VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
ÚSTAV MATEMATIKY

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
INSTITUTE OF MATHEMATICS

MATEMATICKÉ MODELOVÁNÍ SOUSTAV S PROMĚNNOU HMOTNOSTÍ

MATHEMATICAL MODELLING OF SYSTEMS WITH A VARIABLE MASS

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE
BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE PROKOP MORAVEC
AUTHOR

VEDOUCÍ PRÁCE Doc. RNDr. JAN ČERMÁK, Csc.
SUPERVISOR

BRNO 2011

Abstrakt
Tato bakalářská práce se zabývá matematickým modelováním soustav s proměnnou hmotností a to především popsáním letu rakety při různých typech hladkého přistání. Výsledkem práce je vedle teoretické stránky daného problému i jeho numerické řešení.

Summary
This bachelor thesis deals with a mathematical modelling of systems with a variable mass, mainly with flight description of several different types of smooth landing. The result of the thesis besides theoretic aspect of the problem is also a numerical solution.

Klíčová slova
raketa, pohybové rovnice, proměnná hmotnost

Keywords
rocket, equations of motion, variable mass

MORAVEC, P.*Matematické modelování soustav s proměnnou hmotností*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ, 2011. 31 s. Vedoucí bakalářské práce Doc. RNDr. Jan Čermák, Csc.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci *Matematické modelování soustav s proměnnou hmotností* vypracoval samostatně pod vedením Doc. RNDr. Jana Čermáka Csc. s použitím materiálů uvedených v seznamu literatury.

Prokop Moravec

Děkuji svému školiteli Doc. RNDr. Janu Čermákovi Csc. za odborné vedení mé bakalářské práce, za cenné připomínky a rady.

Prokop Moravec

Obsah

1. Úvod

Obyčejné diferenciální rovnice mají zásadní význam při řešení mnoha technických a přírodovědných problémů. Mezi zkoumané problémy mimo jiné patří také dynamika letu rakety, která může být popsána soustavou obyčejných diferenciálních rovnic, jejichž řešením (při správné volbě počátečních parametrů) získáme důležité údaje, které nám pomohou tento let charakterizovat.

Jednou z hlavních charakteristik pohybové rovnice letu rakety je nezanedbatelná změna hmotnosti, k níž dochází během letu vlivem úbytku zásob paliva. Pohybové rovnice letu rakety proto patří mezi typické příklady tzv. soustav s proměnnou hmotností.

Tato bakalářská práce je rozdělena na čtyři hlavní kapitoly. V druhé kapitole nejprve ukážeme, jak se raketa bude chovat při spalování paliva raketovým motorem (tedy se změnou hmotnosti). Vyjdeme ze zákona o zachování hybnosti, poté si zavedeme relativní rychlost k, a nakonec dostaneme fyzikální základ této bakalářské práce a to *rovnici Měščerského*. Z ní pak budou vycházet veškeré následující výpočty.

V třetí kapitole se zaměříme na odvození pohybových rovnic pro jednorozměrný, dvojrozměrný a trojrozměrný případ pohybu rakety. Zde se naopak vyjde z druhého Newtonova pohybového zákona, kdy na raketu budou působit tři typy sil - gravitační, tah motoru a síla charakterizující odpor prostředí.

Ve čtvrté kapitole se pak budou již získané vztahy aplikovat na problém hladkého přistání rakety, a to ve třech různých variantách. V prvním případě bude raketa přistávat na povrch planety bez atmosféry. Ve druhém případě zanedbáme změnu hmotnosti rakety (stále přitom neuvažujeme vliv atmosféry), a nakonec řešíme variantu, kdy raketa hladce přistane na povrchu planety s atmosférou.

V poslední kapitole bude ukázán složitější model soustavy s proměnnou hmotností - letadlo.

2. Základní fyzikální principy

2.1. Rovnice Měščerského

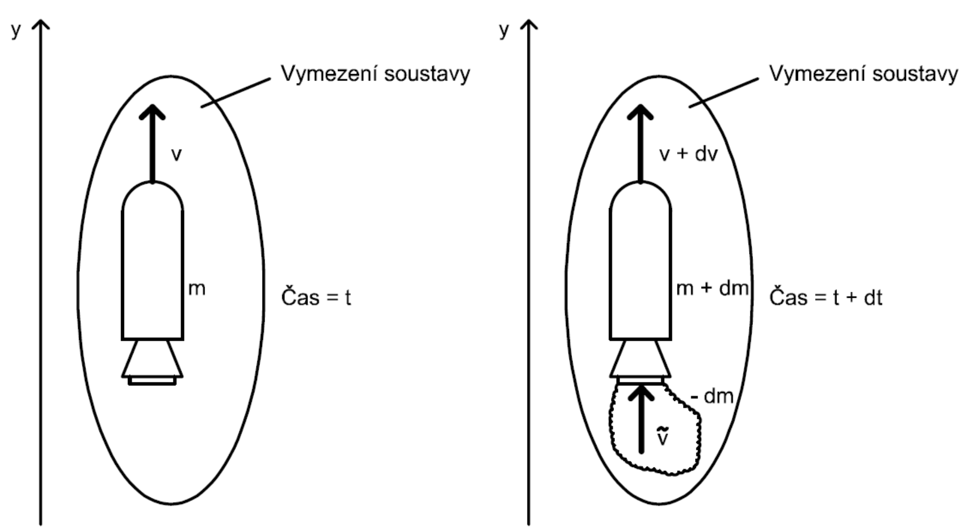
Chceme-li popsat pohyb rakety s proměnnou hmotností, musíme využít zákona o zachování hybnosti. Tento zákon však nelze uplatnit na izolovanou raketu, ale bereme-li v úvahu soustavu raketa + zplodiny (zde se hmotnost nemění, jen „přesouvá“), pak můžeme tuto soustavu využít k výpočtu zrychlení, tahu motoru atd.

Základní rovnici pro popis pohybu rakety popíšeme v inerciální vztažné soustavě s osou y, která bude orientována ve směru letu rakety, a musíme ještě uvažovat prostor, ve kterém raketa poletí - bude bez odporu prostředí a bez působení gravitačních sil - meziplanetární prostor.

Označíme:

$m = m(t)$ ... hmotnost rakety v čase t,
$v = v(t)$ ... rychlost rakety v čase t.

V časovém okamžiku $t + dt$ má raketa rychlost $v + dv$ a hmotnost $m + dm$ $(dm < 0)$. Zplodiny vzniklé spálením paliva v časovém intervalu dt mají hmotnost dm a opouštějí raketu rychlostí $\tilde{v}$.



Obrázek 2.1: Grafické znázornění zkoumaného problému [2].

Soustava tvořená raketou a zplodinami, které ji opustily během časového intervalu dt, je uzavřená [1] a izolovaná [2], platí proto *zákon o zachování hybnosti* ve tvaru

$$H_{(z)} = H_{(k)}, \tag{2.1}$$

kde symbolem $H_{(z)}$ rozumíme hybnost soustavy na začátku časového intervalu a $H_{(k)}$ hybnost na konci časového intervalu délky dt. Nyní můžeme rovnici (2.1) přepsat do tvaru

$$mv = \underbrace{(m+dm)(v+dv)}_{hybnost\ rakety} - \underbrace{dm\tilde{v}}_{hybnost\ zplodin}. \tag{2.2}$$

Pro zjednodušení rovnice (2.2) můžeme zavést symbol k, který představuje relativní rychlost zplodin vzhledem k raketě, tj.

$$k = v + dv - \tilde{v}. \tag{2.3}$$

Z rovnice (2.3) vyjádříme rychlost zplodin $\tilde{v}$

$$\tilde{v} = v + dv - k. \tag{2.4}$$

Nyní můžeme vyjádřené $\tilde{v}$ v rovnici (2.4) dosadit do rovnice (2.2) a upravit ji postupně na tvar

$$\begin{aligned} mv &= (m+dm)(v+dv) - dm\overbrace{(v+dv-k)}^{\tilde{v}}, \\ mv &= mv + mdv + vdm + dmdv - vdm - vdm - dmdv + kdm, \\ -kdm &= mdv. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Nakonec celou rovnici (2.5) vydělíme časovým intervalem délky dt a dostáváme

$$-k\frac{dm}{dt} = m\frac{dv}{dt}, \tag{2.6}$$

kde výraz $\frac{dm}{dt}$ vyjadřuje rychlost úbytku hmotnosti rakety a při $dt \to 0$ jej označíme $\dot{m}$. Výraz $\frac{dv}{dt}$ je zrychlení rakety a označíme jej a.

Tedy (2.6) přechází v

$$-k\dot{m} = ma. \tag{2.7}$$

Dále zavedeme funkci $u = u(t)$ charakterizující spotřebu paliva, tj. $u(t) = -\dot{m}(t)$, kde u splňuje

$$0 \le u \le \alpha,$$

přičemž α je maximální možné množství paliva přitékající do trysek za jednotku času. Vztah (2.7) můžeme přepsat do tvaru

$$uk = ma. \tag{2.8}$$

Rovnice (2.8) se nazývá *rovnice Měščerského* (podrobněji v [2]). Levá strana rovnice (2.8) uk má rozměr síly $[N = kg.m.s^{-2}]$ a závisí pouze na atributech raketového motoru (tedy na k a u). Pak tento výraz můžeme nazvat *tahem raketového motoru*.

[1]Uzavřená soustava - částice do soustavy nevstupují a ani soustavu neopouštějí.
[2]Izolovaná soustava - na soustavu nepůsobí žádné vnější síly.

3. Sestavení pohybových rovnic

Příslušné odvození rovnic vychází z druhého Newtonova pohybového zákona, který zní

$$\sum \vec{F} = m\vec{a},$$

kde symbolem $\vec{F}$ na levé straně rozumíme výslednici všech sil působících na zkoumaný objekt, symbol m na pravé straně jeho hmotnost a $\vec{a}$ jeho zrychlení.

Dále budeme předpokládat, že na již zmíněný objekt (raketu) působí tři typy sil, a to síla o velikosti tahu motoru, tíhová síla a síla charakterizující odpor prostředí.

Odpor prostředí se v letecké dynamice obvykle zjednodušeně popisuje pomocí funkce

$$D = v^2 e^{-\beta h}, \tag{3.1}$$

kde v je rychlost, h je výška, $\beta > 0$ vhodná kladná konstanta.

O funkci $D(v, h)$ dále předpokládáme:

1. $D(0, h) = 0$.
2. $|D(v, h_1)| > |D(v, h_2)|$, pro $h_2 > h_1$.
3. $D(-v, h) = D(v, h) \geq 0$, pro všechna $v \geq 0$.
4. $D(v, h) \to 0$, když $h \to 0$ (platí pro všechna v).
5. $D(v, h) \in C^1$.
6. $vD(v, h) \geq 0$.
7. $|D(v_1, h)| \geq |D(v_2, h)|$, pro $v_1 \geq v_2$.

Fyzikální význam výše uvedených podmínek je zřejmý. V další části této kapitoly popíšeme, pomocí odporové funkce D a úvah provedených v druhé kapitole, základní pohybové rovnice pro let rakety ve třech základních dimenzích. Zkoumanou raketu přitom ztotožníme s jejím těžištěm.

3.1. Pohybové rovnice pro jednorozměrný případ

Předpokládáme, že raketa se pohybuje podél osy y, kterou orientujeme směrem vzhůru, a která je kolmá k rovině povrchu planety.

Pak její polohu $y(t)$ v čase t určuje řešení soustavy obyčejných diferenciálních rovnic ve tvaru

$$\begin{aligned} m(t)\ddot{y}(t) &= u(t)k(t) - m(t)\gamma - D(\dot{y}(t), y(t)), \\ \dot{m}(t) &= -u(t), \end{aligned}$$

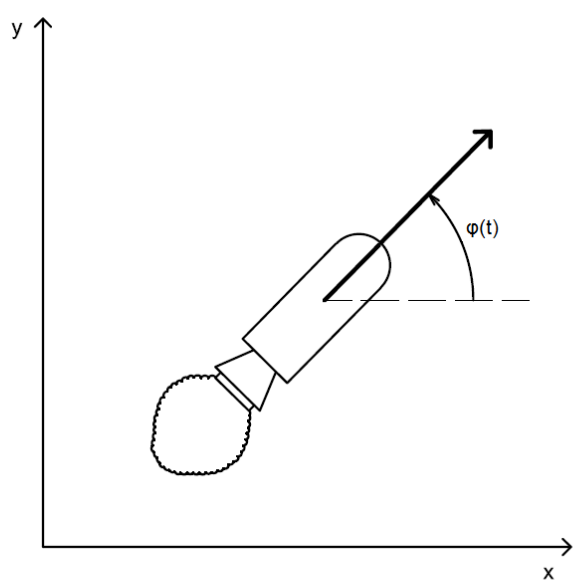
kde $u(t) \in \langle 0, \alpha \rangle$ je funkce charakterizující spotřebu paliva, $m(t)$ je hmotnost rakety, γ je tíhové zrychlení planety, $k(t) > 0$ je relativní rychlost zplodin vzhledem k raketě a $D(\dot{y}(t), y(t))$ je síla charakterizující odpor prostředí.

3.2. Pohybové rovnice pro dvojrozměrný případ

Předpokládáme, že raketa se pohybuje v rovině xy, která je kolmá k rovině povrchu planety (jeho zakřivení zanedbáváme). Orientaci osy y ponecháme jako v předchozím případě. Tah raketového motoru zde bude vystupovat jako vektor $u(t)k(t)(\cos\varphi(t), \sin\varphi(t))$, kde $\varphi(t)$ je úhel tohoto vektoru, který svírá s kladně orientovanou osou x.

Pak polohu rakety $x(t)$ a $y(t)$ v čase t určuje řešení soustavy obyčejných diferenciálních rovnic ve tvaru

$$\begin{aligned} m(t)\ddot{x}(t) &= u(t)k(t)\cos\varphi(t) - D(\dot{x}(t), y(t)), \\ m(t)\ddot{y}(t) &= u(t)k(t)\sin\varphi(t) - m(t)\gamma - D(\dot{y}(t), y(t)), \\ \dot{m}(t) &= -u(t). \end{aligned}$$



Obrázek 3.1: Grafické znázornění tahu motoru rakety v rovině xy.

3.3. Pohybové rovnice pro trojrozměrný případ

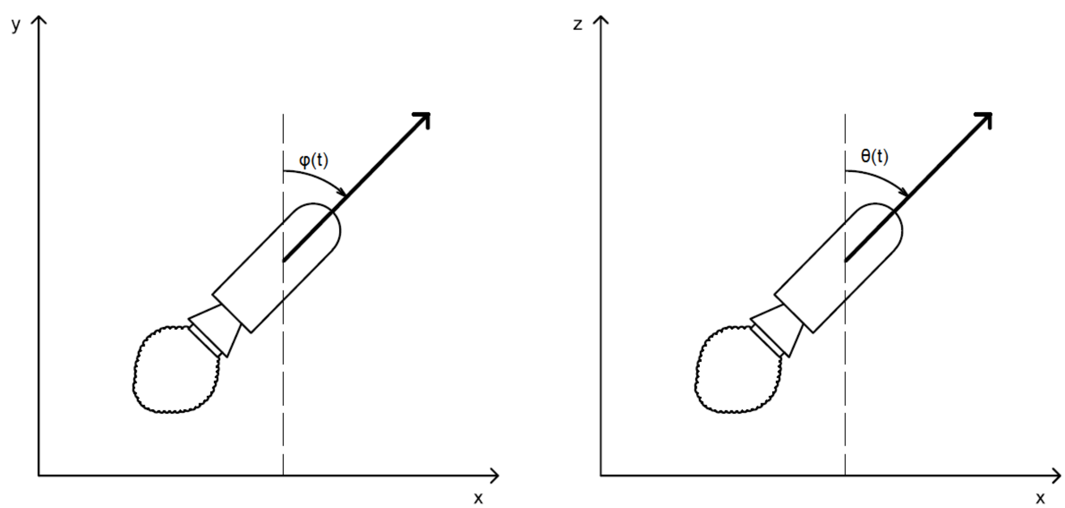
Předpokládáme, že raketa se pohybuje v prostoru popsaném pomocí pravoúhlých souřadnic x,y,z. Osa y směřuje vzhůru a je kolmá k rovině zemského povrchu (jeho zakřivení opět zanedbáme). Tah raketového motoru je v tomto případě popsán vektorem

$$u(t)k(t)(\cos\varphi(t)\sin\theta(t), \sin\varphi(t), \cos\varphi(t)\cos\theta(t))$$

kde úhly $\varphi(t)$ a $\theta(t)$ jsou popsány v obr. 3.2.

Pak polohu rakety $x(t)$, $y(t)$ a $z(t)$ v čase t určuje řešení soustavy obyčejných diferenciálních rovnic ve tvaru

$$\begin{aligned}
m(t)\ddot{x}(t) &= u(t)k(t)\sin\varphi(t)\sin\theta(t) - D(\dot{x}(t), y(t)),\\
m(t)\ddot{y}(t) &= u(t)k(t)\cos\varphi(t) - m(t)\gamma - D(\dot{y}(t), y(t)),\\
m(t)\ddot{z}(t) &= u(t)k(t)\sin\varphi(t)\cos\theta(t) - D(\dot{z}(t), y(t)),\\
\dot{m}(t) &= -u(t).
\end{aligned}$$



Obrázek 3.2: Grafické znázornění úhlu $\varphi(t)$ v rovině xy a úhlu $\theta(t)$ v rovině xz.

4. Problém hladkého přistání rakety

V této kapitole ukážeme praktický výpočet dynamiky letu rakety v jednorozměrném případě, a to v souvislosti s klasickým problémem letecké dynamiky, tzv. hladkým přistáním rakety.

4.1. Přistání rakety s proměnnou hmotností a bez vlivu atmosféry

Formulace problému:

Raketa se pohybuje po přímce kolmé k rovině planety, která je bez atmosféry. V čase $t = 0$ má výšku h_0 a rychlost v_0. Raketa se zpočátku pohybuje pouze pod vlivem tíhové síly planety. V jistý okamžik $t^* > 0$ je hodnota tahu raketového motoru přepnuta z nulové na maximální možnou. Určete hodnotu t^* a celkovou dobu přistání T tak, aby raketa v čase T hladce přistála.

Matematická formalizace:

Nechť $y(t)$ představuje výšku rakety v čase t, $m(t)$ její hmotnost a γ nechť je tíhové zrychlení planety. Dynamiku letu rakety lze popsat pomocí soustavy rovnic

$$\dot{m}(t) = -u(t), \tag{4.1}$$

$$m(t)\ddot{y}(t) = u(t)k - m(t)\gamma,$$

kde k je relativní rychlost vůči raketě (uvažujeme ji konstantní), a řídící proměnná $u(t)$ je dána předpisem

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } t \in \langle 0, t^*) \\ \\ \alpha & \text{pro } t \in \langle t^*, T \rangle. \end{cases}$$

K dané soustavě ještě přistupují počáteční podmínky ve tvaru

$$m(0) = m_0,\ y(0) = h_0,\ v(0) = v_0, \tag{4.2}$$

kde m_0 je hmotnost rakety před zapnutím motoru, h_0 je počáteční výška rakety a v_0 je počáteční rychlost rakety.

Zdůrazněme, že daná soustava diferenciálních rovnic má nespojitou pravou stranu (bod $t = t^*$ je bodem nespojitosti funkce $u(t)$ prvního druhu). Budeme ji proto řešit postupnou integrací na časových intervalech, kde je pravá strana spojitá.

a) Nechť $u(t) = 0$, $t \in \langle 0, t^*)$.

Nejprve vyřešíme diferenciální rovnici

$$\dot{m}(t) = -u(t),$$

kde $u(t) = 0$. Integrací dostáváme

$$m(t) = c_1.$$

K výpočtu obecné konstanty c_1 využijeme podmínky (4.2), odkud máme

$$m(t) = m_0,\ t \in \langle 0, t^*). \tag{4.3}$$

Nyní přistoupíme k řešení druhé rovnice ze soustavy (4.1), která je nyní tvaru

$$\ddot{y}(t) = -\gamma.$$

Postupnou integrací dostáváme obecné vyjádření pro rychlost rakety

$$v(t) = -\gamma t + c_2,$$

a její výšku

$$y(t) = -\frac{\gamma t^2}{2} + c_2 t + c_3.$$

Uvažujeme - li poté počáteční podmínky pro rychlost a výšku (4.2), pak příslušné pohybové rovnice přejdou do tvaru

$$v(t) = -\gamma t + v_0,\ t \in \langle 0, t^*), \tag{4.4}$$

a

$$y(t) = -\frac{\gamma t^2}{2} + v_0 t + y_0,\ t \in \langle 0, t^*). \tag{4.5}$$

b) Nechť $u(t) = \alpha$, $t \in \langle t^*, T\rangle$.

Opět nejprve řešíme diferenciální rovnici

$$\dot{m}(t) = -\alpha,$$

platí tedy

$$m(t) = -\alpha t + c_4.$$

K výpočtu obecné konstanty c_4 využijeme spojitosti $m(t)$ řešení (4.3), kde platí

$$m(t^*) = m_0.$$

Odtud $c_4 = m_0 + \alpha t^*$ a vyjádření hmotnosti rakety můžeme zapsat ve tvaru

$$m(t) = -\alpha t + \alpha t^* + m_0,\ t \in \langle t^*, T\rangle.$$

Dále se zabývejme příslušnou pohybovou rovnicí, která je nyní tvaru

$$\ddot{y}(t) = \frac{\alpha k}{-\alpha t + \alpha t^* + m_0} - \gamma.$$

První integrací obdržíme obecné vyjádření rychlosti ve tvaru

$$v(t) = -k \ln|-\alpha t + \alpha t^* + m_0| - \gamma t + c_5.$$

K výpočtu obecné konstanty c_5 opět využijeme spojitosti $v(t)$ a vyjádření

$$v(t^*) = -\gamma t^* + v_0,$$

které plyne ze vztahu (4.4) v čase $t = t^*$. Odtud $c_5 = v_0 + k \ln|m_0|$, a potom tedy platí

$$v(t) = -k \ln|-\alpha t + \alpha t^* + m_0| - \gamma t + v_0 + k \ln|m_0|, \;\; t \in \langle t^*, T\rangle. \tag{4.6}$$

Opětovnou integrací výrazu (4.6) dostáváme

$$y(t) = \int(-k \ln|-\alpha t + \alpha t^* + m_0| - \gamma t + v_0 + k \ln|m_0|)dt.$$

Aplikace metody per partes dává vyjádření

$$y(t) = k \ln|-\alpha t + \alpha t^* + m_0|(-t + \frac{m_0}{\alpha} + t^*) + kt - kt^* - \frac{km_0}{\alpha} - \frac{\gamma t^2}{2} + (v_0 + k \ln|m_0|)t + c_6,$$

kde k výpočtu obecné konstanty c_6 využijeme opět spojitosti $y(t)$ a vztahu

$$y(t^*) = -\frac{\gamma (t^*)^2}{2} + v_0 t^* + y_0,$$

které plyne ze vztahu (4.5) v čase $t = t^*$. Platí tedy

$$c_6 = y_0 - \frac{km_0}{\alpha}(\ln|m_0| - 1) - kt^* \ln|m_0|,$$

a odtud

$$\begin{aligned} y(t) &= k \ln|-\alpha t + \alpha t^* + m_0|(-t + \frac{m_0}{\alpha} + t^*) + kt - kt^* - \frac{km_0}{\alpha} - \frac{\gamma t^2}{2} + y_0 \\ &+ (v_0 + k \ln|m_0|)t - \frac{km_0}{\alpha}(\ln|m_0| - 1) - kt^* \ln|m_0|, \;\; t \in \langle t^*, T\rangle. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Chceme - li dosáhnout hladkého přistání, musíme požadovat, aby rychlost a výška v čase T byly nulové. Musí tedy platit tyto podmínky:

$$v(T) = 0, \quad y(T) = 0. \tag{4.8}$$

Dosadíme - li do těchto podmínek vztahy (4.6) a (4.7), dostáváme soustavu dvou nelineárních rovnic pro hledané T a t^* ve tvaru

$$0 = -k \ln|-\alpha T + \alpha t^* + m_0| - \gamma T + v_0 + k \ln|m_0|, \tag{4.9}$$

$$\begin{aligned} 0 \;&=\; k \ln|-\alpha T + \alpha t^* + m_0|(-T + \frac{m_0}{\alpha} + t^*) + kT - kt^* - \frac{km_0}{\alpha} \\ &- \frac{\gamma t^2}{2} + y_0 + (v_0 + k \ln|m_0|)T - \frac{km_0}{\alpha}(\ln|m_0| - 1) - kt^* \ln|m_0|. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Poznamenejme, že absolutní hodnoty u členů $\ln|m_0|$ a $\ln|-\alpha T+\alpha t^*+m_0|$ v rovnicích (4.9), (4.10) můžeme zanedbat, neboť $m_0 > 0$ a $-\alpha T + \alpha t^* + m_0 = m(T) > 0$.

Předcházející soustavu zjednodušíme na jednu rovnici o jedné neznámé. Z rovnice (4.9) vyjádříme

$$\ln(-\alpha T + \alpha t^* + m_0) = \frac{-\gamma T + v_0 + \ln m_0}{k},$$

$$t^* = \frac{\exp\{\frac{-\gamma T+v_0+\ln m_0}{k}\} + \alpha T - m_0}{\alpha}. \tag{4.11}$$

Tyto vztahy dosadíme do rovnice (4.10), čímž dostaneme jednu rovnici ve tvaru $g(T) = 0$, konkrétně

$$\begin{aligned} 0 = (-\gamma T + v_0 + \ln m_0)(-T + \frac{m_0}{\alpha} + \frac{\exp\{\frac{-\gamma T+v_0+\ln m_0}{k}\} + \alpha T - m_0}{\alpha}) + kT \\ -k\frac{\exp\{\frac{-\gamma T+v_0+\ln m_0}{k}\} + \alpha T - m_0}{\alpha} - \frac{km_0}{\alpha} - \frac{\gamma t^2}{2} + (v_0 + k\ln m_0)T + y_0 \\ - \frac{km_0}{\alpha}(\ln m_0 - 1) + \frac{\exp\{\frac{-\gamma T+v_0+\ln m_0}{k}\} + \alpha T - m_0}{\alpha}(-k - k\ln m_0). \end{aligned} \tag{4.12}$$

K numerickému řešení rovnice (4.12) byl použit program *MATLAB*. Při jeho použití jsme volili následující parametry:

Parametr	**Hodnota**
Gravitační zrychlení γ	$9,81$ [m·s^{-2}]
Počáteční hmotnost m_0	1 [kg]
Počáteční výška y_0	5000 [m]
Počáteční rychlost v_0	0 [m·s^{-1}]
Relativní rychlost zplodin k	1200 [m·s^{-1}]
Maximálně možné množství paliva přitékající do trysek α	$0,01$ [kg·s^{-1}]

Tabulka 4.1: Tabulka voleb parametrů (konstant) rovnice (4.12)

Nejprve teoreticky posoudíme existenci, případně jednoznačnost kladného kořene T rovnice (4.12). V daném případě platí

$$g(0) > 0 \ , \quad \lim_{T\to\infty} g(t) = -\infty$$

a rovnice (4.12) má alespoň jeden kladný kořen T. Z grafu funkce navíc vyplývá, že $g(T)$ je klesající a hledaný kořen je proto určen jednoznačně. Lze ho lokalizovat například v intervalu $T \in \langle 45, 55 \rangle$. Poznamenejme, že otázka existence fyzikálně přípustného řešení soustavy (4.9), (4.10), tj. řešení vyhovující $0 < t^* < T$, je ekvivalentní řešitelnosti daného problému. Např. metodou sečen (podrobnější popis metod pro řešení nelineárních rovnic lze nalézt v [4]) dostaneme kořen rovnice (4.12) ve tvaru

$$T = 51,7701 \ [s].$$

Ze vztahu (4.11) pak vyplývá

$$t^* = 17,2635 \ [s].$$

4.2. Přistání rakety s konstantní hmotností a bez vlivu atmosféry

Formulace problému:

Formulace tohoto problému je obdobná jako zadání předchozího případu. Jen budeme pracovat s hmotností rakety jako s konstantou (například z důvodu krátké doby přistávacího manévru).

Matematická formalizace:

Nechť $y(t)$ představuje výšku rakety v čase t, m_0 její hmotnost a γ nechť je tíhové zrychlení planety. Díky tomu, že bude hmotnost rakety konstantní, nemusíme řešit rovnici

$$\dot{m}(t) = -u(t).$$

Dynamiku letu lze popsat pomocí rovnice

$$m_0\ddot{y}(t) = u(t)k - m_0\gamma,$$

kde m_0 je hmotnost rakety, k je relativní rychlost vůči raketě (uvažujeme ji konstantní) a řídící proměnná $u(t)$ je dána předpisem

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } t \in \langle 0, t^*) \\ \\ \alpha & \text{pro } t \in \langle t^*, T \rangle. \end{cases}$$

K dané soustavě ještě přistupují počáteční podmínky ve tvaru

$$y(0) = h_0,\ v(0) = v_0, \tag{4.13}$$

kde h_0 je počáteční výška rakety a v_0 je počáteční rychlost rakety.

Opět zdůrazněme, že daná soustava diferenciálních rovnic má nespojitou pravou stranu (bod $t = t^*$ je bodem nespojitosti funkce $u(t)$ prvního druhu). Budeme ji proto řešit postupnou integrací na časových intervalech, kde je pravá strana spojitá.

a) Nechť $u(t) = 0$, $t \in \langle 0, t^*)$.

Nejprve vyřešíme diferenciální rovnici

$$\ddot{y}(t) = -\gamma.$$

Postupnou integrací dostáváme obecné vyjádření pro rychlost rakety

$$v(t) = -\gamma t + c_7,$$

a její výšku

$$y(t) = -\frac{\gamma t^2}{2} + c_7 t + c_8.$$

Uvažujeme - li poté počáteční podmínky (4.13), pak příslušné pohybové rovnice přejdou do tvaru

$$v(t) = -\gamma t + v_0,\ t \in \langle 0, t^*),$$

a

$$y(t) = -\frac{\gamma t^2}{2} + v_0 t + y_0,\ t \in \langle 0, t^*).$$

Zde nám vyšly shodné výsledky jako u prvního příkladu, což je logické, neboť v tomto časovém intervalu nemá raketa spuštěný svůj motor, a pohybuje se pouze pod vlivem tíhového zrychlení planety (volný pád).

b) Nechť $u(t) = \alpha$, $t \in \langle t^*, T\rangle$.

Zde se budeme zabývat pohybovou rovnicí, která je nyní tvaru

$$\ddot{y}(t) = \frac{\alpha k}{m_0} - \gamma.$$

První integrací obdržíme vyjádření

$$v(t) = \frac{\alpha k}{m_0} t - \gamma t + c_9.$$

K výpočtu obecné konstanty c_5 opět využijeme spojitosti $v(t)$ a vztah

$$v(t^*) = -\gamma t^* + v_0,$$

odtud $c_9 = v_0 - \frac{\alpha k}{m_0} t^*$. Potom tedy platí

$$v(t) = \frac{\alpha k}{m_0} t - \gamma t + v_0 - \frac{\alpha k}{m_0} t^*,\ t \in \langle t^*, T\rangle. \tag{4.14}$$

Opětovnou integrací výrazu (4.14) dostáváme

$$y(t) = \int \Big(\frac{\alpha k}{m_0} t - \gamma t + v_0 - \frac{\alpha k}{m_0} t^*\Big) dt,$$

a po provedení integrace dostaneme vyjádření

$$y(t) = \frac{\alpha k}{2m_0} t^2 - \frac{\gamma t^2}{2} + v_0 t - \frac{\alpha k}{m_0} t t^* + c_{10},$$

kde k výpočtu obecné konstanty c_{10} využijeme opět spojitosti $y(t)$ a vztahu

$$y(t^*) = -\frac{\gamma (t^*)^2}{2} + v_0 t^* + y_0.$$

Platí tedy

$$c_{10} = \frac{\alpha k}{m_0} (t^*)^2 + y_0,$$

a odtud

$$y(t) = \frac{\alpha k}{2m_0} t^2 - \frac{\gamma t^2}{2} + v_0 t - \frac{\alpha k}{m_0} t t^* + \frac{\alpha k}{m_0} (t^*)^2 + y_0,\ t \in \langle t^*, T\rangle. \tag{4.15}$$

Chceme - li dosáhnout hladkého přistání, musíme požadovat opět koncové podmínky (4.8). Dosadíme - li do těchto podmínek vztahy (4.14) a (4.15), dostáváme soustavu dvou rovnic pro hledané T a t^* ve tvaru

$$0 = \frac{\alpha k}{m_0}T - \gamma T + v_0 - \frac{\alpha k}{m_0}t^*, \tag{4.16}$$

$$0 = \frac{\alpha k}{2m_0}T^2 - \frac{\gamma T^2}{2} + v_0 T - \frac{\alpha k}{m_0}Tt^* + \frac{\alpha k}{m_0}(t^*)^2 + y_0. \tag{4.17}$$

Soustavu rovnic (4.16), (4.17) zjednodušíme na rovnici o jedné neznámé, tedy z rovnice (4.16) si vyjádříme

$$\frac{\alpha k}{m_0}t^* = \frac{\alpha k}{m_0}T - \gamma T + v_0,$$

$$t^* = T - \frac{m_0\gamma}{\alpha k}T + \frac{m_0 v_0}{\alpha k}. \tag{4.18}$$

Tyto vztahy poté dosadíme do rovnice (4.17), čímž dostaneme kvadratickou rovnici ve tvaru $h(T) = 0$, konkrétně

$$0 = \frac{\alpha k}{2m_0}T^2 - \frac{\gamma T^2}{2} + v_0 T - \Big(\frac{\alpha k}{m_0}T - \gamma T + v_0\Big)T + \frac{\alpha k}{m_0}(T - \frac{m_0\gamma}{\alpha k}T + \frac{m_0 v_0}{\alpha k})^2 + y_0. \tag{4.19}$$

Dále volíme následující parametry:

Parametr	**Hodnota**
Gravitační zrychlení γ	$9,81$ [m$\cdot s^{-2}$]
Počáteční hmotnost m_0	1 [kg]
Počáteční výška y_0	5000 [m]
Počáteční rychlost v_0	0 [m$\cdot s^{-1}$]
Relativní rychlost zplodin k	1200 [m$\cdot s^{-1}$]
Maximálně možné množství paliva přitékající do trysek α	$0,01$ [kg$\cdot s^{-1}$]

Tabulka 4.2: Tabulka voleb parametrů (konstant) rovnice (4.19)

Vyřešením rovnice (4.19) pro zvolené parametry dostáváme jediný kladný kořen

$$T = 84,7991\ [s].$$

Pak zpětně ze vztahu (4.18) určíme

$$t^* = 15,4758\ [s].$$

V souladu s intuitivním očekáváním raketa musí zapnout svůj motor dříve než v minulém případě (v němž jsme uvažovali proměnnou hmotnost). Poznamenejme, že kdybychom snížili hodnotu parametru k na polovinu, pak soustava (4.16), (4.17) nemá přípustné řešení (a daný problém je tedy neřešitelný). V případě, jeli hmotnost proměnná (viz oddíl 4.1.), pak snížení parametru k na polovinu řešitelnost neovlivní.

Otázka existence fyzikálně přípustného řešení soustavy (4.16), (4.17), tj. řešení vyhovující $0 < t^* < T$, je opět ekvivalentní řešitelnosti daného problému.

4.3. Přistání rakety s konstantní hmotností a s vlivem atmosféry

Formulace problému:

Raketa se pohybuje po ose kolmé k rovině planety, která má atmosféru. Odpor prostředí působí silou proti pohybu rakety, a je charakterizován vztahem Rv^2, kde R je kladná konstanta a v je rychlost rakety. Provedli jsme přitom jisté zjednodušení odporové funkce D (viz vyjádření (3.1)). Dále budeme předpokládat, že hmotnost rakety se v čase nemění. Další zadání úlohy je shodné s předcházejícím případem.

Matematická formalizace:

Nechť $y(t)$ představuje výšku rakety v čase t, m_0 její hmotnost a γ nechť je tíhové zrychlení planety.

Dynamiku letu lze popsat pomocí rovnice

$$m_0\ddot{y}(t) = u(t)k - m_0\gamma + R(\dot{y}(t))^2,$$

kde k je relativní rychlost vůči raketě (uvažujeme ji konstantní), $R > 0$ je kladná konstanta a řídící proměnná $u(t)$ je dána předpisem

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } t \in \langle 0, t^*) \\ \\ \alpha & \text{pro } t \in \langle t^*, T\rangle. \end{cases}$$

K dané soustavě ještě přistupují počáteční podmínky ve tvaru

$$y(0) = h_0,\ v(0) = 0, \tag{4.20}$$

kde h_0 je počáteční výška rakety a druhá podmínka nám určuje nulovou rychlost v čase $t = 0$.

a) Nechť $u(t) = 0$, $t \in \langle 0, t^*)$.

Nejprve vyřešíme diferenciální rovnici

$$\ddot{y}(t) = -\gamma + \frac{Rv(t)^2}{m_0},$$

která po zavedením vztahu $\xi^2 = \frac{R}{m_0}$ přejde do tvaru

$$\ddot{y}(t) = -\gamma + \xi^2 v(t)^2.$$

Metodou separace proměnných, která je podrobně popsána v [1], dostaneme (v tomto kroku využijeme rozložení zlomku na zlomky parciální)

$$-\frac{1}{\xi}\frac{1}{2\sqrt{\gamma}}\ln|\sqrt{\gamma} + \xi v(t)| + \frac{1}{\xi}\frac{1}{2\sqrt{\gamma}}\ln|\sqrt{\gamma} - \xi v(t)| = t + c_{14},$$

a po zahrnutí podmínky (4.20) již nyní získáme $c_{14} = 0$. Po upravení předchozího vztahu dostaneme vyjádření rychlosti

$$v(t) = -\frac{\sqrt{g}}{\xi}\frac{\exp\{2\xi\sqrt{\gamma}t\} - 1}{\exp\{2\xi\sqrt{\gamma}t\} + 1}.$$

Pro zjednodušení lze čitatel a jmenovatel rozšířit výrazem $\exp\{-\xi\sqrt{\gamma}t\}$, čímž dostaneme

$$v(t) = -\frac{\sqrt{\gamma}}{\xi}\tanh(\xi\sqrt{\gamma}t),\ \ t \in \langle 0, t^*). \tag{4.21}$$

Integrací výrazu (4.21) dostaneme

$$y(t) = -\frac{1}{\xi^2}\ln|\cosh(\xi\sqrt{g}t)| + y_0 + c_{15},$$

a po zahrnutí podmínky (4.20) získáme $c_{15} = y_0$. Můžeme tedy psát

$$y(t) = -\frac{1}{\xi^2}\ln|\cosh(\xi\sqrt{g}t)| + y_0.$$

b) Nechť $u(t) = \alpha$, $t \in \langle t^*, T\rangle$.

Zde se budeme zabývat pohybovou rovnicí, která je nyní tvaru

$$\ddot{y}(t) = \frac{\alpha k}{m_0} - \gamma + \frac{Rv(t)^2}{m_0}.$$

Zavedením $\xi^2 = \frac{R}{m_0}$ a $\sigma^2 = \frac{\alpha k}{m_0} - \gamma$ dostaneme rovnici

$$\dot{v}(t) = \sigma^2 + \xi^2 v(t)^2.$$

Metodou separace proměnných upravíme předchozí výraz na tvar

$$\int \frac{dv}{\sigma^2 + \xi^2 v(t)^2} = \int dt,$$

kde po vytknutí σ^2 ve jmenovateli získáme

$$\frac{1}{\sigma^2}\int \frac{1}{1 + \frac{\xi^2}{\sigma^2}v(t)^2}dv = \int dt.$$

Integrací pak dostaneme

$$\frac{\arctan(\frac{\xi v}{\sigma})}{\xi\sigma} = t + c_{16}.$$

K výpočtu obecné konstanty c_{16} využijeme spojitosti $v(t)$ a vyjádření

$$v(t^*) = -\frac{\sqrt{\gamma}}{\xi}\tanh(\xi\sqrt{\gamma}t^*),$$

tedy platí

$$c_{16} = \frac{\arctan(\frac{-\sqrt{\gamma}\tanh(\xi\sqrt{\gamma}t^*)}{\sigma}) - \xi\sigma t^*}{\xi\sigma}.$$

Po úpravě dostaneme vztah pro rychlost rakety

$$v(t) = \frac{\sigma\tan(\xi\sigma t + \arctan(\frac{-\sqrt{\gamma}\tanh(\xi\sqrt{\gamma}t^*)}{\sigma}) - \xi\sigma t^*)}{\xi},\ t \in \langle t^*, T\rangle. \tag{4.22}$$

Opětovnou integrací rovnice (4.22) dostaneme

$$y(t) = \frac{1}{2}\frac{\ln|1 + \tan(\xi\sigma t + \arctan(\frac{-\sqrt{\gamma}\tanh(\xi\sqrt{\gamma}t^*)}{\sigma}) - \xi\sigma t^*)^2|}{\xi^2} + c_{17}.$$

K výpočtu obecné konstanty c_{17} využijeme spojitosti $y(t)$ a vyjádření

$$y(t^*) = -\frac{1}{\xi^2}\ln|\cosh(\xi\sqrt{g}t^*)| + y_0.$$

Platí tedy

$$c_{17} = -\frac{1}{2}\frac{\ln|1 + (\frac{-\sqrt{\gamma}\tanh(\xi\sqrt{\gamma}t^*)}{\sigma})^2|}{\xi^2} - \frac{1}{\xi^2}\ln|\cosh(\xi\sqrt{g}t^*)| + y_0,$$

odtud získáme vyjádření pro výšku rakety

$$\begin{aligned} y(t) = {}& \frac{1}{2}\frac{\ln|1 + \tan(\xi\sigma t + \arctan(\frac{-\sqrt{\gamma}\tanh(\xi\sqrt{\gamma}t^*)}{\sigma}) - \xi\sigma t^*)^2|}{\xi^2} \\ & - \frac{1}{2}\frac{\ln|1 + (\frac{-\sqrt{\gamma}\tanh(\xi\sqrt{\gamma}t^*)}{\sigma})^2|}{\xi^2} - \frac{1}{\xi^2}\ln|\cosh(\xi\sqrt{g}t^*)| + y_0,\ t \in \langle t^*, T\rangle. \end{aligned} \tag{4.23}$$

Chceme - li dosáhnout hladkého přistání, musíme požadovat opět koncové podmínky (4.8). Dosadíme - li do těchto podmínek vztahy (4.22) a (4.23), dostáváme soustavu dvou nelineárních rovnic pro hledané T a t^* ve tvaru $f_1(t^*, T) = 0$ a $f_2(t^*, T) = 0$, konkrétně

$$0 = \frac{\sigma\tan(\xi\sigma T + \arctan(\frac{-\sqrt{\gamma}\tanh(\xi\sqrt{\gamma}t^*)}{\sigma}) - \xi\sigma t^*)}{\xi}, \tag{4.24}$$

$$\begin{aligned} 0 = {}& \frac{1}{2}\frac{\ln|1 + \tan(\xi\sigma T + \arctan(\frac{-\sqrt{\gamma}\tanh(\xi\sqrt{\gamma}t^*)}{\sigma}) - \xi\sigma t^*)^2|}{\xi^2} \\ & - \frac{1}{2}\frac{\ln|1 + (\frac{-\sqrt{\gamma}\tanh(\xi\sqrt{\gamma}t^*)}{\sigma})^2|}{\xi^2} - \frac{1}{\xi^2}\ln|\cosh(\xi\sqrt{g}t^*)| + y_0. \end{aligned} \tag{4.25}$$

K numerickému řešení soustavy nelineárních rovnic (4.24), (4.25) byl použit program *MATLAB*. Při jeho použití jsme volili následující parametry:

Parametr	**Hodnota**
Gravitační zrychlení γ	$9,81$ [m$\cdot s^{-2}$]
Počáteční hmotnost m_0	1 [kg]
Počáteční výška y_0	5000 [m]
Počáteční rychlost v_0	0 [m$\cdot s^{-1}$]
Relativní rychlost zplodin k	1200 [m$\cdot s^{-1}$]
Maximálně možné množství paliva přitékající do trysek α	$0,01$ [kg$\cdot s^{-1}$]
Konstanta R	$0,0001$

Tabulka 4.3: Tabulka voleb parametrů (konstant) soustavy rovnic (4.24), (4.25)

Numerickým řešením soustavy (4.24), (4.25) získáme

$$T = 71,2611\ [s], \quad t^* = 17,0561\ [s].$$

Opět v souladu s intuitivním očekáváním, lze pozorovat, že vliv atmosféry oddálí okamžik t^* (spuštění motoru) oproti minulému příkladu.

5. Letadlo

Jako klasický model složitější soustavy s proměnnou hmotností uvedeme letadlo, pro nějž je charakteristické, že pohybové rovnice nabývají tvaru (viz. [3])

$$m\dot{\overrightarrow{V}} = \overrightarrow{R} + \overrightarrow{G} + \overrightarrow{P},$$

$$\dot{m} = -u, \ \dot{\overrightarrow{r}} = \overrightarrow{V},$$

kde $\overrightarrow{r}$ je polohový vektor letu letadla, $\overrightarrow{V}$ je vektor rychlosti letadla, m je hmotnost letadla, u je funkce charakterizující spotřebu paliva motoru letadla, $\overrightarrow{R}$ je výslednice aerodynamických sil, $\overrightarrow{P}$ je vektor tahu motoru letadla, $\overrightarrow{G}$ je tíha letadla.

Z matematického popisu je zřejmé, že analytické řešení, které bylo určeno v předcházejících problémech, musí být nahrazeno řešením numerickým.

6. Závěr

Cílem této bakalářské práce byl matematický popis soustavy s proměnnou hmotností, jejímž příkladem sloužila raketa. Při odvozování dynamiky letu rakety jsme vycházeli nejprve ze zákona o zachování hybnosti. Díky tomuto zákonu, a po několika zásadních úpravách (jako zavedení relativní rychlosti k nebo zavedení funkce u, charakterizující spotřebu paliva) jsme získali matematický základ této práce, a to *rovnici Měščerského*. S využitím tohoto vztahu a druhého Newtonova zákona jsme postupně odvozovali pohybové rovnice pro jednorozměrný, dvojrozměrný a trojrozměrný typ letu zkoumaného objektu, ve kterých se vedle síly raketového motoru (tahu) objevila i síla gravitační a síla charakterizující odpor prostředí. Tento teoretický základ jsme poté postupně aplikovali na problematiku hladkého přistání rakety. Tedy konkrétně na tři typy tohoto problému, a to přistání rakety na povrch planety bez atmosféry, poté jsme zanedbali změnu hmotnosti rakety a zkoumali jsme, jak se její chování změní, a u posledního příkladu jsme uvažovali přistání rakety při vlivu atmosféry. Ke každému ze tří problémů hladkého přistání jsme navíc doplnili i numerické řešení, které určilo potřebné časové parametry letu rakety. Na konci bakalářské práce je také naznačen model složitější soustavy s proměnnou hmotností - letadlo. Zde jsou naznačeny pohybové rovnice letadla. Z matematického popisu je zřejmé, že analytické řešení, které bylo určeno předcházejících problémech, musí být nahrazeno řešením numerickým.

Literatura

[1] Čermák, J., Ženíšek, A.: *Matematika III*, Brno, 2001. 205 s. ISBN: 80-214-2010-3

[2] Halliday, D, Resnick, R., Walker, J.: *Fyzika*, VUTIUM, Brno, 2000 (překlad z angličtiny). 353 s. ISBN: 80-214-1868-0

[3] Krotov, F., V.: *Global methods in optimal theory*, New York, 1996. 384 s. ISBN: 0-8247-9329-3

[4] Čermák, L., Hlavička, R.: *Numerické metody*, Brno, 2008. 110 s. ISBN: 978-80-214-3752-4