předchozí časový okamžik t_n . Tento způsob řešení umožňuje snadnou paralelizaci výpočtu na více výpočtových center.

Případy aplikací explicitní formulace jsou různé technologické operace (obrábění, tváření), průstřel pancíře kulkou, iniciace a šíření trhlin v materiálu atd.

3 Teorie prutových těles

3.1 Castiglianova věta

Pomocí Castiglianovy věty můžeme určovat deformace v místě působení síly \vec{F} , případně silové dvojice \vec{M} . Castiglianova věta vychází z energie napjatosti W , tj. energie vyvolané silovým působením na těleso. Energie lze dle (3.1) vyjádřit jako

$$W = \int_{\gamma} \left(\frac{N^2(x)}{2ES} + \frac{M_{oy}^2(x)}{2EJ_y} + \frac{M_{oz}^2(x)}{2EJ_z} + \frac{\beta_z T_y^2(x)}{2GS} + \frac{\beta_y T_z^2(x)}{2GS} + \frac{M_k^2(x)}{2GJ_p} \right) dx, \quad (3.1)$$

kde:

- E [Pa] je Youngův modul pružnosti v tahu,
- G [Pa] Youngův modul pružnosti ve smyku,
- S [m²] je plocha průřezu,
- J_y [m⁴] kvadratický moment k ose y (analogicky J_z),
- J_p [m⁴] polární kvadratický moment,
- β_y [-] je průřezová charakteristika (analogicky β_z)

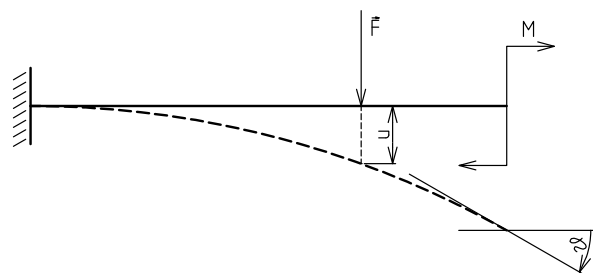
a γ je střednice prutu⁸ [2].

Posuv ve směru síly \vec{F} je možno vyjádřit rovnicí (3.2) jako

$$u = \frac{\partial W}{\partial F}, \quad (3.2)$$

analogicky natočení ve směru silové dvojice \vec{M} rovnicí (3.3)

$$\vartheta = \frac{\partial W}{\partial M}. \quad (3.3)$$



Obrázek 3.1: Castiglianova věta

Rovnice (3.2) a (3.3) byly převzaty z [2]. Interpretace rovnic je možno vidět na obr. 3.1.

⁸Jedná se o křivkový integrál, kde integrační cestou je střednice prutu.

3.2 Diferenciální rovnice průhybové čáry

Pomocí diferenciální rovnice průhybové čáry můžeme určovat deformace v kterémkoliv místě střednice dosazením souřadnice bodu, což je nesmírná výhoda oproti Castiglianově větě⁹.

Zmíněná diferenciální rovnice je dána vztahem (3.4)

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_{oy}(x)}{EJ_y} = -\frac{w''(x)}{\sqrt[3]{[1 + w_i'^2(x)]^2}}. \quad (3.4)$$

Jedná se o nelineární diferenciální rovnici 2. řádu, jejíž analytické řešení je velice obtížné. Rovnice (3.4) byla převzata z [2].

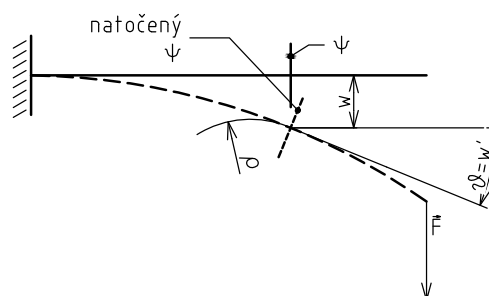
Jestliže jsou deformace malé¹⁰, můžeme říct, že

$$\sqrt[3]{[1 + w_i'^2(x)]^2} \approx 1$$

a rovnice (3.4) přejde do tvaru

$$w''(x) = -\frac{M_{oy}(x)}{EJ_y}. \quad (3.5)$$

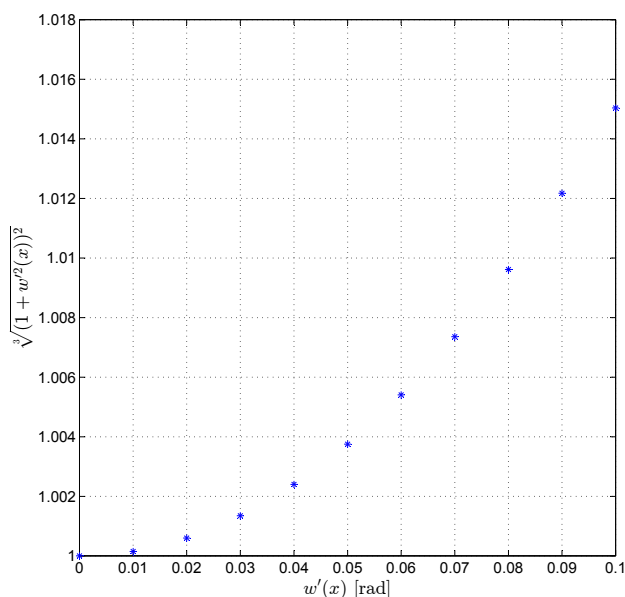
Rovnice (3.5) je lineární diferenciální rovnice 2. řádu, jejíž integrací je možno získat závislost natočení (w') a průhybu (w) v závislosti na souřadnici x [2].



Obrázek 3.2: Schéma k diferenciální rovnici ohybové čáry (převzato a upraveno z [2])

⁹Pomocí Castiglianovy věty je možno určovat deformace pouze v místech působení síly, popř. momentu. Pokud v daném místě nic nepůsobí, je nutno zavést doplňkovou sílu, popř. moment, nulové velikosti.

¹⁰ $w'(x) < 0,05$ rad, viz tab. 3.1 a obr. 3.3 na str. 19.



Tabulka 3.1: Hodnoty z grafu 3.3

$w'_i(x)$	$\sqrt[3]{[1 + w_i'^2(x)]^2}$
0	1
0,01	1,0002
0,02	1,0006
0,03	1,0014
0,04	1,0024
0,05	1,0038
0,06	1,0054
0,07	1,0074
0,08	1,0096
0,09	1,0122
0,1	1,015

Obrázek 3.3: Průběh jmenovatele v rov. (3.4)

Výhody

- Umožňuje zjistit průhyb a natočení v libovolném bodě prutu dosazením jeho souřadnic.
- Vhodné pro zjištění maximální průhybu prutu, případně maximálního natočení.
- Umožňuje řešit staticky neurčité úlohy (doplněním odpovídajících okrajových podmínek).

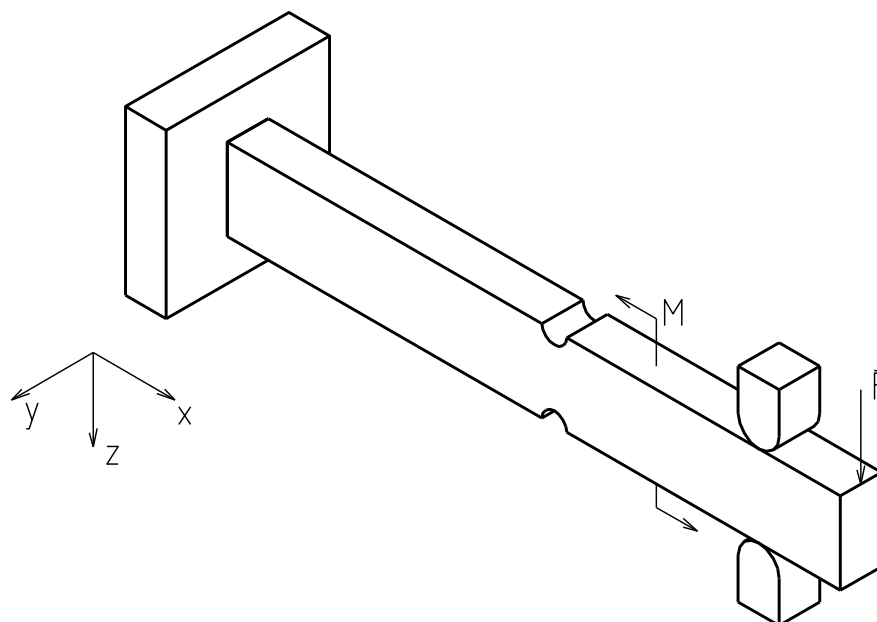
Nevýhody

- Neumožňuje zahrnout vliv posouvajících a normálových sil.
- Řešení je zatíženo chybou (využíváme zjednodušený tvar rovnice).
- Nutno řešit soustavu n rovnic od n neznámých (n je počet okrajových podmínek, vektor neznámých jsou integrační konstanty).

4 Příklad 1

4.1 Zadání

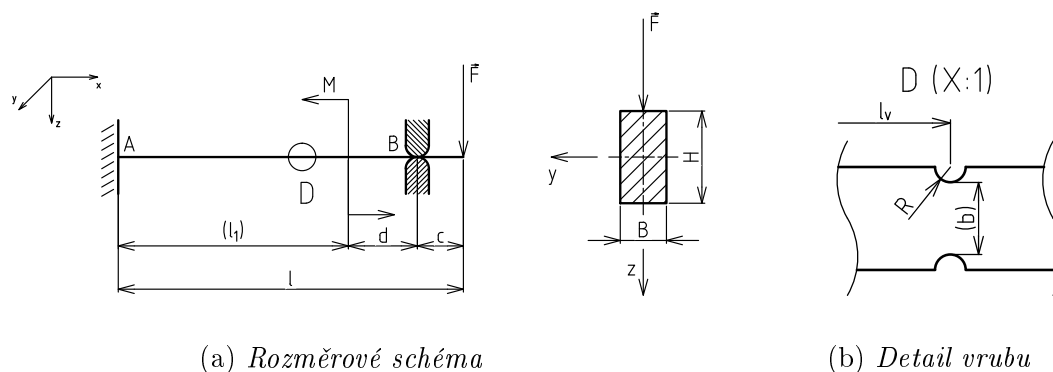
U součástky dle obr. 4.1 nalezněte velikost maximálního průhybu. Dále součástku zkontrolujte vzhledem k meznímu stavu pružnosti (MSP). Součástka je vyrobena z oceli 11 373 dle ČSN¹¹, předpokládejte materiál ve stavu tvárném. Neuvažujte koncentraci napětí ve vetknutí a vlastní tíhu.



Obrázek 4.1: Zadání příkladu 1-3D pohled

Rozměry určíme z obr. 4.2a na str. 22. Jak je z obr. 4.1 patrné, součástka je opatřena vrubem, jehož polohu a rozměry určuje obr. 4.2b. Materiálové charakteristiky je možno nalézt v materiálovém listu.

¹¹S235JR dle ISO.



Obrázek 4.2: Příklad 1

$l = 1,5 \text{ m}$	$B = 10 \text{ mm}$	$M = 100 \text{ Nm}$	$E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$
$c = 0,2 \text{ m}$	$H = 20 \text{ mm}$	$F = 200 \text{ N}$	$\mu = 0,3$
$d = 0,3 \text{ m}$	$R = 3 \text{ mm}$	$k_K = ?$	$\sigma_K = 235 \text{ MPa}$
$l_v = 0,8 \text{ m}$	$b = 14 \text{ mm}$	$w_{\max} = ? \text{ mm}$	

4.2 Rozbor úlohy

Z pohledu na vypsání rozměrů je patrné, že se jedná o prutové těleso (délka je mnohem větší než charakteristický rozměr průřezu). Dále můžeme říct, že úlohu je možné řešit jako rovinnou z důvodu charakteru vazeb a zatížení.

V bodu A je prut vetknut (např. přivařen) do základového tělesa, čímž se zamezilo posuvům a natočením v osách x , y , z . Dále je v bodu B oboustranně podepřen a tím se prutu v tomto místě zamezilo posunutí ve směru osy z .

Prut je zatížen na volném konci osamělou silou \vec{F} ve směru osy z . Zároveň je také zatížen osamělou silovou dvojicí \vec{M} ve vzdálenosti $x = 1 \text{ m}$ od místa vetknutí, mířící ve směru osy y .

4.3 Analytické řešení

4.3.1 Kinematický rozbor

Kinematickým rozbohem se rozumí posouzení pohyblivosti tělesa či soustavy těles při daném zatížení a dané konfiguraci vazeb. Pohyblivost se vyjadřuje tzv. stupni volnosti. Počet stupňů volnosti vyjadřujeme jako i a pro jedno těleso se dle (4.1) vypočítá jako

$$i = i_v - \left(\sum \xi_i - \eta \right), \quad (4.1)$$

kde:

- i je počet nezávislých složek pohybu vázaného tělesa,
- i_v je počet stupňů volnosti volného tělesa (v rovině $i_v = 3$),
- ξ_i je počet stupňů volnosti odebraných jednotlivými vazbami,
- η je počet parametrů omezujících deformaci.

Pro případ této úlohy můžeme napsat $i = 3 - \underbrace{(3 + 1)}_{=\sum \xi} - \underbrace{(1)}_{=\eta} = 0 \implies$ těleso je vázáno nepohyblivě.

4.3.2 Statický rozbor

Statickým rozbořem se rozumí posouzení statické určitosti/neurčitosti. Nejprve je nutno těleso/soustavu těles úplně uvolnit, to znamená vazby nahradit odpovídajícími silovými účinky.

Následuje sepsání rovnic statické rovnováhy. Ve vektorovém tvaru jsou to rovnice

$$\begin{aligned}\sum \vec{F} &= \vec{0}, \\ \sum \vec{M} &= \vec{0}.\end{aligned}$$

Vhodnější je ale skalární tvar, jak je možno vidět v (4.2a), (4.2b) a (4.2c).

$$\sum F_x = 0 : -F_{Ax} = 0, \quad (4.2a)$$

$$\sum F_z = 0 : -F_{Az} - F_B + F = 0, \quad (4.2b)$$

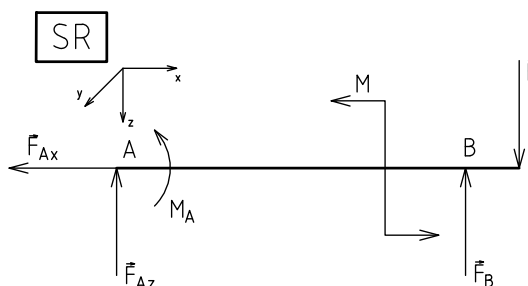
$$\sum M_{yA} = 0 : M_A + M + F_B(l - c) - Fl = 0. \quad (4.2c)$$

Následuje soupis množiny neznámých parametrů $NP = \{F_{Ax}; F_{Ay}; M_A; F_B\}$. Počet neznámých parametrů se označuje písmenem μ . Písmenem ν se označuje počet použitelných podmínek statické rovnováhy. Pro obecnou silovou soustavu v rovině $\nu = 3$ (2 podmínky silové a 1 momentová).

Stupeň statické neurčitosti se podle (4.3) vyjadřuje jako

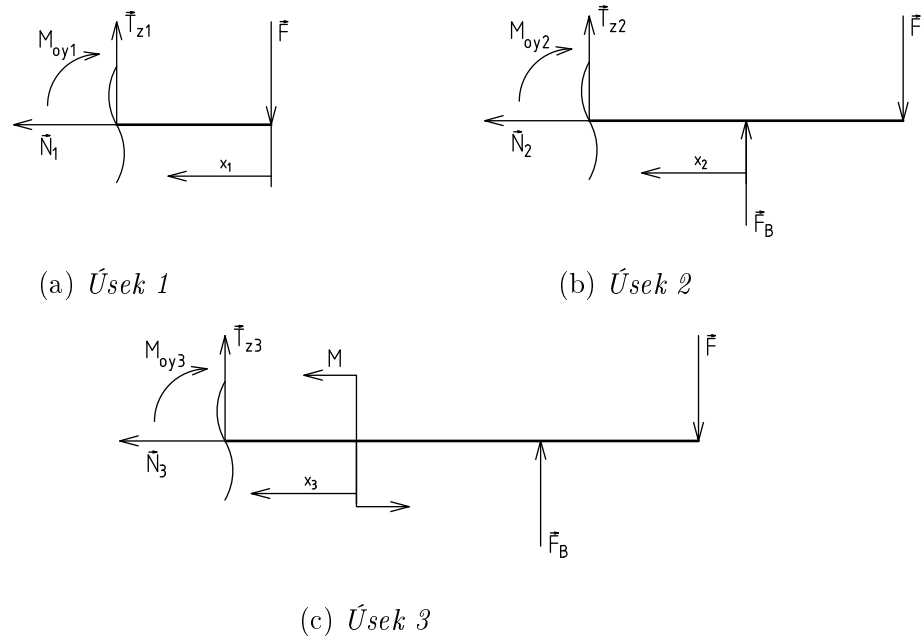
$$s = \mu - \nu. \quad (4.3)$$

Pro případ naší úlohy je $s = 4 - 3 = 1 \implies$ úloha je $1 \times$ staticky neurčitá.



Obrázek 4.3: Úplné uvolnění tělesa

4.3.3 VVÚ



Obrázek 4.4: VVÚ

Úseky jsou $x_1 \in \langle 0; c \rangle$, $x_2 \in \langle 0; d \rangle$ a $x_3 \in \langle 0; l_1 \rangle$.

$$N_1(x_1) = 0 \quad (4.4a)$$

$$T_{z1}(x_1) = F \quad (4.4b)$$

$$M_{oy1}(x_1) = -Fx_1 \quad (4.4c)$$

$$N_2(x_2) = 0 \quad (4.5a)$$

$$T_{z2}(x_2) = F - F_B \quad (4.5b)$$

$$M_{oy2}(x_2) = -F(c + x_2) + F_B x_2 \quad (4.5c)$$

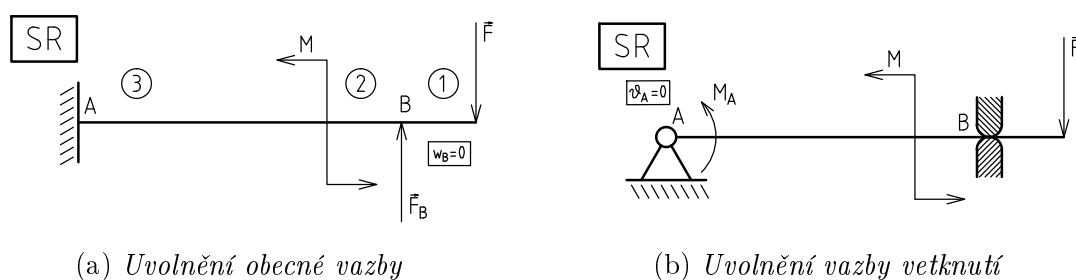
$$N_3(x_3) = 0 \quad (4.6a)$$

$$T_{z3}(x_3) = F - F_B \quad (4.6b)$$

$$M_{oy3}(x_3) = -F(c + d + x_3) + F_B(d + x_3) + M \quad (4.6c)$$

4.3.4 Řešení statické neurčitosti

Při řešení úloh staticky neurčitých je nutno provést tzv. částečné uvolnění. Částečným uvolněním se myslí uvolnění na hranici statické určitosti (při zaručení nepohyblivosti), uvolněné vazby nahradit odpovídajícími silovými účinky a sepsáním deformačních podmínek v místě uvolněných vazeb. Obecně může být více možností částečného uvolnění, jako např. v této úloze. V takovém případě je dobré zvolit možnost nejméně operativně náročnou pro řešení.



Obrázek 4.5: Možnosti částečného uvolnění

V této úloze si zvolíme možnost uvolnění podpory (obr. 4.5a). Uvolnění vazby vetknutí dle obr. 4.5b by vyžadovalo vyjádřit všechny stykové síly pomocí \vec{M}_A přes rovnice statické rovnováhy, protože VVÚ musí být jeho funkcí pro správné řešení pomocí Castiglianovy věty nebo diferenciální rovnice průhybové čáry.

My pro řešení stykové síly \vec{F}_B využijeme diferenciální rovnice průhybové čáry, protože pro další řešení úlohy ji potřebujeme pro zjištění maximálního průhybu. Musíme mít ale na paměti, že tento způsob řešení *neumožňuje* zahrnout vliv posouvající síly \vec{T}_z na výslednou deformaci. Ukážeme ale, jak se bude lišit styková síla \vec{F}_B , pokud pro její určení použijeme Castiglianovu větu, ve které zahrneme i vliv posouvající síly.

Diferenciální rovnice průhybové čáry

Využijeme zjednodušený tvar diferenciální rovnice podle rovnice (3.5). Jelikož ale máme 3 úseky, kde se mění ohybový moment \vec{M}_{oy} (E je po střednici konstantní a vrub jako skokovou změnu průřezu zanedbáme¹²), musíme mít 3 funkce, které budou spojité a zároveň budou mít spojitou první derivaci.

$$w_1''(x_1) = -\frac{M_{oy1}(x_1)}{EJ_y} = \frac{Fx_1}{EJ_y} \quad (4.7a)$$

$$w_2''(x_2) = -\frac{M_{oy2}(x_2)}{EJ_y} = \frac{F(x_2 + c) - F_B x_2}{EJ_y} \quad (4.7b)$$

$$w_3''(x_3) = -\frac{M_{oy3}(x_3)}{EJ_y} = \frac{F(c + d + x_3) - F_B(d + x_3) - M}{EJ_y} \quad (4.7c)$$

Integrací rovnic (4.7a), (4.7b) a (4.7c) získáme natočení (w').

$$w_1'(x_1) = \frac{Fx_1^2}{2EJ_y} + C_1 \quad (4.8a)$$

$$w_2'(x_2) = \frac{F\left(\frac{x_2^2}{2} + cx_2\right) - F_B \frac{x_2^2}{2}}{EJ_y} + C_3 \quad (4.8b)$$

$$w_3'(x_3) = \frac{F\left(x_3(c + d) + \frac{x_3^2}{2}\right) - F_B\left(dx_3 + \frac{x_3^2}{2}\right) - Mx_3}{EJ_y} + C_5 \quad (4.8c)$$

Další integrací rovnic (4.8a), (4.8b) a (4.8c) získáváme průhyb (w).

$$w_1(x_1) = \frac{Fx_1^3}{6EJ_y} + C_1 x_1 + C_2 \quad (4.9a)$$

$$w_2(x_2) = \frac{F\left(\frac{x_2^3}{6} + c\frac{x_2^2}{2}\right) - F_B \frac{x_2^3}{6}}{EJ_y} + C_3 x_2 + C_4 \quad (4.9b)$$

$$w_3(x_3) = \frac{F\left(\frac{x_3^2}{2}(c + d) + \frac{x_3^3}{6}\right) - F_B\left(d\frac{x_3^2}{2} + \frac{x_3^3}{6}\right) - M\frac{x_3^2}{2}}{EJ_y} + C_5 x_3 + C_6 \quad (4.9c)$$

¹²Vrub jako skoková změna průřezu a tím i průřezových charakteristik je zanedbatelný z hlediska deformace, ale nikoliv z hlediska napjatosti (dochází ke koncentraci v místě kořene vrubu a také vzniká trojosá napjatost).

Nyní musíme zavést okrajové podmínky zajišťující spojitost, spojitou derivaci a deformační podmínku (viz rovnice (4.10a) až (4.10f)).

$$w_1'(x_1 = c) = w_2'(x_2 = 0) \quad (4.10a)$$

$$w_1(x_1 = c) = w_2(x_2 = 0) = 0 \quad (4.10b)$$

$$w_2'(x_2 = d) = w_3'(x_3 = 0) \quad (4.10c)$$

$$w_2(x_2 = d) = w_3(x_3 = 0) \quad (4.10d)$$

$$w_3'(x_3 = l_1) = 0 \quad (4.10e)$$

$$w_3(x_3 = l_1) = 0 \quad (4.10f)$$

Dosazením okrajových podmínek do rovnic natočení a průhybu získáváme soustavu 7 rovnic o 7 neznámých, kterou můžeme její úpravou převést na maticový zápis

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}.$$

Tento maticový zápis je již snadné řešit v programech jako Octave nebo Matlab. Výsledná soustav rovnic je

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & \frac{d^2}{2} \frac{1}{EJ_y} \\ 0 & 0 & -d & -1 & 0 & 1 & \frac{d^3}{6} \frac{1}{EJ_y} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & \frac{1}{EJ_y} \left(\frac{l_1^2}{2} + dl_1 \right) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -l_1 & -1 & \frac{1}{EJ_y} \left(\frac{l_1^3}{6} + d \frac{l_1^2}{2} \right) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \\ F_B \end{pmatrix} = \frac{1}{EJ_y} \begin{pmatrix} F \frac{c^2}{2} \\ F \frac{c^3}{6} \\ 0 \\ F \left(\frac{d^2}{2} + cd \right) \\ F \left(\frac{d^3}{6} + c \frac{d^2}{2} \right) \\ F \left(l_1 (c + d) + \frac{l_1^2}{2} \right) - Ml_1 \\ F \left(\frac{l_1^2}{2} (c + d) + \frac{l_1^3}{6} \right) - M \frac{l_1^2}{2} \end{pmatrix}. \quad (4.11)$$

Vektor neznámých je

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -0,006\ 65 \\ 0,001\ 139 \\ -0,003\ 79 \\ 0 \\ 0,006\ 808 \\ 0,000\ 351 \\ 136,914 \end{pmatrix}.$$

Při řešení úlohy pomocí diferenciální rovnice průhybové čáry je $F_B = 136,914\text{ N}$.

Castiglianova věta

Pro řešení statické neurčitosti využijeme Castiglianovu větu ve tvaru

$$w_B = \frac{\partial W}{\partial F_B} = \int_{\gamma} \frac{M_{oy}}{EJ_y} \frac{\partial M_{oy}}{\partial F_B} dx + \int_{\gamma} \frac{\beta T_z}{GS} \frac{\partial T_z}{\partial F_B} dx = 0. \quad (4.12)$$

Princip řešení je možno vidět v podkapitole [A.1](#). Dosazením do vztahu ([A.1](#)) na str. [98](#) získáváme, že $F_B = 136,9256\text{ N}$.

4.3.5 Maximální průhyb

Diferenciální rovnice průhybové čáry

Hledání maximálního průhybu spočívá v hledání lokálních a globálních extrémů funkcí $w_i(x_i)$. Lokální extrém nastává tehdy, pokud je tečna k funkci rovnoběžná s osou x , matematicky zapsáno

$$\frac{dw_i}{dx_i} = 0. \quad (4.13)$$

Jelikož první derivace průhybu je natočení, hledáme místa s nulovým natočením. Musí ale platit, že stacionární bod¹³ musí patřit do definičního oboru funkce w' . Pokud funkce w nemá na daném oboru lokální extrém, maximální průhyb na daném úseku je v jednom z krajních bodů. Maximální průhyb na celém prutu najdeme jako

$$w_{\max} = \max\{|w_i|\}, \text{ kde } i = 1 \dots n. \quad (4.14)$$

Maximální průhyb prutu je $w_{\max} = 1,276\,095$ mm ve vzdálenosti $x \approx 697,8$ mm od místa vetknutí.

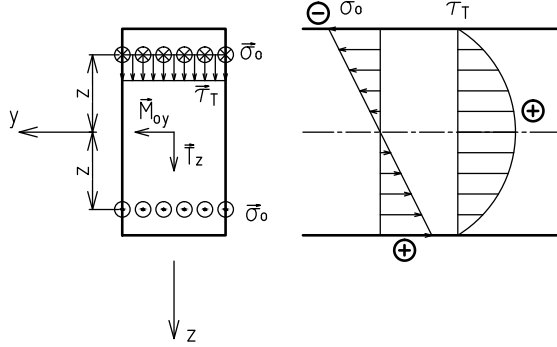
Castiglianova věta

Maximální průhyb lze řešit také pomocí Castiglianovy věty. Využijeme poznatku z předchozího řešení, že maximální průhyb se nachází mezi místem působení silové dvojice \vec{M} a vazbou vetknutí. Do tohoto úseku zavedeme doplňkovou sílu \vec{F}_{dop} na neznámém rameni x (viz. obr. A.1 na str. 98). Cílem je vyjádřit průhyb w jako funkci souřadnice x . Následně hledáme maximum této funkce.

Předpis výsledné funkce je dán vztahem (A.4) na str. 99. Maximum této funkce je $w_{\max} = w(x = 0,3022) = 1,277\,203$. Maximální průhyb je tedy 1,277 203 mm.

¹³Bod, kde první derivace nabývá nulové hodnoty.

4.3.6 Bezpečnost



Obrázek 4.6: Průběh napětí

$$\mathbf{T}_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau_{zx} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\sigma_o = \sigma_x = \frac{M_{oy}}{J_y} z \quad (4.15a)$$

$$\tau_{T_z} = \tau_{xz} = \frac{U_{y\Psi_1} T_z}{b(z) J_y} \quad (4.15b)$$

Ohybové napětí má po výšce lineární průběh¹⁵ a jeho maximum se nachází v nejvzdálenějším místě od neutrální osy (pro případ obdélníku $z = \pm \frac{h}{2}$). Na neutrální ose, jak již název vypovídá, je toto napětí nulové.

Naopak smykové napětí od posouvající síly má průběh kvadratický a po výšce má extrém. Pro obdélníkový příčný průřez je

$$J_y = \frac{BH^3}{12},$$

$$b(z) = B,$$

$$U_{y\Psi_1} = \frac{B}{2} \left(\frac{H^2}{4} - z^2 \right)$$

dle vztahu (A.34) na str. 111. Dosazením těchto vztahu do (4.15b) získáváme

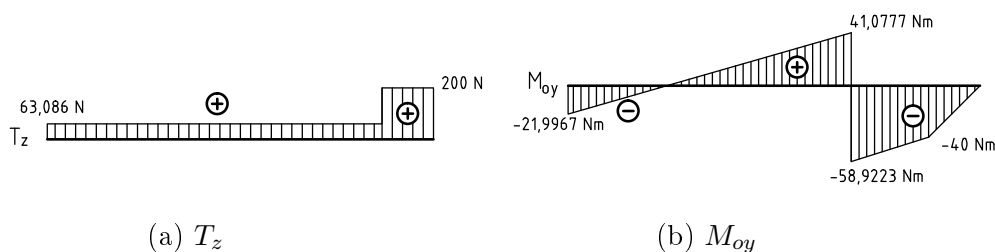
$$\tau_{T_z} = \frac{6T_z}{H^3 B} \left(\frac{H^2}{4} - z^2 \right). \quad (4.16)$$

¹⁴ $T_z(x) = \frac{dM_{oy}(x)}{dx}$ (viz Schwendlerovy věty).

¹⁵Ohybové napětí nemá po výšce lokální extrém.

Z rovnice (4.16) je zřejmé, že extrém se nachází v $z = 0$ ¹⁶ a jeho hodnota je

$$\tau_{T_z, \max} = \frac{3 T_z}{2 S}. \quad (4.17)$$



Obrázek 4.7: Průběhy VVÚ-Příklad 1

Z obr. 4.7a je patrné, že $T_{z, \max} = 200$ N. Z toho vyplývá

$$\tau_{T_z, \max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{200}{10 \cdot 20} = 1,2 \text{ MPa.}$$

Maximální ohybové napětí je v místě, kde je největší ohybový moment. Z obr. 4.7b vyplývá, že ohybový moment M_{Oy} nabývá maxima v okolí silové dvojice \vec{M} ¹⁷. Maximální napětí je tedy

$$\sigma_{M_{Oy}, \max} = \frac{-58,9258 \cdot 10^3}{\frac{10 \cdot 20^3}{12}} \cdot \frac{20}{2} = 88,4 \text{ MPa.}$$

Správně bychom měli uvést $\pm 88,3887$ MPa, protože u ohýbaných prutů jsou jedna vlákna natahována a druhá stlačována. Pokud prut není zároveň namáhán na tah/tlak, hodnoty jsou stejné a budeme uvádět pouze kladné hodnoty napětí¹⁸.

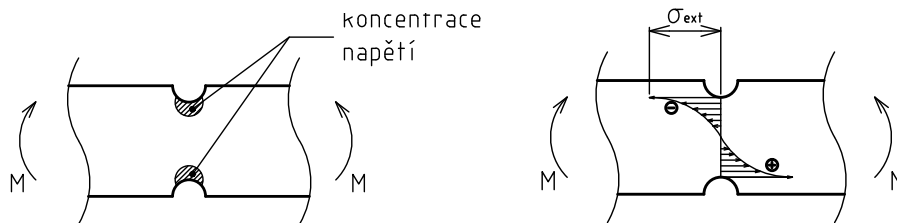
¹⁶Extrém: $\frac{d\tau_{T_z}}{dz} = 0$.

¹⁷ \vec{F} a \vec{M} jsou pouze staticky ekvivalentní náhrady. Ve skutečnosti bude ale zatížení realizováno např. kontaktním tlakem, takže změny VVÚ nebudou skokové.

¹⁸Tahové napětí je důležité pro další druhy mezních stavů, např. u posuzování stability trhlin nebo únavu.

Ve vrubu ale dochází ke koncentraci napětí a tak se může stát, že napětí v kořeni vrubu dosáhne maxima i při nižších hodnotách VVÚ. Proto je nutné vruby nutno kontrolovat z hlediska napjatosti. Vruby mohou být:

1. **konstrukční**¹⁹: osazení, drážka pro pero, drážka pro pojistný kroužek, zápich,
2. **technologické**²⁰: zápich, drážka závitů,
3. **materiálové**²¹: hranice zrn, mikrotrhliny v matrici (např. po předchozím tváření).



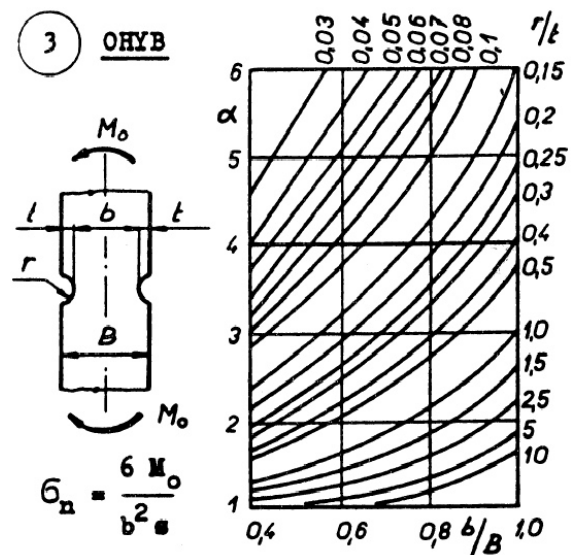
Obrázek 4.8: Koncentrace napětí v kořeni vrubu

Extrémní napětí σ_{ext} v místě vrubu se určí dle (4.18) jako

$$\sigma_{\text{ext}} = \alpha \sigma_{\text{nom}}. \quad (4.18)$$

α je součinitel koncentrace napětí v místě vrubu. Hodnoty součinitele α byly zjištěny experimentálně pomocí fotoelasticimetrie a jejich hodnoty je možné najít v různých tabulkách nebo grafech, společně s výpočtem nominálního napětí (např. viz obr. 4.9).

$$\left. \begin{array}{l} \frac{b}{B} = \frac{14}{20} = 0,7 \\ \frac{r}{t} = \frac{3}{3} = 1 \end{array} \right\} \alpha = 1,9$$



Obrázek 4.9: Nomogram (převzato z [2])

¹⁹Voleny z důvodu funkčnosti součásti.

²⁰Voleny z důvodu výroby součásti.

²¹Nežádoucí, velice těžko se ovlivňují.

Z hodnoty l_v určíme ohybový moment v místě vrubu ze vztahu (4.6c) jako

$$M_{oy,vrub} = M_{oy3}(x_3 = l_1 - l_v) = 28,4628 \text{ Nm.}$$

Extrémní napětí je pak dle (4.18)

$$\sigma_{\text{ext}} = 1,9 \cdot \frac{6 \cdot 28,4628 \cdot 10^3}{14^2 \cdot 10} = 1,9 \cdot 87,131 = 165,55 \text{ MPa.}$$

Bezpečnost vůči MSP se určí dle (4.19) jako

$$k_K = \frac{\sigma_{\text{dov}}}{\sigma_{\text{max}}} = \frac{\sigma_K}{\sigma_{\text{max}}}. \quad (4.19)$$

Dosazením meze kluzu σ_K a vypočteného maximálního napětí získáváme, že

$$k_K = \frac{\sigma_K}{\sigma_{\text{max}}} = \frac{235}{165,55} = 1,42.$$

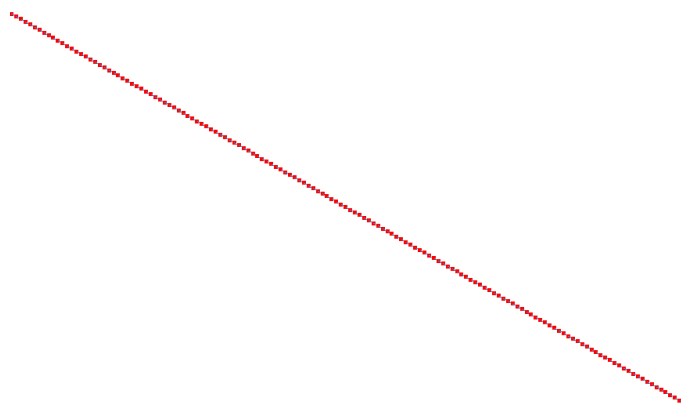
4.4 Numerické řešení

Řešení úlohy bylo rozděleno do dvou modelů. Jeden model, tvořen pouze prutovými prvky (viz obr. 4.10), byl vytvořen pro zjištění maximálního průhybu tělesa. Sestavený model umožňuje i znázornění průběhu VVÚ po střednici (SIEF_NOEU), výpočet stykových sil (REAC_NODA), průběh napětí od jednotlivých složek VVÚ (SIPO_NOEU). Pomocí příkazu POST_RELEVE_T se dají důležité výsledky (reakční síly, extrémy apod.) vyextrahovat z výsledkové souboru *.rmed a vypsát do tabulky do souboru *.resu pomocí příkazu IMPR_TABLE.

Okrajové podmínky podmínky se zadávají v AFF_CHAR_MECA a to:

- deformační: pomocí příkazu DDL_IMPO,
- silové: pomocí příkazu FORCE_NODALE.

Okrajové podmínky je nutno přiřadit předem připraveným skupinám sítě.



Obrázek 4.10: Příklad 1-sítě (prutový model)²²

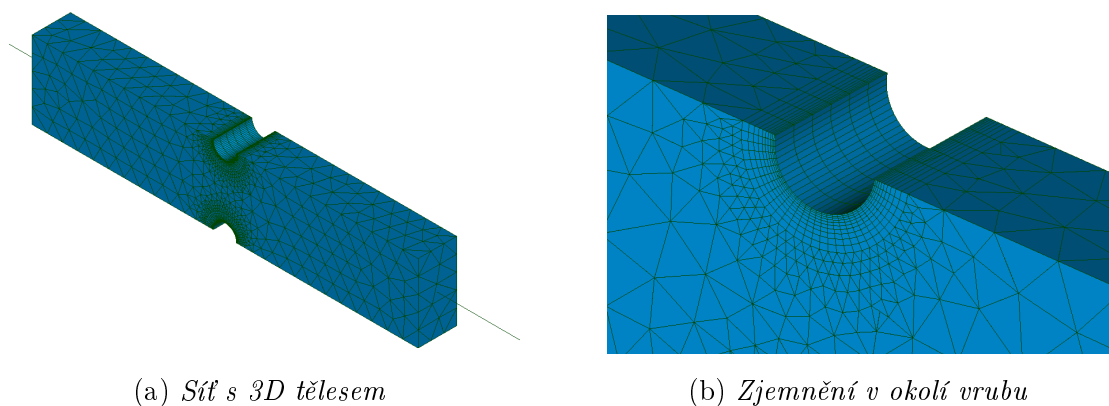
Příčný průřez se definuje v AFFE_CARA_ELEM. Code_Aster má v možnosti výběru pouze obdélníkový a kruhový příčný průřez, případně jejich duté varianty. Pro jiný průřez je nutno zadat jeho charakteristiky (plocha, statické a kvadratické momenty atd.).

²²V Salome Meca je dle dostupné dokumentace možné zobrazit příčný průřez prutu nastavením v modulu *Eficas*. Zobrazení příčného průřezu se v této práci nepovedlo, proto je viditelná u prutových prvků pouze střednicová křivka. Červené body v obr. 4.10 jsou jednotlivé uzly sítě.

Materiál se definuje v `DEFI_MATERIAU`, pro elastický izotropní materiál záložka `ELAS`. Síť a modelu (`AFFE_MODELE`) se materiál přiřadí pomocí příkazu `AFFE_MATERIAU`.

Veškeré vstupy (model, okrajové podmínky, materiál, případně příčný průřez) se přiřadí do `MECA_STATIQUE`, kde se sestaví a vyřeší soustava rovnic $\mathbf{Ku} = \mathbf{F}$. Pomocí tohoto modelu ale nešlo spočítat maximální napětí v kořeni vrubu.

Proto byl vytvořen model druhý, tvořený kombinací prutových prvků a prostorových prvků (viz obr. 4.11). Prostorové prvky tvoří kus tělesa, ve kterém je prokreslen koncentrátor napětí. Byly vytvořeny 2 samostatné sítě, které byly následně spojeny pomocí `LIAISON_SOLIDE` v definovaných skupinách.

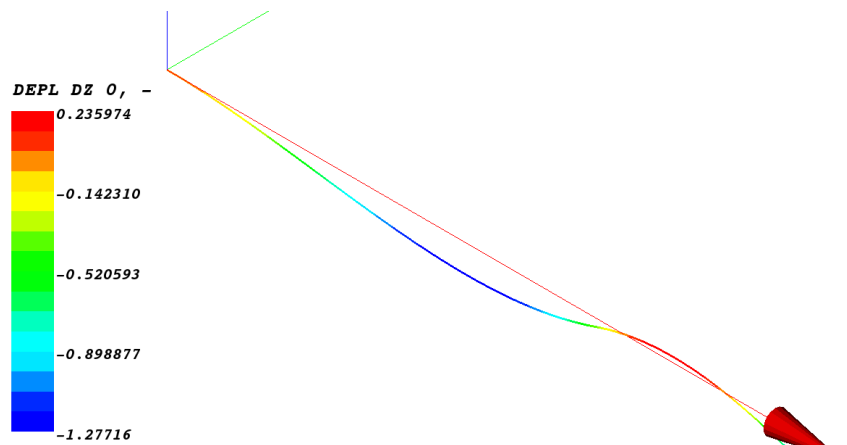


Obrázek 4.11: Síť submodelu-příklad 1

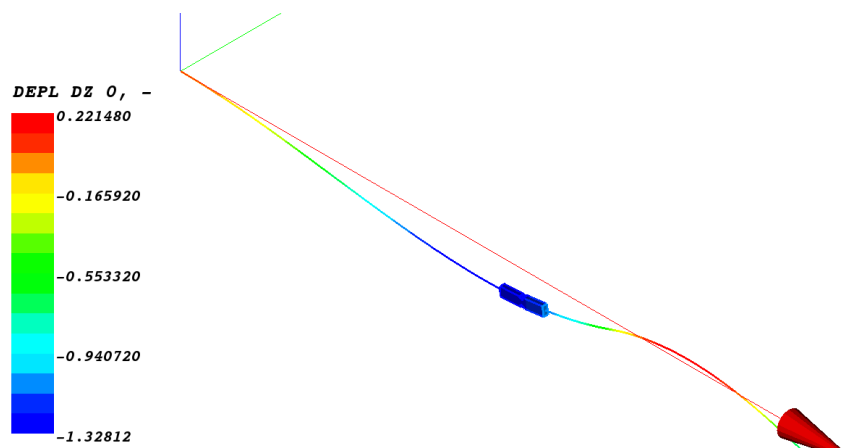
Deformační parametry prutových prvků (posuvy a natočení) se tak přenesly do 3D prvků. Tento krok ale vedl k ovlivnění napjatosti v blízkém okolí spojení (viz Saint-Venantův princip na str. 14). Za předpokladu, že vliv spoje na deformaci je zanedbatelný, tento model může sloužit k posouzení vlivu vrubu na výsledný průhyb²³. Síť prostorového tělesa je tvořena primárně tetraedry (viz obr. 4.11a). Jelikož v místě vrubu očekáváme koncentraci napětí, je nutno síť zjemnit. Zároveň využijeme funkci *Partition* v modulu *Geometry* k vytvoření části válcového výřezu. Výsledkem je mappovaná hexaedrická síť, u které jsme nastavili zmenšující se tloušťku prvku směrem ke kořeni vrubu²⁴ (viz obr. 4.11b).

²³Vrub způsobuje skokovou změnu konstrukční tuhosti, která je určena průřezovými charakteristikami S , J_y apod.

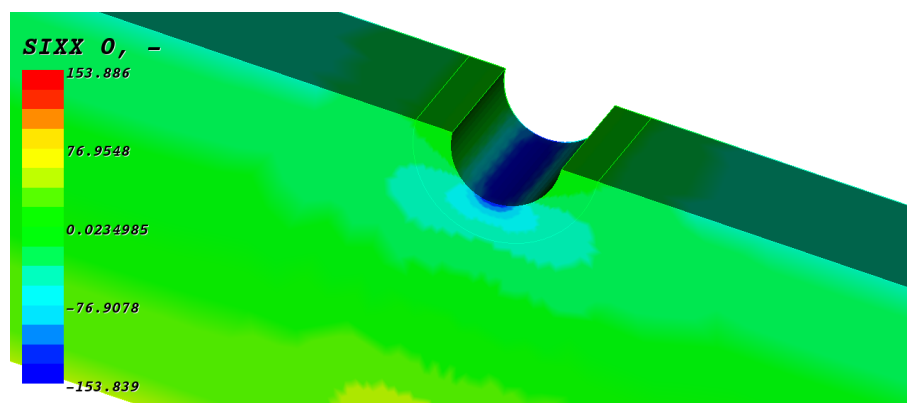
²⁴V programu Ansys se toto označuje jako tzv. BIAS.



(a) Deformovaný tvar (prutový model)-DZ [mm] (50× zvětšeno)



(b) Deformovaný tvar (submodel)-DZ [mm] (50× zvětšeno)

(c) Koncentrace napětí ve vrubu- σ_x [MPa]

Obrázek 4.12: Příklad 1-numerickej výsledky

4.5 Zhodnocení výsledků

Tabulka 4.1: *Shrnutí výsledků příkladu 1*

		F_B [N]	w_{\max} [mm]	σ_{\max} [MPa]	
Analytické řešení	Difer. rov. průh. čáry	136,914	1,276 095	165,549	
	Castiglianova věta	136,9256	1,277 203		
Numerické řešení	Salome	Prutový model	136,9256	1,277 16	87,437
	Meca		Submodel	136,653	1,328 12
	Ansyes	Prutový model	136,925	1,277 153	88,384
	Workbench		Submodel	136,6	1,338 281

Při pohledu na tab. 4.1 zjišťujeme, že výsledky obou programů jsou si blízké (odchylka do 5 %). Zároveň odchylky numerické metody od analytických metod PP jsou rovněž malé (do 8 %). Je nutno ovšem podotknout, že na deformačně-napěťovou charakteristiku součásti budou mít vliv rozměrové tolerance součásti a zároveň jakost materiálu.

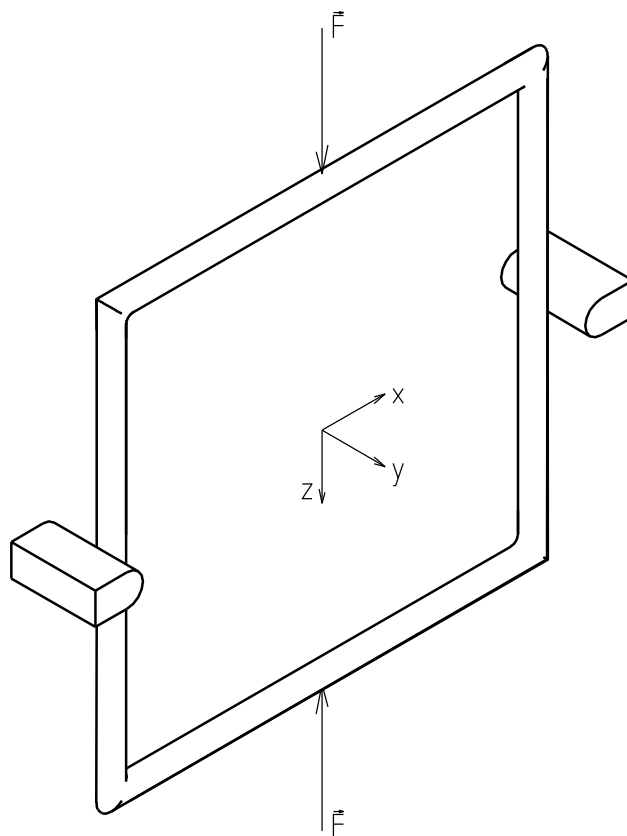
Z výsledků napětí po délce prutu je dále patrné, že ve vrubu při téměř třetinové velikosti ohybového momentu \vec{M}_{oy} vůči jeho maximu dosáhlo napětí téměř dvojnásobné hodnoty oproti místu s maximálním ohybovým momentem. Vliv výskytu vrubu je na maximální průhyb a velikost stykových sil podstatně menší než na napjatost.

Bezpečnost vůči MSP je $k_K = 1,42$.

5 Příklad 2

5.1 Zadání

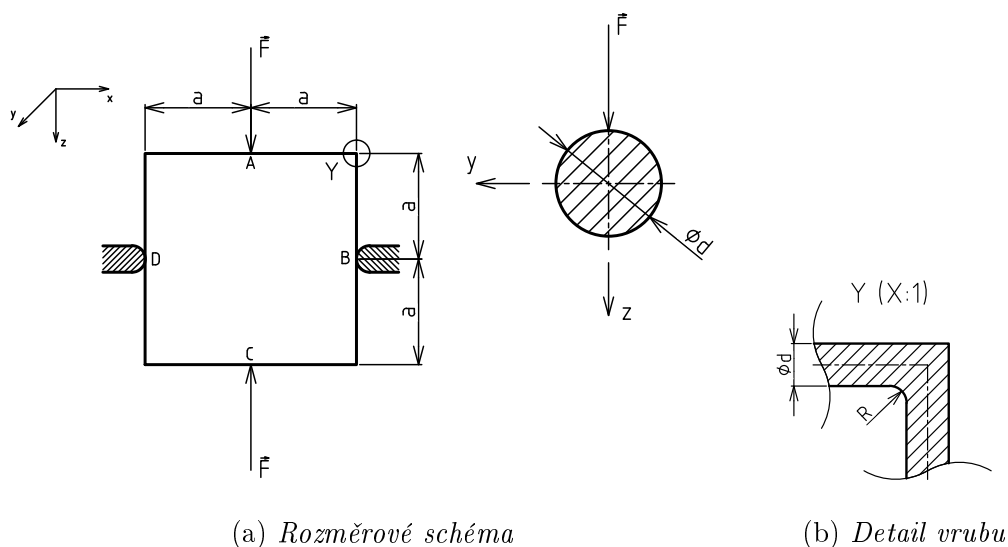
U součástky dle obr. 5.1 zhodnoťte bezpečnost vzhledem k meznímu stavu pružnosti. Dále určete bezpečnost, jestliže maximální dovolený průhyb je 20 mm. Součástka je vyrobena z oceli 11 523 dle ČSN²⁵, předpokládejte materiál v tvárném stavu. Vlastní tíhu součásti neuvažujte.



Obrázek 5.1: Zadání příkladu 2-3D pohled

Rozměry určíme z obr. 5.2a na str. 40. Součást je opatřena vrubem, jehož geometrie je na obr. 5.2b. Materiálové charakteristiky určíme z materiálového listu.

²⁵S355JR dle ISO.


 Obrázek 5.2: *Příklad 2*

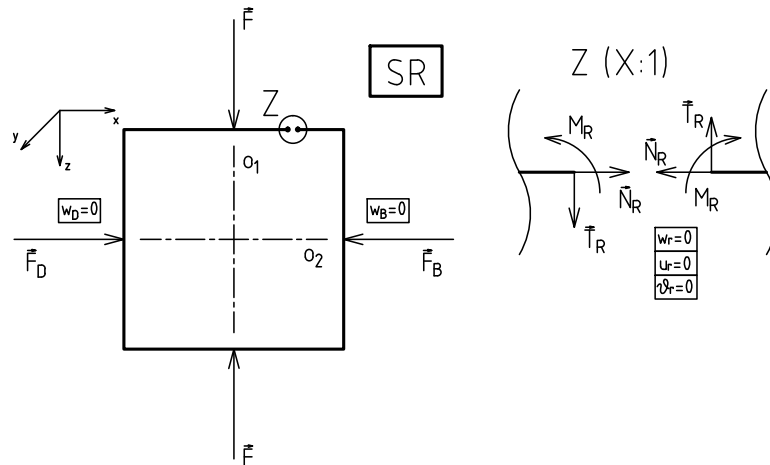
$a = 0,8 \text{ m}$	$d = 20 \text{ mm}$	$R = 4 \text{ mm}$	$F = 600 \text{ N}$
$E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$	$\mu = 0,3$	$\sigma_K = 355 \text{ MPa}$	
$w_{\text{dov}} = 20 \text{ mm}$	$k_K = ?$	$k_D = ?$	

5.2 Rozbor úlohy

Jedná se o uzavřený prutový rám (zatížení i vazby leží ve stejné rovině jako osy prutů). Z hlediska vazeb a zatížení je možno úlohu řešit jako rovinnou. Rám je vázán dvěma obecnými vazbami v bodech B a D. Rám je zatížen v bodech A a C silou \vec{F} (síly leží na společné nositelce).

5.3 Analytické řešení

5.3.1 Statický rozbor



Obrázek 5.3: Úplné uvolnění

Volný²⁶ rovinný uzavřený rám má stupeň statické neurčitosti $s = 3$. Jelikož je ale rám ještě vázaný, existují další neznámé parametry od příslušných vazeb. Při pohledu na obr. 5.3 je zřejmé, že $NP = \{N_R; T_R; M_R; F_B; F_D\}$, tedy $\mu = 5$.

Jediná netriviální²⁷ podmínka statické rovnováhy je silová v ose x

$$\sum F_x = 0 : F_B - F_D = 0, \quad (5.1)$$

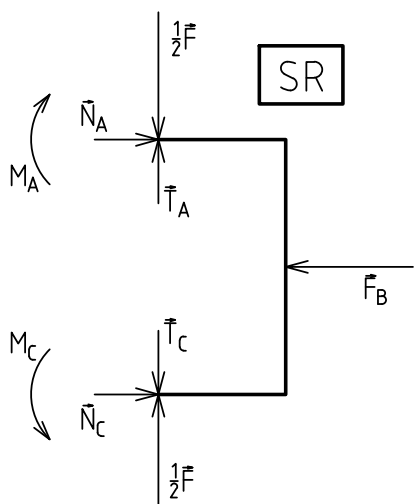
tedy $\nu = 1$.

Stupeň statické určitosti je dle (4.3) na str. 24 $s = 5 - 1 = 4 \implies$ úloha je $4 \times$ staticky neurčitá.

²⁶Bez vazeb, ale zatížený tak, aby byl nepohyblivý.

²⁷Triviální podmínka: $0 = 0$.

Využití symetrie


 Obrázek 5.4: Využití osy symetrie o_1

S využitím osy symetrie o_2 můžeme říct, že platí

$$\begin{aligned} T_B &= 0, \\ M_A &= M_C, \\ N_A &= N_C. \end{aligned}$$

Pro uvolněný prut dle obr. 5.5 můžeme sepsat silové rovnice SR

$$\sum F_x = 0 : N_A - \frac{F_B}{2} = 0, \quad (5.3a)$$

$$\sum F_z = 0 : -N_B + \frac{F}{2} = 0. \quad (5.3b)$$

Body na ose symetrie mají omezeno natočení ϑ kolem osy y_L a posuv u v ose x_L . Bod B má navíc zamezen posuv w ve směru osy z_L díky podpoře²⁹. Tyto deformační parametry splňuje vazba pevná (vetknutí).

Díky využití symetrie se snížil výpočtový stupeň statické neurčitosti na 2.

²⁸ \vec{T}_z, \vec{M}_k .

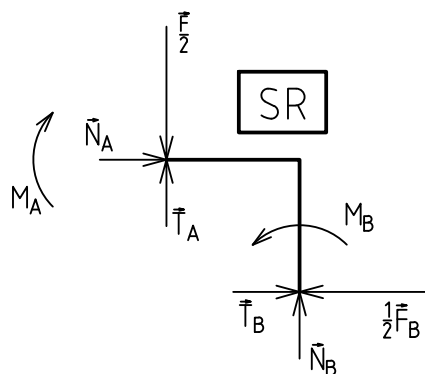
²⁹ $x_L y_L z_L$ -lokální souřadný systém VVÚ.

Úloha má 2 osy symetrie (viz obr. 5.2a). Využijeme poznatku, že na ose symetrie jsou antimetrické²⁸ složky VVÚ nulové. S využitím osy o_1 se zatěžující síla \vec{F} rozdělila na polovinu. Díky nulovým antimetrickým složkám na ose symetrie platí, že

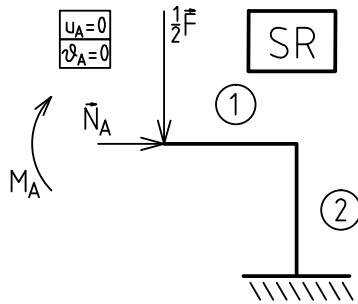
$$T_A = T_C = 0.$$

Můžeme opět použít silovou podmínku SR v ose x ve tvaru

$$\sum F_x = 0 : N_A + N_C - F_B = 0. \quad (5.2)$$


 Obrázek 5.5: Využití osy symetrie o_2

5.3.2 Řešení statické neurčitosti



Obrázek 5.6: Úloha 2-částičné uvolnění

Budeme řešit tedy $\frac{1}{4}$ prutu, vázaného a zatíženého dle obr. 5.6. K řešení využijeme Castiglianovu větu, ale nyní již budeme vliv normálové a posouvající síly považovat za nepodstatný (viz tab. 4.1). Deformační podmínky jsou

$$u_A = \frac{\partial W}{\partial N_A} = 0, \quad (5.4a)$$

$$v_A = \frac{\partial W}{\partial M_A} = 0. \quad (5.4b)$$

VVÚ

$$N_1(x_1) = -N_A, \quad (5.5a) \quad N_2(x_2) = -\frac{F}{2}, \quad (5.6a)$$

$$T_{z1}(x_1) = -\frac{F}{2}, \quad (5.5b) \quad T_{z2}(x_2) = N_A, \quad (5.6b)$$

$$M_{oy1}(x_1) = M_A - \frac{F}{2}x_1, \quad (5.5c) \quad M_{oy2}(x_2) = M_A - \frac{F}{2}a + N_Ax_2, \quad (5.6c)$$

kde $x_1 \in \langle 0; a \rangle$.

kde $x_2 \in \langle 0; a \rangle$.

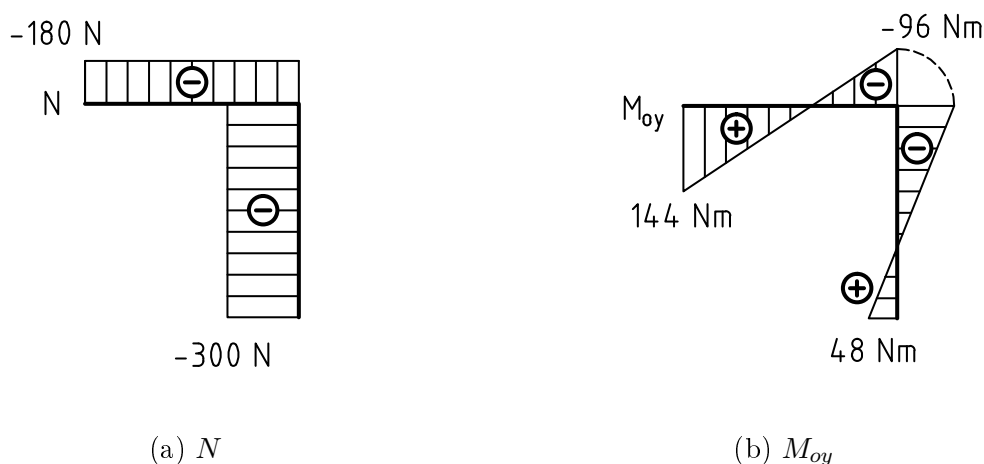
Řešením deformačních podmínek (5.4a) a (5.4b) (viz podkapitola A.2) získáme soustavu 2 rovnic o 2 neznámých, kterou zapíšeme ve tvaru $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Výsledná soustava rovnic je dle (A.7) na str. 100.

$$\begin{pmatrix} \frac{a}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{a}{2} & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} N_A \\ M_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{Fa}{4} \\ \frac{3Fa}{4} \end{pmatrix}. \quad (5.7)$$

Řešením této soustavy je $\mathbf{x} = \left(\frac{3F}{10}; \frac{3Fa}{10}\right)^T = (180; 144)^T$, tj. $N_A = 180 \text{ N}$, $M_A = 144 \text{ Nm}$.

5.3.3 Bezpečnost

Z hlediska napjatosti se jedná o stejný případ jako v kapitole 4, tj. vzniká normálové napětí od ohybového momentu \vec{M}_o , zde je navíc ještě složka normálového napětí od normálové síly \vec{N} . Navíc vzniká i smykové napětí od posouvající síly \vec{T} , které je ale u dlouhých štíhlých prutů vůči napětí od \vec{M}_o zanedbatelné (viz 4.3.6). Dále budeme tedy uvažovat jen \vec{N} a \vec{M}_o jako složky VVÚ, jejich průběhy po střednici je možno vidět na obr. 5.7a a 5.7b.



Obrázek 5.7: Průběhy VVÚ-příklad 2

Normálové napětí σ_x se vypočítá dle vztahu (5.8) jako

$$\sigma_x = \sigma_N + \sigma_{M_{oy}} = \frac{N}{S} + \frac{M_{oy}}{J_y} z. \quad (5.8)$$

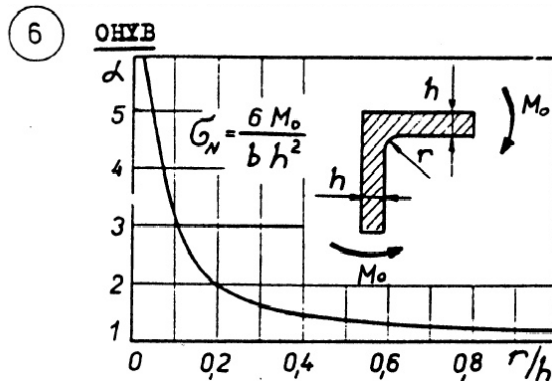
Z obr. 5.7b je patrné, že maximum \vec{M}_{oy} je v místě působení síly \vec{F} . Normálová síla \vec{N} má po částech konstantní průběh. Pro kruh platí, že

$$S = \frac{\pi d^2}{4},$$

$$J_y = \frac{\pi d^4}{64}.$$

Maximální napětí je na povrchu, pak $z = \pm \frac{d}{2}$. Po dosazení maximálních hodnot příslušných VVÚ a průřezových charakteristik získáváme

$$\sigma_{\max,1} = \frac{4 \cdot (-180)}{\pi \cdot 20^2} \pm \frac{32 \cdot 144 \cdot 10^3}{\pi \cdot 20^3} = -183,92 \text{ MPa.}$$



Obrázek 5.8: Nomogram 2 (převzato z [2])

Druhý nebezpečným místem může být okolí vrubu v rohu rámu. V místě vrubu opět dochází ke koncentraci napětí, kde maximální hodnotu napětí lze vypočítat dle rovnice (4.18) na str. 33. Hodnota součinitele tvaru α je

$$\alpha = 2 \text{ pro } \frac{r}{h} = \frac{4}{20} = 0,2.$$

Jelikož vztah pro nominální napětí v nomogramu je pro obdélníkový průřez a rám má průřez kruhový, musíme vztah upravit na

$$\sigma_{\text{nom}} = \frac{32M_o}{\pi d^3}.$$

Hodnota napětí ve vrubu je tedy

$$\sigma_{\text{ext}} = \alpha \frac{32M_{oy1}(x_1 = a)}{\pi d^3} = 2 \cdot \frac{32 \cdot (-96 \cdot 10^3)}{\pi \cdot 20^3} = -244,46 \text{ MPa}.$$

Bezpečnost vůči MSP je tedy

$$k_K = \frac{\sigma_K}{\sigma_{\text{max}}} = \frac{355}{244,396} = 1,45.$$

Bezpečnost vůči meznímu stavu deformace (MSD) se vypočte jako

$$k_D = \frac{w_{\text{dov}}}{w_{\text{max}}}, \quad (5.9)$$

kde w_{dov} je maximální přípustná deformace tělesa.

Ze způsobu zatížení vyplývá, že maximální průhyb je v místě působení síly \vec{F} . Jeho hodnotu zjistíme pomocí Castiglianovy jako

$$w_A = \frac{\partial W}{\partial \frac{F}{2}}.$$

Výpočet maximálního průhybu je v podkapitole [A.2.2](#) na str. [102](#) a jeho hodnota je určena vztahem [\(A.8\)](#)

$$w_{\text{max}} = 12,436 \text{ mm.}$$

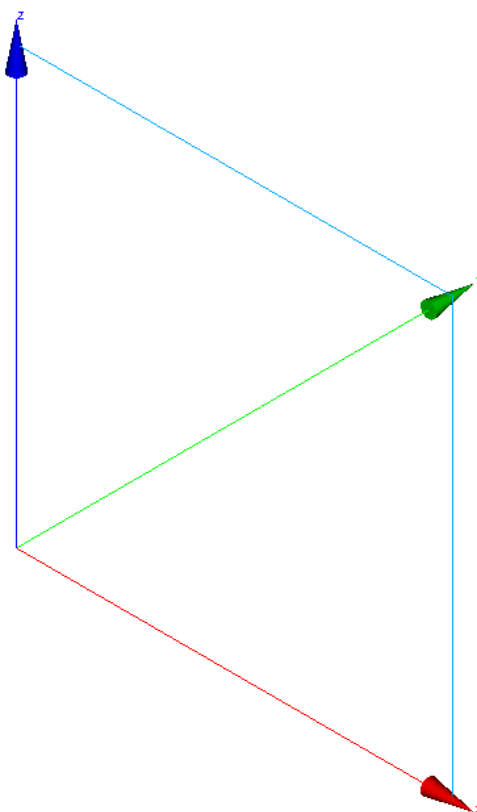
Dosazením do rovnice [\(5.9\)](#) získáváme bezpečnost

$$k_D = \frac{20}{12,436} = 1,61.$$

5.4 Numerické řešení

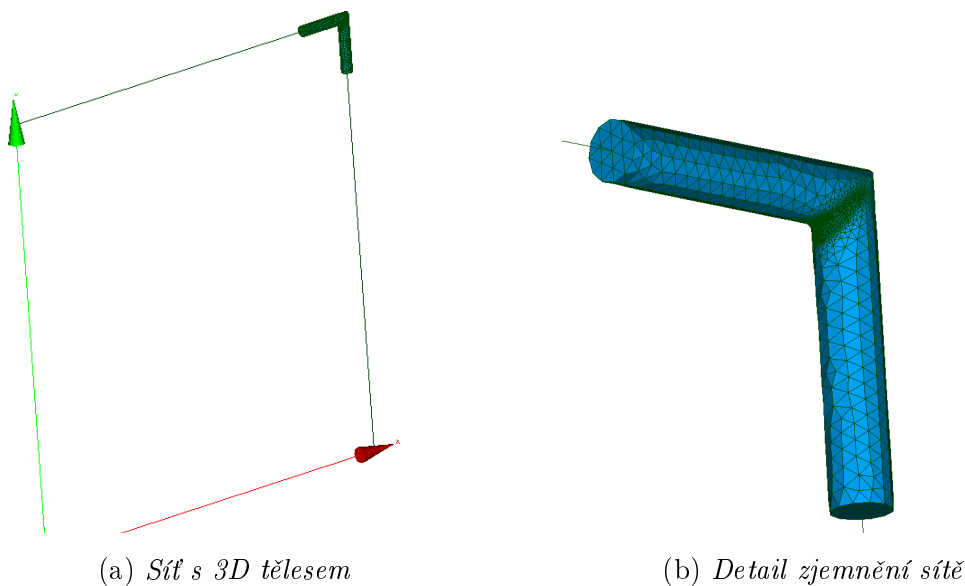
Stejně jako v předchozím případě vytvoříme 2 modely. Zde ale využijeme symetrie podle 2 os, takže budeme počítat pouze $1/4$ rámu a zavedeme okrajové podmínky odpovídající symetrii. Zatěžující síla \vec{F} bude poloviční díky využití symetrie.

Prutový model bude tvořen 2 pruty kruhového průřezu v rovině xz (viz obr. 5.9) Na nich opět vykreslíme průběhy VVÚ po střednici, průběh napětí podél střednice a maximální průhyb. Opět zjistíme síly ve vazbách a vytiskneme je do *.resu. Postup je analogický jako v příkladu 1 (viz 4.4).



Obrázek 5.9: *Příklad 2-sít (prutový model)*

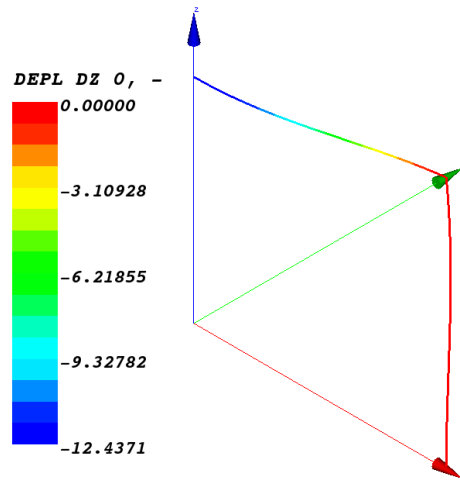
Jelikož v rohu, kde se pruty stýkají, je potenciální koncentrátor napětí, vložíme zde 3D těleso (viz obr. 5.10a). Jelikož geometrie je složitější (kruhový průřez, zalomení do 90° a zaoblení), využijeme možnosti importu geometrie ze souboru typu *.step z CAD systému, konkrétně SolidWorks³⁰. Napojení provedeme opět pomocí LIAISON_SOLIDE v dostatečné vzdálenosti, aby nedošlo k ovlivnění napjatosti v místě vrubu.



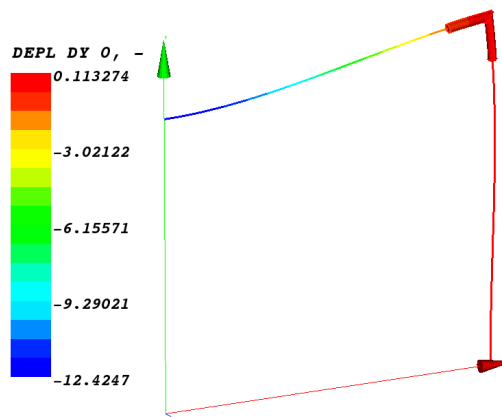
Obrázek 5.10: *Příklad 2-síť (submodel)*

Jelikož geometrie je velice složitá, síť je tvořena čistě tetraedry. Aby síť v místě zaoblení nebyla příliš hrubá, využijeme možnosti Local sizing v síťovacím algoritmu a aplikujeme tuto metodu na plochu tvořící zaoblení (viz obr. 5.10b).

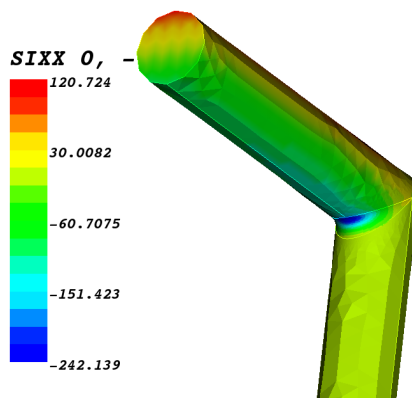
³⁰Jelikož geometrie v CAD systému byla vytvořena v rovině xy , model bude umístěn celý v této rovině.



(a) Deformovaný tvar (prutový model)-DZ [mm] (10× zvětšeno)



(b) Deformovaný tvar (submodel)-DY [mm] (10× zvětšeno)



(c) Koncentrace napětí- σ_x [MPa]

Obrázek 5.11: Příklad 2-numerickej výsledky

5.5 Zhodnocení výsledků

Tabulka 5.1: *Shrnutí výsledků příkladu 2*

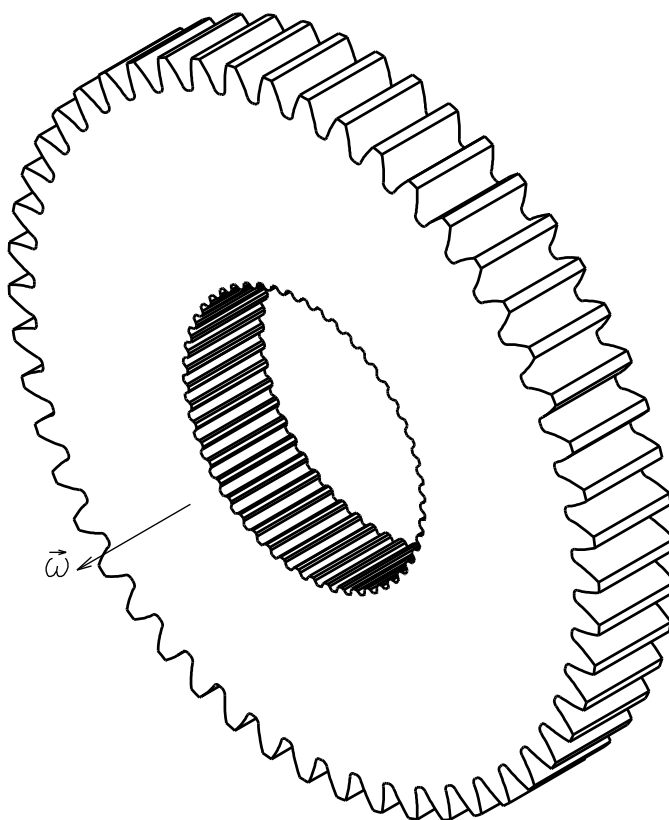
		N_A [N]	M_A [Nm]	w_{\max} [mm]	σ_{\max} [MPa]	
Analytické řešení	Castiglianova věta	180	144	12,436	-244,39	
Numerické řešení	Salome	Prutový model	179,864	144,03	12,4371	-183,381
	Meca	Submodel	180,006	144,04	12,4247	-242,139
	Ansyes	Prutový model	179,86	144,03	12,4628	-184,33
	Workbench	Submodel	181,34	143,29	12,3138	-233,68

Stykové silové účinky N_A a M_A jsou ve srovnání analytického a numerického řešení přibližně stejné. Při použití submodelu se stykové silové účinky mírně změny, tato skutečnost je způsobena změnou tuhosti při detailním prokreslení zlomu v rámu a rozdílnými typy použitých prvků. Maximální průhyb je až na drobnou odchylku taky velice blízký analytickému řešení. Rozdíl v hodnotách maximálního napětí může být dán numerickou chybou výpočtu. Dále může být způsoben tím, že prut je namáhán zároveň na tah/tlak a ohyb. Pro namáhání tah/tlak ale nebylo možno dohledat nomogram, protože součinitele koncentrace napětí α se mohou pro ohyb a tah/tlak lišit. Takže tlaková složka normálového napětí nebyla do σ_{\max} v analytickém výpočtu započítána.

6 Příklad 3

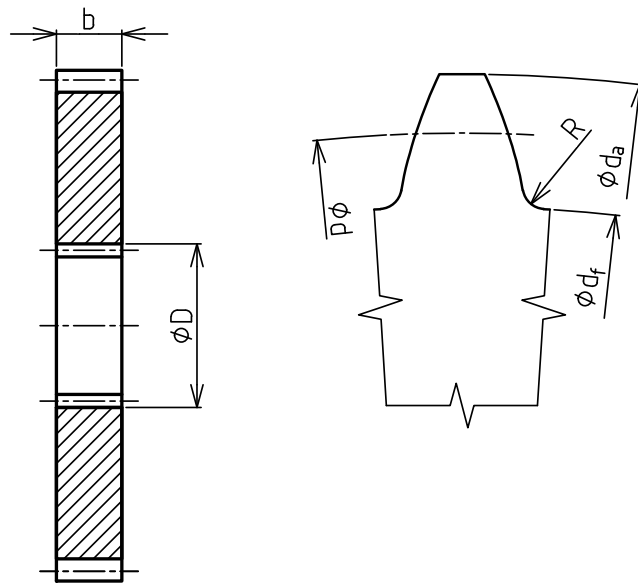
6.1 Zadání

Nekorigované ozubené kolo dle obr. 6.1 rotuje kolem své osy otáčkami n $[\frac{1}{\text{min}}]$. Modul kola je 3 mm, počet zubů kola je 50 a úhel záběru je 20° ³¹. Kolo je opatřeno evolventním drážkováním $65 \times 1,25$ dle [6]. Kolo je vyrobeno z cínového bronzu o mezi kluzu 140 MPa. Určete otáčky n , při kterých dojde k první makroplastické deformaci. Dále posuďte evolventní drážkování jako možný koncentrátor napětí.



Obrázek 6.1: Zadání příkladu 3-3D pohled

³¹Základní profil evolventního ozubení je definován v [5].



Obrázek 6.2: Rozměry kola

$$\begin{array}{ll}
 m = 3 \text{ mm} & z = 50 \\
 b = 20 \text{ mm} & D = 63,875 \text{ mm} \\
 d_a^{32} = m(z + 2) = 156 \text{ mm} & d^{33} = mz = 150 \text{ mm} \\
 d_f^{34} = m(z - 2,5) = 142,5 \text{ mm} & R = 0,38m = 1,14 \text{ mm} \\
 E = 1,1 \cdot 10^5 \text{ MPa} & \mu = 0,34 \\
 \sigma_K = 140 \text{ MPa} & \rho = 8600 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \\
 n_{\text{krit}} = ? \frac{1}{\text{min}} &
 \end{array}$$

6.2 Rozbor úlohy

Z hlediska uložení a zatížení se jedná o volnou stěnu, zatíženou odstředivou silou způsobenou rotací úhlovou rychlostí $\vec{\omega}$. Úloha je z hlediska uložení staticky určitá.

³²Hlavová kružnice.

³³Roztečná kružnice.

³⁴Patní kružnice.

6.3 Analytické řešení

Analytické řešení spočívá v řešení diferenciální rovnice

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = -\frac{1-\mu^2}{E} \rho \omega^2 r. \quad (6.1)$$

Její odvození a analytické řešení je možno nalézt v kapitole A.3.1. Dle vztahu (A.17) na str. 105 je posuv u

$$u(r) = C_1 r + \frac{C_2}{r} - \frac{1-\mu^2}{8E} \rho \omega^2 r^3. \quad (6.2)$$

6.3.1 Výpočtový model 1

V 1. výpočtovém modelu budeme uvažovat, že zuby ani drážkování nemají vliv na výslednou deformaci a napjatost. Stěna pak bude disk o vnitřním poloměru R_1 , který bude roven polovině největšího rozměru drážkování, a vnějším poloměru R_2 , který bude roven poloměru hlavové kružnice ozubeného kola (viz obr. 6.3).

Okrajové podmínky pro nalezení konstant C_1 a C_2 , resp. A a B jsou

$$\sigma_r(r = R_1) = 0, \quad (6.3a)$$

$$\sigma_r(r = R_2) = 0, \quad (6.3b)$$

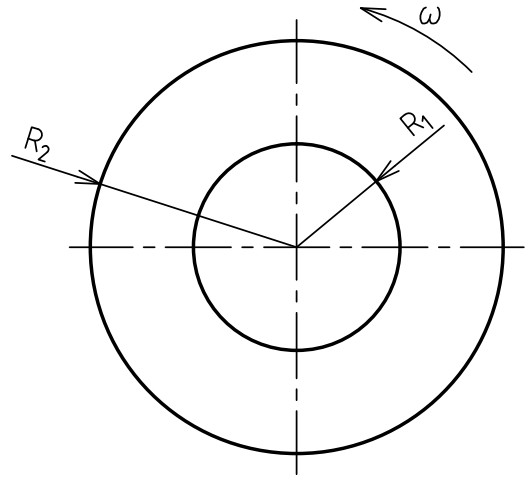
kde $R_1 = \frac{D}{2}$, $R_2 = \frac{d_a}{2}$.

Řešení je možno vidět v kapitole A.3.2 na str. 106. Dosazením konstant A a B dle (A.21a) a (A.21b) na str. 106 jsou výsledné vztahy pro napětí σ_r a σ_t a pro radiální posuv u

$$\sigma_r(r) = \frac{3+\mu}{8} \rho \omega^2 \left(R_1^2 + R_2^2 - \frac{R_1^2 R_2^2}{r^2} - r^2 \right), \quad (6.4a)$$

$$\sigma_t(r) = \frac{3+\mu}{8} \rho \omega^2 \left(R_1^2 + R_2^2 + \frac{R_1^2 R_2^2}{r^2} - \frac{(1+3\mu)}{(3+\mu)} r^2 \right), \quad (6.4b)$$

$$u(r) = \frac{(1-\mu^2)(3+\mu)}{8E} \rho \omega^2 \left(\frac{R_1^2 + R_2^2}{1+\mu} r + \frac{R_1^2 R_2^2}{1-\mu} \frac{1}{r} - \frac{1}{3+\mu} r^3 \right). \quad (6.4c)$$



Obrázek 6.3: Výpočtový model 1

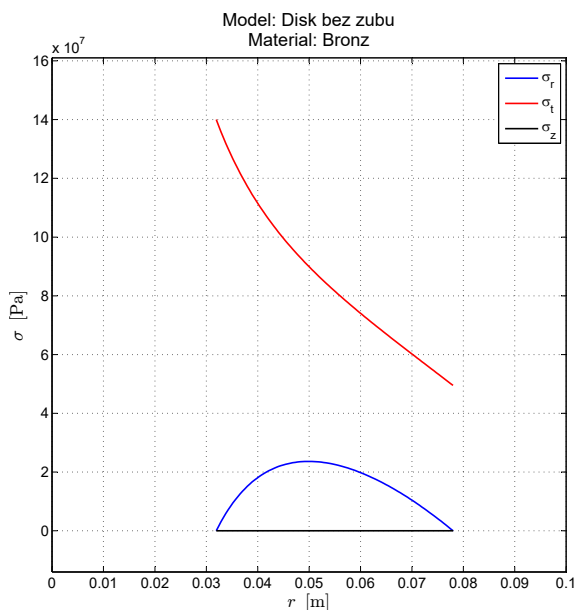
Dále budeme vycházet z redukovaného napětí podle podmínky τ_{\max} dle (6.5)

$$\sigma_{\text{red},\tau_{\max}} = \sigma_1 - \sigma_3. \quad (6.5)$$

Z obr. 6.4 je patrné, že největší rozdíly v napětích jsou na poloměru R_1 . Na poloměru R_1 platí, že

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_{t,\max}, \\ \sigma_2 &= \sigma_3 = 0. \end{aligned}$$

Dosazením poloměru R_1 a úpravou výrazu (6.4b) získáváme vztah (6.6) pro maximální tečné napětí na stěně



Obrázek 6.4: Průběhy napětí-model 1

$$\sigma_{t,\max} = \sigma_t(r = R_1) = \frac{3 + \mu}{4} \rho \omega^2 \left(R_2^2 + R_1^2 \frac{1 - \mu}{3 + \mu} \right). \quad (6.6)$$

Pro zjištění kritických otáček z rovnice (6.6) vyjádříme ω . Při kritických otáčkách dojde k nárůstu napětí σ_t na mez kluzu σ_K (viz (6.7)).

$$\omega_{\text{krit}} = \sqrt{\frac{4\sigma_K}{(3 + \mu) \rho \left(R_2^2 + R_1^2 \frac{1 - \mu}{3 + \mu} \right)}} \quad (6.7)$$

Při úlohách, kde do vztahů vstupuje hustota ρ , budeme dosazovat v základních jednotkách SI (kg, m, s).

$$\omega_{\text{krit}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 140 \cdot 10^6}{(3 + 0,34) \cdot 8600 \cdot \left[\left(\frac{156}{2 \cdot 10^3} \right)^2 + \left(\frac{63,875}{2 \cdot 10^3} \right)^2 \cdot \frac{1 - 0,34}{3 + 0,34} \right]}} = 1761,2 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Mezi úhlovou rychlostí ω a otáčkami n platí vztah (6.8)

$$\omega = \frac{2\pi n}{60}, \quad (6.8)$$

kde $n \left[\frac{1}{\text{min}} \right]$ jsou otáčky a $\omega \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$ je úhlová rychlost.

Pak kritické otáčky jsou

$$n_{\text{krit}} = \frac{60\omega_{\text{krit}}}{2\pi} = \frac{60 \cdot 1761,2}{2 \cdot \pi} = 16\,818,2 \frac{1}{\text{min}}.$$

6.3.2 Výpočtový model 2

V druhém výpočtovém modelu budeme uvažovat, že od zubů vznikne přídatné radiální tahové zatížení způsobené odstředivými silami (viz obr. 6.5). Disk bude tak tvořen vnitřním poloměrem R_1 , kterým bude polovina největšího průměru drážkování, a vnějším poloměrem R_2 , tvořeným patní kružnicí ozubeného kola.

Okrajové podmínky pro tuto rotující stěnu jsou

$$\sigma_r(r = R_1) = 0, \quad (6.9a)$$

$$\sigma_r(r = R_2) = p, \quad (6.9b)$$

kde $R_1 = \frac{D}{2}$, $R_2 = \frac{d_f}{2}$.

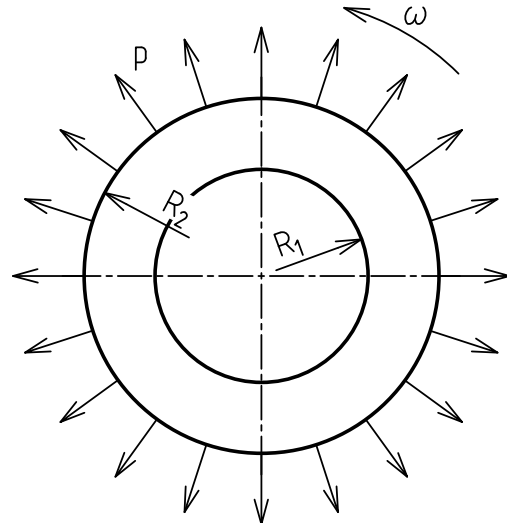
Tlak p vyjádříme vztahem (6.10)

$$p = \frac{\mathcal{F}}{b} = \frac{F}{2\pi R_2 b} = \frac{maz}{2\pi R_2 b} = \frac{V_z \rho \omega^2 r_{Tz} z}{2\pi R_2 b}, \quad (6.10)$$

kde:

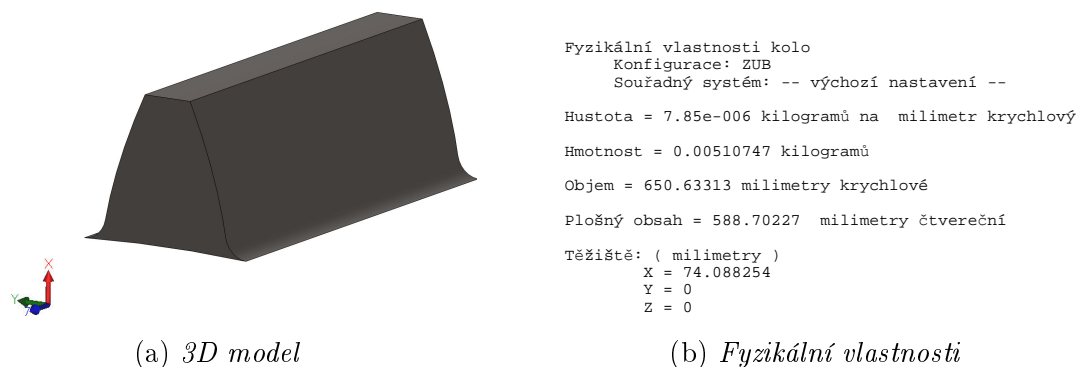
- V_z [m³] je objem zubu,
- ρ [$\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$] je hustota,
- ω [$\frac{\text{rad}}{\text{s}}$] je úhlová rychlost,
- r_{Tz} [m] je radiální vzdálenost těžiště zubu od osy otáčení,
- z [–] je počet zubů,
- b [m] je šířka ozubení.

Objem V_z a polohu těžiště zubu r_{Tz} bychom mohli získat analyticky integrací. Toto řešení ale není příliš vhodné, protože bok zubu je tvořen evolventní křivkou, navíc od patní kružnice vychází přechodová křivka o poloměru R , takže matematický popis



Obrázek 6.5: Výpočtový model 2

takové tělesa by byl velice obtížný. Jelikož ale máme CAD model, který lze následně použít pro import do řešiče MKP, využijeme modelu³⁵ pro numerický výpočet potřebných charakteristik (viz obr. 6.6b).



Obrázek 6.6: *Zub ozubeného kola*

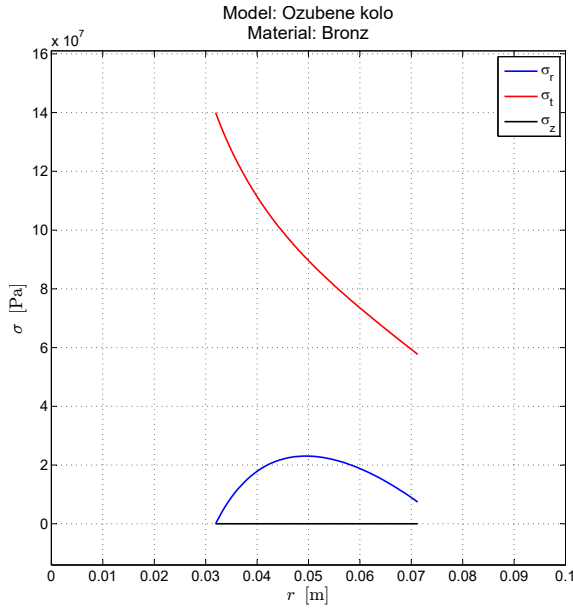
Řešení integračních konstant je možno vidět v kapitole A.3.2 na str. 106. Vztahy jsou nyní mnohem komplikovanější. Dosazením konstant A a B dle (A.23a) a (A.23b) na str. 107 a tlaku p podle rovnice (6.10) dostáváme vztahy pro napětí σ_r , σ_t a posuv u

$$\sigma_r(r) = \rho\omega^2 \left[\frac{V_z z r T_z R_2^2}{2\pi R_2 b (R_2^2 - R_1^2)} \left(1 - \frac{R_1^2}{r^2} \right) + \frac{3 + \mu}{8} \left(R_1^2 + R_2^2 - \frac{R_1^2 R_2^2}{r^2} - r^2 \right) \right], \quad (6.11a)$$

$$\sigma_t(r) = \rho\omega^2 \left[\frac{V_z z r T_z R_2^2}{2\pi R_2 b (R_2^2 - R_1^2)} \left(1 + \frac{R_1^2}{r^2} \right) + \frac{3 + \mu}{8} \left(R_1^2 + R_2^2 + \frac{R_1^2 R_2^2}{r^2} - \frac{1 + 3\mu}{3 + \mu} r^2 \right) \right], \quad (6.11b)$$

$$u(r) = \frac{\rho\omega^2}{E} \left[\frac{V_z z r T_z R_2^2}{2\pi R_2 b (R_2^2 - R_1^2)} \left((1 - \mu) r + \frac{R_1^2 (1 + \mu)}{r} \right) + \frac{(3 + \mu)(1 - \mu^2)}{8} \left(\frac{R_2^2 + R_1^2}{1 + \mu} r + \frac{R_1^2 R_2^2}{1 - \mu} \frac{1}{r} - \frac{1}{3 + \mu} r^3 \right) \right]. \quad (6.11c)$$

³⁵Model byl vytvořen v softwaru SolidWorks. Těleso zubu z obr. 6.6a vzniklo průnikem kola a prstence, který je radiálně ohraničen patní a hlavovou kružnicí a jeho průvodiče svírají úhel $\frac{360^\circ}{z}$.



Obrázek 6.7: Průběhy napětí-model 2

Jako v předchozím případě budeme vycházet z redukovaného napětí podle podmínky plasticity τ_{\max} (viz (6.5) na str. 54).

Nenulové radiální napětí na vnějším poloměru R_2 neovlivnilo tvar průběhu tečného napětí σ_t . Na poloměru R_1 jsou opět největší rozdíly v napětích (viz obr. 6.7). Pro hlavní napětí na poloměru R_1 tedy platí, že

$$\sigma_1 = \sigma_{t,\max},$$

$$\sigma_2 = \sigma_3 = 0.$$

Dosazením R_1 a úpravou vztahu (6.11b) získáme vztah (6.12) pro maximální tečné napětí po poloměru stěny

$$\sigma_{t,\max} = \sigma_t(r = R_1) = \rho\omega^2 \left[\frac{V_z z r T_z R_2}{\pi b (R_2^2 - R_1^2)} + \frac{3 + \mu}{4} \left(R_2^2 + R_1^2 \frac{1 - \mu}{3 + \mu} \right) \right]. \quad (6.12)$$

Mezní hodnotou je opět mez kluzu σ_K . Vyjádřením ω z rovnice (6.12) získáváme vztah (6.13) pro kritickou úhlovou rychlost

$$\omega_{\text{krit}} = \sqrt{\frac{\sigma_K}{\rho \left[\frac{V_z z r T_z R_2}{\pi b (R_2^2 - R_1^2)} + \frac{3 + \mu}{4} \left(R_2^2 + R_1^2 \frac{1 - \mu}{3 + \mu} \right) \right]}}. \quad (6.13)$$

$$\omega_{\text{krit}} = \sqrt{\frac{140 \cdot 10^6}{8600 \cdot \left[\frac{\frac{650,633}{10^9} \cdot 50 \cdot \frac{74,088}{10^3} \cdot \frac{142,5}{2 \cdot 10^3}}{\pi \cdot 0,02 \cdot \left(\left(\frac{142,5}{2 \cdot 10^3} \right)^2 - \left(\frac{63,875}{2 \cdot 10^3} \right)^2 \right)} + \frac{3+0,34}{4} \cdot \left(\left(\frac{142,5}{2 \cdot 10^3} \right)^2 + \left(\frac{63,875}{2 \cdot 10^3} \right)^2 \cdot \frac{1-0,34}{3+0,34} \right) \right]}} = 1789,9 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

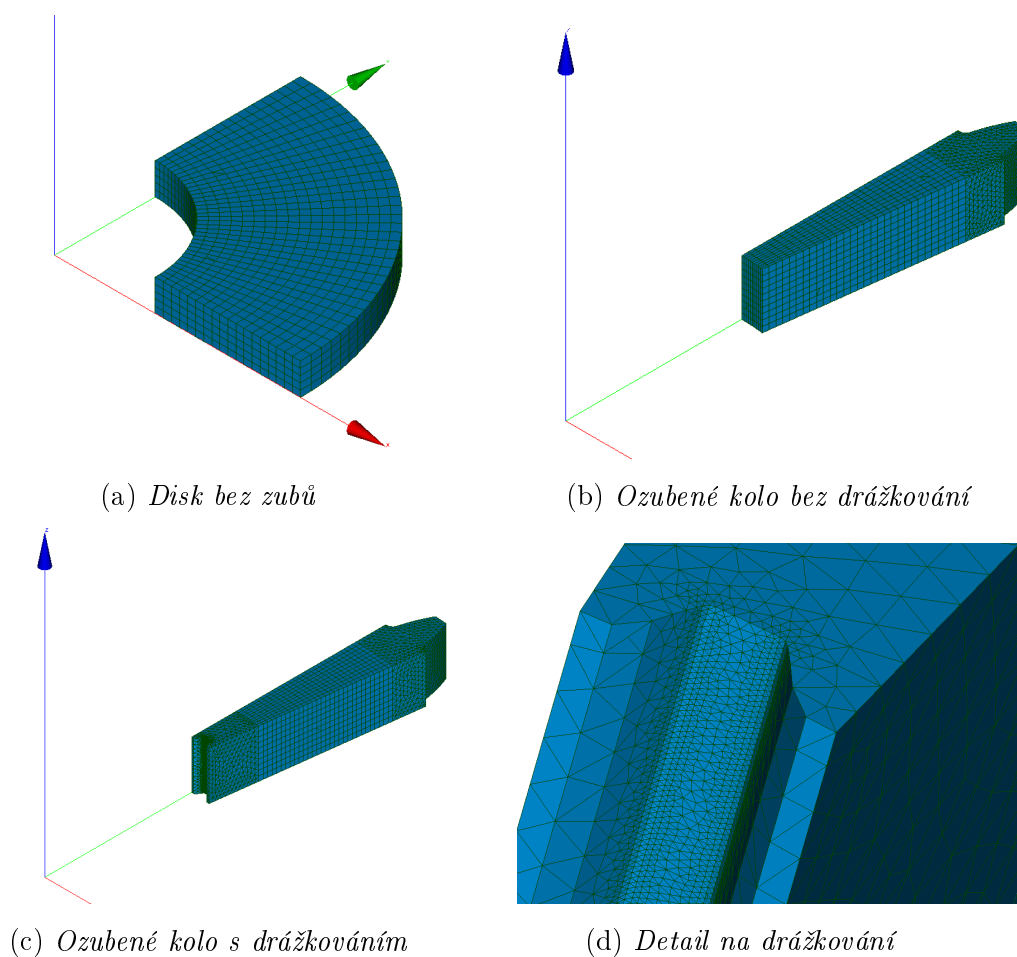
$$n_{\text{krit}} = \frac{60 \cdot 1798,2}{2 \cdot \pi} = 17092,3 \frac{1}{\text{min}}$$

6.4 Numerické řešení

Výpočtový model 1 (disk s otvorem) můžeme modelovat 3 různými způsoby:

1. osová symetrie,
2. rovinná napjatost,
3. 3D model.

Zde využijeme pouze 3D model. Výsledky a sítě pro rovinné modely budou k dispozici v obrázkové příloze na DVD.



Obrázek 6.8: *Příklad 3-výpočtové sítě*

Protože geometrie disku na obr. 6.8a je velice jednoduchá, můžeme využít $\frac{1}{8}$ symetrii podle rovin souřadného systému x , y , z . Díky jednoduché geometrii bylo možno vytvořit čistě hexaedrickou mapovanou síť. Zatížení je realizováno pomocí příkazu ROTATION, jehož parametry jsou VITESSE, kde se definuje velikost úhlové rychlosti³⁶, a AXE, kterým se definuje směr vektoru $\vec{\omega}$ pomocí jednotkových vektorů souřadného systému.

Ozubené kolo bylo importováno pomocí mrtvé geometrie formátu *.step z programu SolidWorks. Je možné opět využít $\frac{1}{8}$ symetrii. Tento krok ale není příliš vhodný, protože geometrie je značně komplikovanější, síť by obsahovala velké množství prvků a výpočet by byl zdoluhavý. Můžeme využít vlastnosti rotačně symetrických těles, že body v meridiánových řezech³⁷ zůstanou po deformaci v meridiánových řezech³⁸. Uděláme tedy výřez s 1 zubem, u kterého dále využijeme rovinu symetrie xy (viz obr. 6.8b). Vzhledem ke složitosti geometrie nebylo možno vytvořit čistě hexaedrickou síť. V dostatečné vzdálenosti od paty zubu jsme vytvořili válcový řez. Uvnitř řezu již je možné vytvořit hexaedrickou síť, tělo zubu je tvořeno tetraedry a pyramidami pro napojení tetraedrů a hexaedrů. Pro zavedení okrajových podmínek simulujících vlastnosti meridiánového řezu byl použit příkaz LIAISON_OBLIQUE, který umožňuje natočení globálního souřadného systému kolem jeho os³⁹.

Stejný postup opakujeme u geometrie kola, které má navíc drážkování na vnitřním průměru (viz obr. 6.8c a 6.8d)). Nyní je nutno vytvořit 2 válcové řezy, kde prostřední část se opět vytvoří z hexaedrů a zbytek z tetraedrů a pyramid. Okrajové podmínky budou stejné jako v předchozím případě.

³⁶Při použití jednotek SI je nutno zadávat úhlovou rychlost v $\frac{\text{rad}}{\text{s}}$. Je možné pomocí zadaných parametrů na začátku programu vypočítat úhlovou rychlost z otáček podle vztahu (6.8).

³⁷Meridiánový řez je řez rovinou, ve které leží osa rotace tělesa.

³⁸Této vlastnosti jsme využili také u disku bez zubů. Meridiánové řezy byly tvořeny rovinami xz a yz .

³⁹Konkrétně se využije natočení kolem osy z o úhel $\alpha = -\frac{360^\circ}{z} = -7,2^\circ$. Okrajová podmínka je pak $DX = 0$.

Jelikož výstupy (posuvy, napětí) jsou rotačně symetrické, bylo nutné výsledky převést do válcového systému⁴⁰. Toho se docílilo zavedením příkazu `MODI_REPERE` s nastavením `CYLINDRIQUE`. Převod souřadnicových os je v tab. 6.1.

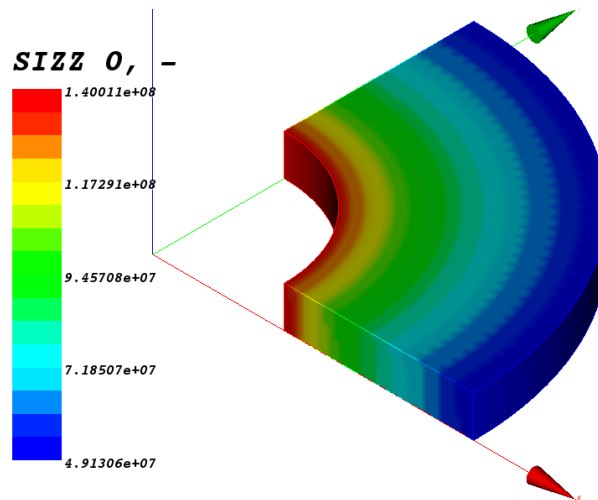
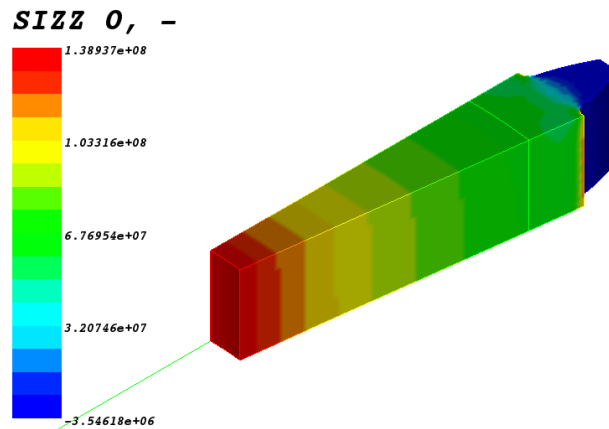
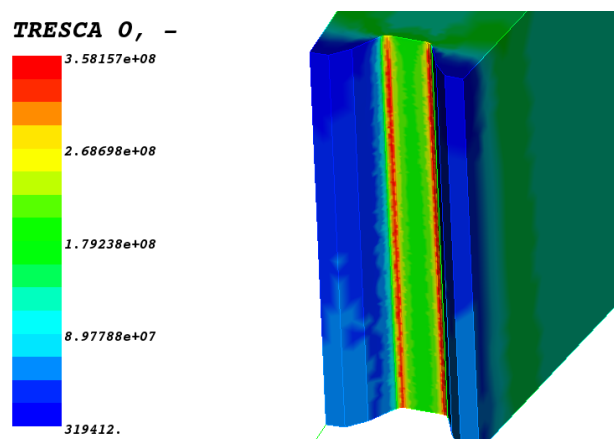
Tabulka 6.1: *Převodní tabulka souřadných systémů-Code_Aster*

	Kartézský SS (GCS ^a)	Válcový SS (CCS ^b)
Osa	x	r
	y	z
	z	t

^aGlobal Coordinates System

^bCylindrical Coordinates System

⁴⁰Defaultně je nastaven kartézský souřadný systém pro zadávání OP a vykreslování výsledků.

(a) σ_t [Pa]-disk bez zubů, $n = 16\,818,2 \frac{1}{\text{min}}$ (b) σ_t [Pa]-kolo bez drážkování, $n = 17\,092,3 \frac{1}{\text{min}}$ (c) $\sigma_{\text{red}, \tau_{\text{max}}}$ [Pa]-kolo s drážkováním, $n = 17\,092,3 \frac{1}{\text{min}}$

Obrázek 6.9: Příklad 3-numerickej výsledky

6.5 Zhodnocení výsledků

Tabulka 6.2: *Shrnutí výsledků příkladu 3*

		$n_{\text{krit}} \left[\frac{1}{\text{min}} \right]$	$\sigma_{\text{red}, \tau_{\text{max}}}^a \text{ [MPa]}$	
Analytické řešení	Model 1	16 818,2	140	
	Model 2	17 092,3	140	
Numerické řešení	Salome Meca	Model 1	16 818,2	140,011
		Model 2	17 092,3	138,94
		Model 3	17 092,3	358,16
	Ansys WorkBench	Model 1	16 818,2	140,03
		Model 2	17 092,3	136,16
		Model 3	17 092,3	333,86

^aRedukované napětí na vnitřním poloměru R_1 při n_{krit}

Z tab. 6.2 je patrné, že zuby nelze z hlediska napjatosti úplně zanedbat. Jejich vliv⁴¹ může být různý podle hodnoty Poissonova poměru, protože napětí je kromě zatížení a geometrie závislé také na velikosti Poissonova poměru μ .

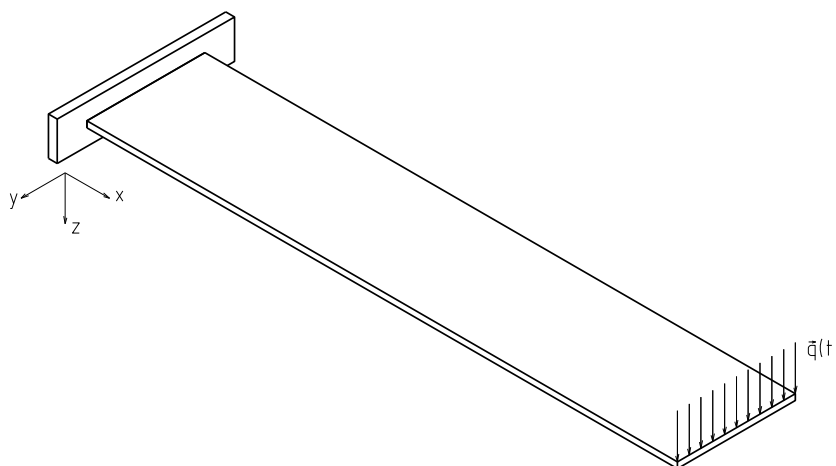
Vytvořením drážkování na vnitřním poloměru kola došlo k nárůstu napětí přibližně $2,5 \times$ při zachování stejných otáček, které by způsobily vznik napětí na mezi kluzu u kola bez drážkování. Tato koncentrace může způsobit iniciaci trhlin z povrchových defektů, jejich růst a nakonec nestabilní šíření, které může vést k lomu.

⁴¹Vliv může být klasifikován jako podíl otáček vypočítaných na modelu disku bez zubů a na ozubeném kole.

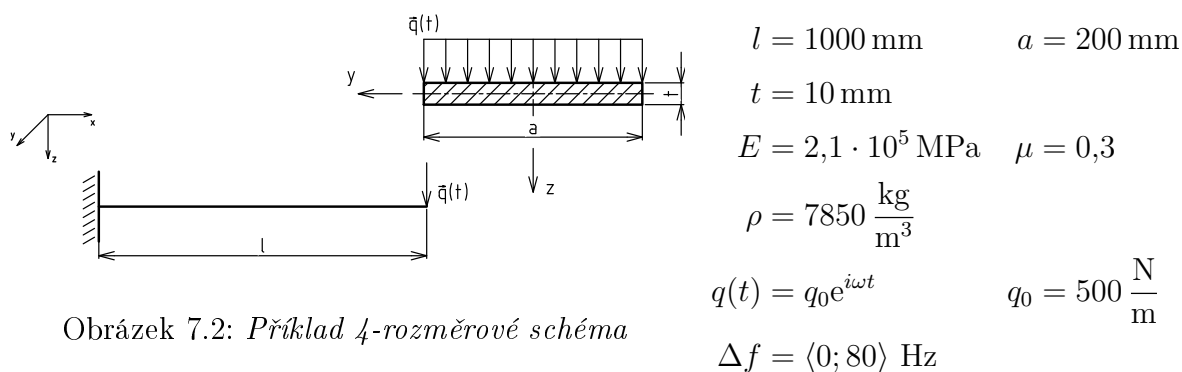
7 Příklad 4

7.1 Zadání

U ocelové desky uložené dle obr 7.1 nalezněte prvních 6 vlastních netlumených frekvencí, kterým odpovídají ohybové módy kolem osy y . Dále zjistěte odezvu při buzení desky na volném konci liniovým zatížením $\vec{q}(t)$ při pásmu budících frekvencí $\Delta f = \langle 0; 80 \rangle$ Hz. Posuďte vliv viskózního tlumení na amplitudu kmitání volného konce pro $\alpha_r = 0,025 \frac{1}{s}$, $\beta_r = 0,023$ s.



Obrázek 7.1: Zadání příkladu 4-3D pohled



Obrázek 7.2: Příklad 4-rozměrové schéma

7.2 Rozbor úlohy

Z hlediska uložení se jedná o jednostranně vetknutou desku obdélníkového průřezu. Potřebné průřezové charakteristiky do dalších výpočtů jsou plocha S a kvadratický moment k ose y J_y (viz (7.1a) a (7.1b)).

$$S = at \tag{7.1a}$$

$$J_y = \frac{at^3}{12} \tag{7.1b}$$

7.3 Analytické řešení

7.3.1 Modální analýza

Analytické řešení vychází z předpokladu, že řešené těleso budeme považovat za prut. Budeme hledat pouze netlumené vlastní frekvence.

Timoshenko

$$f_i = \frac{ak_i^2}{2\pi} = \frac{k_i^2}{2\pi} \sqrt{\frac{EJg}{S\rho}} \tag{7.2a}$$

$$a^2 = \frac{EJg}{S\rho} \tag{7.2b}$$

Tabulka 7.1: *Timoshenko-koefficienty (převzato z [8])*

k_1l	k_2l	k_3l	k_4l	k_5l	k_6l
1,875	4,694	7,855	10,996	14,137	17,279

Den Hartog

$$f_n = \frac{a_n}{2\pi} \sqrt{\frac{EJ}{\mu_1 l^4}} = \frac{a_n}{2\pi} \sqrt{\frac{EJg}{S\rho l^4}} \tag{7.3a}$$

$$\mu_1 = \frac{m}{gl} = \frac{Sl\rho}{gl} = \frac{S\rho}{g} \tag{7.3b}$$

Tabulka 7.2: *Den Hartog-koefficienty (převzato z [9])*

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
3,52	22,0	61,7	121,0	200,0

Juliš

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \frac{(\beta_n l)^2}{l^2} c_0 j = \frac{1}{2\pi} \frac{(\beta_n l)^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{S\rho}} \quad (7.4)$$

Tabulka 7.3: *Juliš-koefficienty (převzato z [7])*

$\beta_1 l$	$\beta_2 l$	$\beta_3 l$	$\beta_4 l$
1,875	4,694	7,855	10,996

S využitím předchozích vztahů a dosazováním jednotlivých koeficientů získáme tab. 7.4 vlastních netlumených frekvencí, kterým odpovídají módy kmitání kolem osy y , podle jednotlivých autorů.

7.3.2 Harmonická analýza

Pro *netlumené* kmitání platí, že poměrný útlum $\xi = 0$. V případě, kdy se budící frekvence rovná vlastní frekvenci soustavy, by měla výchylka růst teoreticky nade všechny meze ($q = \infty$). Toto není ale reálně možné.

Při tlumeném kmitání je již poměrný útlum nenulový a platí pro něj vztah

$$\xi = \frac{\mathbf{B}}{\mathbf{M}\Omega}. \quad (7.5)$$

Z rovnice (7.5) [10] je patrné, že poměrný útlum je různý pro různé vlastní frekvence. Je nutné při jeho výpočtu využít také koeficientů viskózního tlumení α_r a β_r .

Do vztahů (7.3a) a (7.2a) se Youngův modul pružnosti E dosazuje v $\frac{\text{kg}}{\text{m}^2}$ a gravitační zrychlení g v $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Do vztahu (7.4) se E dosazuje klasicky v Pa.

7.4 Numerické řešení

7.4.1 Modální analýza

Cílem modální analýzy je nalezení vlastních frekvencí a vlastních tvarů při *volném* (ne)tlučeném kmitání [4]. Volné kmitání znamená, že na těleso nepůsobí žádné budící zatížení a toto kmitání lze popsat pohybovou rovnicí

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = 0, \quad (7.6)$$

kde:

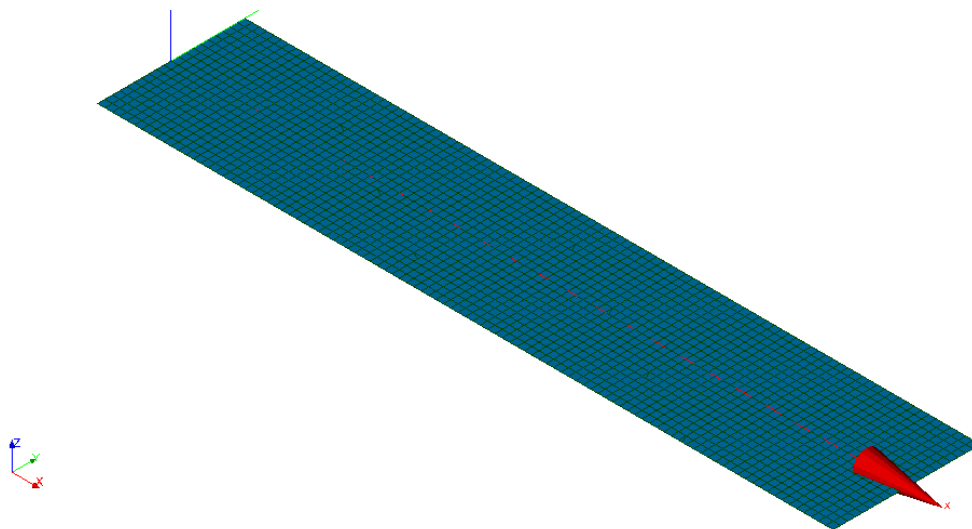
- \mathbf{M} [kg] je matice hmotnosti,
- \mathbf{K} [$\frac{\text{N}}{\text{m}}$] je matice tuhosti,
- \mathbf{B} [$\frac{\text{Ns}}{\text{m}}$]⁴² je matice tlumení, pro Rayleighovo viskózní tlumení $\mathbf{B} = \alpha_r\mathbf{M} + \beta_r\mathbf{K}$,
- \mathbf{q} [m], $\dot{\mathbf{q}}$ [$\frac{\text{m}}{\text{s}}$], $\ddot{\mathbf{q}}$ [$\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$] je zobecněná souřadnice a její časové derivace [10].

Při vykreslení deformovaného tvaru s číselnou škálou je nutno mít na paměti, že čísla nejsou konkrétní posuvy v uzlech, ale pouze tzv. normované⁴³ posuvy, vyjadřující, jak moc se má těleso v určitých místech tendenci deformovat.

⁴²Pro netlučené kmitání je $\mathbf{B} = \mathbf{0}$.

⁴³Bezrozměrné.

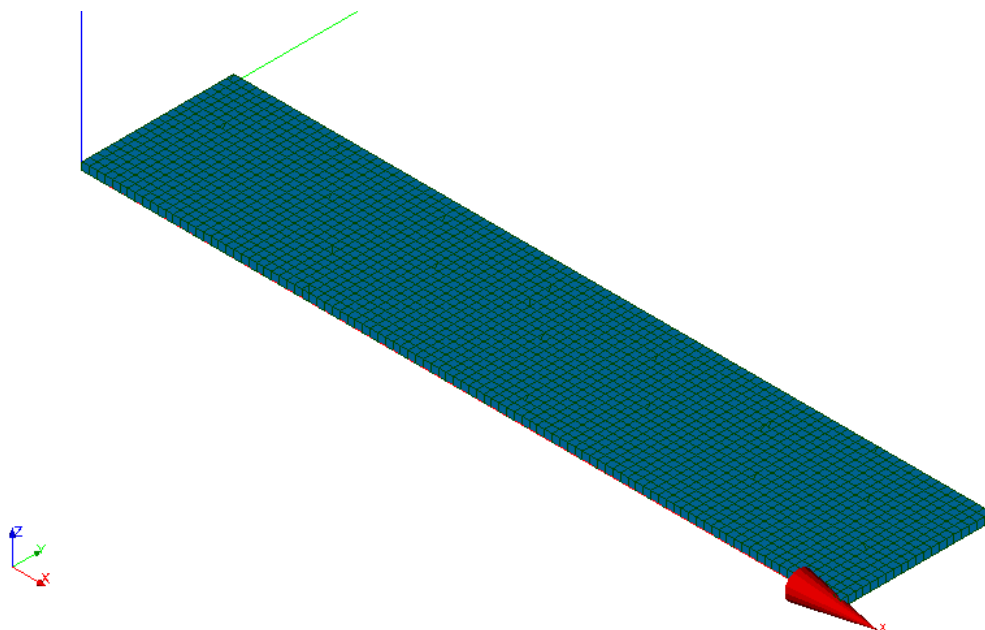
Pro řešení daného problému využijeme 2 modely. U jednoho modelu bude síť tvořena prvky typu SHELL⁴⁴ a jako geometrie stačí pouze rovinná plocha, obdélník o rozměrech (1×0,2) m (viz obr. 7.3). Tloušťka skořepiny je pak 0,01 m.



Obrázek 7.3: *Skořepinový model*

⁴⁴V Salome Meca jsou nazvány COQUE_3D (vyžadují kvadratickou síť). Obdobně jako u prutových prvků se nepovedlo zobrazit tloušťku skořepiny, proto je viditelná jen střednicová plocha.

Druhý model bude mít síť tvořenou dvacetiuzlovými prvky typu SOLID a geometrie už je celý kvádr o rozměrech $(1 \times 0,2 \times 0,01)$ m (viz obr. 7.4).



Obrázek 7.4: *Solid model*

V Salome Meca je nutno vytvořit z vlastností materiálu, okrajových podmínek, případně z průřezových charakteristik tzv. ASSEMBLAGE⁴⁵, kde se vytvoří matice hmotnosti \mathbf{M} , matice tuhosti \mathbf{K} a matice tlumení \mathbf{B} . Vlastní modální analýza se provede pomocí příkazu `MODE_ITER_SIMULT`, kde parametry jsou matice hmotnosti, tuhosti, popř. tlumení. Je možné zvolit i druh metody výpočtu⁴⁶. Rozsah analýzy je možné nastavit pomocí intervalu, na kterém vlastní frekvence počítáme, nebo přímo počtem vlastních frekvencí, který má být vypočítán.

Pro řešení problému nás zajímají pouze ohybové módy kolem osy y , které následně můžeme zapsat do tab. 7.4. Výpočet byl proveden také v systému Ansys Classic se stejnými parametry sítě a hodnoty vlastních frekvencí hledaných módů jsou také uvedeny ve zmíněné tabulce.

⁴⁵Sestava.

⁴⁶Ve výchozím nastavení je metoda SORESENSEN, dále jsou dostupné metody TRI_DIAG, JACOBI a QZ.

7.4.2 Harmonická analýza

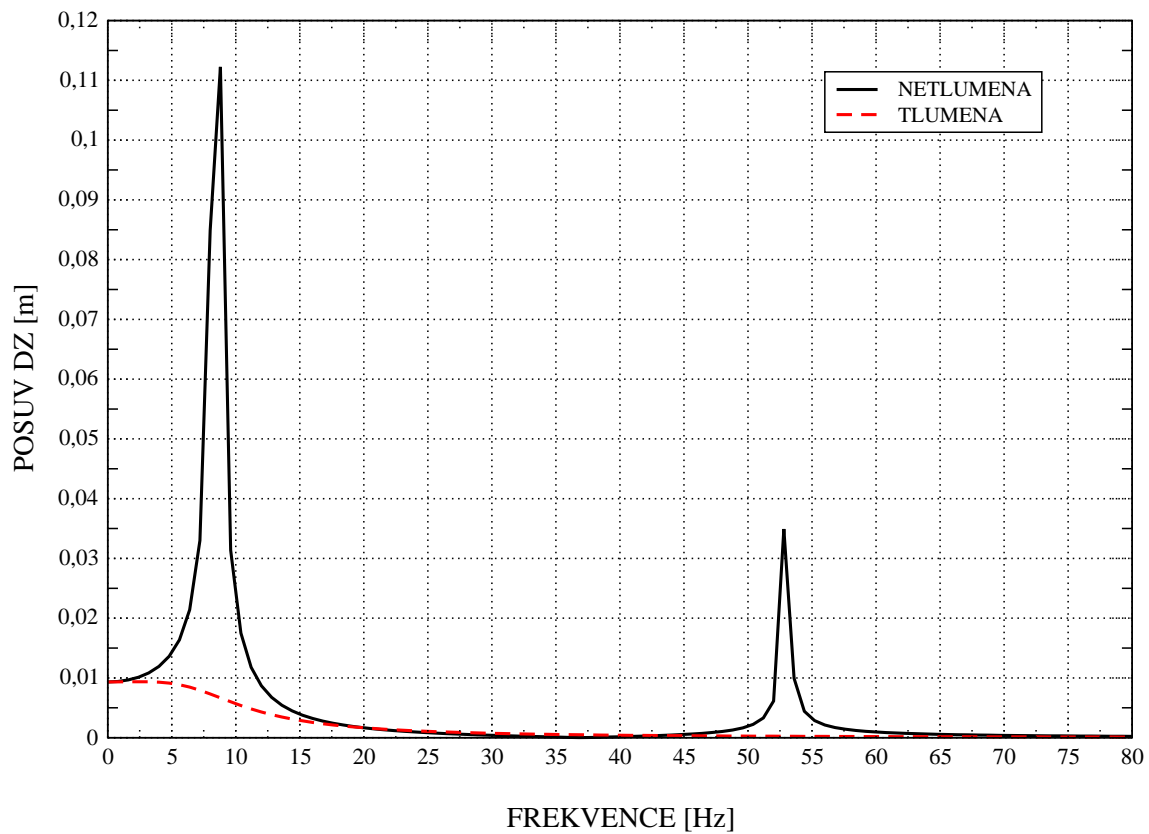
Pro výpočet výchylky volného konce při harmonickém buzení využijeme pouze model s prostorovými prvky. Na volný konec umístíme liniové zatížení o zadané velikosti⁴⁷. Rozsah budící frekvence zatížení zvolíme $\langle 0; 80 \rangle$, přičemž interval rozdělíme do 100 kroků, tzv. substepů. Toto lze nastavit v `DEFI_LIST_REEL`, kde se definuje počátek (`DEBUT`) a konec (`JUSQU_A`) intervalu a dále počet dělení (`NOMBRE`), případně přírůstek (`PAS`). Veškeré vstupní parametry (matice, materiál, . . .) se vloží do příkazu `DYNA_LINE_HARM`, který vypočítá amplitudu a fázi kmitání v uzlech pro každou frekvenci definovanou v rozsahu. V Salome Meca můžeme do výpočtu vložit obě analýzy zároveň, přičemž do analýzy s tlumením přidáme další parametr související s maticí tlumení.

Následně je nutno z výsledků analýzy vybrat amplitudy kmitání volného konce desky. Tento krok se provede pomocí `RECU_FONCTION`, kde se nastaví, jaké veličiny nás zajímají (zde posuv v ose z) a skupina uzlů, ze které výsledky chceme (vybereme uzel uprostřed šířky desky na horní ploše). Jelikož obecně jsou výsledky analýzy komplexní čísla, potřebujeme tzv. modul⁴⁸. Modul se získá pomocí `CALC_FONCTION` s nastavením `PARTIE='MODULE'`. Tento postup provedeme pro obě analýzy (netlumenou a tlumenou) a výsledky obou analýz vložíme do společného grafu (viz obr. 7.5).

⁴⁷V Ansys Classic zavedeme staticky ekvivalentní zatížení do krajních bodů koncového čela desky. Tento krok by při velkých zatíženích mohl způsobit nežádoucí singularitu v těchto uzlech.

⁴⁸ $z = me^{i\varphi}$, $z \in \mathbb{C}$, m -modul komplexního čísla, φ -argument.

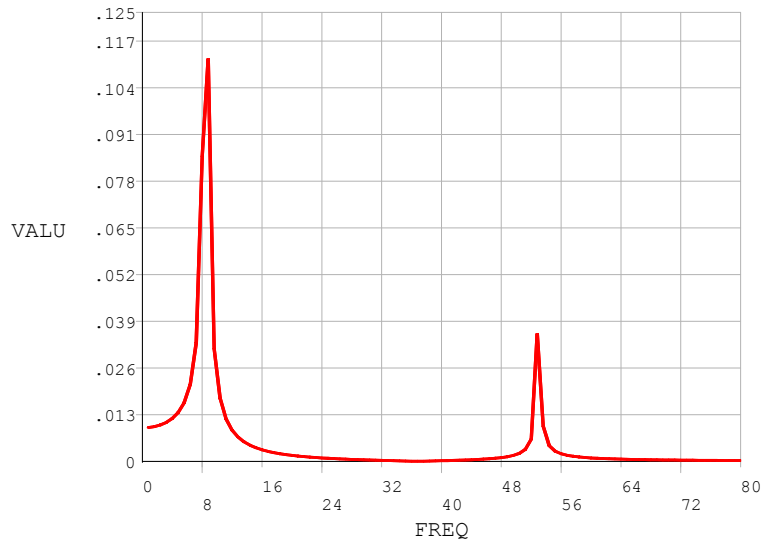
VOLNY KONEC, POSUV



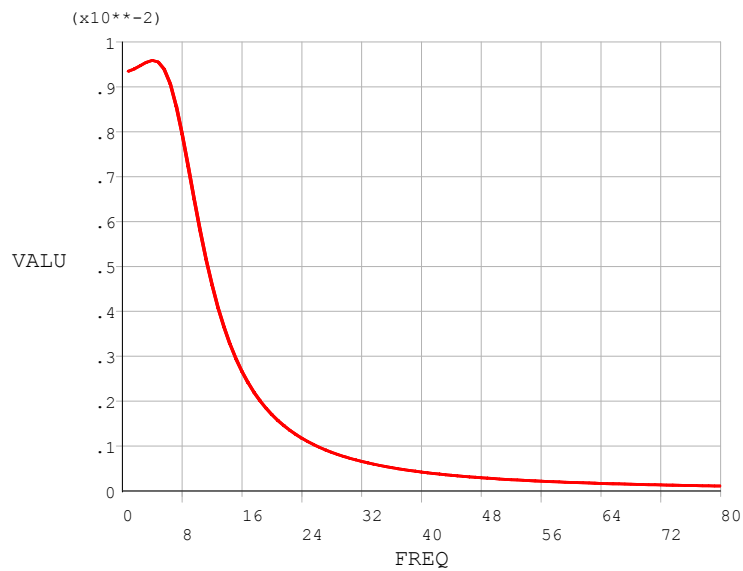
Obrázek 7.5: $A-f$ ⁴⁹ charakteristika-Salome Meca

⁴⁹ Amplitudo-frekvenční.

V Ansysu bylo nutné vytvořit analýzy zvlášť a každou vytisknout do samostatného grafu (viz obr. 7.6a a 7.6b).



(a) *Netlumené kmitání*



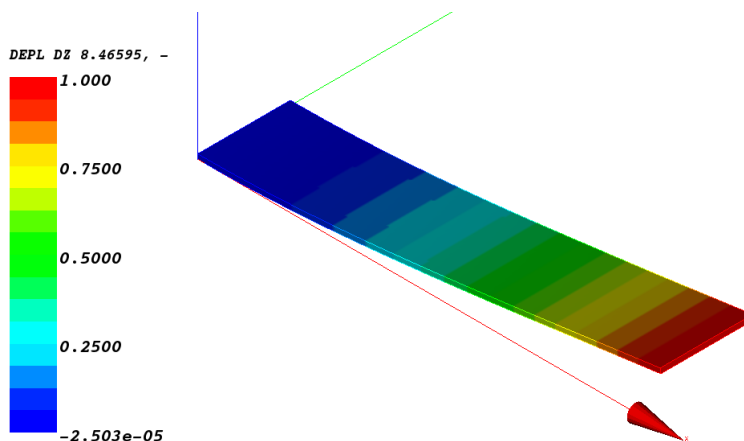
(b) *Tlumené kmitání*

Obrázek 7.6: *A-f charakteristika-Ansys Classic*⁵⁰

⁵⁰VALU v grafech reprezentuje výchylku volného konce ve směru osy y v m a FREQ budící frekvenci v Hz.

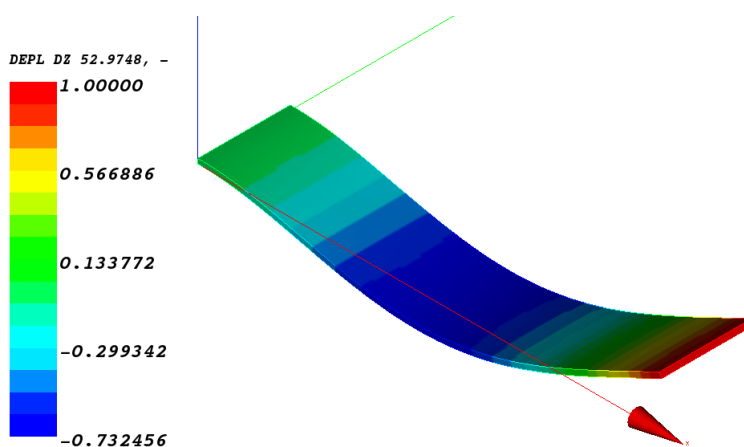
Z pohledu na grafy 7.5, 7.6a a 7.6b je zřejmé, že výsledky z obou programů si jsou velice blízké. U tlumené analýzy může být na první pohled patrný rozdíl v průběhu, jenže tento rozdíl je jen důsledkem různých měřítek os y .

Dále je zřejmé, že k největším výchylkám dochází v prvním módu, který je možno vidět na obr. 7.7.



Obrázek 7.7: *Ohybový mód 1* ($f = 8,466$ Hz)

U druhého ohybového módu (viz obr. 7.8) je výchylka volného konce desky podle A - f charakteristiky menší.



Obrázek 7.8: *Ohybový mód 2* ($f = 52,975$ Hz)

7.5 Zhodnocení výsledků

Tabulka 7.4: *Vlastní frekvence: ohybové módy, osa y*

		f_n [Hz]						
		$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$	
Analytické řešení	Timoshenko	8,354	52,36	146,621	287,325	474,918	709,482	
	Den Hartog	8,365	53,23	146,619	287,534	475,263	-	
	Juliš	8,354	52,36	146,621	287,325	-	-	
Numerické řešení	Salome	Shell	8,456	52,908	148,313	291,225	482,222	720,889
	Meca	Solid	8,466	52,975	148,519	291,688	483,106	722,427
	Ansysis	Shell	8,456	52,909	148,313	291,226	482,223	720,901
	Classic	Solid	8,465	52,971	148,505	291,651	483,027	722,28

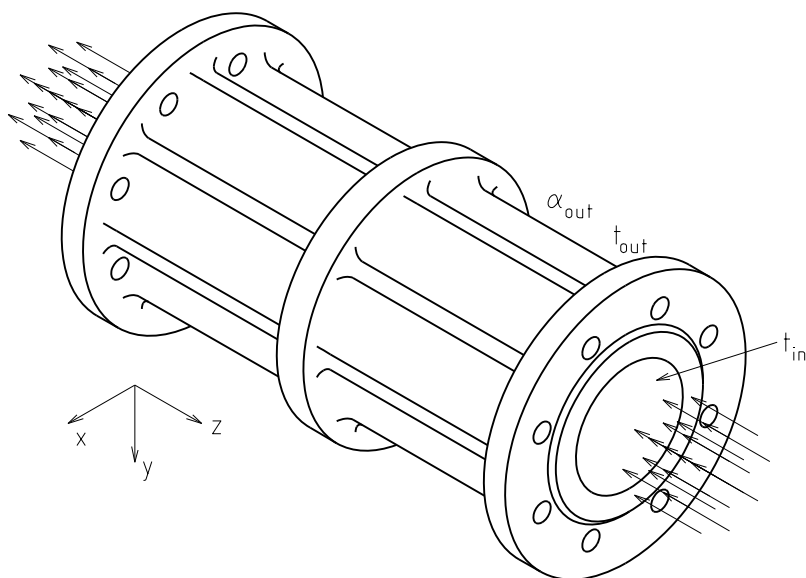
Z tab. 7.4 vyplývá, že frekvence ohybových módů získané z analytických vztahů a frekvence získané numerickým výpočtem se liší maximálně do 2%. Při buzení frekvenčním pásmem $\langle 0; 80 \rangle$ Hz systém přešel první 2 vlastní ohybové frekvence, což se v A - f charakteristice projevilo zvýšením amplitudy kmitání. Bez přítomnosti tlumení došlo ke vzniku tzv. peaků právě v okolí vlastních frekvencí (viz obr. 7.5 a 7.6a). Po zavedení viskózního tlumení pomocí součinitelů α_r a β_r došlo k poklesu vlastní frekvence, nárůst amplitudy byl nepatrný a při vyšších frekvencí došlo k úplném zatlumení systému (viz obr. 7.5 a 7.6b).

Při výpočtu pomocí skořepinového modelu je možno ušetřit přibližně 50% výpočetního času.

8 Příklad 5

8.1 Zadání

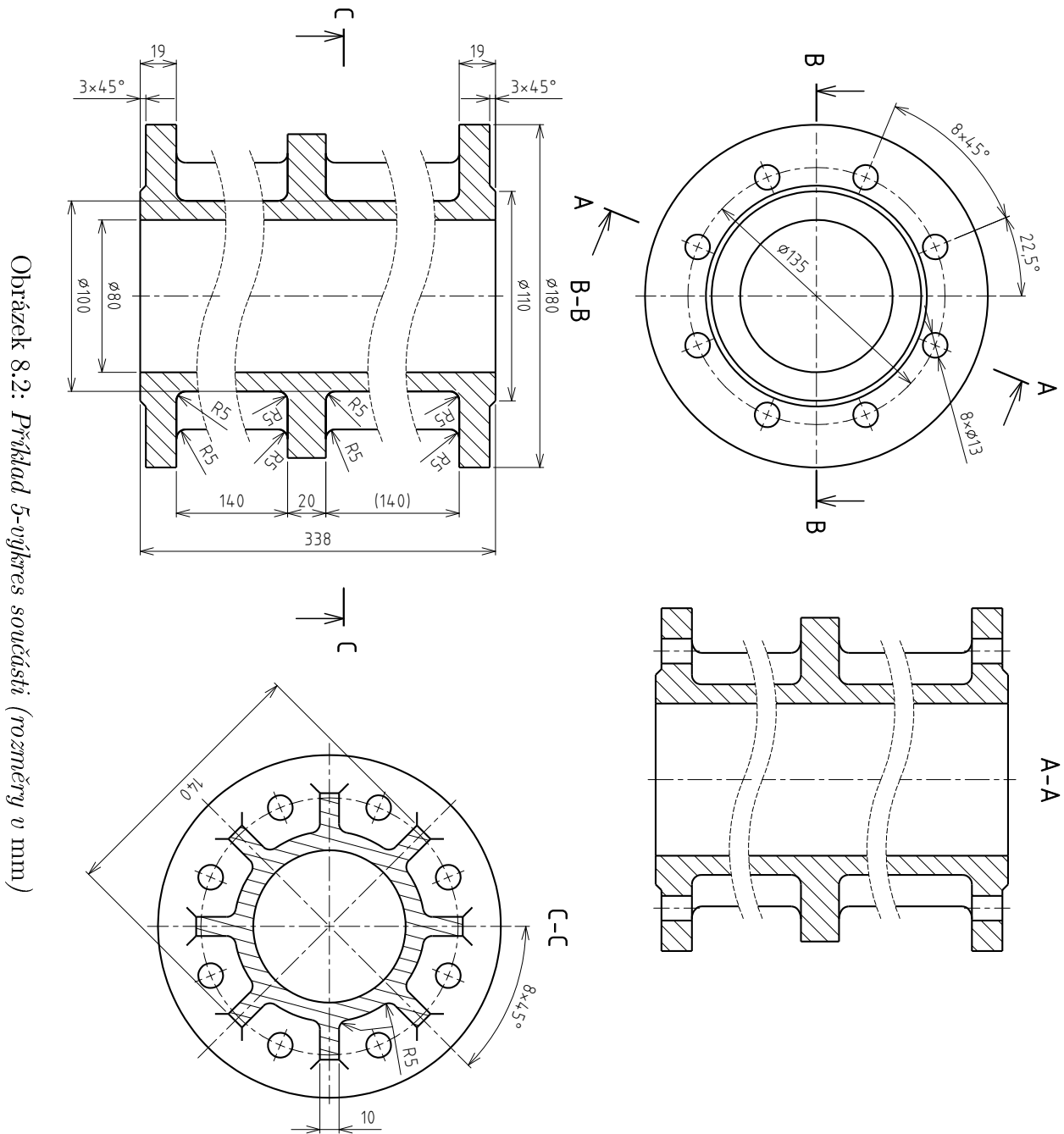
Součástíku dle obr. 8.1 protéká médium, které způsobuje ohřev vnitřní stěny na teplotu $t_{in} = 100\text{ °C}$. Součástka je vsazena bez vůle a přesahu mezi 2 nedeforovatelná čela. Okolní teplota je $t_{out} = 20\text{ °C}$. Součástka je ochlazována přirozenou konvekcí o součiniteli přestupu tepla $\alpha_{out} = 5\frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}$. Zjistěte pole teploty v dílu. Součástku také zkontrolujte z hlediska mezního stavu pružnosti. Součástka je ocelová, mez kluzu je 500 MPa. Součinitel teplotní vodivosti oceli je $\lambda = 50\frac{\text{W}}{\text{mK}}$.



Obrázek 8.1: Úloha 5-3D pohled

$$\begin{array}{llll} t_{in} = 100\text{ °C} & t_{out} = 20\text{ °C} & \alpha_{out} = 5\frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}} & \alpha_T = 1,2 \cdot 10^{-5}\frac{1}{\text{K}} \\ \lambda = 50\frac{\text{W}}{\text{mK}} & E = 2,1 \cdot 10^5\text{ MPa} & \mu = 0,3 & \sigma_K = 500\text{ MPa} \end{array}$$

Detailní geometrie součásti je na obr. 8.2.



Obrázek 8.2: Příklad 5-vojkres součásti (rozměry v mm)

8.2 Rozbor úlohy

Jedná se o kombinovanou analýzu. Prvně se provede ustálená⁵¹ teplotní analýza, jejíž výsledkem bude rozložení teplot po součástce. Deformace způsobená teplotním polem⁵² bude použita jako vstup do strukturální analýzy. Úloha je rotačně symetrická.

8.3 Základy přenosu tepla

Základními veličinami v přenosu tepla je teplota, hustota tepelného toku a tepelný tok. Hustota tepelného toku se vypočítá různě podle způsobu přenosu tepla. Vztah mezi hustotou tepelného toku a tepelným tokem je

$$\dot{Q} = \dot{q}S, \quad (8.1)$$

kde:

- $\dot{q} \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2} \right]$ je hustota tepelného toku,
- $\dot{Q} \text{ [W]}$ je tepelný tok,
- $S \text{ [m}^2\text{]}$ je teplosměnná plocha [13].

8.3.1 Formy přenosu tepla

Existují různé formy přenosu tepla:

1. vedením (kondukcí),
2. prouděním (kovekcí),
3. zářením (radiací).

⁵¹ $\frac{\partial T}{\partial \tau} = 0$.

⁵²Deformace se přepočítá z teplot pomocí součinitele délkové roztažnosti α_T .

Přenos tepla vedením

Přenos tepla vedením se řídí tzv. Fourierovým zákon, který je definován pomocí vztahu

$$\dot{q} = -\lambda \operatorname{grad} T, \quad (8.2)$$

kde:

- $\lambda \left[\frac{\text{W}}{\text{mK}} \right]$ je součinitel tepelné vodivosti,
- $T \text{ [K]}$ je teplota,
- $\operatorname{grad} T = \left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z} \right) \left[\frac{\text{K}}{\text{m}} \right]$.

Výsledkem operace $\operatorname{grad} T$ je vektorové pole vyjadřující směr a velikost největší změny skalárního pole T . Ve vztahu (8.2) je znaménko mínus, protože zároveň musí platit 2. zákon termodynamiky⁵³. Součinitel tepelné vodivosti λ je materiálová charakteristika, která se obecně s teplotou mění ($\lambda = f(T)$) [13].

Vedení tepla lze vyjádřit pomocí diferenciální rovnice jako

$$\frac{dT}{d\tau} = \frac{\lambda}{c_p \rho} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{Q^*}{c_p \rho}, \quad (8.3)$$

kde:

- $c_p \left[\frac{\text{J}}{\text{kgK}} \right]$ je měrná tepelná kapacita za konstantního tlaku,
- $\rho \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right]$ je hustota,
- $Q^* \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^3} \right]$ je měrný tepelný výkon,
- $\tau \text{ [s]}$ je čas.

Jedná se o parciální diferenciální rovnici druhého řádu [13].

⁵³Jednou z formulací 2. zákona termodynamiky je, že teplo nemůže samovolně přecházet z chladnějšího tělesa na teplejší.

Přenos tepla prouděním

Přenos tepla prouděním (konvekcí) se řídí tzv. Newtonovým ochlazovacím zákonem, který je definován pomocí vztahu

$$\dot{q} = \alpha_c (T_w - T_\infty), \quad (8.4)$$

kde:

- $\alpha_c \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}} \right]$ je součinitel přestupu tepla,
- $T_w \text{ [K]}$ je teplota povrchu,
- $T_\infty \text{ [K]}$ je teplota prostředí v dostatečné vzdálenosti od povrchu [13].

Součinitel přestupu tepla se dá stanovit různými způsoby. Jednou z možností je zjištění měřením pomocí tzv. alfametru. Další možností je na základě podobnostní teorie, tzv. podobnostních čísel. Příklady podobnostních čísel jsou:

- Reynoldsovo číslo (Re),
- Nusseltovo číslo (Nu),
- Prandtlovo číslo (Pr) a další.

Všechna tato čísla jsou bezrozměrná. Tento způsob slouží spíš jako odhadnutí hodnoty součinitele přenosu tepla pro prvotní návrh a výpočet [13].

Přenos tepla zářením

Teplu vysílá ze svého povrchu každé těleso o nenulové teplotě ($T \neq 0 \text{ K}$). Hustota tepelného toku vyzařována tělesem o teplotě T se vypočítá pomocí Stefan-Boltzmannova zákona, který má tvar dle vztahu (8.5)

$$\dot{q} = \varepsilon \sigma_0 T^4, \quad (8.5)$$

kde:

- $\varepsilon [-]$ je poměrná zářivost (pro dokonale černé těleso $\varepsilon = 1$),
- σ_0 je Stefan-Boltzmannova konstanta, $\sigma_0 = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4}$,
- $T \text{ [K]}$ je teplota.

Výše uvedené poznatky byly převzaty z [13].

8.3.2 Počáteční podmínky

Počátečními podmínkami se rozumí rozložení teplotního pole v čase $\tau = 0$. Lze tedy psát

$$T(x, y, z, \tau = 0) = f(x, y, z).$$

Často se uvádí, že $T(\tau = 0) = \text{konst.}$

8.3.3 Okrajové podmínky

Okrajových podmínek pro řešení přenosu tepla je více druhů.

1. Dirichletovy:

- Určují rozložení teploty na povrchu tělesa v čase.
- $T_w = f(x_w, y_w, z_w, \tau)$, často se uvádí $T_w = \text{konst.}$

2. Newtonovy:

- Určují rozložení hustoty tepelného toku na povrchu tělesa v čase.
- $\dot{q}_w = f(x_w, y_w, z_w, \tau)$, často se uvádí $\dot{q}_w = \text{konst.}$

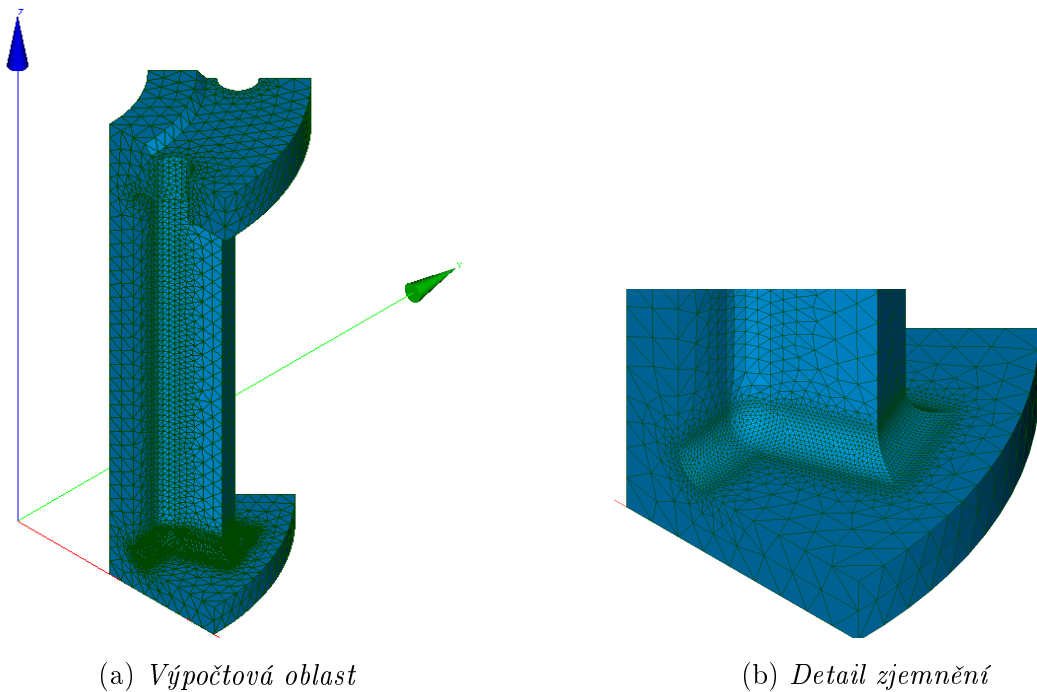
3. Neumannovy:

- Určují rozložení součinitele přestupu tepla na povrchu tělesa v čase.
- $\alpha_w = f(x_w, y_w, z_w, \tau)$, často se uvádí $\alpha_w = \text{konst.}$

Poznatky o okrajových a počátečních podmínkách byly převzaty z [13].

8.4 Numerické řešení

Abychom ušetřili počet prvků a výpočetní čas, využijeme opět symetrii úlohy a budeme řešit pouze $1/16$ tělesa. Vzhledem k tvaru součásti není možné použít rovinný model, je nutné použít model prostorový a 3D prvky typu solid. Jelikož je tvar tělesa docela složitý (žebrování, díry), není možné vytvořit síť tvořenou hexaedry bez mnohonásobného dělení pomocí *slice/partition*. Vzhledem k složitosti součásti také opět využijeme import z CAD systému SolidWorks. Vytvoříme tedy síť tvořenou tetraedry (viz obr. 8.3a), u které provedeme zjemnění v okolí všech rádiusových přechodů (viz obr. 8.3b).

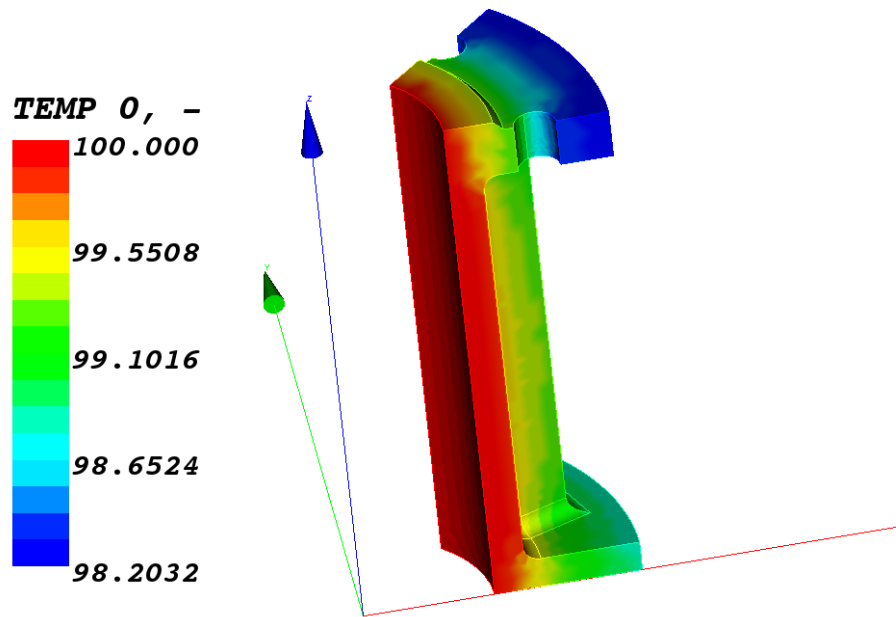


Obrázek 8.3: Příklad 5-výpočetní síť

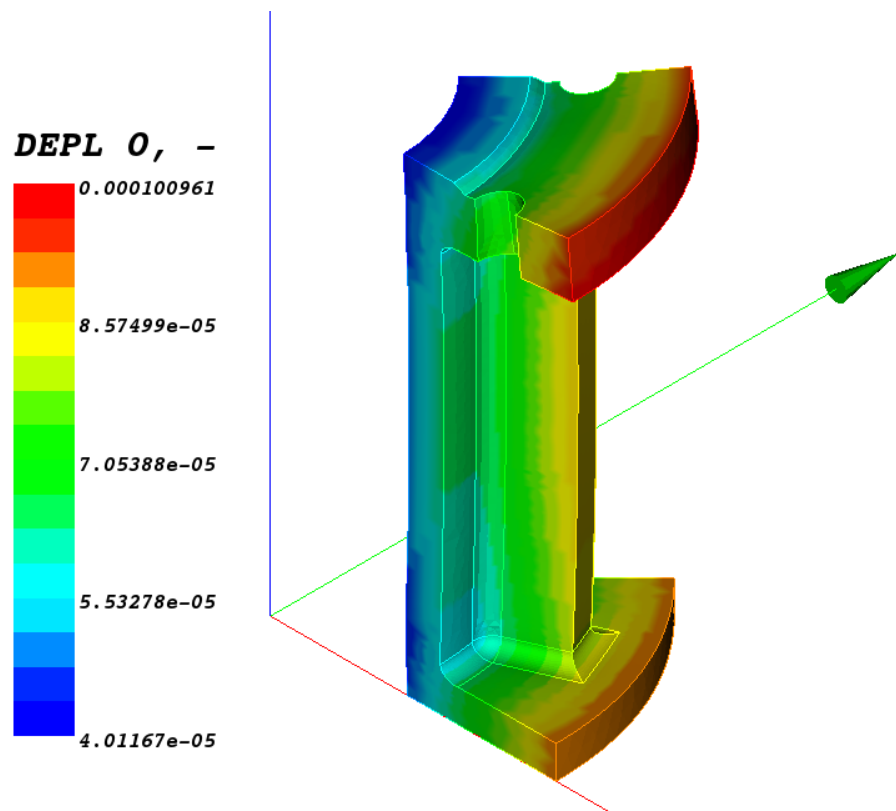
Na oficiálních stránkách Code_Asteru v instruktážním dokumentu o termice (<http://code-aster.org/V2/UPLOAD/DOC/Formations/07-thermics.pdf>) je uvedeno, že pro termickou analýzu se doporučuje použít prvky s lineární bázovou funkcí, pro strukturální analýzu naopak prvků s kvadratickou bázovou funkcí. Této rady uposlehneme a pro termickou analýzu vytvoříme síť lineárních prvků. V *.comm souboru pomocí příkazu `CREA_MALLAGE` vytvoříme z lineární sítě síť kvadratickou, kterou aplikujeme ve strukturální analýze. Okrajové podmínky se tvoří v `AFF_CHAR_THER`. Teplota skupiny uzlů se zavádí pomocí příkazu `TEMP_IMPO`. Konvekce se v Code_Asteru zavádí pomocí příkazu `ECHANGE`, jehož parametry jsou skupiny, na které konvekce probíhá, součinitel přestupu tepla⁵⁴ (`COEF_H`) a teplota okolí (`TEMP_EXT`). Řešení ustálené lineární termické analýzy je `THER_LINEAIRE`.

Výsledky z termické analýzy je nutno nejprve převést na kvadratickou síť pomocí `PROJ_CHAMP`, tím vznikne nový soubor výsledků. Tento výsledkový soubor se nahraje do materiálového modelu `AFFE_MODELE`, sekce `AFFE_VARC`, kde je nutno zadat také referenční teplotu.

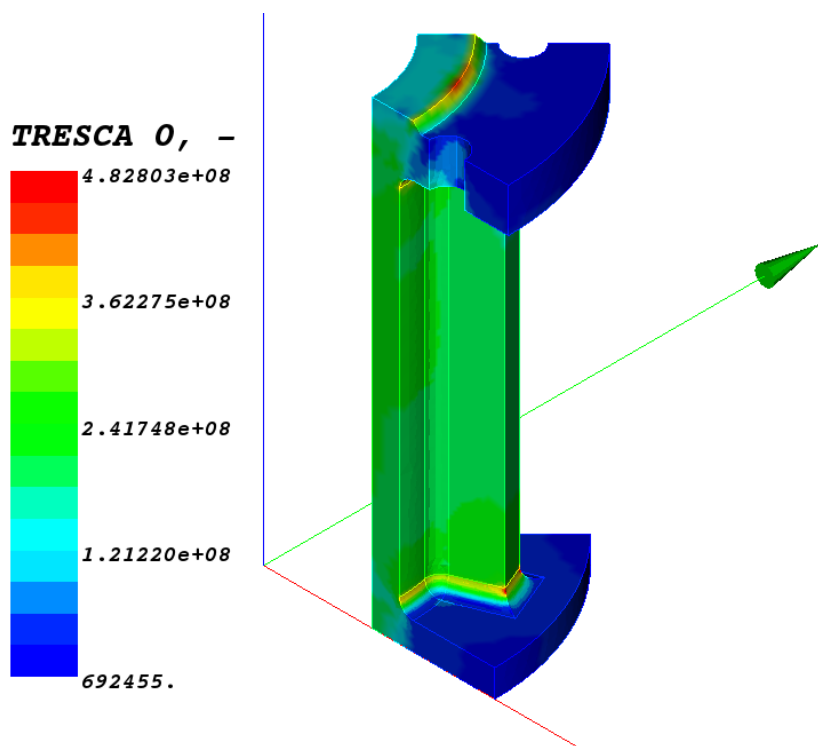
⁵⁴V této úloze byly použity opět základní jednotky SI (kg, m, s).



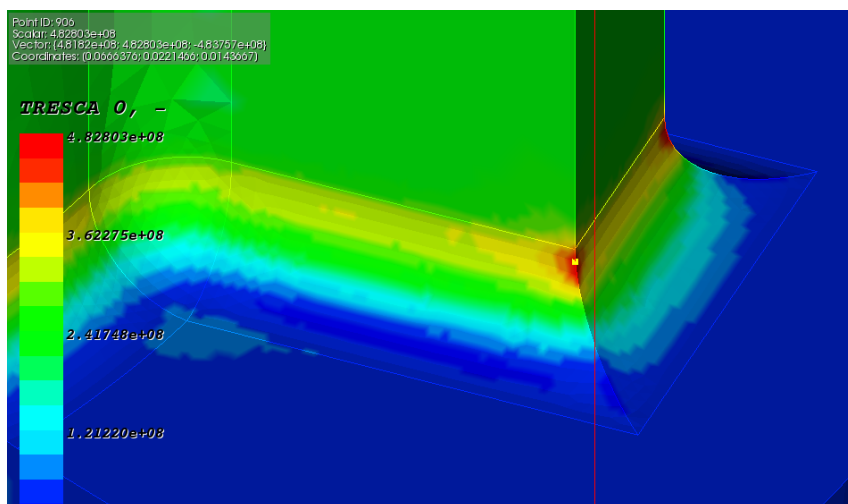
(a) Teplota [°C]



(b) Deformovaný tvar [m] (200× zvětšeno)



(c) $\sigma_{\text{red}, \tau_{\text{max}}}$ [Pa]



(d) Detail na maximum napětí⁵⁵

Obrázek 8.4: Příklad 5-numerickej výsledky

⁵⁵ Žlutý čtvereček v obr. 8.4d ukazuje místo s maximálním napětím.

8.5 Zhodnocení výsledků

Tabulka 8.1: *Shrnutí výsledků příkladu 5*

	t_{\max} [°C]	t_{\min} [°C]	σ_{\max}^a [MPa]
Salome Meca	100	98,203	482,803
Ansys Workbench	100	98,204	476,25

^aRedukované napětí podle podmínky τ_{\max}

Z pohledu na tab. 8.1 je patrné, že při řešení termické úlohy je odchylka teplot vypočtených Salome Meca se od Ansysu je naprosto zanedbatelná vůči numerické chybě. Bohužel tato úloha není analytická řešitelná z důvodu složité geometrie, takže hodnotu minimální teploty není možno porovnat s přesnou hodnotou. Napětí se nejvíce koncentruje v dolním přechodu. Vzájemná odchylka hodnot z obou programů je asi 1,5 %.

Je nutno zmínit, že způsob výroby může ovlivnit součinitel tvaru v přechodu žebra a mezikruží. Téměř ostrá hrana na stěnách žeber by vznikla při výrobě svařováním, kdy součástka je vyrobena z několika dílů. Nutno ale poznamenat, že při svařování vzniká v okolí svarů tepelně ovlivněná oblast, která může způsobit křehké chování materiálu. Naopak při výrobě odléváním nebo kováním nikdy nevznikne na povrchu ostrá hrana, u odlévání z důvodu zabíhavosti materiálu a u kování z důvodu koncentrace napětí v zápustce při jednotlivých úderech. Nenulový poloměr zaoblení by mohl vést k zvýšení nebo snížení součinitele tvaru α v přechodu žebra.

Přestože mez kluzu materiálu je 500 MPa, volil bych volbu lepšího materiálu nebo úpravu geometrie, protože numerický výpočet je zatížen chybou a také mez kluzu jako materiálový parametr má svou variabilitu. Navíc po předchozích technologických operacích je v součástce určitá zbytková napjatost, která nelze žíháním k snížení zbytkového napětí zcela odstranit.

9 Závěr

V úvodu práce byla zmíněna důležitost výpočtových systémů a numerických metod v inženýrské praxi. V úvodu jsou také uvedeny možnosti instalace prostředí Salome Meca a řešiče Code_Aster⁵⁶.

Následně byly zmíněny základní principy MKP a Lagrangeův variační princip jako jedna z možností popisu podstaty deformační varianty MKP. Posléze byly popsány základní analytické metody pružnosti a pevnosti, konkrétně prutových těles a to Castiglianova věta a diferenciální rovnice průhybové čáry.

Následovaly 2 ilustrativní úlohy s prutovými tělesy, které byly $1\times$ nebo vícekrát staticky neurčitě a zároveň se u nich vyskytoval vrubový účinek. Bylo zde využito spojování prutových prvků s prvky objemovými právě pro výpočet koncentrace napětí v místě vrubů. Výsledky byly porovnány s analytickým řešením s využitím nomogramů pro určení součinitele tvaru α a s komerčním softwarem Ansys Workbench. Výsledky se lišily v rozmezí do 10% (viz tab. 4.1 a 5.1), což může mít za následek numerická chyba výpočtu a chyba určení součinitele tvaru α (jedná se o experimentálně získaná data, která byla aproximována křivkami).

Další úlohou byla opět strukturální analýza, nyní ale s rotačně symetrickým tělesem, konkrétně rotující stěnou. Zde byla posouzena úroveň modelu při výpočtu napjatosti ozubeného kola za volné rotace. Opět byla provedena verifikace s analytickým řešením a Ansyssem Workbench (viz tab. 6.2). Na závěr byl zjištěn vliv drážkování otvoru kola na výslednou napjatost.

Byla provedena také dynamická úloha, při které bylo cílem zjistit vlastní frekvence kmitání desky (viz tab. 7.4) a následně odezvu na harmonické buzení liniovým zatížením na volném konci (viz obr. 7.5). Srovnání bylo provedeno pomocí softwaru Ansys Classic (viz obr. 7.6a a 7.6b).

Jako poslední příklad byla úloha, která kombinovala ustálenou teplotní a strukturální analýzu. Jednalo se o potrubní součást, kde protékající médium ohřívalo vnitřní stěnu trubky a vně probíhala přirozená konvekce (viz obr. 8.1). Výsledky byly srovnány pouze s Ansyssem Workbench (viz tab. 8.1), protože z důvodu složitosti geometrie není tato úloha analyticky řešitelná.

⁵⁶Obě možnosti byly v rámci této práce vyzkoušeny a obě fungují spolehlivě.

Nyní v krátkosti zmíníme výhody/nevýhody softwaru Salome Meca.

Výhody

- OpenSource distribuce.
- Neomezený počet prvků/uzlů⁵⁷.
- Možnost spojit různé typy analýz (strukturální, dynamická, teplotní atd.) v rámci jednoho výpočetního souboru.
- Pro post-processing je možnost využít program ParaView, který má rozsáhlejší možnosti než vestavěný modul *Post-Pro*⁵⁸.

Nevýhody

- Horší síťovací metody a algoritmy.
- Neintuitivní zadávání OP-nutnost tvořit skupiny, na které se OP aplikují.
- Program se píše formou příkazů (analogie k prostředí Ansys APDL (Classic)).
- Slabší uživatelská podpora.
- Horší post-processing:
 - Nutnost zadat, které veličiny se mají vytisknout do výsledkového souboru.
 - Horší interpretace výsledků (složitější tvorba obrázků⁵⁹).
- Omezená podpora OS Windows.

⁵⁷Studentská licence Ansysu má omezený počet uzlů na 32 000. Při analýze kola za volné rotace došlo dále ke zjištění, že studentská licence je omezena i na složitost geometrie (evolventní přímková plocha).

⁵⁸Tento modul byl od verze 2014.1 zrušen.

⁵⁹Výsledkové obrázky v této práci byly tvořeny v modulu *Post-Pro* a následně vytištěny pomocí programu Shutter jako snímek plochy.

Zda zvolit komerční nebo volně dostupný software, to záleží na mnoha faktorech. Pokud se uživateli počáteční investice do zakoupení licence komerčního programu vrátí, není důvod se jim vyhýbat, navíc jejich uživatelská podpora je daleko rozsáhlejší. Naopak, pokud uživatel nemá dostatečné prostředky pro zakoupení licence nebo se mu investice nevrátí, řešením může být volně dostupný software, např. zde zmíněný Code_Aster. Jednoznačně lze konstatovat, že zmíněné výhody volně dostupných softwarů kompenzují jejich nevýhody nebo je dokonce i převyšují. Uživatel musí pouze překonat počáteční bariéru a pochopit metodiku tvorby výpočtových modelů, protože jak bylo zmíněno, volně dostupné programy nebývají tak intuitivní jako programy komerční, kde se vývojáři snaží uživateli práci co nejvíce usnadnit, což může být na druhou stranu kontraproduktivní a vést pak k mnoha omylům, které mohou mít někdy katastrofální následky.

Celkově lze říci, že ve srovnání s programem Ansys je řešič Code_Aster velice schopný a na inženýrské úrovni je adekvátně přesný (odchylka od analytického řešení a komerčního softwaru Ansys nepřesáhla 8 %).

Literatura

- [1] AUBRY, Jean-Pierre. *Beginning with Code_Aster: A Practical Introduction to Finite Element Method Using Code_Aster, Gmsh and Salome*. Framasoft, 2013, 357 s. ISBN 979-10-92674-03-3. Dostupné také z: http://framabook.org/docs/Code_Aster/beginning_with_Code_Aster_JPAubry_20131206.pdf
- [2] JANÍČEK, Přemysl. *Mechanika těles: pružnost a pevnost I*. 3. přeprac. vyd. Brno: CERM, 2004. 287 s. ISBN 80-214-2592-X.
- [3] ONDRÁČEK, Emanuel. *Mechanika těles: pružnost a pevnost II*. 4. přeprac. vyd., Brno: CERM, 2006. 262 s. ISBN 80-214-3260-8.
- [4] PETRUŠKA, Jindřich. *MKP v inženýrských výpočtech* [online]. 2011 [cit. 2016-11-24], Dostupné z: <http://www.umd.fme.vutbr.cz/img/fckeditor/file/opory/RIV/MKP2011.pdf>.
- [5] ČSN 01 4607. *Ozubená kola čelní s evolventním ozubením: Základní profil*. Praha: Vydavatelství Úřadu pro normalizaci a měření, 1979. 8 s. Třídící znak 01 4607.
- [6] ČSN 01 4952. *Drážková spojení evolventní s úhlem profilu 30°: Jmenovité průměry, moduly a počty zubů*. Praha: Český normalizační institut, 1981. 8 s. Třídící znak 01 4952.
- [7] JULIŠ, Karel a Rudolf BREPTA. *Mechanika II. díl: Dynamika*. Praha: SNTL, 1987. 684 s. ISBN 04-220-87.
- [8] TIMOSHENKO, Stephen. *Vibration Problems In Engineering*. 2nd ed., New York: D. Van Nostrand, 1937. 476 s. ISBN 14-437-3167-6.
- [9] HARTOG, J. P. Den. *Mechanical Vibrations*. 3rd ed., New York: McGraw-Hill, 1947. 496 s. ISBN 14-437-2536-6.

- [10] KRATOCHVÍL, Ctírad a Jaromír SLAVÍK. *Mechanika těles: dynamika*. Vyd. 4., V Akademickém nakl. CERM 2. vyd. Brno: CERM, 2007. ISBN 978-80-214-3446-2.
- [11] SHIGLEY, Joseph Edward, Charles R. MISCHKE a Richard G. BUDYNAS. *Konstruování strojních součástí*. Editovali Martin HARTL a Miloš VLK. Brno: VUTIUUM, 2010. 1159 s. ISBN 978-80-214-2629-0.
- [12] EICHHORN, M., E. DOUJAK a L. WALDNER. Investigation of the fluid-structure interaction of a high head Francis turbine using OpenFOAM and Code_Aster. *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science* [online]. 2016, 49(7), 072005 [cit. 2017-03-24]. DOI: 10.1088/1755-1315/49/7/072005. ISSN 1755-1307.
- [13] ŠTĚTINA, Josef. *Přednášky z předmětu 6TT (Termomechanika)*. Akademický rok 2016/2017. [online]. [cit. 2017-04-14]. Dostupné z: <http://studyenergyweb.fme.vutbr.cz/elearning/course/view.php?id=90>.
- [14] NÁVRAT, Tomáš a Petr VOSYNEK. *Přednášky z předmětu 6KP (Metoda konečných prvků a výpočetní systém Ansys)*. Akademický rok 2016/2017.

10 Seznam použitých zkratek a symbolů

Značka	Jednotka	Popis
E	[Pa]	Youngův modul pružnosti v tahu
μ	[–]	Poissonův poměr
G	[Pa]	Youngův modul pružnosti ve smyku
σ_i	[Pa]	Normálové napětí ve směru osy i , $i = x, y, z$
τ_{ij}	[Pa]	Smykové napětí v rovině ij , $i, j = x, y, z$ ($i \neq j$)
o_i	$\left[\frac{\text{N}}{\text{m}^3}\right]$	Objemové zatížení ve směru osy i , $i = x, y, z$
ε_i	[–]	Poměrná délková deformace, $i = x, y, z$
γ_{ij}	[–]	Poměrná úhlová deformace, $i, j = x, y, z$ ($i \neq j$)
J_y	[m ⁴]	Kvadratický moment průřezu Ψ k ose y
$U_{y\Psi_1}$	[m ³]	Statický moment průřezu Ψ_1 k ose y
u	[m]	Posuv ve směru osy x
v	[m]	Posuv ve směru osy y
w	[m]	Posuv ve směru osy z
M_{oi}	[Nm]	Ohybový moment, $i = y, z$
T_i	[N]	Posouvající síla, $i = y, z$
N	[N]	Normálová síla
M_k	[Nm]	Kroutící moment
n	$\left[\frac{1}{\text{min}}\right]$	Otáčky
ω	$\left[\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right]$	Úhlová rychlost
α	[–]	Součinitel tvaru
σ_{red}	[Pa]	Redukované napětí
σ_K	[Pa]	Mez kluzu materiálu
k_K	[–]	Bezpečnost vůči MSP
w_{dov}	[m]	Dovolený průhyb
k_D	[–]	Bezpečnost vůči MSD
r	[m]	Radiální souřadnice
σ_r	[Pa]	Radiální napětí

σ_t	[Pa]	Tečné (tangenciální) napětí
q	$\left[\frac{\text{N}}{\text{m}}\right]$	Liniové zatížení
Δf	[Hz]	Rozsah budící frekvence
ξ	[–]	Poměrný útlum
α_r	$\left[\frac{1}{\text{s}}\right]$	Součinitel viskózního tlumení
β_r	[s]	Součinitel viskózního tlumení
M	[kg]	Matice hmotnosti
B	$\left[\frac{\text{Ns}}{\text{m}}\right]$	Matice tlumení
Q	[N]	Matice buzení
q, q̇, q̈	[m], $\left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]$, $\left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right]$	Zobecněná souřadnice a její časové derivace
Π	[J]	Potenciální energie (potenciál)
K	$\left[\frac{\text{N}}{\text{m}}\right]$	Matice tuhosti
F	[N]	Matice zatížení
u	[m]	Matice neznámých deformačních parametrů
A		Matice soustavy
x		Vektor neznámých
b		Vektor pravých stran
ρ	$\left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right]$	Hustota materiálu
λ	$\left[\frac{\text{W}}{\text{mK}}\right]$	Součinitel tepelné vodivosti
α_c	$\left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}\right]$	Součinitel přestupu tepla
α_T	$\left[\frac{1}{\text{K}}\right]$	Součinitel délkové roztažnosti
c_p	$\left[\frac{\text{J}}{\text{kgK}}\right]$	Měrná tepelná kapacita za konstantního tlaku
T	[K]	Teplota (termodynamická)
t	[°C]	Teplota
\dot{q}	$\left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2}\right]$	Hustota tepelného toku
\dot{Q}	[W]	Tepelný tok
SR		Statická rovnováha
MKP		Metoda konečných prvků
FEM		Finite element method
FVM		Finite volume method
GCS		Global coordinates system
CCS		Cylindrical coordinates system
VVÚ		Výsledné vnitřní účinky
MSP		Mezní stav pružnosti
MSD		Mezní stav deformace

11 Seznam příloh

Součástí práce je kapitola obsahující vztahy využívané k analytickým výpočtům u jednotlivých příkladů, včetně jejich odvození (viz kap. [A](#)).

Součástí práce je také DVD, které obsahuje:

- elektronickou verzi této práce ve formátu *.pdf,
- obrázkovou přílohu ve formátu *.pdf,
- skripty z Matlabu pro řešení soustav rovnic a průběhů napětí.

A Vztahy k příkladům

A.1 Příklad 1

A.1.1 Výpočet F_B -Castiglianova věta

$$\begin{aligned}w_B &= \frac{\partial W}{\partial F_B} = \int_{\gamma} \frac{M_{oy}}{EJ_y} \frac{\partial M_{oy}}{\partial F_B} dx + \int_{\gamma} \frac{\beta T_z}{GS} \frac{\partial T_z}{\partial F_B} dx = 0 \\ \frac{1}{EJ_y} \left(\underbrace{\int_0^c -Fx_1 \cdot 0 dx_1}_{=0} + \int_0^d (-F(c+x_2) + F_Bx_2)x_2 dx_2 + \int_0^{l_1} (-F(c+d+x_3) \right. \\ &+ F_B(d+x_3) + M)(d+x_3) dx_3 \left. \right) + \frac{\beta}{GS} \left(\underbrace{\int_0^c -F \cdot 0 dx_1}_{=0} + \int_0^{d+l_1} (-F + F_B) \cdot 1 dx_2 \right) = 0 \\ \frac{\beta}{GS} \underbrace{\int_0^{d+l_1} (-F + F_B) \cdot 1 dx_2}_{=I_1} + \frac{1}{EJ_y} \underbrace{\left(\int_0^d (-F(c+x_2) + F_Bx_2)x_2 dx_2 \right)}_{=I_2} \\ &+ \underbrace{\int_0^{l_1} (-F(c+d+x_3) + F_B(d+x_3) + M)(d+x_3) dx_3}_{=I_3} = 0 \\ I_1 &= \int_0^{d+l_1} (-F + F_B) dx_2 = (-F + F_B)[x_2]_0^{d+l_1} = (-F + F_B)(d + l_1) \\ I_2 &= \int_0^d \left(-F(cx_2 + x_2^2) + F_Bx_2^2 \right) dx_2 = \left[-F \left(c \frac{x_2^2}{2} + \frac{x_2^3}{3} \right) + F_B \frac{x_2^3}{3} \right]_0^d \\ &= -F \left(c \frac{d^2}{2} + \frac{d^3}{3} \right) + F_B \frac{d^3}{3} \\ I_3 &= \int_0^{l_1} \left(-F(cd + cx_3 + d^2 + 2dx_3 + x_3^2) + F_B(d^2 + 2dx_3 + x_3^2) + M(d + x_3) dx_3 \right) \\ &= \left[-F \left(cdx_3 + c \frac{x_3^2}{2} + d^2x_3 + dx_3^2 + \frac{x_3^3}{3} \right) + F_B \left(d^2x_3 + dx_3^2 + \frac{x_3^3}{3} \right) + M \left(dx_3 + \frac{x_3^2}{2} \right) \right]_0^{l_1} \\ &= -F \left(cdl_1 + c \frac{l_1^2}{2} + d^2l_1 + dl_1^2 + \frac{l_1^3}{3} \right) + F_B \left(d^2l_1 + dl_1^2 + \frac{l_1^3}{3} \right) + M \left(dl_1 + \frac{l_1^2}{2} \right)\end{aligned}$$

Dosazením I_1 , I_2 a I_3 zpět, převodem známých veličin a úpravami dostáváme konečný vztah (A.1) pro sílu F_B ve tvaru

$$F_B = \frac{\frac{1}{EJ_y} \left[F \left(c \frac{d^2}{2} + \frac{d^3}{3} + cdl_1 + c \frac{l_1^2}{2} + d^2l_1 + d \frac{l_1^2}{2} + \frac{l_1^3}{3} \right) - M \left(dl_1 + \frac{l_1^2}{2} \right) \right]}{\frac{1}{EJ_y} \left[\frac{d^3}{3} + d^2l_1 + dl_1^2 + \frac{l_1^3}{3} \right] + \frac{\beta}{GS} [d + l_1]} + \frac{\frac{\beta F}{GS} [d + l_1]}{\frac{1}{EJ_y} \left[\frac{d^3}{3} + d^2l_1 + dl_1^2 + \frac{l_1^3}{3} \right] + \frac{\beta}{GS} [d + l_1]}. \quad (\text{A.1})$$

A.1.2 Maximální průhyb

Maximální průhyb hledáme pomocí Castiglianovy věty na neznámém rameni (viz obr. A.1). Můžeme tedy psát

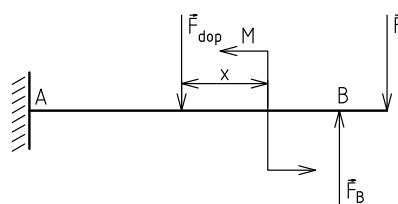
$$w = \frac{\partial W}{\partial F_{\text{dop}}} = \int_{\gamma} \left(\frac{\beta T_z}{GS} \frac{\partial T_z}{\partial F_{\text{dop}}} + \frac{M_{oy}}{EJ_y} \frac{\partial M_{oy}}{\partial F_{\text{dop}}} \right) dx. \quad (\text{A.2})$$

Jediná VVÚ, která jsou funkcí F_{dop} , jsou

$$T_{z4} = F - F_B - F_{\text{dop}}, \quad (\text{A.3a})$$

$$M_{oy4} = -F(c + d + x + x_4) + F_B(d + x + x_4) + M - F_{\text{dop}}x_4, \quad (\text{A.3b})$$

kde $x_4 \in \langle 0; l_1 - x \rangle$.



Obrázek A.1: Řešení w_{\max} pomocí Castiglianovy věty, $\left| \vec{F}_{\text{dop}} \right| = 0$

Dosazením (A.3a) a (A.3b) a jejich příslušných parciálních derivací do (A.2) získáváme

$$\begin{aligned}
 w = \int_0^{l_1-x} \frac{\beta(F - F_B)}{GS} \cdot 1 \, dx_4 + \frac{1}{EJ_y} \int_0^{l_1-x} & - \left(F(c + d + x + x_4) \right. \\
 & \left. + F_B(d + x + x_4) + M \right) (-x_4) \, dx_4 = \frac{\beta(F - F_B)}{GS} \left[x_4 \right]_0^{l_1-x} \\
 & + \frac{1}{EJ_y} \left[F \left((c + d + x) \frac{x_4^2}{2} + \frac{x_4^3}{3} \right) - F_B \left((d + x) \frac{x_4^2}{2} + \frac{x_4^3}{3} \right) - M \frac{x_4^2}{2} \right]_0^{l_1-x}.
 \end{aligned}$$

Dosazením mezi získáváme výsledný vztah (A.4) pro průhyb w

$$\begin{aligned}
 w = \frac{\beta(F - F_B)}{GS} (l_1 - x) + \frac{1}{EJ_y} \left[F \left((c + d + x) \frac{(l_1 - x)^2}{2} + \frac{(l_1 - x)^3}{3} \right) \right. \\
 \left. - F_B \left((d + x) \frac{(l_1 - x)^2}{2} + \frac{(l_1 - x)^3}{3} \right) - M \frac{(l_1 - x)^2}{2} \right]. \quad (\text{A.4})
 \end{aligned}$$

A.2 Příklad 2

A.2.1 Výpočet N_A a M_A -Castiglianova věta

$$u_A = \frac{\partial W}{\partial N_A} = \int_{\gamma} \frac{M_{oy}}{EJ_y} \frac{\partial M_{oy}}{\partial N_A} dx = 0 \quad (\text{A.5a})$$

$$\vartheta_A = \frac{\partial W}{\partial M_A} = \int_{\gamma} \frac{M_{oy}}{EJ_y} \frac{\partial M_{oy}}{\partial M_A} dx = 0 \quad (\text{A.5b})$$

$$\begin{aligned} u_A &= \frac{1}{EJ_y} \left(\underbrace{\int_0^a \left(M_A - \frac{F}{2} x_1 \right) \cdot 0 dx_1}_{=0} + \int_0^a \left(M_A - \frac{F}{2} a + N_A x_2 \right) \cdot x_2 dx_2 \right) = \\ &= \frac{1}{EJ_y} \left[M_A \frac{x_2^2}{2} - \frac{F a x_2^2}{2} + N_A \frac{x_2^3}{3} \right]_0^a = \frac{a^2}{EJ_y} \left(\frac{M_A}{2} - \frac{F a}{4} + \frac{N_A a}{3} \right) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vartheta_A &= \frac{1}{EJ_y} \left(\int_0^a \left(M_A - \frac{F}{2} x_1 \right) \cdot 1 dx_1 + \int_0^a \left(M_A - \frac{F}{2} a + N_A x_2 \right) \cdot 1 dx_2 \right) = \\ &= \frac{1}{EJ_y} \left(\left[M_A x_1 - \frac{F}{2} \frac{x_1^2}{2} \right]_0^a + \left[M_A x_2 - \frac{F a}{2} x_2 + N_A \frac{x_2^2}{2} \right]_0^a \right) = \\ &= \frac{a}{EJ_y} \left(2M_A - F \frac{3a}{4} + N_A \frac{a}{2} \right) = 0 \end{aligned}$$

Úpravou výrazů u_A a ϑ_A získáváme soustavu rovnic

$$\frac{M_A}{2} + \frac{N_A a}{3} = \frac{F a}{4}, \quad (\text{A.6a})$$

$$2M_A + \frac{N_A a}{2} = \frac{3F a}{4}. \quad (\text{A.6b})$$

Maticově můžeme soustavu přepsat jako

$$\begin{pmatrix} \frac{a}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{a}{2} & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} N_A \\ M_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{F a}{4} \\ \frac{3F a}{4} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.7})$$

Předchozí řešení vychází z předpokladu, že N_A a M_A jsou vzájemně nezávislé.

Nyní budeme předpokládat, že jsou vzájemně závislé. Princip řešení spočívá v tom, že vyřešíme podmínku (A.5b) a tím získáváme $M_A = f(N_A)$. Vyjádřením M_A z rovnice (A.6b) získáváme

$$M_A = \frac{3Fa}{8} - \frac{N_A a}{4}.$$

Dosazením M_A do deformační podmínky (A.5a) a jejím řešením získáme N_A .

$$u_A = \frac{1}{EJ_y} \left(\int_0^a \left(\frac{3F}{8}a - \frac{N_A}{4}a - \frac{F}{2}x_1 \right) \left(-\frac{a}{4} \right) dx_1 + \int_0^a \left(\underbrace{\frac{3F}{8}a - \frac{F}{2}a - \frac{N_A}{4}a}_{=-\frac{F}{8}a} + N_A x_2 \right) \left(-\frac{a}{4} + x_2 \right) dx_2 \right) = 0$$

$$\left[-\frac{3F}{32}a^2x_1 + \frac{N_A}{16}a^2x_1 + \frac{F}{8}a\frac{x_1^2}{2} \right]_0^a + \left[\frac{F}{32}a^2x_2 + \frac{N_A}{16}a^2x_2 - \frac{N_A}{4}a\frac{x_2^2}{2} - \frac{F}{8}a\frac{x_2^2}{2} - \frac{N_A}{4}a\frac{x_2^2}{2} + N_A\frac{x_2^3}{3} \right]_0^a = a^3 \left(-\frac{F}{16} + N_A \frac{3+3+16-6-6}{48} \right) = a^3 \left(-\frac{F}{16} + \frac{10N_A}{48} \right) = 0$$

$$N_A = \frac{3F}{10}$$

$$M_A = \frac{3F}{8}a - \frac{3F}{40}a = \frac{3F}{10}a$$

A.2.2 Maximální průhyb

$$w_{\max} = \frac{\partial W}{\partial \frac{F}{2}} = \int_{\gamma} \left(\underbrace{\frac{N}{ES} \frac{\partial N}{\partial \frac{F}{2}}}_{=I_1} + \underbrace{\frac{\beta T_z}{GS} \frac{\partial T_z}{\partial \frac{F}{2}}}_{=I_2} + \underbrace{\frac{M_{oy}}{EJ_y} \frac{\partial M_{oy}}{\partial \frac{F}{2}}}_{=I_3} \right) dx$$

$$I_1 = \frac{1}{ES} \left(\int_0^a -N_A \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) dx_1 + \int_0^a -\frac{F}{2} \cdot (-1) dx_2 \right) = \frac{1}{ES} \left(\frac{F a}{2} + \frac{3N_A a}{5} \right)$$

$$I_2 = \frac{\beta}{GS} \left(\int_0^a \frac{-F}{2} \cdot (-1) dx_1 + \int_0^a N_A \cdot \left(\frac{3}{5}\right) dx_2 \right) = \frac{\beta}{GS} \left(\frac{F a}{2} + \frac{3N_A a}{5} \right)$$

$$I_3 = \frac{1}{EJ_y} \left(\underbrace{\int_0^a \left(M_A - \frac{F}{2} x_1 \right) \left(\frac{3a}{5} - x_1 \right) dx_1}_{=I_4} \right. \\ \left. + \underbrace{\int_0^a \left(M_A - \frac{F}{2} a + N_A x_2 \right) \left(\frac{3}{5} a - a + \frac{3}{5} x_2 \right) dx_2}_{=I_5} \right)$$

$$I_4 = \left[\frac{3M_A a}{5} x_1 - \frac{3F a}{10} \frac{x_1^2}{2} - M_A \frac{x_1^2}{2} + \frac{F}{2} \frac{x_1^3}{3} \right]_0^a = \frac{M_A a^2}{10} + \frac{F a^3}{60}$$

$$I_5 = \left[-\frac{2M_A a}{5} x_2 + \frac{F a^2}{2} \frac{x_2}{5} - \frac{2N_A a}{5} \frac{x_2^2}{2} + \frac{3M_A}{5} \frac{x_2^2}{2} - \frac{F a}{2} \frac{3}{5} \frac{x_2^2}{2} + \frac{3N_A}{5} \frac{x_2^3}{3} \right]_0^a = \\ = -\frac{M_A a^2}{10} + \frac{F a^3}{20}$$

$$w_{\max} = a \left(\frac{1}{ES} + \frac{\beta}{GS} \right) \left(\frac{F}{2} + \frac{3N_A}{5} \right) + \frac{F a^3}{EJ_y} \left(\frac{1}{60} + \frac{1}{20} \right) \quad (\text{A.8})$$

A.3 Příklad 3

A.3.1 Vztahy pro rotující stěnu

Pro sestavení diferenciální rovnice radiálního posuvu u potřebujeme:

1. Rovnici rovnováhy uvolněného prvku (viz obr. A.2) v radiálním směru [3].

$$\sigma_r - \sigma_t + r \frac{d\sigma_r}{dr} = -\rho r^2 \omega^2 \quad (\text{A.9})$$

2. Geometrické rovnice uvolněného prvku [3].

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr} \quad (\text{A.10a})$$

$$\varepsilon_t = \frac{u}{r} \quad (\text{A.10b})$$

3. Konstitutivní vztahy: Hookův zákon pro dvojosou napjatost [3].

$$\sigma_r = \frac{E(\varepsilon_r + \mu\varepsilon_t)}{1 - \mu^2} \quad (\text{A.11a})$$

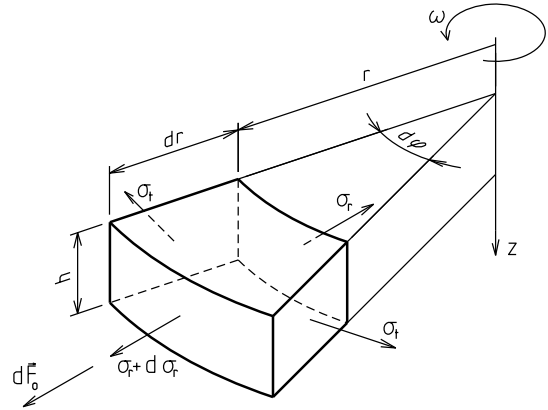
$$\sigma_t = \frac{E(\varepsilon_t + \mu\varepsilon_r)}{1 - \mu^2} \quad (\text{A.11b})$$

$$\sigma_z = 0 \quad (\text{A.11c})$$

Využitím konstitutivních a geometrických rovnic a jejich dosazením do rovnice statické rovnováhy (A.9) získáváme diferenciální rovnici

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = -\frac{1 - \mu^2}{E} \rho r \omega^2, \quad (\text{A.12})$$

která je nehomogenní diferenciální rovnicí 2. řádu Eulerova typu [3].



Obrázek A.2: Rotující stěna-uvolněný prvek (převzato a upraveno z [3])

Její řešení spočívá v zavedení substituci dle (A.13)

$$r = e^t, \quad t = \ln r \quad (\text{A.13})$$

a vyjádření derivací $\frac{d^2u}{dr^2}$ a $\frac{du}{dr}$ jako derivace u podle proměnné t (viz (A.14a) a (A.14b)).

$$\frac{du}{dr} = \frac{du}{dt} \frac{dt}{dr} = \dot{u} \frac{1}{r} \quad (\text{A.14a})$$

$$\frac{d^2u}{dr^2} = \frac{d}{dr} \left(\dot{u} \frac{1}{r} \right) = \frac{d\dot{u}}{dr} \frac{1}{r} + \dot{u} \left(-\frac{1}{r^2} \right) = \frac{d\dot{u}}{dt} \frac{dt}{dr} \frac{1}{r} - \dot{u} \frac{1}{r^2} = \frac{\ddot{u} - \dot{u}}{r^2} \quad (\text{A.14b})$$

Dosazením příslušných derivací a úpravou získáváme nehomogenní obyčejnou diferenciální rovnici 2. řádu dle (A.15)

$$\ddot{u} - u = -\frac{1 - \mu^2}{E} \rho \omega^2 r^3. \quad (\text{A.15})$$

Prvně vyřešíme homogenní část rovnice (viz níže).

$$\lambda^2 - 1 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \pm 1$$

$$u(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + u_p \quad (\text{A.16})$$

Partikulární řešení určíme pomocí metody neurčitých koeficientů.

$$b(t) = -\frac{1 - \mu^2}{E} \rho \omega^2 e^{3t}$$

Jelikož $\lambda^* = 3$ není kořenem charakteristické rovnice, partikulární řešení a jeho derivace budou ve tvaru

$$u_p = a e^{3t}, \quad \dot{u}_p = 3a e^{3t}, \quad \ddot{u}_p = 9a e^{3t}.$$

$$9a e^{3t} - a e^{3t} = -\frac{1 - \mu^2}{E} \rho \omega^2 e^{3t}$$

$$8a = -\frac{1 - \mu^2}{E} \rho \omega^2$$

$$a = -\frac{1 - \mu^2}{8E} \rho \omega^2$$

Celkové řešení diferenciální rovnice (A.15) je

$$u(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t} - \frac{1 - \mu^2}{8E} \rho \omega^2 e^{3t}.$$

Zpětným dosazením substituce (A.13) získáváme analytické řešení diferenciální řešení radiálního posuvu u dle rovnice (A.17)

$$u(r) = C_1 r + \frac{C_2}{r} - \frac{1 - \mu^2}{8E} \rho \omega^2 r^3. \quad (\text{A.17})$$

S využitím geometrických a konstitutivních vztahů můžeme z rovnice (A.17) získat vztahy pro napětí σ_r , σ_t a σ_z jako

$$\sigma_r(r) = A - \frac{B}{r^2} - \frac{3 + \mu}{8} \rho \omega^2 r^2, \quad (\text{A.18a})$$

$$\sigma_t(r) = A + \frac{B}{r^2} - \frac{1 + 3\mu}{8} \rho \omega^2 r^2, \quad (\text{A.18b})$$

$$\sigma_z(r) = 0, \quad (\text{A.18c})$$

přičemž vztahy mezi konstantami A a C_1 , resp. B a C_2 definujeme dle (A.19a), resp. (A.19b) jako

$$C_1 = \frac{1 - \mu}{E} A, \quad (\text{A.19a})$$

$$C_2 = \frac{1 + \mu}{E} B. \quad (\text{A.19b})$$

Rovnice (A.18a) až (A.19b) byly převzaty z [3].

A.3.2 Určení integračních konstant

Výpočtový model 1

Dosadíme okrajové podmínky (6.3a) a (6.3b) do vztahu pro radiální napětí σ_r dle vztahu (A.18a).

$$0 = A - \frac{B}{R_1^2} - \frac{3 + \mu}{8} \rho \omega^2 R_1^2 \quad (\text{A.20a})$$

$$0 = A - \frac{B}{R_2^2} - \frac{3 + \mu}{8} \rho \omega^2 R_2^2 \quad (\text{A.20b})$$

Získáváme soustavu 2 rovnic, kde neznámými jsou konstanty A a B . Rovnice od sebe odečteme a získáváme vztah pro konstantu B .

$$0 = B \left(\underbrace{\frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{R_2^2}}_{= \frac{R_2^2 - R_1^2}{R_1^2 R_2^2}} \right) - \frac{3 + \mu}{8} \rho \omega^2 (R_2^2 - R_1^2)$$

$$B = \frac{3 + \mu}{8} \rho \omega^2 R_1^2 R_2^2$$

Dosazením do jedné z rovnic získáme konstantu A .

$$0 = A - \frac{3 + \mu}{8} \rho \omega^2 R_1^2 - \frac{3 + \mu}{8} \rho \omega^2 R_2^2$$

$$A = \frac{3 + \mu}{8} \rho \omega^2 (R_1^2 + R_2^2)$$

Výsledné vztahy pro konstanty A a B jsou (A.21a) a (A.21b)

$$A = \frac{3 + \mu}{8} \rho \omega^2 (R_1^2 + R_2^2), \quad (\text{A.21a})$$

$$B = \frac{3 + \mu}{8} \rho \omega^2 R_1^2 R_2^2. \quad (\text{A.21b})$$

Výpočtový model 2

Dosadíme okrajové podmínky (6.9a) a (6.9b) do vztahu pro radiální napětí σ_r dle vztahu (A.18a).

$$0 = A - \frac{B}{R_1^2} - \frac{3 + \mu}{8} \rho \omega^2 R_1^2 \quad (\text{A.22a})$$

$$p = A - \frac{B}{R_2^2} - \frac{3 + \mu}{8} \rho \omega^2 R_2^2 \quad (\text{A.22b})$$

Rovnice od sebe opět odečteme a získáváme vztah pro konstantu B .

$$p = B \left(\underbrace{\frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{R_2^2}}_{= \frac{R_2^2 - R_1^2}{R_1^2 R_2^2}} \right) - \frac{3 + \mu}{8} \rho \omega^2 (R_2^2 - R_1^2)$$

$$B = \frac{p R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} + \frac{3 + \mu}{8} \rho \omega^2 R_1^2 R_2^2$$

Konstantu B dosadíme do rovnice (A.22a) a získáváme konstantu A .

$$0 = A - \left(\frac{p R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} + \frac{3 + \mu}{8} \rho \omega^2 R_2^2 \right) - \frac{3 + \mu}{8} \rho \omega^2 R_1^2$$

$$A = \frac{p R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} + \frac{3 + \mu}{8} \rho \omega^2 (R_2^2 + R_1^2)$$

Výsledné vztahy pro konstanty A a B jsou (A.23a) a (A.23b)

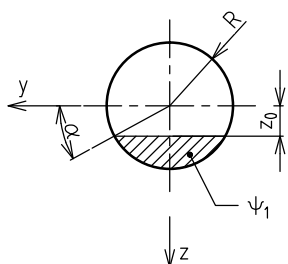
$$A = \frac{p R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} + \frac{3 + \mu}{8} \rho \omega^2 (R_2^2 + R_1^2), \quad (\text{A.23a})$$

$$B = \frac{p R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} + \frac{3 + \mu}{8} \rho \omega^2 R_1^2 R_2^2. \quad (\text{A.23b})$$

A.4 Odvození průřezové charakteristiky β

$$\beta = \iint_{\Psi} \frac{U_{y\Psi_1}^2 S}{b^2(z) J_y^2} dydz \quad (\text{A.24})$$

A.4.1 Kruhový průřez



Obrázek A.3: Kruhový průřez

$$\Psi : y^2 + z^2 = R^2$$

$$\Psi_1 : y^2 + z^2 = R^2 \\ z = z_0$$

$$\alpha = \arcsin \frac{z_0}{R}$$

$$y = \rho \cos \varphi \quad (\text{A.25a})$$

$$z = \rho \sin \varphi \quad (\text{A.25b})$$

$$dydz = \rho d\rho d\varphi \quad (\text{A.25c})$$

$$\Psi^* : 0 \leq \rho \leq R \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

$$\Psi_1^* : \frac{z_0}{\sin \varphi} \leq \rho \leq R \\ \alpha \leq \varphi \leq \pi - \alpha$$

$$U_{y\Psi_1} = \iint_{\Psi_1} z dydz \quad (\text{A.26})$$

$$\begin{aligned} U_{y\Psi_1} &= \int_{\alpha}^{\pi-\alpha} \left(\int_{\frac{z_0}{\sin \varphi}}^R \rho \sin \varphi \rho d\rho \right) d\varphi = \frac{1}{3} \int_{\alpha}^{\pi-\alpha} \sin \varphi [\rho^3]_{\frac{z_0}{\sin \varphi}}^R d\varphi \\ &= \frac{1}{3} \int_{\alpha}^{\pi-\alpha} \left(R^3 \sin \varphi - \frac{z_0^3}{\sin^2 \varphi} \right) d\varphi = \frac{R^3}{3} [-\cos \varphi]_{\alpha}^{\pi-\alpha} + \frac{z_0^3}{3} [\cot \varphi]_{\alpha}^{\pi-\alpha} \\ &= \frac{R^3}{3} (-\cos(\pi - \alpha) - (-\cos \alpha)) + \frac{z_0^3}{3} (\cot(\pi - \alpha) - \cot \alpha) \end{aligned}$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha \quad (\text{A.27a})$$

$$\cot(\pi - \alpha) = \frac{\cos(\pi - \alpha)}{\sin(\pi - \alpha)} = -\cot \alpha \quad (\text{A.27b})$$

$$U_{y\Psi_1} = \frac{2R^3}{3} \cos \alpha - \frac{2z_0^3}{3} \cot \alpha$$

$$\cos \alpha = \cos \left(\arcsin \frac{z_0}{R} \right) = \sqrt{1 - \frac{z_0^2}{R^2}} = \frac{1}{R} \sqrt{R^2 - z_0^2} \quad (\text{A.28a})$$

$$\cot \alpha = \cot \left(\arcsin \frac{z_0}{R} \right) = \frac{\sqrt{1 - \frac{z_0^2}{R^2}}}{\frac{z_0}{R}} = \frac{R}{z_0} \sqrt{1 - \frac{z_0^2}{R^2}} \quad (\text{A.28b})$$

$$U_{y\Psi_1} = \frac{2R^2}{3} \sqrt{R^2 - z_0^2} - \frac{2z_0^2}{3} \sqrt{R^2 - z_0^2} = \frac{2}{3} (R^2 - z_0^2)^{3/2}$$

$$U_{y\Psi_1} = \frac{2}{3} (R^2 - z^2)^{3/2} \quad (\text{A.29})$$

$$b(z) = 2\sqrt{R^2 - z^2} \quad (\text{A.30})$$

$$\begin{aligned} \beta_{\otimes} &= \frac{S}{J_y^2} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^R \frac{\left(\frac{2}{3} (R^2 - (\rho \sin \varphi)^2)^{3/2} \right)^2}{\left(2\sqrt{R^2 - (\rho \sin \varphi)^2} \right)^2} \rho \, d\rho \right) d\varphi \\ &= \frac{S}{9J_y^2} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^R (R^4 - 2R^2 \rho^2 \sin^2 \varphi + \rho^4 \sin^4 \varphi) \rho \, d\rho \right) d\varphi \\ &= \frac{S}{9J_y^2} \int_0^{2\pi} \left[R^4 \frac{\rho^2}{2} - 2R^2 \frac{\rho^4}{4} \sin^2 \varphi + \frac{\rho^6}{6} \sin^4 \varphi \right]_0^R d\varphi \\ &= \frac{R^6 S}{18J_y^2} \int_0^{2\pi} \left(\underbrace{1 - \sin^2 \varphi}_{=\cos^2 \varphi} + \frac{\sin^4 \varphi}{3} \right) d\varphi \end{aligned}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi \, d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (1 + \cos(2\varphi)) \, d\varphi = \pi \quad (\text{A.31a})$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^4 \varphi \, d\varphi = \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{8} - \frac{\cos(2\varphi)}{2} + \frac{\cos(4\varphi)}{8} \right) d\varphi = \frac{3\pi}{4} \quad (\text{A.31b})$$

$$\beta_{\otimes} = \frac{R^6 S}{18 J_y^2} \left(\pi + \frac{1}{3} \frac{3\pi}{4} \right) = \frac{R^6 S}{18 J_y^2} \frac{5\pi}{4}$$

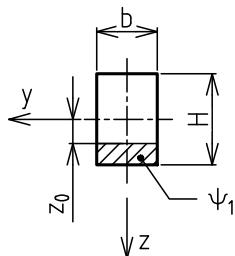
$$S = \pi R^2 \tag{A.32a}$$

$$J_y = \frac{\pi R^4}{4} \tag{A.32b}$$

$$\beta_{\otimes} = \frac{R^6 \pi R^2}{18 \left(\frac{\pi R^4}{4} \right)^2} \frac{5\pi}{4} = \frac{16 \cdot 5\pi^2 R^8}{18 \cdot 4\pi^2 R^8} = \frac{10}{9}$$

$$\beta_{\otimes} = \frac{10}{9} \tag{A.33}$$

A.4.2 Obdélníkový průřez



$$\Psi : -\frac{b}{2} \leq y \leq \frac{b}{2}$$

$$-\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2}$$

$$\Psi_1 : -\frac{b}{2} \leq y \leq \frac{b}{2}$$

$$z_0 \leq z \leq \frac{h}{2}$$

Obrázek A.4: Obdélníkový průřez

$$U_{y\Psi_1} = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left(\int_{z_0}^{\frac{h}{2}} z \, dz \right) dy = \frac{1}{2} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} [z^2]_{z_0}^{\frac{h}{2}} dy = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - z_0^2 \right)$$

$$U_{y\Psi_1} = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - z_0^2 \right) \quad (\text{A.34})$$

$$\beta_{\boxtimes} = \frac{S}{J_y^2} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left(\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\left(\frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \right)^2}{b^2} dz \right) dy$$

$$= \frac{S}{4J_y^2} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left(\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\frac{h^4}{16} - \frac{h^2 z^2}{2} + z^4 \right) dz \right) dy$$

$$= \frac{S}{4J_y^2} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left(\frac{h^5}{16} + \left[-\frac{h^2 z^3}{6} + \frac{z^5}{5} \right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \right) dy$$

$$= \frac{S}{4J_y^2} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left(\frac{h^5}{16} - \frac{h^5}{24} + \frac{h^5}{80} \right) dy = \frac{bS}{4J_y^2} \frac{h^5}{30}$$

$$S = bh \quad (\text{A.35a})$$

$$J_y = \frac{bh^3}{12} \quad (\text{A.35b})$$

$$\beta_{\boxtimes} = \frac{b^2 h}{4 \left(\frac{bh^3}{12} \right)^2} \frac{h^5}{30} = \frac{144b^2 h^6}{4 \cdot 30b^2 h^6} = \frac{144}{120} = 1,2$$

$$\beta_{\boxtimes} = 1,2 \quad (\text{A.36})$$

Seznam obrázků

2.1	Ukázky prvků	14
2.1a	Osmiuzlový šestistěn (hexaedr)	14
2.1b	Čtyřuzlový čtyřstěn (tetraedr)	14
2.1c	Nosníkový prvek	14
2.1d	Osmiuzlový čtyřúhelník	14
3.1	Castiglianova věta	17
3.2	Schéma k diferenciální rovnici ohybové čáry	18
3.3	Průběh jmenovatele v rov. (3.4)	19
4.1	Zadání příkladu 1-3D pohled	21
4.2	Příklad 1	22
4.2a	Rozměrové schéma	22
4.2b	Detail vrubu	22
4.3	Úplné uvolnění tělesa	24
4.4	VVÚ	25
4.4a	Úsek 1	25
4.4b	Úsek 2	25
4.4c	Úsek 3	25
4.5	Možnosti částečného uvolnění	26
4.5a	Uvolnění obecné vazby	26
4.5b	Uvolnění vazby vetknutí	26
4.6	Průběh napětí	31
4.7	Průběhy VVÚ-Příklad 1	32
4.7a	T_z	32
4.7b	M_{oy}	32
4.8	Koncentrace napětí v kořeni vrubu	33

4.9	Nomogram	33
4.10	Příklad 1-síť (prutového model)	35
4.11	Síť submodelu-příklad 1	36
4.11a	Síť s 3D tělesem	36
4.11b	Zjemnění v okolí vrubu	36
4.12	Příklad 1-numerické výsledky	37
4.12a	Deformovaný tvar (prutový model)-DZ	37
4.12b	Deformovaný tvar (submodel)-DZ	37
4.12c	Koncentrace napětí ve vrubu- σ_x	37
5.1	Zadání příkladu 2-3D pohled	39
5.2	Příklad 2	40
5.2a	Rozměrové schéma	40
5.2b	Detail vrubu	40
5.3	Úplné uvolnění	41
5.4	Využití osy symetrie o_1	42
5.5	Využití osy symetrie o_2	42
5.6	Úloha 2-částečné uvolnění	43
5.7	Průběhy VVÚ-příklad 2	44
5.7a	N	44
5.7b	M_{oy}	44
5.8	Nomogram 2	45
5.9	Příklad 2-síť (prutový model)	47
5.10	Příklad 2-síť (submodel)	48
5.10a	Síť s 3D tělesem	48
5.10b	Detail zjemnění sítě	48
5.11	Příklad 2-numerické výsledky	49
5.11a	Deformovaný tvar (prutový model)-DZ	49
5.11b	Deformovaný tvar (submodel)-DY	49
5.11c	Koncentrace napětí- σ_x	49
6.1	Zadání příkladu 3-3D pohled	51
6.2	Rozměry kola	52
6.3	Výpočtový model 1	53
6.4	Průběhy napětí-model 1	54

6.5	Výpočtový model 2	55
6.6	Zub ozubeného kola	56
6.6a	3D model	56
6.6b	Fyzikální vlastnosti	56
6.7	Průběhy napětí-model 2	57
6.8	Příklad 3-výpočtové sítě	58
6.8a	Disk bez zubů	58
6.8b	Ozubené kolo bez drážkování	58
6.8c	Ozubené kolo s drážkováním	58
6.8d	Detail na drážkování	58
6.9	Příklad 3-numerické výsledky	61
6.9a	σ_t -disk bez zubů	61
6.9b	σ_t -kolo bez drážkování	61
6.9c	$\sigma_{red, \tau_{max}}$ -kolo s drážkováním	61
7.1	Zadání příkladu 4-3D pohled	63
7.2	Příklad 4-rozměrové schéma	63
7.3	Skořepinový model	67
7.4	Solid model	68
7.5	A-f charakteristika-Salome Meca	70
7.6	A-f charakteristika-Ansys Classic	71
7.6a	Netlumené kmitání	71
7.6b	Tlumené kmitání	71
7.7	Ohybový mód 1	72
7.8	Ohybový mód 2	72
8.1	Úloha 5-3D pohled	75
8.2	Příklad 5-výkres součásti (rozměry v mm)	76
8.3	Příklad 5-výpočetní síť	81
8.3a	Výpočtová oblast	81
8.3b	Detail zjemnění	81
8.4	Příklad 5-numerické výsledky	84
8.4a	Teplota	84
8.4b	Deformovaný tvar	84
8.4c	$\sigma_{red, \tau_{max}}$	84

8.4d	Detail na maximum napětí	84
A.1	Řešení w_{\max} pomocí Castiglianovy věty	98
A.2	Rotující stěna-uvolněný prvek	103
A.3	Kruhový průřez	108
A.4	Obdélníkový průřez	111

Seznam tabulek

3.1	Hodnoty z grafu 3.3	19
4.1	Shrnutí výsledků příkladu 1	38
5.1	Shrnutí výsledků příkladu 2	50
6.1	Převodní tabulka souřadných systémů-Code_Aster	60
6.2	Shrnutí výsledků příkladu 3	62
7.1	Timoshenko-koeficienty	64
7.2	Den Hartog-koeficienty	65
7.3	Juliš-koeficienty	65
7.4	Vlastní frekvence: ohybové módy, osa y	73
8.1	Shrnutí výsledků příkladu 5	85