



**VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ**

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

**FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ**

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

**ÚSTAV MATEMATIKY**

INSTITUTE OF MATHEMATICS

**ANALÝZA VYBRANÝCH METOD PRO ŘEŠENÍ KRUTU  
TYČÍ S NEKRUHOVÝM PŘÍČNÝM PRŮŘEZEM**

ANALYSIS OF CHOSEN METHODS FOR SOLUTION OF TORSION OF NON-CIRCULAR BARS

**BAKALÁŘSKÁ PRÁCE**

BACHELOR'S THESIS

**AUTOR PRÁCE**

AUTHOR

Ondřej Mach

**VEDOUCÍ PRÁCE**

SUPERVISOR

Ing. Kamil Novák

**BRNO 2016**



# Zadání bakalářské práce

Ústav:	Ústav matematiky
Student:	<b>Ondřej Mach</b>
Studijní program:	Aplikované vědy v inženýrství
Studijní obor:	Matematické inženýrství
Vedoucí práce:	<b>Ing. Kamil Novák</b>
Akademický rok:	2015/16

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

## **Analyza vybraných metod pro řešení krutu tyčí s nekruhovým příčným průřezem**

### **Stručná charakteristika problematiky úkolu:**

Krut tyčí s nekruhovým příčným průřezem představuje obvykle náročný matematický problém. Zvláště pak řešení pro obdélníkový průřez, vede k rozvoji do dvojnásobné nekonečné řady. V literatuře se vyskytuje nejen řada průřezů, např. tvaru kardioidy ale i metod, např. Southwellova iterační metoda, které však ztrácí praktické využití.

Kritické posouzení těchto průřezů a metod zatím v dostupné literatuře chybí.

### **Cíle bakalářské práce:**

Provést rešerši literatury se zaměřením na plné uzavřené příčné průřezy a různé metody řešení  
Získanou vhodnou metodou analyzovat krut tyčí se čtvercovým/obdélníkovým, kruhovým /eliptickým, a trojúhelníkovým příčným průřezem

Popsat metody analogické (hydrodynamická a membránová)

Diskutovat výhody/nevýhody zvolených metod

### **Seznam literatury:**

Dobrovolný B. (1946): Pružnost a pevnost -IV. díl, Státní nakladatelství, Praha

Anselm, K. (1954): Theorie kroucení, Československá akademie věd, Praha

Kuba, F. (1977): Teorie pružnosti a vybrané aplikace, SNTL, Praha

Ondráček, E., Vrbka, J., Janíček, P., Burša, J. (2006): Mechanika těles: Pružnost a pevnost II. CERM, Brno

Franců, J., Nováčková, P., Janíček, P. (2012): Torsion of a non-circular bar. Engineering Mechanics, vol. 19, no. 1, pp 45-60.

Sadd., M. H. (2013): Elasticity –Theory, Applications and Numerics. Elsevier, Oxford

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2015/16

V Brně, dne

L. S.

---

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc.  
ředitel ústavu

---

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.  
děkan fakulty

## **ABSTRAKT**

Tato bakalářská práce se zabývá analýzou vybraných metod pro řešení krutu tyčí s nekruhovým příčným průřezem. Práce je rozdělena na dvě části - část rešeršní a část výpočtová. V první části byly zavedeny všechny potřebné pojmy a vztahy, které jsou dále aplikovány v analyzovaných metodách. Ve druhé části jsou výsledky analytických metod konfrontovány s výsledky obdrženy numerickou metodou konečných prvků (MKP) v softwaru ANSYS.

## **KLÍČOVÁ SLOVA**

nekruhový příčný průřez, krut, Airyho funkce napětí, MAPLE, ANSYS

## **ABSTRACT**

This Bachelor thesis deals with analysis of chosen methods for solution of torsion of non-circular bars. The thesis is divided into two sections – theoretical section and reserch section. There have been introduced all needed terms and formulas used in analysed methods in the first part. In the second part, solutions of analytical methods have been compared with solutions obtained by numerical method FEM (Finite Element Method) modeled in ANSYS software.

## **KEY WORDS**

non-circular profile, torsion, Airy stress function, MAPLE, ANSYS

## **BIBLIOGRAFICKÁ CITACE PRÁCE**

MACH, O. Analýza vybraných metod pro řešení krutu tyčí s nekruhovým příčným průřezem. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2016. 74 s. Vedoucí bakalářské práce Ing. Kamil Novák.



## **PROHLÁŠENÍ AUTORA O PŮVODNOSTI PRÁCE**

Tímto prohlašuji, že jsem bakalářskou práci na téma **Analýza vybraných metod pro řešení krutu tyčí s nekruhovým příčným průřezem** vypracoval samostatně s využitím uvedené literatury a na základě konzultací s vedoucím bakalářské práce.

V Brně dne 23.5.2016

.....  
Ondřej Mach





## **PODĚKOVÁNÍ**

Rád bych touto formou poděkoval především svému vedoucímu práce Ing. Kamilu Novákovi za mimořádnou ochotu, trpělivost, cenné rady a postřehy, které přispěly k napsání této práce.

Dále bych chtěl poděkovat svým rodičům, kteří mne po celou dobu studia usilovně podporují, a tím vytváří vynikající podmínky pro mé studium.

V neposlední řadě děkuji své slečně Barbaře, za její trpělivost a povzbuzování po celou dobu psaní mé bakalářské práce.



# Obsah

Úvod .....	13
1 Motivace a cíle práce .....	15
2 Rešerše metod .....	16
2.1 Historický přehled do roku 1900 .....	16
2.2 Analytické metody .....	19
2.2.1 Teorie prosté pružnosti prutů [4] .....	19
2.2.2 Funkce napětí .....	23
2.3 Analogické metody .....	25
2.3.1 Membránová analogie .....	26
2.3.2 Hydrodynamická analogie .....	28
2.3.3 Elektrická analogie .....	28
2.4 Metody numerické .....	30
2.4.1 Metoda konečných diferencí .....	30
2.4.2 Southwellova relaxační metoda .....	32
2.4.3 Metoda konečných prvků (MKP) [24] .....	34
2.4.4 Ostatní metody .....	35
3 Výběr vhodné metody pro praktickou část .....	36
4 Praktický analytický výpočet .....	37
4.1 Krut prutů s kruhovým příčným průřezem .....	38
4.2 Krut prutu elipsovitého průřezu .....	41
4.3 Krut prutu trojúhelníkového průřezu .....	44
4.4 Krut prutu obdélníkového průřezu .....	47
4.5 Krut prutu obdélníkového průřezu (pomocí nekonečných řad) [8] .....	48
5 Hydrodynamická analogie – praktický výpočet .....	54
5.1 Rovnice rovnováhy a rovnice kontinuity .....	54
5.2 Rovnice funkce napětí a rovnice vířivého proudění ideální kapaliny .....	54
5.3 Aplikace na úzkém obdélníku .....	56
6 Použití MKP a srovnání s analytickým přístupem .....	60
6.1 Model tyče s kruhovým příčným průřezem .....	61
6.2 Model tyče eliptického příčného průřezu .....	62
6.3 Model tyče trojúhelníkového profilu .....	63
6.4 Model tyče obdélníkového příčného průřezu .....	64
6.5 Model tyče čtvercového příčného průřezu .....	65
6.6 Srovnání MKP s analytickým přístupem .....	66
7 Závěr .....	67
Seznam literatury .....	68
Seznam použitých symbolů a zkratek .....	70
Seznam obrázků .....	72
Seznam tabulek .....	74





---

## ÚVOD

V praxi se často setkáváme s problémem kroucení tyčí různých profilů. Torzní tyče (torzní stabilizátory) s kruhovým příčným průřezem se používají k odpružení náprav automobilů, aby se zajistila dobrá přilnavost kol k vozovce. Zkroucením drátu obdélníkového (čtvercového) průřezu vznikne obdélníková (čtvercová) pružina, která slouží k pohonu bubínků gramofonů, hodin nebo ručičkových měřicích přístrojů. Imbusový klíč, tedy symetrický 6-ti úhelník je zase nedílnou součástí každého kutila, ale např. i cyklisty.

Pomocí prosté pružnosti a pevnosti je však možné řešit jen krut tyčí s kruhovým nebo mezikruhovým příčným průřezem. Při kroucení prutu nekruhového příčného průřezu se profil krouceného tělesa deformuje a přestává být planárním, křiví se. Tento fakt vyžaduje použití jiných postupů (metod) pro nalezení platného řešení. Těchto metod, ale i samotných průřezů existuje poměrně velké množství. Jen pár z nich je však v dnešní době prakticky použitelných.

Tato bakalářská práce analyzuje vybrané metody, které vedou k řešení těchto úloh. Práce se také omezuje na řešení profilů, které se ve větší míře vyskytují v praxi. Především se zabývá popisem plných příčných průřezů tvaru kruhu, elipsy, rovnoramenného trojúhelníku, čtverce a obdélníku. Tyto příčné průřezy jsou řešeny analyticky pomocí funkce napětí v softwaru MAPLE a srovnány s numerickým řešením pomocí metody konečných prvků (MKP) v softwaru ANSYS. Úzký obdélník je řešen také pomocí hydrodynamické analogie.



Obrázek 1 Hřídel obdélníkového příčného průřezu přenáší krouticí moment na zemní vrták [9]



Obrázek 2 Imbusový klíč šestiúhelníkového profilu [23]



Obrázek 3 Klika šlapátka, která se nasadí na osu s kruhovým příčným průřezem. Samotná klika (s přibližně obdélníkovým příčným průřezem) je pak namáhána cyklicky ohybem a krutem [22].

---

# 1 MOTIVACE A CÍLE PRÁCE

Motivací pro sepsání této práce byl fakt, že se ve světové, ale i české literatuře vyskytuje nejen množství různých tvarů příčných průřezů, ale také velké množství různých metod, kterými lze krut tyčí s nekruhovým průřezem vyřešit. Většinou však chybí kritické zhodnocení metod a různě složitých tvarů příčných průřezů. Prakticky je obtížné představit si např. krut prutu s příčným průřezem ve tvaru kardioidy (je dále zmíněno v textu práce).

Tato práce si tak klade za cíl podat ucelený přehled více či méně používaných metod pro řešení krutu tyčí s nekruhovým příčným průřezem a je psána způsobem, aby byla dále využitelná například studenty v kurzu Pružnost a Pevnost II.

## **Konkrétní cíle práce byly stanoveny vedoucím práce takto:**

1. Provést rešerši literatury se zaměřením na plně uzavřené příčné průřezy a různé metody řešení.
2. Získanou vhodnou metodou analyzovat krut tyčí se čtvercovým/obdélníkovým, kruhovým /eliptickým a trojúhelníkovým příčným průřezem.
3. Popsat metody analogické (hydrodynamická a membránová).
4. Diskutovat výhody/nevýhody zvolených metod.



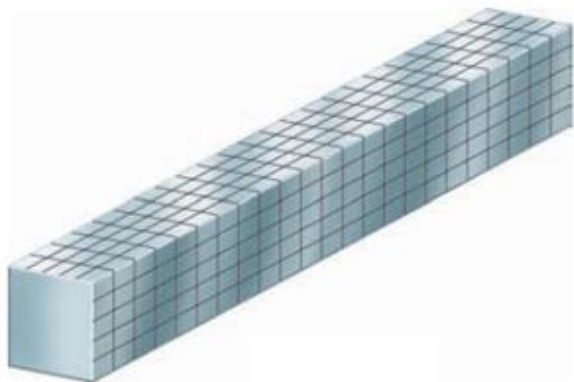
## 2 REŠERŠE METOD

### 2.1 Historický přehled do roku 1900

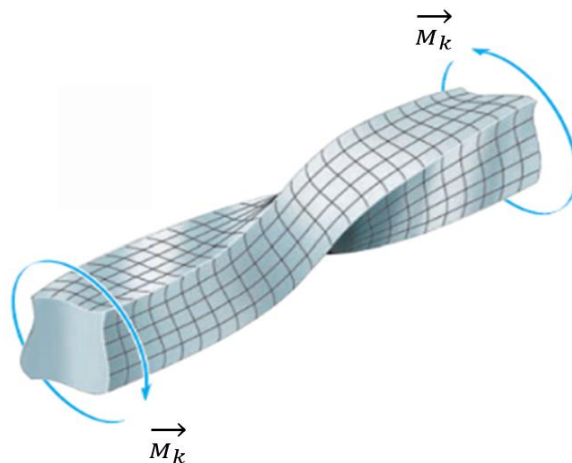
Charles-Augustin de Coulomb je autorem nejstarší známe práce, která pojednává o teorii kroucení. Tato práce byla publikována roku 1787 v *Histoire de l'Académie royale des sciences* v Paříži a autor v ní poprvé správně vypočítává vztah mezi krouticím momentem a poměrným úhlem zkroucení pro kruhový průřez jako  $M_k = G\theta J_p$ . Pomocí experimentů tento vztah potvrzuje.

I přes četné experimenty (např. 1820 Duleau a později Savart), které dokazovaly, že železná kruhová tyč neklade stejný odpor témuž krouticímu momentu jako tyč čtvercová, Claude-Louis Navier ve své práci *Résumé des leçons données à l'École des ponts et chaussées sur l'application de la mécanique* z roku 1826 neúmyslně rozšiřuje Coulombovu teorii na libovolný průřez. Navier se opírá o chybný předpoklad, že při kroucení obecného prutu zůstávají jeho průřezy planární (rovinné) a kolmé na střednici a vůči sobě se pouze natočí o poměrný úhel  $\theta$ . Dále svou teorii zakládá na tom, že smykové (tečné, tangenciální) napětí  $\tau$  v obecném bodě působí kolmo k příslušnému průvodiči (polohový vektor), který je rovnoběžný se střednicí prutu. Tangenciální napětí pak podle něj nabývá maximálních hodnot v bodě, který je od osy točení nejdále a zpravidla má největší a zároveň konečnou hodnotu také v ostrých vrcholech průřezu. K experimentům se Navier stavěl kriticky a výsledky, které by odporovaly jeho teorii, přisuzoval na vrub kvalitě oceli, ze které byly vyrobeny zkušební vzorky.

Poprvé na nesprávnost Navierova předpokladu poukázal Augustin Louis Cauchy v práci *Exercices de mathématique*, který jako první odvodil platné řešení pro velmi tenký obdélník ( $a/b > 10$ ) za pomoci základních rovnic pružnosti a dokázal, že maximální smykové napětí je naopak v místě obrysu, který je nejbližší těžišti zkrucovaného průřezu. Učinil také velmi důležitý závěr o tom, že se příčný průřez (jiný než kruhový) křiví (bortí, deplanuje). Zmíněné závěry jsou alespoň ilustrativně zobrazeny na obrázcích pod textem.



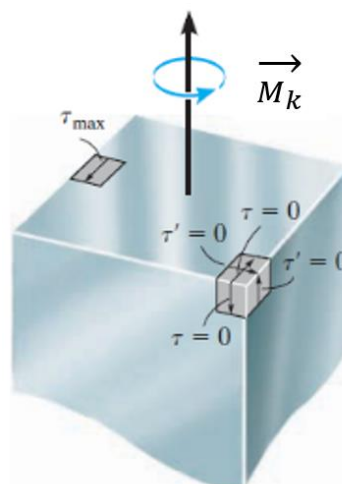
Obrázek 4 Nedeformovaný prut [9]



Obrázek 5 Deformovaný prut kroučícím momentem [9]



Obrázek 6 Deplanace příčného průřezu [9]



Obrázek 7 Smykové napětí je v ostrých bodech průřezu nulové [9]

V roce 1847 až 1855 se Barré de Saint-Venant ve své studii *Bulletin de la Société Philomatique* důkladněji věnoval problému kroucení. Ve své nejslavnější práci *De la torsion des prismes* dal vznik teorii, která je bez dalších úprav platná až dosud. Roku 1864 Saint-Venant zrealizoval posmrtné vydání Navierovy knihy *Résumé des leçons* a upravil Navierův původní text. Dodnes je udáváno, že Navierovy 2 strany knihy věnované kroucení byly úctyhodně rozšířeny na 260 stran rigorózního textu. Saint-Venant zde podrobně rozvíjí svou teorii a podává přesné řešení pro krut různých průřezových tvarů. Vedle Coulombovy teorie otočení příčných průřezů kolem střednice prutu počítá Saint-Venant také se zkřivením průřezu, způsobeném nerovnoměrnými posuvy jednotlivých bodů v podélném směru. Velmi důkladně také dokazuje, že místo největšího smykového napětí (až na několik málo výjimek) je v místě nejbližší středu příčného průřezu.

Saint-Venant dokázal vyřešit problém krutu tyče obdélníkového průřezu pomocí rozvoje do nekonečné řady obsahující hyperbolické funkce a protože byl nejen teoretik, ale i praktik, uveřejnil pro případy praxe tabulku, ze které je možné stanovit hodnotu maximálního smykového napětí. Tato tabulka je uveřejněna pod textem. Samotný Saint-Venant provedl taktéž řešení pro všechny tvary plných příčných průřezů, které jsou tématem této práce. Od roku cca 1900 pak začínají vznikat pouze jiné početní metody nebo se analyzují spíše teoretické průřezy, o kterých bude dále pojednáno.

**Tabulka 1** Koeficienty pro výpočet maximálního smykového napětí a poměrného úhlu zkroucení

a/b	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	a/b	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	a/b	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$
1	0,67531	0,14058	0,20817	1,5	0,84756	0,19576	0,23097	3	0,98548	0,26332	0,26720
1,1	0,71977	0,15398	0,21393	1,6	0,86946	0,20374	0,23433	3,5	0,99335	0,27331	0,27514
1,2	0,75785	0,16612	0,21920	1,75	0,89672	0,21428	0,23896	4	0,99698	0,28081	0,28166
1,25	0,77632	0,17173	0,22121	1,8	0,90438	0,21743	0,24042	5	0,99949	0,29135	0,29150
1,3	0,79350	0,17707	0,22315	2	0,93005	0,22868	0,24588	10	$\approx 1$	0,31232	0,31232
1,4	0,82215	0,18690	0,22733	2,5	0,96805	0,24936	0,25759	$\infty$	1	0,33333	0,33333

kde  $\alpha, \beta, \gamma$  jsou koeficienty,  $a, b$  jsou strany obdélníka a platí  $a \geq b$ .

$$\max \tau = abG\vartheta, \quad \vartheta = \frac{M_k}{\beta ab^2}, \quad \max \tau = \frac{M_k}{\gamma ab^2}$$

V dalším textu analyzují jednotlivé metody.

## 2.2 Analytické metody

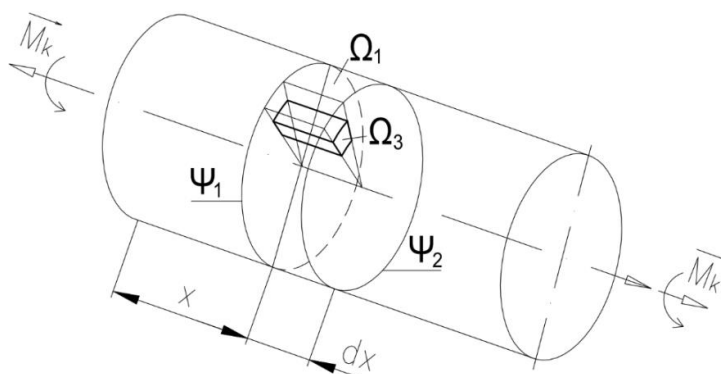
### 2.2.1 Teorie prosté pružnosti prutů [4]

Prostý krut je definován jako označení pro namáhání přímého, prizmatického prutu s kruhovým nebo mezikruhovým příčným průřezem za předpokladu, že

- ✓ jsou splněny prutové předpoklady
- ✓ příčné průřezy se pouze vzájemně natáčí kolem střednice prutu bez následné deformace (deplanace)
- ✓ krouticí moment je jedinou nenulovou složkou vnitřních výsledných účinků (VVÚ)

#### 2.2.1.1 Délková a úhlová přetvoření

Pro vyjádření délkových a úhlových přetvoření v závislosti na pohybu příčných průřezů při deformaci uvolníme z prutu základní prvek  $\Omega_1$  a v něm trojnásobně elementární prvek  $\Omega_3$ , viz obrázek 8.



Obrázek 8 Elementární prvek

Vzdálenost  $dx$  dvou příčných průřezů  $\psi_1$  a  $\psi_2$  je konstantní. Z toho plyne, že délkové přetvoření střednice  $\varepsilon_x$  je rovno nule. Příčné průřezy se rozměrově nemění, a proto délková přetvoření  $\varepsilon_r$  v radiálním a obvodovém  $\varepsilon_\varphi$  směru jsou nulová. Protože jsou úhlová přetvoření  $\gamma_{xr}$  nulová, příčné průřezy zůstávají planární. Důsledkem rotačně symetrického charakteru deformace jsou nulová úhlová přetvoření  $\gamma_{\varphi r}$ . Čela prvku  $\Omega_3$  ležící v řezech  $\psi_1$ ,  $\psi_2$  se navzájem natočí o elementární úhel  $d\varphi$  a tak vznikají nenulová úhlová přetvoření  $\gamma_{x\varphi}$ .

Vztah pro úhlové přetvoření  $\gamma_{x\varphi}$  obdržíme vyjádřením obvodového posuvu  $\delta_A$ . Pro velmi malé úhly přetvoření  $\gamma_{x\varphi}$  je z obr. 9 zřejmé, že

$$\delta_A = dx \gamma_{x\varphi} . \quad (1)$$

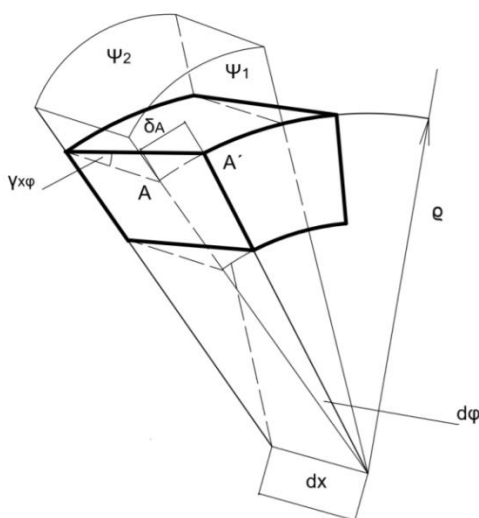
Pro posuv  $\delta_A$  vyjádřený parametry v příčném řezu platí

$$\delta_A = \rho d\varphi . \quad (2)$$

Porovnáním (1) a (2) dostáváme

$$\gamma_{x\varphi} = \rho \frac{d\varphi}{dx} . \quad (3)$$

Poměrný úhel zkroucení je relativní úhel natočení příčných průřezů, které od sebe leží ve vzdálenosti  $dx$ . Poměrný úhel zkroucení definujeme jako  $\vartheta = \frac{d\varphi}{dx}$ .



Obrázek 9 Přetvoření elementárního prvku

Dosadíme-li do rovnice (9), dostáváme výsledný vztah pro úhlové přetvoření

$$\gamma_{x\varphi} = \rho \vartheta . \quad (4)$$

### 2.2.1.2 Napjatost

Předpokládáme homogenní, lineárně pružný materiál. Rozložení napětí na příčném průřezu získáme pomocí konstitutivního vztahu

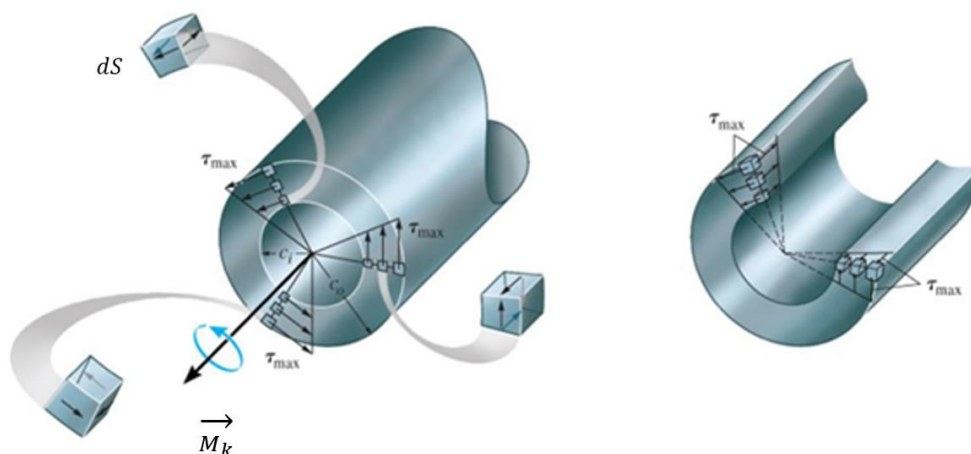
$$\sigma = E \varepsilon, \quad \tau = G \gamma = G \rho \vartheta . \quad (5)$$

Lze tedy konstatovat

- ✓ u prostého krutu vznikají v příčném průřezu smyková napětí, která jsou po průřezu rozložena lineárně a jsou nulová na střednici prutu (řídí se souřadnicí  $\rho$  v rovnici (5))
- ✓ jediné nenulové smykové napětí je  $\tau_{x\varphi} = \tau$
- ✓ všechna délková přetvoření  $\varepsilon$  jsou nulová  $\Rightarrow$  všechna normální napětí  $\sigma$  jsou nulová

Vztah mezi kroutícím momentem a smykovým napětím  $\tau$  v příčném průřezu určíme z podmínky statické ekvivalence (SE). Pokud na průřezu zvolíme infinitezimální plochu  $dS$ , viz obrázek 10, můžeme jedinou použitelnou podmínku statické ekvivalence psát ve tvaru

$$\int_{\Psi} \tau dS \rho = M_k. \quad (6)$$



Obrázek 10 Zobrazení lineárního rozložení napětí, které platí i u mezikruhového průřezu [9].

Dosadíme-li do této podmínky vztah (5) dostáváme

$$\int_{\Psi} G \frac{d\varphi}{dx} \vartheta = G \vartheta \int_{\Psi} \rho^2 dS = M_k. \quad (7)$$

Po úpravách a použití definičního vztahu pro polární kvadratický moment  $\int \rho^2 dS = J_p$  získáváme vztah pro poměrné zkroucení

$$\vartheta = \frac{M_k}{G J_p}. \quad (8)$$

Použijeme-li tuto rovnici v (4), dostaneme

$$\gamma = \gamma_{x\varphi} = \frac{M_k}{G J_p} \rho. \quad (9)$$

Uplatněním této rovnice v konstitutivním vztahu  $\tau = G \gamma$  dostáváme vztah pro smykové napětí

$$\tau(\rho) = \frac{M_k}{J_p} \rho. \quad (10)$$

Podle (10) jde vidět, že extrémní hodnotu smykového napětí dosáhneme pro nejvzdálenější bod obrysu  $\rho = R = \frac{D}{2}$ . Je tedy možné zavést tzv. modul průřezu v krutu

$$W_k = \frac{J_p}{\frac{D}{2}}. \quad (11)$$

Kombinací rovnic (10) a (11) dostáváme vztah pro výpočet extrémního smykového napětí v příčném průřezu

$$\tau_{\text{ex}} = \frac{M_k}{W_k}, \quad (12)$$

pro kruhový příčný průřez platí  $W_k = \frac{J_p}{\frac{D}{2}} = \frac{\frac{\pi D^4}{32}}{\frac{D}{2}} = \frac{\pi D^3}{16}$ .

### 2.2.1.3 Energie napjatosti

Energii napjatosti, akumulovanou v objemu základního prvku  $\Omega_1$ , určíme z podmínky  $dW = dA$ . Na trojnásobně elementární prvek (obrázek 9) působí vnitřní elementární smyková (tahová) síla  $\tau dS$ . Při natočení prvku  $\Omega_3$  o úhel  $d\varphi$  bude posuv obecného bodu A na poloměru  $\rho$  roven  $\delta_A = \rho d\varphi$ .

Tento posuv lze také vyjádřit jako  $\delta_A = \gamma dx$ . Elementární smyková síla vykoná na posuvu  $\delta_A$  práci

$$dA = \frac{1}{2} \gamma dx \tau dS. \quad (13)$$

Použitím vztahu  $\tau = G \gamma$  a skutečnosti, že  $dW = dA$  dostáváme

$$dW = \frac{\tau^2}{2G} dS dx. \quad (14)$$

Využitím vztahu (10) a skutečnosti, že  $\int \rho^2 dS = J_p$  dostaneme výslednou rovnici pro výpočet energie napjatosti

$$W = \frac{1}{2} \int_L \frac{M_k^2}{G J_p} dx. \quad (15)$$

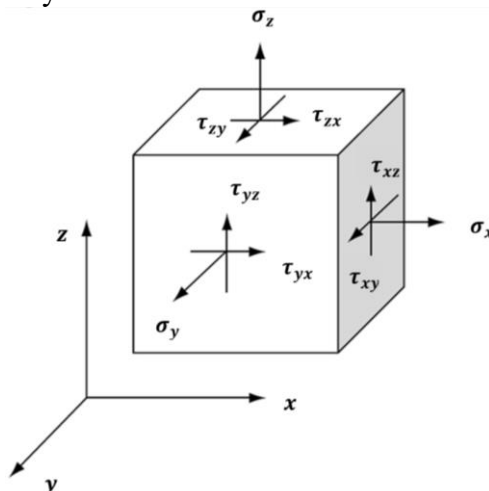
Vzájemný úhel natočení příčných průřezů můžeme užitím rovnice (10) a vztahem  $\vartheta = \frac{d\varphi}{dx}$  určit jako

$$\varphi = \int_L \frac{M_k}{G J_p} dx. \quad (16)$$

Oblast, přes kterou v (15) a (16) provádíme integraci je délka střednice prutu  $L$ .

### 2.2.2 Funkce napětí

Tato metoda využívá základních rovnic prosté pevnosti a pružnosti. Síly, které působí na elementární krychli, se dají vyjádřit jako součin napětí a velikosti plochy, na kterou působí. Potom lze psát rovnice rovnováhy, které musí splňovat podmínku  $\sum F_x = \sum F_y = \sum F_z = 0$ . Tedy to, že výslednice sil působících v jednotlivých směrech elementární krychle musí být nulová.



Obrázek 11 Elementární krychle

Základní rovnice rovnováhy byly odvozeny v knize (1) a jsou ve tvaru

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0.$$

Společně s předpokladem  $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{yz} = 0 \wedge \tau_{ij} = \tau_{ji}, \forall i, j \in \{x, y, z\}$  můžeme psát rovnice rovnováhy elementární krychle ve složkách napětí v tomto tvaru

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} = 0. \quad (17)$$

Podle Hookova zákona můžeme popsat tečná napětí  $\tau_{xy}$  a  $\tau_{xz}$  rovnicí (18). Kde  $u$  značí posuv při deformaci.

$$\tau_{xy} = G \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \vartheta z \right), \quad \tau_{xz} = G \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \vartheta y \right). \quad (18)$$

Je vidět, že rovnici rovnováhy (17) lze vyhovět volbou

$$\tau_{xz} = \pm \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad \tau_{xy} = \mp \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad (19)$$

kde  $\Phi = \Phi(y, z)$  značí Airyho funkci napětí. Eliminací složky posuvu  $u$  v rovnicích (18) dostáváme

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} = G \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} - \vartheta \right) - G \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + \vartheta \right) = -2G\vartheta. \quad (20)$$



Rovnici (20) můžeme zapsat užitím Airyho funkce napětí jako

$$\Delta\Phi \equiv \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = -2G\vartheta. \quad (21)$$

Tato rovnice platí v jednoduše spojitě ploše  $\Omega$ . Na její hranici  $\Gamma$  má však Airyho funkce hodnotu  $\Phi = 0$ .

## 2.3 Analogické metody

Z prostudované literatury [12, 17] o analogických (analogových – Janíček [5]) metodách byla sestavena následující tabulka

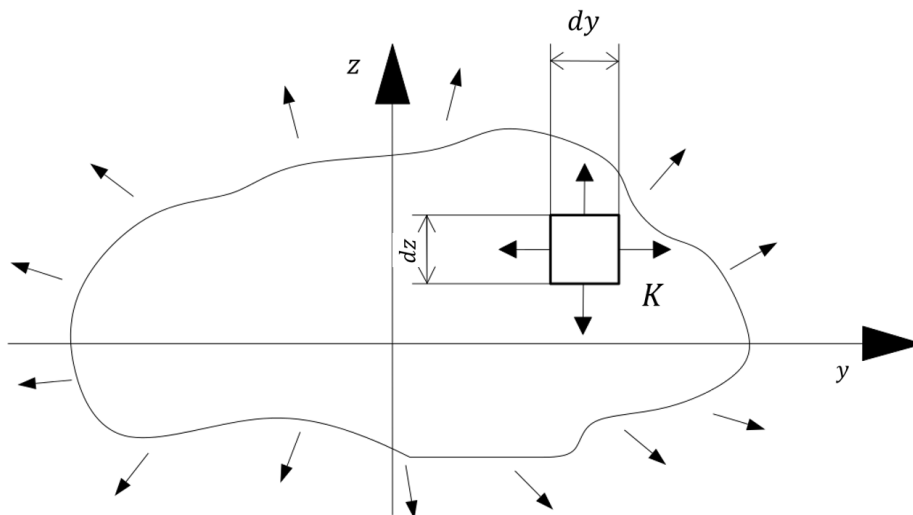
**Tabulka 2 Historický přehled použitých analogií**

Rok	Použitá analogie	Výzkumníci
1860/1870	Hydrodynamická analogie studující krut tyče konstantního průřezu.	William Thompson (lord Kelvin z Largsu) a Tait (1867). Boussinesq (1871), Greenhill, Den Hartog a Mc Givern (1935)
1890	Hydrodynamická analogie studující krut osově axisymetrických tyčí.	Hele Shaw (1898), Wyszomirski (1914)
1900	Membránová analogie (napětí mýdlové vrstvy) použitá pro krut tyče s konstantním profilem.	Prandtl, Anthes, Griffith a Taylor
1930	Elektrická analogie (vodivá fólie) zkoumající podobenství kroucení tyče s konstantním průřezem.	Biezeno a Koch, Cranz, Manzella
1925/1940	Elektrická analogie studující krut axisymetrických průřezů.	Jacobsen, Thum a Bautz, Salet, Giordano, Manzella

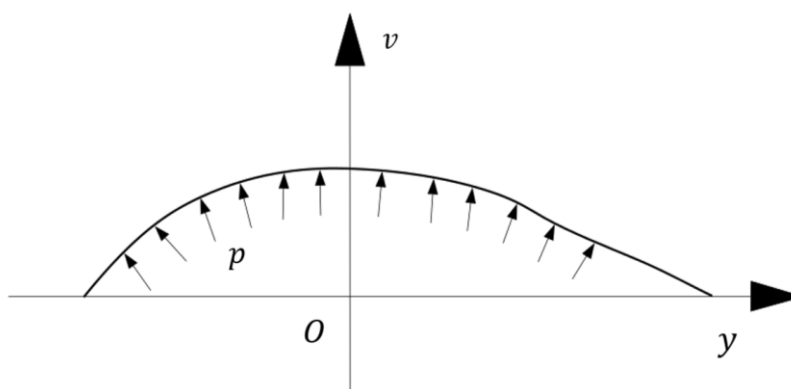
Z tabulky je patrné, že existuje velké množství analogických metod. Základní podstata všech analogií bude uvedena v následujícím textu. Bude také poukázáno na fakt, že metody elektrické a membránové vyžadují provedení experimentu. Pomocí hydrodynamické analogie bude v kapitole 5.3 vypočteno napětí u tenkého obdélníku.

### 2.3.1 Membránová analogie

Kolem roku 1903 objevil Ludvig Prandtl [14] membránovou analogii (též označováno jako Prandtlův vrchlík napětí). Podstatou je, že grafické zobrazení funkce napětí  $\Phi(y, z)$  dává tzv. plochu napětí. Prandtl dokázal, že tvar takovéto plochy má infinitesimalně tenká blána, napjatá přes otvor stejného tvaru, který má zkrucovaný průřez prutu, a která je mírně vypouklá slabým přetlakem  $p$  ve směru normály ke každému prvku normály.

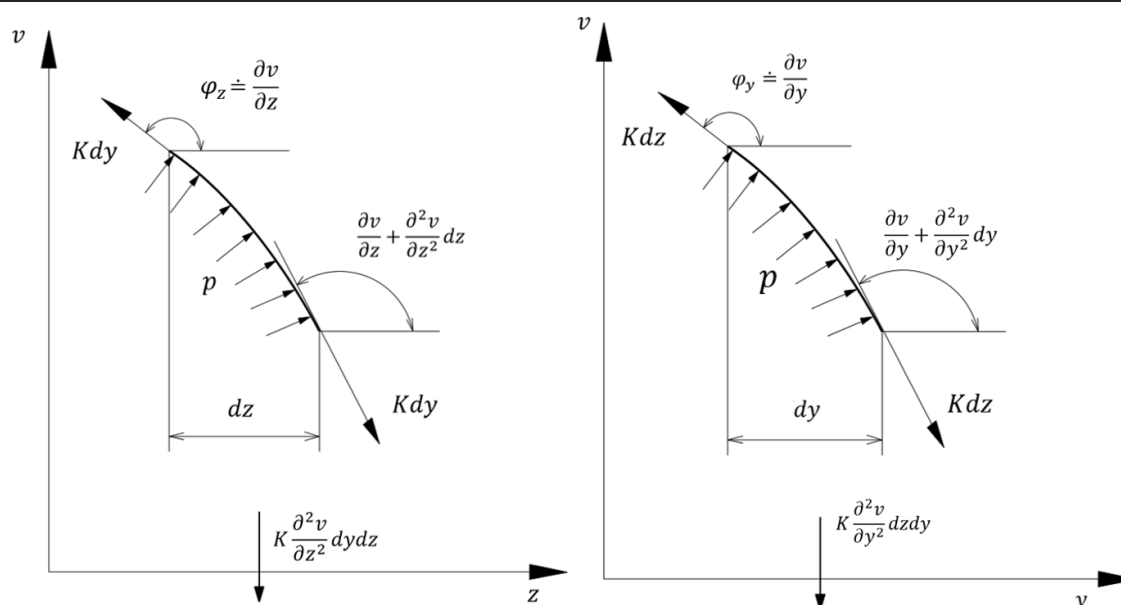


Obrázek 12 Napínaná membrána v rovině  $yz$



Obrázek 13 Výška  $v$  napínané membrány

Podstatou je, že tzv. povrchové napětí má stálou velikost a vnitřní síla  $K$  v libovolném řezu membrány je vždy vzhledem k řezu normálná.



Obrázek 14 Obecný řez membrány

Velikost vnitřní síly  $K$  (vnitřní síla na jednotku délky řezu) závisí jen na délce řezu. Podmínku rovnováhy membrány v rozměrech  $dy, dz$  ve směru souřadnice  $v$  lze tedy psát ve tvaru [3]

$$p \, dydz + K \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} dydz + K \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} dydz = 0. \quad (22)$$

Rovnice je odvozena za předpokladu malé tloušťky membrány, tedy  $t \rightarrow 0$ . Vypuklost membrány uvažujeme v limitě nulovou malá  $\lim\left(\frac{1}{\rho}\right) = 0$ , kde zlomek  $\frac{1}{\rho}$  představuje křivost membrány. Vlastní váha membrány je uvažována jako zanedbatelná. V odvození je taktéž uvažováno, že pro malé úhly  $\sin(\varphi) \doteq \operatorname{tg}(\varphi) \doteq \varphi$ .

Po úpravě této rovnice lze získat

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = -\frac{p}{K}. \quad (23)$$

Tato rovnice je již analogická k rovnici, která udává plochu napětí. Liší se pouze výrazem  $\frac{p}{K}$  na pravé straně, kterou je nutné nahradit výrazem  $2kG\vartheta$ , kde  $k$  značí jistou převodní (korekční) konstantu.

Je nutné zmínit, že se jedná o metodu čistě experimentální a v mé práci se jí již nebudu zabývat. Sumarizuji jen obecná pravidla, která z této metody plynou:

- ✓ vrstevnice na vrchlíku napětí představují smykové čáry u zkrucovaného průřezu
- ✓ sklon tečné roviny k povrchu vrchlíku udává velikost smykového napětí v příslušném místě zkrucovaného průřezu
- ✓ dvojnásobný objem  $V$  vrchlíku mezi povrchem napjaté membrány a její okrajovou rovinou je roven krouticímu momentu zkrucovaného průřezu

Nejllepší přehled rozdílných analogií pro krut prutů lze najít v sumarizované studii [17]. Podstata měření mýdlové membrány je stručně uvedena jak v české starší literatuře včetně praktického příkladu [1], tak v anglické literatuře [18] s dalšími odkazy na relevantní literaturu.

V současné době se však tímto způsobem smykové napětí u zkrucovaných tyčí nekruhového průřezu nevyhodnocuje.

### 2.3.2 Hydrodynamická analogie

Tato metoda spočívá v tom, že necháme proudit médium v nádobě, jejíž hranice je totožná s obrysem zkrucovaného tělesa. Prouděním kapaliny vznikají proudnice připomínající smykové čáry, které vznikají v tělese namáhaném na krut. Výsledné smykové napětí deformovaného tělesa odpovídá rychlosti proudění kapaliny. Tato podobnost plyne z podobnosti rovnic, které tyto jevy za ideálních podmínek popisují.

Podívejme se na podobnost rovnice rovnováhy a rovnice kontinuity

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \operatorname{div}(\mathbf{w}) \equiv \frac{\partial w_z}{\partial z} + \frac{\partial w_y}{\partial y} = 0 \quad (24)$$

Dále si všimněme analogie rovnic (25)

$$\Delta \Phi \equiv \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = -2G\vartheta, \quad \Delta \psi \equiv \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0, \quad (25)$$

kde  $\frac{\partial \psi}{\partial y} = w_z$  a  $\frac{\partial \psi}{\partial z} = -w_y$ .

Hydrodynamické analogii se tato práce věnuje podrobněji v kapitole 5.

### 2.3.3 Elektrická analogie

Princip této metody spočívá v rozložení napětí, které prochází vodivým papírkem nazývaným v anglické literatuře Teledeltos paper (2). Jedná se o černý vodivý papírek, který je potažen vrstvou uhlíku. Rozložení napětí na záznamovém papírku připomíná rozložení smykového napětí v oblasti namáhané na prostý krut.

Zjišťujeme, že rovnice pro rozložení elektrického napětí  $V$  v tenkém Teledeltosu o konstantní tloušťce a odporu se řídí Laplaceovou rovnicí

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0, \quad (26)$$

kde  $y$  a  $z$  jsou souřadnice obecného bodu na Teledeltosu.

Předpokládejme, že  $\tau_{xz} = -\frac{\partial\Phi}{\partial y}$ ,  $\tau_{xy} = +\frac{\partial\Phi}{\partial z}$ , pak kroucení prizmatického prutu můžeme popsat pomocí Airyho funkce napětí takto

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = -2G\theta. \quad (27)$$

Pravé strany rovnic (26) (27) obsahují jenom konstanty. Pokud tedy definujeme funkci

$\psi = \Phi - \frac{1}{2}G\theta(x^2 + y^2)$ , dostaneme rovnicí (28), u které je podobnost s rovnicí (26) zřejmá

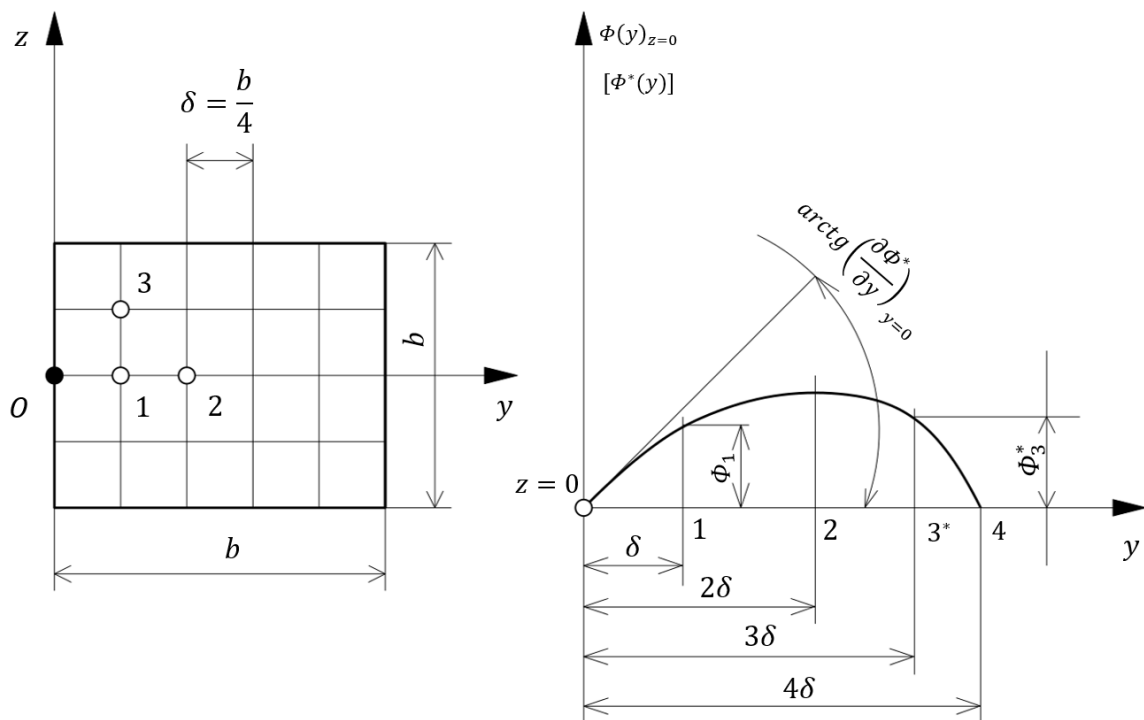
$$\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = 0. \quad (28)$$

## 2.4 Metody numerické

### 2.4.1 Metoda konečných diferencí

Od roku 1908 se postupně začínají rozvíjet některé jednoduché úlohy, využívající numerických metod [16]. Jedná se nejprve zpravidla o rovinné úlohy, případně o úlohy axisymetrické (rotačně symetrické). Důvodem k tomuto kroku byl fakt, že některé úlohy vedou v obecném případě k sestavení parciálních diferenciálních rovnic čtvrtého řádu (často nehomogenních), jejichž exaktní řešení je značně komplikovanější.

Jednou z nejznámějších numerických metod je **Rungeova metoda sítí** [16] (metoda konečných diferencí). Tato metoda vyžaduje pokrytí řešené oblasti čtvercovou sítí, jejíž jemnost je charakterizována délkou strany jednotlivých čtverců  $\delta$  (tzv. krokem sítě). Poté diferenciály nahradíme konečnými diferencemi (s výhodou centrálními diferencemi, které obsahují nulové funkční hodnoty po obou stranách počátečního bodu).



Obrázek 15 Podstata metody sítí

Požadovaná přesnost řešení závisí na zvolené hustotě sítě. Hustota sítě má ovšem vliv na objem početních úkonů, které je potřeba pro vyřešení úlohy udělat.

Tato metoda byla využita při řešení krutu čtvercového průřezu [3], [6]. Tvar průřezu je takový, že umožňuje využití symetrie úlohy, takže postačí určit funkční hodnoty pouze ve třech bodech, viz obrázek 15.

Diferenciální rovnice (21) se dá po přepisu do tvaru diferenční rovnice vyjádřit vztahem

$$\frac{(\Delta_2\Phi)_y}{\delta^2} + \frac{(\Delta_2\Phi)_z}{\delta^2} = -2G\vartheta. \quad (29)$$

kde  $(\Delta_2\Phi)_y$  a  $(\Delta_2\Phi)_z$  značí druhé centrální diference funkce napětí  $\Phi$  ve směrech  $y$  a  $z$ . Pro bod 1 lze za druhé centrální diference dosadit výrazy

$$(\Delta_2\Phi)_{1y} = \Phi_2 - 2\Phi_1 + \Phi_0 \text{ a } (\Delta_2\Phi)_{1z} = 2(\Phi_3 - \Phi_1).$$

Takže výsledná diferenční rovnice dostává tvar

$$\Phi_0 - 4\Phi_1 + \Phi_2 + 2\Phi_3 - 2G\vartheta\delta^2. \quad (30)$$

Po dosazení okrajových podmínek (na okraji průřezu platí  $\Phi_0 = 0$  pro bod 1, podobně pro body 2 a 3) a celkovém vyřešení vzniklé soustavy 3 lineárních rovnic se dají určit hodnoty funkce  $\Phi(y, z)$  ve všech uzlových bodech jako

$$\Phi_1 = \frac{7}{4}G\vartheta\delta^2, \quad \Phi_2 = \frac{9}{4}G\vartheta\delta^2, \quad \Phi_3 = \frac{11}{8}G\vartheta\delta^2.$$

Protože hodnoty smykových napětí jsou určeny derivacemi funkce napětí, lze maximální smykové napětí určit z maximálního sklonu tečny k ploše napětí (de facto Prandtlovu vrchlíku). Aby toto bylo možné, je nutné v uzlových bodech 0, 1, 2, 3... ležících na ose  $y$ , vypočítat interpolační funkci  $\Phi^*$ . Pro ekvidistantní dělení uzlových bodů se nejlépe hodí první Newtonův interpolační polynom, jehož tvar je [3],[6]

$$\Phi^*(y) = \Phi_0 + \frac{y}{\delta}(\Delta\Phi)_0 + \frac{y(y-\delta)}{2} \frac{(\Delta_2\Phi)_0}{\delta^2} + \frac{y(y-\delta)(y-2\delta)}{3!} \frac{(\Delta_3\Phi)_0}{\delta^3} + \frac{y(y-\delta)(y-2\delta)(y-3\delta)}{4!} \frac{(\Delta_4\Phi)_0}{\delta^4}.$$

Po aplikaci několika pravidel z oblasti numerické matematiky lze nakonec po značném úsilí dojít ke vztahu

$$\tau_{max} = \frac{31}{48}G\vartheta b = 0,6458G\vartheta b.$$

Pomocí nekonečných řad lze dojít k výrazu  $\tau_{max} = 0,675G\vartheta b$ . Tedy reálná chyba při takto zvoleném kroku sítě je necelých 5%. Celý postup metody sítě je popsán v knihách [3] a [6]. Řešení problému krutu prutů je však touto metodou značně obtížné a spadá spíše do oblasti praktické ukázky numerické matematiky.

**V současné době tato metoda nachází spíše uplatnění v přibližném stanovení průhybu a napětí u pravouhlých desek, případně pravouhlých stěn [25]. Tato bakalářská práce se touto metodou primárně nezabývá.**



### 2.4.2 Southwellova relaxační metoda

Přibližně v roce 1940 byla Southwellem publikována nová iterační metoda - Southwellova relaxační metoda [13]. Její princip vysvětlil poprvé na řešení úlohy o kroucení prizmatických prutů užitím Prandtlovy membránové analogie, přičemž napjatou, dokonale tenkou membránu nahradil čtvercovou sítí stejnoměrně napjatých pružných strun, přenášející zatížení měrným tlakem  $p$ , stejně jak jej přenáší napjatá tenkostěnná membrána.

Pro síť strun je nutné opět přepsat parciální diferenciální rovnici do tvaru diferenční rovnice, přičemž se uvažuje, že v každém uzlovém bodě je koncentrována síla způsobená přetlakem  $p$ , jejíž velikost je  $p\delta^2$ . Dále se uvažuje, že ve všech čtyřech strunách protínajících se v uvažovaném uzlovém bodě existují síly  $K\delta$ , které působí ve směrech určených rozdíly posuvů příslušných uzlových bodů  $v$ .

Lze dokázat [3], že podmínka rovnováhy uzlového bodu je ve tvaru

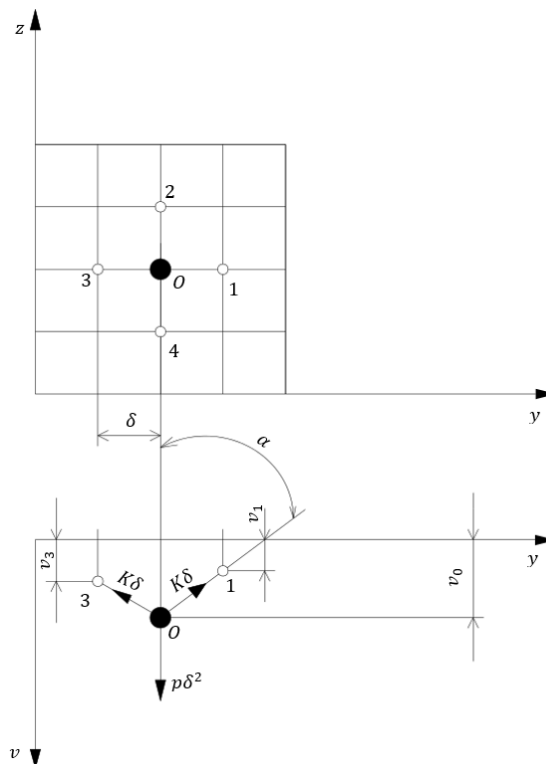
$$K(4v_0 - v_1 - v_2 - v_3 - v_4) - p\delta^2 = 0.$$

Tuto podmínku lze přepsat do tvaru

$$\frac{1}{\delta^2}(v_1 + v_2 + v_3 + v_4 - 4v_0) = -\frac{p}{K}. \quad (31)$$

Což je diferenční tvar diferenciální rovnice popisující napínání Prandtlovy membrány (23).

K vyřešení uvedeného problému je nutno nalézt takový soubor hodnot průhybů sítě  $v$ , který zajistí platnost rovnice (31) ve všech uzlových bodech.



Obrázek 16 Princip Southwellovy relaxační metody

Literatura [1] uvádí, že k vyřešení problému lze použít metodu postupných aproximací a to tak, že se jako první krok postupu provede odhad hodnot průhybů sítě. Hodnoty posuvů nulté aproximace označíme  $v_0^0, v_1^0, v_2^0, \dots$ . Dosazením těchto odhadnutých hodnot průhybu sítě do rovnice (31) dostaneme výraz (32)

$$K(v_1^0 + v_2^0 + v_3^0 + v_4^0 - 4v_0^0) + p\delta^2 = R_0. \quad (32)$$

$R_0$  značí reziduální sílu v uzlovém bodě 0. V ostatních uzlových bodech sítě obdobně působí reziduální síly  $R_1, R_2, \dots$ . Princip relaxační metody spočívá pak v tom, že se anulují ta reziduální síla, která je v absolutní hodnotě největší. Celý princip metody si podle Southwella lze představit takto. Mějme v každém uzlovém bodě připevněn šroub, jehož osa vede kolmo k ploše sítě. Dotahováním nebo uvolňováním (relaxací) šroubu lze libovolně nastavovat průhyb každého uzlového bodu sítě. Podaří-li se s danou přesností provést správné korekce průhybů všech uzlových bodů sítě (toto je ekvivalentní tomu, že jsou všechny reziduální síly nulové) lze konstatovat, že bylo nalezeno řešení úlohy.

**Jak je vidět z předchozího výkladu, jedná se o metodu, která, vyžaduje značnou znalost programování iteračních algoritmů. Já se jí v této práci dále nezabývám. Namísto toho popisuji v kapitole 2.4.3 metodu MKP, která v současné době nahrazuje všechny zmíněné aproximační metody.**

### 2.4.3 Metoda konečných prvků (MKP) [24]

Metoda konečných prvků je numerická metoda, která slouží k přibližnému řešení okrajových podmínek parciálních diferenciálních rovnic. Metoda konečných prvků je nejpoužívanější metodou k řešení mechanických úloh v inženýrské praxi. Tato metoda se začala rozvíjet už ve 40. letech minulého století. Svou formu pro každodenní používání získala až v 50. letech 20. století díky americkému matematikovi **M. J. Turnera**, který v té době pracoval jako letecký inženýr ve firmě Boeing. Za největšího odborníka v této oblasti je u nás považován nynější emeritní profesor VUT v Brně **prof. RNDr. Alexander Ženíšek, DrSc.**

Tato metoda vychází z Langrageova variačního principu, který definujeme takto:

„Mezi všemi funkcemi posuvů, které zachovávají spojitost tělesa a splňují okrajové podmínky, se realizují ty, které udělují celkové potencionální energii  $\Pi$  stacionární hodnotu.“

Lze dokázat, že tato stacionární hodnota existuje, je jednoznačná a představuje minimum funkcionálu  $\Pi$ .

Funkcionál  $\Pi$  definujeme jako  $\Pi = W - P$ , kde  $W$  je energie napjatosti tělesa  $\Omega$ .

$$W = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} dv \quad (33)$$

$P$  představuje potenciál vnějšího zatížení

$$P = \int_{\Omega} \mathbf{u}^T \mathbf{o} dV + \int_{\Omega} \mathbf{u}^T \mathbf{p} dS. \quad (34)$$

Ve vztazích (33) a (34) vystupují sloupcové matice

- |                       |   |
|-----------------------|---|
| • posuvů              | $\mathbf{u}^T = [u, v, w]$  |
| • přetvoření          | $\boldsymbol{\varepsilon}^T = [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}]$ |
| • napětí              | $\boldsymbol{\sigma}^T = [\sigma_x, \sigma_x, \sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}]$                           |
| • objemového zatížení | $\mathbf{o}^T = [o_x, o_y, o_z]$  |
| • plošného zatížení   | $\mathbf{p}^T = [p_x, p_y, p_z]$  |

Použitím metody MKP se tato práce zabývá v kapitole 6.

---

## 2.4.4 Ostatní metody

Výše zmíněný výčet metod je pouze základní. Existuje řada dalších metod, které se však nikdy nedostaly do většího povědomí. Mezi tyto metody můžeme například zahrnout:

- a) Duncanova metoda parametru tloušťky [15]
- b) Grafické metody [19].

Specifickou skupinu tvoří také metody variačního počtu:

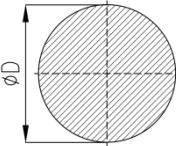
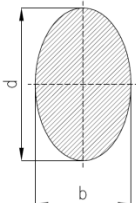
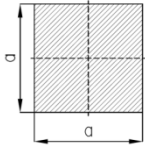
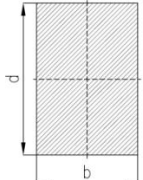
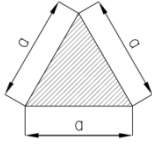
- a) Ritzova metoda [10]
- b) Trefftzova metoda [20]
- c) Galerkinova metoda [21].

Ani jednou z výše uvedených ostatních metod se tato studie již více nezabývá.

### 3 VÝBĚR VHODNÉ METODY PRO PRAKTICKOU ČÁST

Jak je vidět z předchozí sumarizace, existuje značné množství různých nekuhových průřezů (plné, duté či otevřené) a metod, kterými lze jednotlivé případy řešit. Vzhledem k rozsahu této práce byly vybrány pouze plné průřezy těch nejzákladnějších tvarů, tj. kruh a elipsa, čtverec a obdélník, rovnoramenný trojúhelník. K praktickému řešení problému krutu prutů s těmito příčnými průřezy byly dále vybrány nejpoužívanější metody, tj. teorie prosté pružnosti (prostá PP), (Airyho) funkce napětí a metoda konečných prvků (MKP). Pro kompletnost byla použita také hydrodynamická analogie. Následující tabulka uvádí výčet příčných průřezů a metod, kterými lze tyto průřezy řešit.

Tabulka 3 Metody řešení vybraných průřezů

Průřez	Kruhový	Eliptický	Čtvercový	Obdélníkový	Trojúhelník
<b>Obrázek</b>					
<b>Autor / rok řešení</b>	Navier 1826	St. Venant 1864	St. Venant 1864	St. Venant 1864	St. Venant 1864
<b>Zvolená metoda řešení</b>	Prostá PP, Airyho funkce napětí, MKP	Airyho funkce napětí, MKP	Přesně jen Airyho funkce napětí rozvinutá do nekonečné řady, MKP	Přesně jen Airyho funkce napětí rozvinutá do nekonečné řady a MKP, hydrodynamická podobnost	Airyho funkce napětí, MKP

V následujícím textu uvedu podstatu zmíněných metod a na konci tyto metody aplikuji.

## 4 PRAKTICKÝ ANALYTICKÝ VÝPOČET

Podle tabulky 3 je vidět, že univerzální analytickou metodou je řešení pomocí funkce napětí – **Airyho funkce napětí**. V následujícím textu budou touto metodou analyzovány všechny příčné průřezy z tabulky. Pro úplnost je pod tímto odstavcem uveden obecný postup řešení. Bylo čerpáno převážně z článku [8]. Postup je následující:

### 1. Pro konkrétní příčný průřez najdeme Airyho funkci napětí.

Airyho funkci napětí  $\Phi(y, z)$  hledáme ve tvaru  $\Phi(y, z) = k g(y, z)$ , kde  $k$  je konstanta a  $g(y, z)$  je funkce charakterizující tvar krouceného profilu. Připomeňme, že tato funkce musí v oblasti  $\Omega$  splňovat rovnici (21) a na hranici být nulová.

### 2. Výpočet polárního momentu

Polární moment spočítáme z Airyho funkce napětí  $\Phi(y, z)$  jako

$$J_p = \frac{2}{G\vartheta} \iint_{\Omega} \Phi(y, z) dy dz. \quad (35)$$

### 3. Výpočet smykových napětí $\tau_{xy}, \tau_{xz}$ a výsledného tangenciálního napětí $T$

Tangenciální napětí vypočítáme z Airyho funkce napětí podle rovnice (23)

$$\tau_{xy} = \frac{\partial \Phi(y, z)}{\partial z}, \quad \tau_{xz} = -\frac{\partial \Phi(y, z)}{\partial y}. \quad (36)$$

Výsledné tečné napětí vypočítáme užitím euklidovské metriky

$$|T| = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2}. \quad (37)$$

### 4. Vypočítání krouticího momentu $M_k$

Krouticí moment vypočítáme pomocí smykových napětí z rovnice (36) takto

$$M_k = \iint_{\Omega} (-\tau_{xy}z + \tau_{xz}y) dy dz. \quad (38)$$

### 5. Výpočet deformační funkce

Deformační funkci vypočítáme z Airyho funkce napětí jako

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial z} + z, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} - y. \quad (39)$$

## 4.1 Krut prutů s kruhovým příčným průřezem

Nechť  $\Gamma$  je hranice oblasti  $\Omega$ .  $\Gamma$  je tedy kružnice o poloměru  $R$  splňující obecnou rovnici

$$y^2 + z^2 = R^2. \quad (40)$$

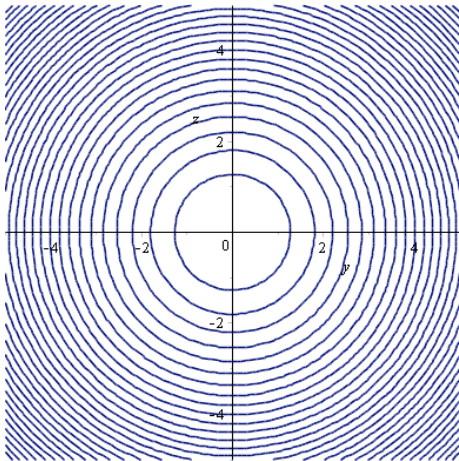
Odpovídající Airyho funkce má tvar

$$\Phi(y, z) = k(y^2 + z^2 - R^2). \quad (41)$$

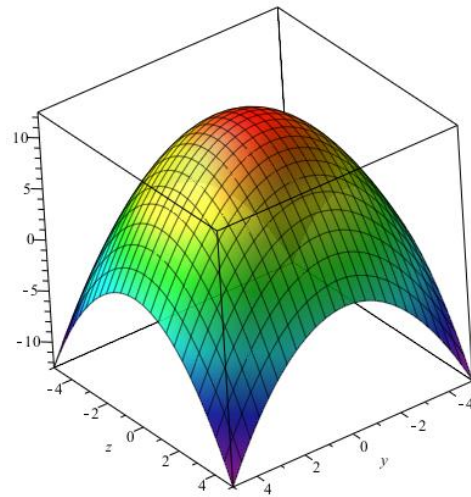
Funkce zřejmě splňuje  $\Phi = 0$  na hranici  $\Gamma$ . Podmínka  $\Delta\Phi = -2G\vartheta$  dává hodnotu konstanty  $k = -\frac{1}{2}G\vartheta$ . Odtud dostáváme Airyho funkci v konečném tvaru

$$\Phi(y, z) = \frac{1}{2}G\vartheta(R^2 - y^2 - z^2). \quad (42)$$

Graf Airyho funkce je vykreslen na obr. 17 a 18.



Obrázek 17 Airyho funkce napětí pro kruhový průřez 2D



Obrázek 18 Airyho funkce napětí pro kruhový průřez 3D

Polární moment z Airyho funkce napětí počítáme jako

$$J_p = \frac{2}{G\vartheta} \iint_{\Omega} \Phi(y, z) dydz.$$

Kružnice zapsaná do polárních souřadnic má tvar

$$y = \rho \cos\varphi$$

$$z = \rho \sin\varphi.$$

Transformované polární souřadnice spolu s jejich jakobiánem  $J(\rho, \varphi) = \rho$  dosadíme do (35)

$$J_p = 2 \iint_{\Omega} \frac{1}{2} (R^2 - \rho^2 \cos^2\varphi - \rho^2 \sin^2\varphi) \rho \, d\rho d\varphi \quad (43)$$

odtud po úpravách dostáváme následující vztahy.

$$J_p = \iint_{\Omega} (R^2 - \rho^2) \rho \, d\rho d\varphi$$

$$J_p = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (R^2 - \rho^2) \rho \, d\rho d\varphi$$

$$J_p = \frac{\pi R^4}{2} \quad (44)$$

Jediná nenulová tečná napětí  $\tau_{xy}$  a  $\tau_{xz}$  vypočteme z následujících rovnic

$$\tau_{xy} = \frac{\partial \Phi(y, z)}{\partial z}, \quad \tau_{xz} = -\frac{\partial \Phi(y, z)}{\partial y}$$

Tedy pro kruhový profil dostáváme rovnice (45)

$$\tau_{xy}(y, z) = -G\vartheta z, \quad \tau_{xz}(y, z) = G\vartheta y, \quad (45)$$

kde  $\vartheta$  označuje poměrný úhel zkroucení a  $G$  značí modul pružnosti ve smyku.

Výsledné smykové napětí vypočítáme ze vztahu (37) následovně

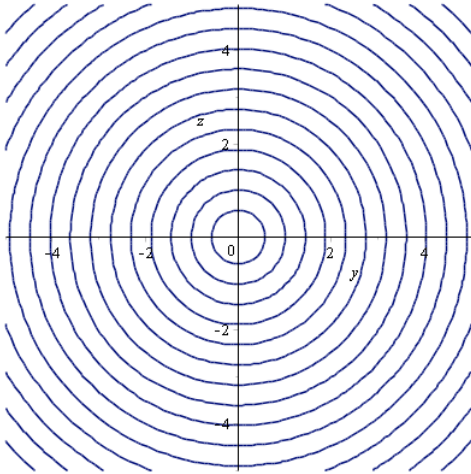
$$|T| = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2} = \sqrt{(-G\vartheta z)^2 + (G\vartheta y)^2}. \quad (46)$$

Po úpravě dostáváme

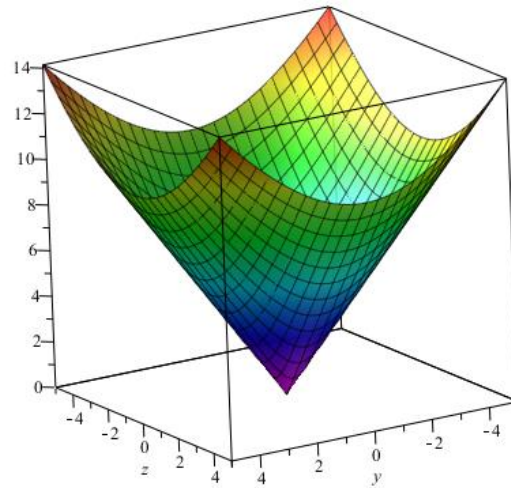
$$T = G\vartheta \sqrt{z^2 + y^2} = G\vartheta R. \quad (47)$$



Průběh funkce výsledného tangenciálního napětí ukazuje obr 19 a 20. Lze vidět, že tangenciální napětí se zvětšuje úměrně s poloměrem kružnice, která vytyčuje kruhový profil a je maximální na obvodu profilu zkrucované tyče.



Obrázek 19 Výsledné tangenciální napětí kruhového průřezu 2D



Obrázek 20 Výsledné tangenciální napětí kruhového průřezu 3D

Krouticí moment  $M_k$  vypočítáme ze smykových napětí vztahem (38)

$$M_k = 2G\vartheta \iint_{\Omega} \Phi(y, z) dydz = G\vartheta J_p. \quad (48)$$

Ze vztahu (48) lze snadno vidět, že k výpočtu poměrného úhlu zkroucení  $\vartheta$  stačí znát krouticí moment  $M_k$  a předpis Airyho funkce  $\Phi(y, z)$ . Výsledek dostaneme následným dosazením  $\vartheta$  do rovnic (45).

Modul průřezu v krutu vypočítáme jako  $W_k = \frac{M_k}{T_{max}}$ . Deformační funkci dostáváme ze vztahů (39).

Výpočtem lze snadno ověřit platnost tvrzení, že deformační funkce  $\varphi$  je v případě zkroucení tyče kruhového průřezu nulová.

## 4.2 Krut prutu elipsovitého průřezu

Uvažujme oblast  $\Omega$ , jejíž hranicí  $\Gamma$  je elipsa s poloosami  $a \geq b > 0$ . Rovnice takovéto elipsy je

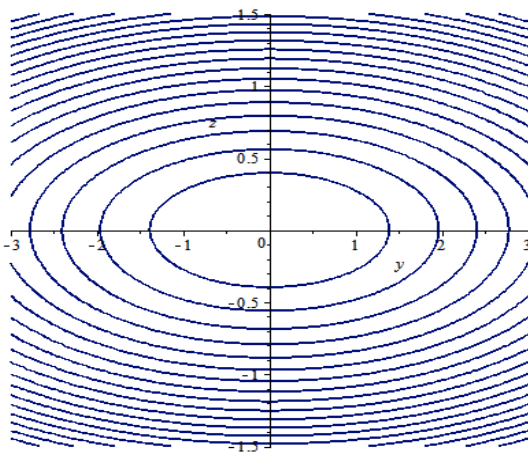
$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1. \quad (49)$$

Odpovídající Airyho funkce má tvar

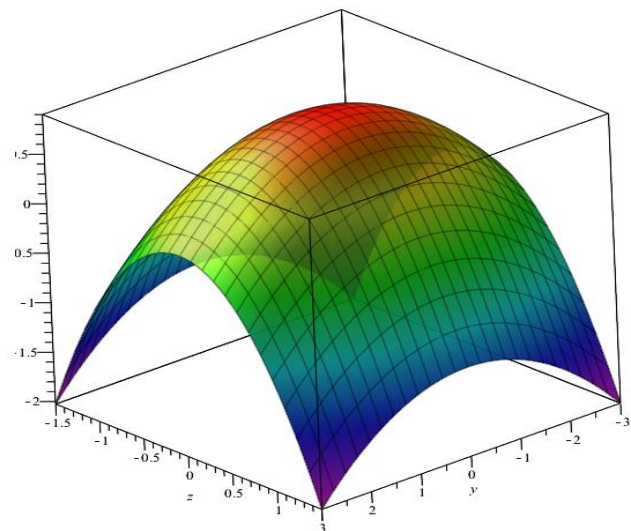
$$\Phi(y, z) = k \left( \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} - 1 \right). \quad (50)$$

Funkce zřejmě splňuje  $\Phi = 0$  na hranici  $\Gamma$ . Podmínka  $\Delta\Phi = -2G\vartheta$  dává hodnotu konstanty  $k = -G\vartheta \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}$ . Odtud dostáváme Airyho funkci v konečném tvaru

$$\Phi(y, z) = G\vartheta \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \left( 1 - \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} \right). \quad (51)$$



Obrázek 21 Průběh Airyho funkce 2D



Obrázek 22 Průběh Airyho funkce 3D

Polární moment z Airyho funkce napětí počítáme ze vztahu (35).

Nabízí se transformace předpisu elipsy do polárních souřadnic

$$\begin{aligned} y &= a \rho \cos\varphi \\ z &= b \rho \sin\varphi. \end{aligned}$$

Transformované souřadnice s jakobiánem  $J(\rho, \varphi) = ab\rho$  dosadíme do (35)

$$J_p = 2 \iint_{\Omega} \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} (1 - \rho^2 \cos^2 \varphi - \rho^2 \sin^2 \varphi) ab\rho \, d\rho d\varphi \quad (52)$$

odtud po úpravách dostáváme následující vztahy.

$$J_p = 2 \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2} \iint_{\Omega} (1 - \rho^2) \rho \, d\rho d\varphi$$

$$J_p = 2 \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 - \rho^2) \rho \, d\rho d\varphi$$

$$J_p = \pi \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2}. \quad (53)$$

Což je výsledný vztah pro výpočet polárního momentu pro eliptický profil<sup>1</sup>.

Pro tečná napětí  $\tau_{xy}$  a  $\tau_{xz}$  v našem případě podle (36) platí

$$\tau_{xy}(y, z) = -2 G\vartheta \frac{a^2 z}{a^2 + b^2}, \quad \tau_{xz}(y, z) = 2G\vartheta \frac{b^2 y}{a^2 + b^2}. \quad (54)$$

Výsledné smykové napětí dostaneme z (37) jako

$$|T| = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2} = \sqrt{\left(-2 \alpha \mu \frac{a^2 z}{a^2 + b^2}\right)^2 + \left(2 \alpha \mu \frac{b^2 y}{a^2 + b^2}\right)^2}. \quad (55)$$

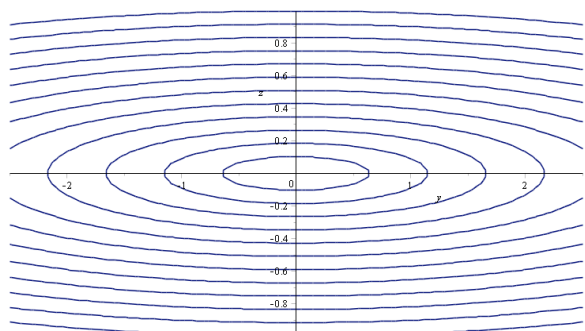
Po úpravě dostáváme výsledné smykové napětí ve tvaru

$$T = 2 G\vartheta \frac{\sqrt{a^4 z^2 + b^4 y^2}}{a^2 + b^2}. \quad (56)$$

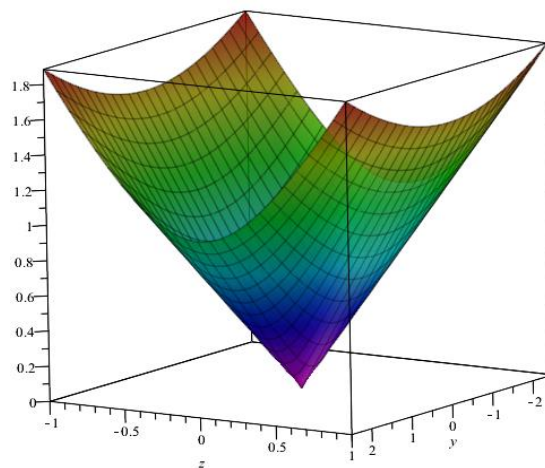
Maximální tangenciální napětí se nachází ve vrcholech vedlejší poloosy elipsy viz obrázek 23 a 24.

---

<sup>1</sup> je snadno ověřitelné, že pro kruhový průřez (teda pro  $a = b$ ) platí  $J_p = \pi \frac{R^4}{2}$



**Obrázek 23** Průběh výsledného smykového napětí 2D



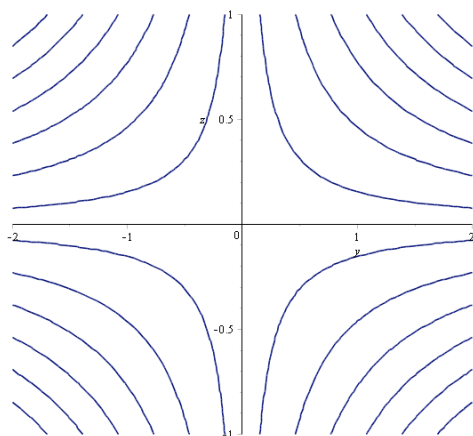
**Obrázek 24** Průběh výsledného smykového napětí 3D

Krouticí moment  $M_k$  dostaneme ze vztahu (38) jako

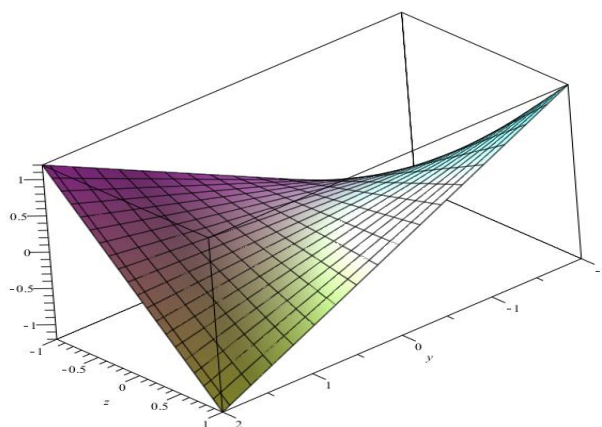
$$M_k = G\vartheta \pi \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2} . \tag{57}$$

Funkci popisující deformaci namáhaného tělesa dostáváme užitím rovnice

$$\varphi(y, z) = -\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} yz .$$



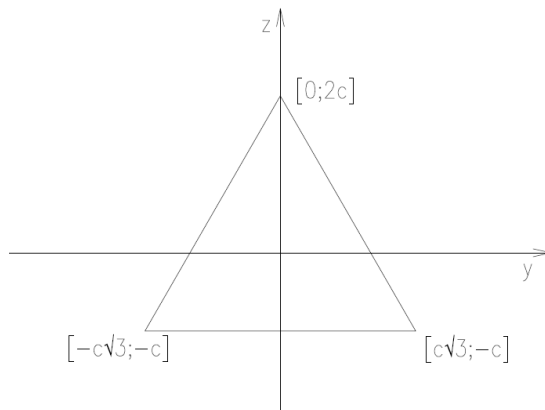
**Obrázek 25** Průběh deformační funkce 2D



**Obrázek 26** Průběh deformační funkce 3D

### 4.3 Krut prutu trojúhelníkového průřezu

Uvažujme oblast  $\Omega$ , jejíž hranicí  $\Gamma$  je obecný trojúhelník, jehož jedna strana je rovnoběžná s osou  $y$ . Tato strana tedy leží na přímce  $z = -c \wedge c > 0$ . Řekněme, že další strany trojúhelníka leží na přímkách  $z = a_1 y + b_1$  a  $z = a_2 y + b_2$ , kde všechny koeficienty z rovnic jsou reálná čísla.

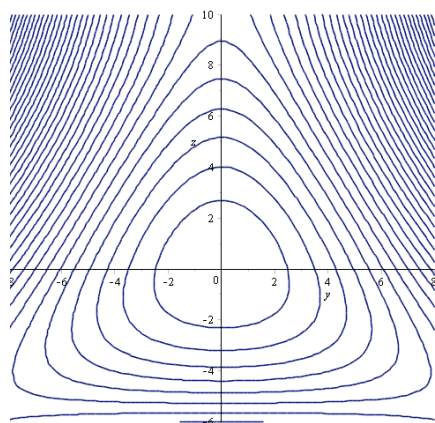


Předpis Airyho funkce napětí  $\Phi(y, z)$  musí splňovat rovnici (21), potom dostáváme

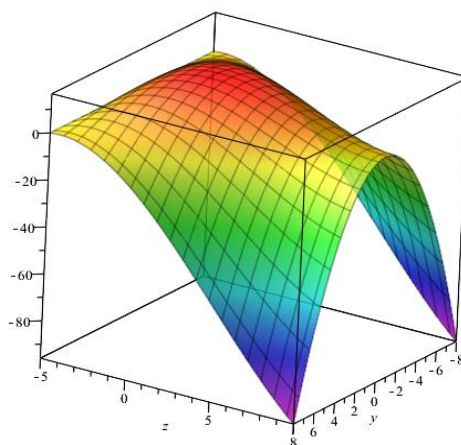
$$\Delta\Phi = -2k(a_1 + a_2)y + 2k(a_1 a_2 + 3)z + 2k(a_1 a_2 - b_1 - b_2 + c), \quad (58)$$

tato rovnice bude konstantní právě tehdy když  $(a_1 + a_2) = 0 \wedge (a_1 a_2 + 3) = 0$ . Splnění této podmínky je možné jen pokud trojúhelník bude rovnostranný. Pro obecný trojúhelník by bylo nalezení předpisu Airyho funkce značně obtížnější. Položme  $b_1 = b_2 = b = 2c$ , potom dostáváme Airyho funkci ve tvaru

$$\Phi(y, z) = \frac{G\vartheta}{6c} (\sqrt{3}y + 2c - z)(-\sqrt{3}y + 2c - z)(z + c). \quad (59)$$



Obrázek 27 Předpis Airyho funkce 2D



Obrázek 28 Předpis Airyho funkce 3D

Polární moment pro rovnostranný trojúhelník dostáváme ze vztahu (22)

$$J_p = 2 \frac{1}{6c} \int_{-c}^{2c} \left( \int_{(z-2c)/\sqrt{3}}^{(2c-z)/\sqrt{3}} (\sqrt{3}y + 2c - z)(-\sqrt{3}y + 2c - z)(z + c) dy \right) dz \quad (60)$$

$$J_p = \frac{9\sqrt{3}}{5} c^4. \quad (61)$$

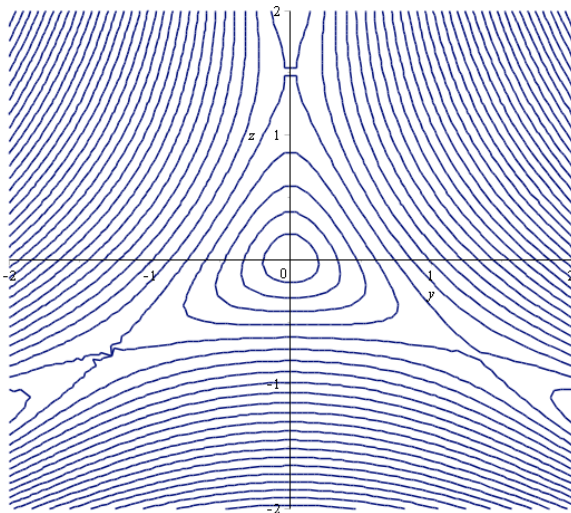
Jediné nenulové složky tenzoru napětí vypočítáme pomocí (36)

$$\tau_{xy}(y, z) = -G\vartheta \frac{y^2 - z^2 + 2cz}{2c}, \quad \tau_{xz}(y, z) = G\vartheta \frac{y(z + c)}{c}. \quad (62)$$

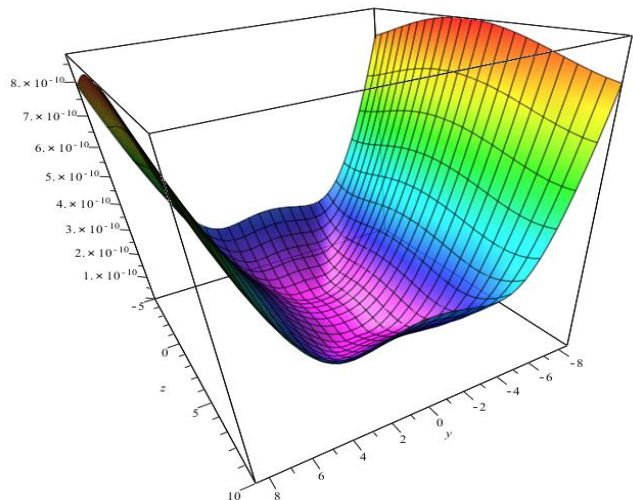
Pro výsledné smykové napětí platí

$$|T| = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2} = G\vartheta \frac{1}{2c} \sqrt{(y^2 - z^2 + 2cz)^2 + 4y^2(z + c)^2}. \quad (63)$$

Výsledné smykové napětí  $|T|$  nabývá svého maxima ve středech stran trojúhelníka.



Obrázek 29 Průběh výsledného smykového napětí 2D



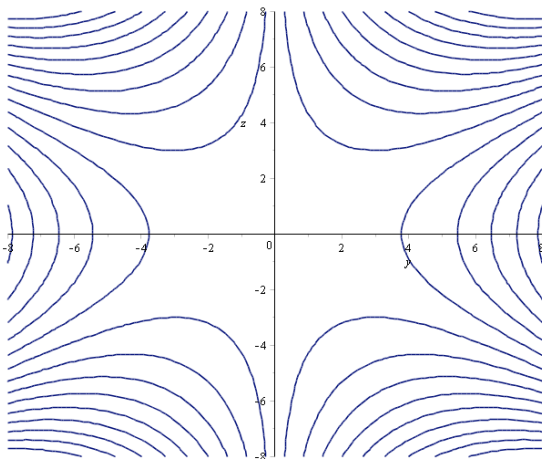
Obrázek 30 Průběh výsledného smykového napětí 3D

Krouticí moment vypočítáme pomocí (38)

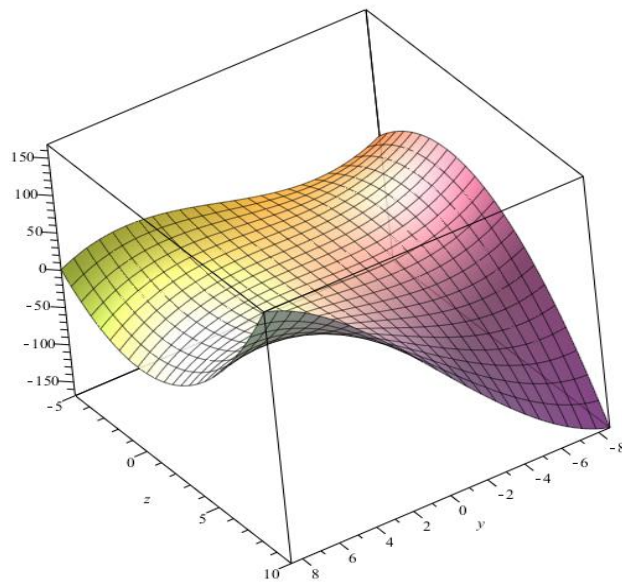
$$M_k = G\vartheta \frac{9\sqrt{3}}{5} c^4.$$

Deformační funkce je dána rovnicí

$$\varphi(y, z) = \frac{1}{6c} y(3z^2 - y^2). \quad (64)$$



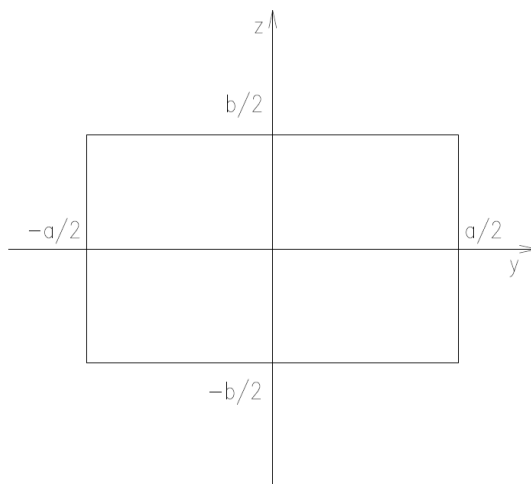
Obrázek 31 Předpis deformační funkce 2D



Obrázek 32 Předpis deformační funkce 3D

## 4.4 Krut prutu obdélníkového průřezu

Mějme oblast  $\Omega = \left(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right) \times \left(-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}\right)$ , jejíž hranicí  $\Gamma$  je obdélník o stranách  $a$  a  $b$ . Strany obdélníka leží na přímkách  $\frac{b}{2} \pm y = 0$ ,  $\frac{a}{2} \pm z = 0$ .



Airyho funkci napětí tedy budeme hledat ve tvaru

$$\Phi(y, z) = k \left( \frac{a^2}{4} - z^2 \right) \left( \frac{b^2}{4} - y^2 \right). \quad (65)$$

Airyho funkce nabývá na hranici  $\Gamma$  nulových hodnot. Pokusme se konstantu  $k$  vyjádřit podle podmínky (21)

$$\Delta\Phi \equiv \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 2k \left( z^2 + y^2 - \frac{a^2}{4} - \frac{b^2}{4} \right). \quad (66)$$

Rovnice (66) opět nemůže splňovat rovnici rovnováhy neboť

$$\nexists k(a, b) : 2k \left( z^2 + y^2 - \frac{a^2}{4} - \frac{b^2}{4} \right) = -2G\vartheta, \quad \forall y, z \in \Omega$$

Toto zřejmě platí také pro případ, kdy  $a = b$ , tedy pro čtverec.



## 4.5 Krut prutu obdélníkového průřezu (pomocí nekonečných řad) [8]

Výraz (66) nespĺňuje rovnici (21) a tímto také nespĺňuje rovnici rovnováhy (17), proto musíme Airyho funkci napětí pro obdélníkový profil hledat ve tvaru nekonečných řad.

Airyho funkci tedy rozvineme do dvojnásobné nekonečné kosinové řady. Airyho funkce musí být na hranici  $\Gamma$  nulová, a proto Airyho funkci rozvineme pomocí goniometrických funkcí  $\cos\left(\frac{k\pi y}{a}\right)$  a  $\cos\left(\frac{l\pi z}{b}\right)$ , kde  $k, l \in \mathbb{N}_l^2$ .

$$\Phi(y, z) = \sum_{k \in \mathbb{N}_l} \sum_{l \in \mathbb{N}_l} c_{kl} \cos\left(\frac{k\pi y}{a}\right) \cos\left(\frac{l\pi z}{b}\right), \quad (67)$$

kde  $c_{kl}$  jsou obecné koeficienty. Výraz (67) musí splňovat rovnici (21), tedy

$$\Delta\Phi \equiv \sum_{k \in \mathbb{N}_l} \sum_{l \in \mathbb{N}_l} -c_{kl} \left[ \frac{k^2\pi^2}{a^2} + \frac{l^2\pi^2}{b^2} \right] \cos\left(\frac{k\pi y}{a}\right) \cos\left(\frac{l\pi z}{b}\right) = -2G\vartheta. \quad (68)$$

Abychom našli koeficienty  $c_{kl}$ , rozvineme  $-2$  do řady stejného typu.

Nejdříve rozepíšeme funkci  $f(y) = 1$  na intervalu  $\left(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$  do kosinové řady  $\sum_{k \in \mathbb{N}_l} c_k \cos\left(\frac{k\pi y}{a}\right)$ .

$$c_k = \frac{2}{a} \int_0^{\frac{a}{2}} f(y) \cos\left(\frac{k\pi y}{a}\right) dy = \frac{4}{a} \left[ \frac{a}{k\pi} \sin\left(\frac{k\pi y}{a}\right) \right]_0^{\frac{a}{2}} = (-1)^{\frac{k-1}{2}} \frac{4}{k\pi}.$$

Stejným způsobem rozepíšeme funkci  $g(z) = 1$  na  $\left(-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}\right)$ . Tímto dostáváme rozepsané funkce  $f(y) = 1$ ,  $g(z) = 1$  pomocí řad ve tvaru

$$\sum_{k \in \mathbb{N}_l} (-1)^{\frac{k-1}{2}} \frac{4}{k\pi} \cos\left(\frac{k\pi y}{a}\right) = 1, \quad \sum_{l \in \mathbb{N}_l} (-1)^{\frac{l-1}{2}} \frac{4}{l\pi} \cos\left(\frac{l\pi z}{b}\right) = 1.$$

Součinem obou sum a vynásobením  $-2$  dostáváme rovnici

$$\sum_{k \in \mathbb{N}_l} \sum_{l \in \mathbb{N}_l} -2(-1)^{\frac{k+l}{2}-1} \frac{4^2}{kl\pi^2} \cos\left(\frac{k\pi y}{a}\right) \cos\left(\frac{l\pi z}{b}\right) = -2. \quad (69)$$

Všimněme si, že rovnice (68) a (69) jsou stejného typu. Jejich porovnáním získáváme předpis pro koeficienty  $c_k$ , a tímto můžeme následně zapsat Airyho funkci ve tvaru

$$\Phi(y, z) = G\vartheta \frac{2^5 a^2 b^2}{\pi^4} \sum_{k \in \mathbb{N}_l} \sum_{l \in \mathbb{N}_l} \frac{(-1)^{\frac{k+l}{2}-1}}{kl(k^2 b^2 + l^2 a^2)} \cos\left(\frac{k\pi y}{a}\right) \cos\left(\frac{l\pi z}{b}\right) \quad (70)$$

<sup>2</sup> Znakem  $\mathbb{N}_l$  rozumíme množinu přirozených lichých čísel

Airyho funkci dostáváme ve formě nekonečné řady. Podívejme se tedy na její konvergenci.

$$\left| c_{kl} \cos\left(\frac{k\pi y}{a}\right) \cos\left(\frac{l\pi z}{b}\right) \right| \leq |c_{kl}| \leq \frac{1}{k^2 l^2}$$

Tento výraz konverguje stejnoměrně, díky tomuto faktu můžeme napsat následující rovnost

$$\sum_{k \in \mathbb{N}_l} \sum_{l \in \mathbb{N}_l} \frac{1}{k^2 l^2} = \sum_{k \in \mathbb{N}_l} \frac{1}{k^2} \sum_{l \in \mathbb{N}_l} \frac{1}{l^2}. \quad (71)$$

Obě sumy na pravé straně mají konečný součet. Počítejme tedy dále polární moment  $J$ .

$$\int_{-a/2}^{a/2} \cos\left(\frac{k\pi y}{a}\right) dy = \frac{2a}{k\pi} (-1)^{\frac{k-1}{2}}, \quad \int_{-b/2}^{b/2} \cos\left(\frac{l\pi z}{b}\right) dz = \frac{2b}{l\pi} (-1)^{\frac{l-1}{2}}$$

pak můžeme podle rovnice (35) psát

$$J_p = \frac{2^8 a^3 b^3}{\pi^6} \sum_{k \in \mathbb{N}_l} \sum_{l \in \mathbb{N}_l} \frac{1}{k^2 l^2 (k^2 b^2 + l^2 a^2)}. \quad (72)$$

Bud'  $r = \frac{a}{b}$  poměr stran obdélníka. Mějme funkci  $K_1(r)$ <sup>3</sup>, pak lze polární moment zapsat jako

$$J_p = K_1\left(\frac{a}{b}\right) ab^3.$$

Tabulka 4 Číselné hodnoty funkcí  $K_1(r)$  a  $K_2(r)$

<b>r</b>	<b>1</b>	<b>1,5</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>8</b>	<b>10</b>	$\infty$
$K_1(r)$	0,141	0,196	0,229	0,263	0,281	0,291	0,298	0,307	0,312	1/3
$K_2(r)$	0,208	0,231	0,246	0,267	0,282	0,292	0,299	0,307	0,313	1/3

<sup>3</sup> Hodnoty funkcí  $K_1(r)$  a  $K_2(r)$  Saint-Venant vypočítal s přesností na pět desetinných míst, což je pro praktické počítání dostačující přesnost. Pokud bychom ovšem pro výpočet polárního momentu požadovali přesnější řešení, budeme nuceni použít na první pohled složitější vztah (72).

Stejnými postupy dostáváme ze vztahů (36) a (37) maximální výsledné smykové napětí<sup>4</sup>

$$|T_{max}| = G\vartheta \frac{2^5 a^2}{\pi^3 b} \sum_{k \in \mathbb{N}_l} \sum_{l \in \mathbb{N}_l} \frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{k(k^2 + l^2 r^2)}.$$

Pomocí funkce  $K_2(r)$  přejde tento vztah na

$$|T_{max}| = G\vartheta ab^2 K_2\left(\frac{a}{b}\right).$$

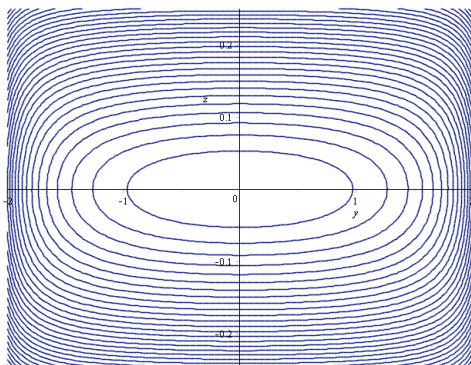
Deformační funkci dostáváme jako

$$\varphi(y, z) = \frac{2^5 a^3 b}{\pi^4} \sum_{k \in \mathbb{N}_l} \sum_{l \in \mathbb{N}_l} \frac{(-1)^{\frac{k+l}{2}}}{k^2(k^2 b^2 + l^2 a^2)} \sin\left(\frac{k\pi y}{a}\right) \sin\left(\frac{l\pi z}{b}\right) + yz.$$

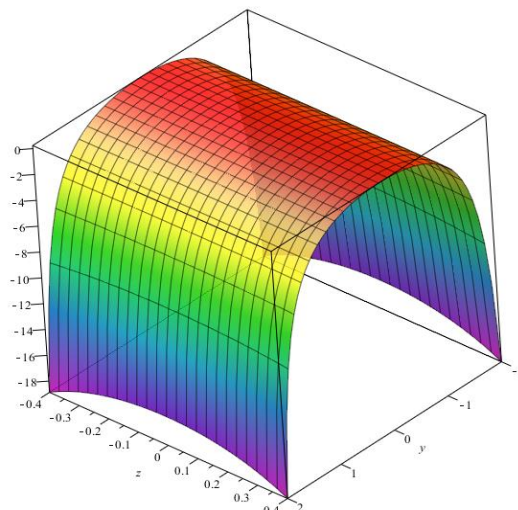
---

<sup>4</sup> V praxi se častěji používá vztah  $|T_{max}| = \frac{M}{W}$ , kde  $W$  je krouticí moment a platí, že  $W = ab^2 K_2(a/b)$

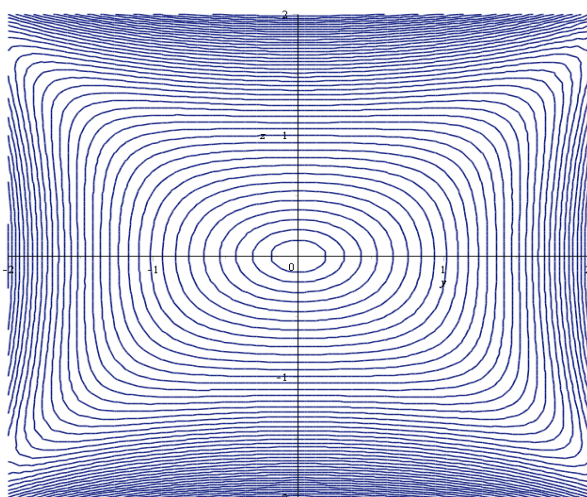
Pojďme se podívat na grafické řešení výše vypočítaných funkcí.



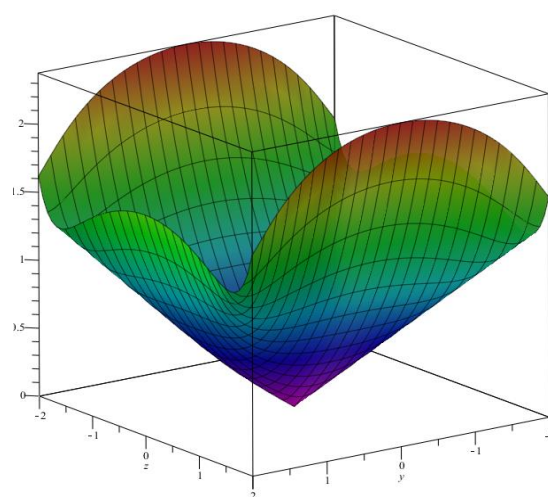
**Obrázek 33** Airyho funkce pro obdélníkový průřez  
2D



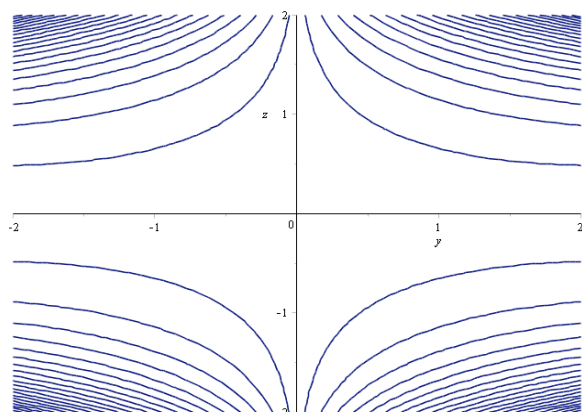
**Obrázek 34** Předpis deformační funkce 3D



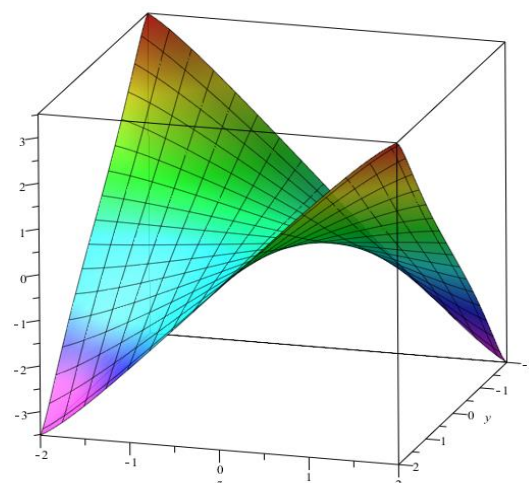
**Obrázek 35** Funkce napětí pro obdélníkový profil  
2D



**Obrázek 36** Funkce napětí pro obdélníkový profil  
3D



**Obrázek 37** Deformační funkce obdélníkového  
profilu 2D

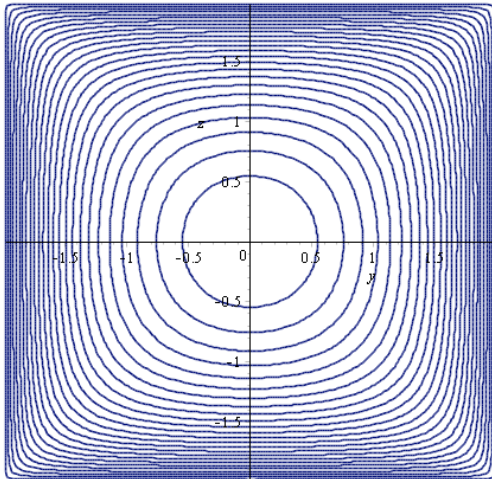


**Obrázek 38** Deformační funkce obdélníkového  
profilu 3D

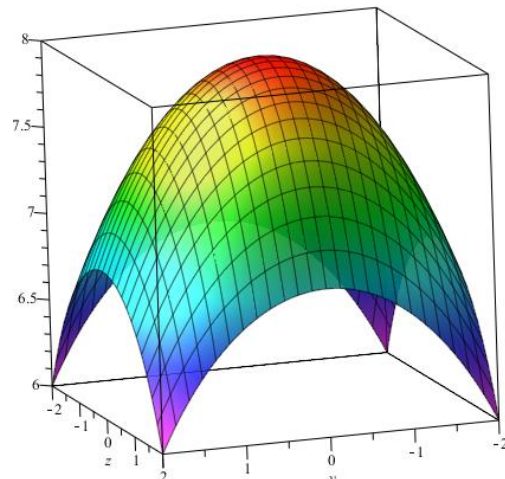
Speciálním případem obdélníka, pro jehož strany platí  $a = b = A$ , je čtverec.

Airyho funkce pro čtverec je ve tvaru

$$\Phi(y, z) = G\vartheta \frac{2^5 A^7}{\pi^4} \sum_{k \in \mathbb{N}_l} \sum_{l \in \mathbb{N}_l} \frac{(-1)^{\frac{k+l}{2}-1}}{kl(k^2 A^2 + l^2 A^2)} \cos\left(\frac{k\pi y}{A}\right) \cos\left(\frac{l\pi z}{A}\right). \quad (73)$$



Obrázek 39 Airyho funkce napětí pro čtvercový průřez 2D



Obrázek 40 Airyho funkce napětí pro čtvercový průřez 3D

Polární moment můžeme napsat ve tvaru

$$J_p = \frac{2^8 A^6}{\pi^6} \sum_{k \in \mathbb{N}_l} \sum_{l \in \mathbb{N}_l} \frac{1}{k^2 l^2 (k^2 A^2 + l^2 A^2)}.$$

Výsledné maximální smykové napětí vypočítáme z následující rovnice takto

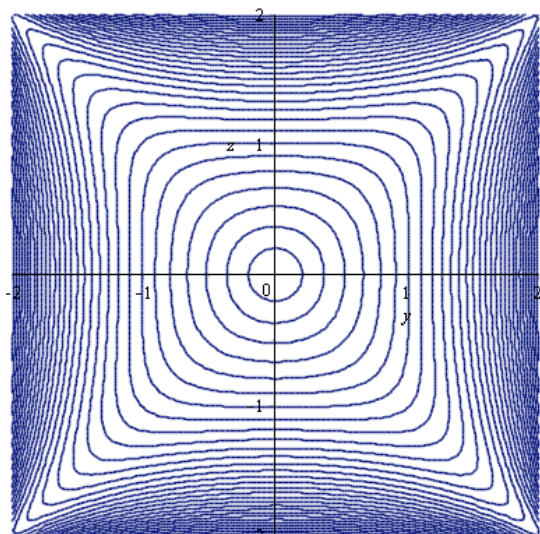
$$|T_{max}| = G\vartheta \frac{2^5 A}{\pi^3} \sum_{k \in \mathbb{N}_l} \sum_{l \in \mathbb{N}_l} \frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{k(k^2 + l^2)}.$$

Pomocí koeficientu  $K_2(r)$  z tabulky 4 můžeme maximální výsledné tangenciální napětí<sup>5</sup> aproximovat jako

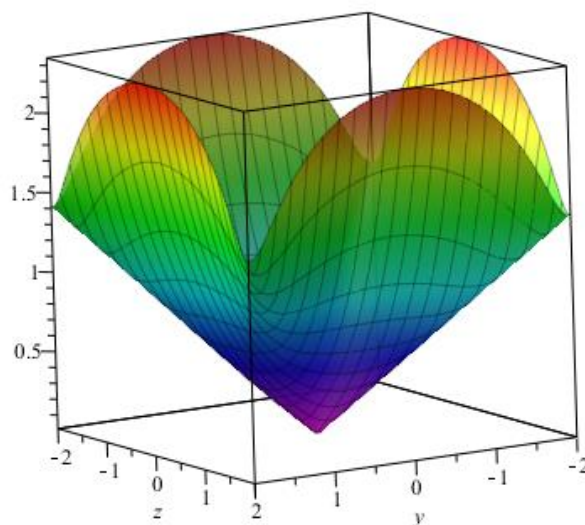
$$|T_{max}| = 0,208 G\vartheta A^3.$$

<sup>5</sup> V praxi se častěji používá vztah  $|T_{max}| = \frac{M}{W}$ , kde  $W$  je krouticí moment a platí, že  $W = A^3 K_2(a/b)$

Grafy smykového napětí jsou vykresleny na obrázcích 41 a 42.



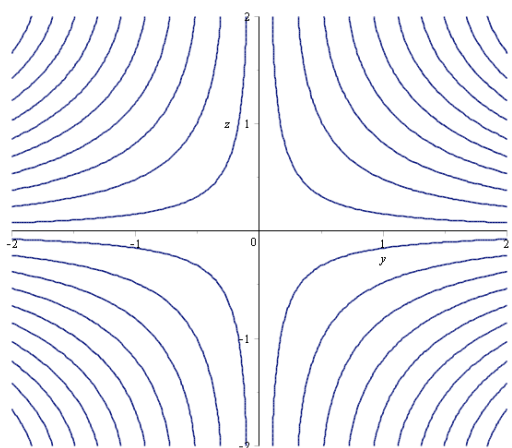
Obrázek 41 Výsledné tangenciální napětí čtvercového průřezu 2D



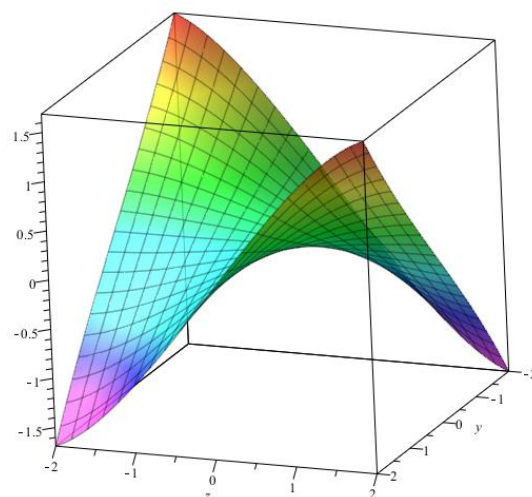
Obrázek 42 Výsledné tangenciální napětí čtvercového průřezu 3D

Deformační funkci dostáváme jako

$$\varphi(y, z) = \frac{2^5 A^4}{\pi^4} \sum_{k \in \mathbb{N}_l} \sum_{l \in \mathbb{N}_l} \frac{(-1)^{\frac{k+l}{2}}}{k^2 A^2 (k^2 + l^2)} \sin\left(\frac{k\pi y}{A}\right) \sin\left(\frac{l\pi z}{A}\right) + yz.$$



Obrázek 43 Deformační funkce čtvercového průřezu 2D



Obrázek 44 Deformační funkce čtvercového průřezu 3D

## 5 HYDRODYNAMICKÁ ANALOGIE – PRAKTICKÝ VÝPOČET

V předchozích odstavcích jsme se zabývali řešením eliptické parciální diferenciální rovnice (7). Jak už jsme se výše přesvědčili, najít předpis hledané funkce může být někdy velice obtížné. Proto byly hledány možnosti řešení obecné úlohy pro kroucení prizmatických prutů užitím analogie s jiným fyzikálním jevem, u něhož lze výhodně použít experimentálních metod k určení hledaných veličin. V této kapitole je převážně čerpáno z knih [1] a [2].

Hydrodynamická analogie je založena na podobnosti matematických rovnic popisujících kroucení prizmatického prutu a rovinného potenciálního proudění<sup>6</sup> ideální kapaliny<sup>7</sup>.

### 5.1 Rovnice rovnováhy a rovnice kontinuity

Z následujících rovnic je analogie rovnice rovnováhy (74) a rovnice kontinuity rovinného potenciálního proudění ideální kapaliny (75) zřejmá.

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (74)$$

$$\operatorname{div} w = 0 \quad \text{neboli} \quad \frac{\partial w_z}{\partial z} + \frac{\partial w_y}{\partial y} = 0 \quad (75)$$

### 5.2 Rovnice funkce napětí a rovnice vířivého proudění ideální kapaliny

Podívejme se nyní na podobnost mezi rovnicí funkce napětí<sup>8</sup> (76) a rovnicí popisující vířivé proudění ideální kapaliny (77).

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} = 2G\vartheta \quad (76)$$

$$\frac{\partial w_z}{\partial y} - \frac{\partial w_y}{\partial z} = c, \quad c \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad (77)$$

V analogii těchto rovnic si vzájemně odpovídají tyto fyzikální veličiny:

- složce smykového napětí  $\tau_{xz}$  odpovídá složka rychlosti  $w_z$
- složce smykového napětí  $\tau_{xy}$  odpovídá složka rychlosti  $w_y$

<sup>6</sup> potenciální proudění neboli proudění nevířivé je takové proudění, při kterém se částice pohybují přímočaře nebo křivočaře po svých trajektoriích tak, že se vůči pozorovateli neotáčejí kolem vlastní osy

<sup>7</sup> nestlačitelná neviskózní kapalina

<sup>8</sup> V tomto případě použijeme druhou dvojici rovnic viz rovnice (19), která splňuje rovnici rovnováhy

Neboli

$$w_z = m \tau_{xz}, \quad w_y = m \tau_{xy} \quad (78)$$

kde  $m$  je převodní konstanta (omezme se jen na případy, kdy  $m \neq 0$ ). Pro názornost dosadíme výraz (78) postupně do rovnic (75) a (77).

Dosazením do rovnice (75) dostáváme následující rovnici

$$\frac{\partial(m \tau_{xz})}{\partial z} + \frac{\partial(m \tau_{xy})}{\partial y} = 0 \quad (79)$$

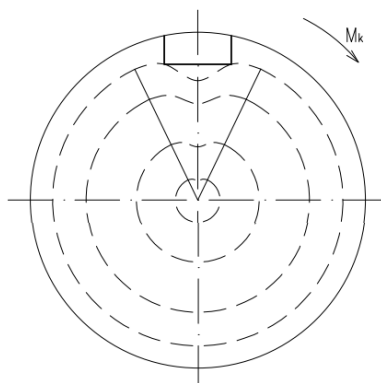
$m$  je nenulová konstanta, a tak po úpravě dostáváme rovnici rovnováhy (74).

Dosazením výrazu (78) do rovnice (77) dostáváme

$$\frac{\partial(m \tau_{xz})}{\partial y} - \frac{\partial(m \tau_{xy})}{\partial z} = c. \quad (80)$$

$c$  je libovolná, nenulová konstanta. Položme tedy  $c = 2mG\nu$ . Po drobných úpravách dostáváme rovnici funkce napětí (76).

Z rovnice vířivého proudění  $\frac{\partial w_z}{\partial y} \neq \frac{\partial w_y}{\partial z}$  plyne, že vektor rychlosti nesmí být kolmý k obrysu, viz obrázek 45.

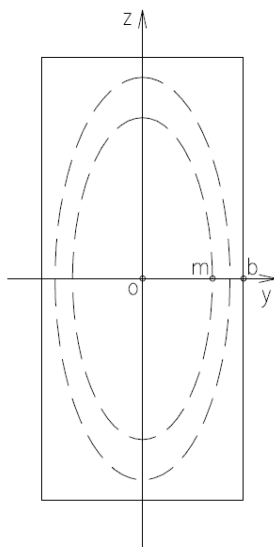


Obrázek 45 Proudnice obtékající překážku



### 5.3 Aplikace na úzkém obdélníku

Mějme úzký obdélník<sup>9</sup> o stranách  $a$  a  $b$  a těžištěm  $O$ , umístěným ve středu souřadného systému.



**Obrázek 46**  
Hydroanalogie na úzkém  
obdélníku

Pro všechny body ležící na přímce  $z = 0$  platí, že  $\frac{\partial w_y}{\partial z} = 0$ . Podle analogie můžeme tedy psát  $\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} = 0$ . Po dosazení do rovnice (77) pro vířivé proudění ideální kapaliny dostáváme

$$\frac{\partial w_z}{\partial y} = 2mG\vartheta. \quad (81)$$

Smykové napětí po dosazení do (76) dostaneme řešením neurčitého integrálu

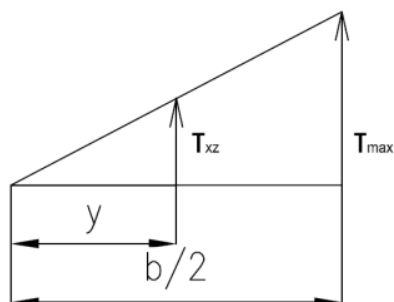
$$\int \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} dy = \int 2G\vartheta dy \quad (82)$$

$$\tau_{xz} = 2G\vartheta y.$$

Následující výrok je zřejmě pravdivý (viz obrázek 47)

$$y = \frac{b}{2} \Rightarrow \tau_{xz} = \tau_{max}.$$

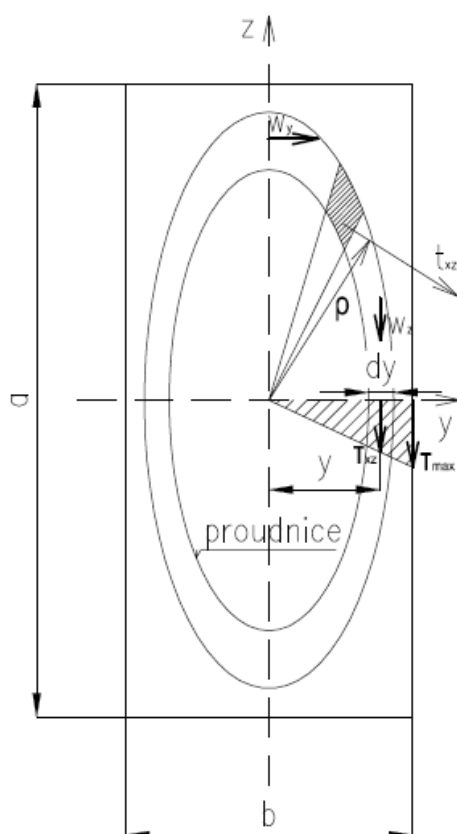
<sup>9</sup> úzký obdélník je takový obdélník, pro jehož stany  $a$  a  $b$  platí, že  $a/b > 10$ .



Obrázek 47 Smyková napětí

Z podobnosti trojúhelníků plyne  $\tau_{max} = \frac{b}{2y} \tau_{xz}$ . Pro tečné napětí  $\tau_{xz}$  tedy dostáváme

$$\tau_{xz} = 2\tau_{max} \frac{y}{b}. \quad (83)$$



Obrázek 48 Porovnání analogických složek tečných napětí a rychlosti proudění

Uvažujeme, že poměrná síla, která působí na jednotku délky  $ds$  ve směru proudnice, je pro všechny body vlákna stejně veliká.

Podle statické ekvivalence dostáváme vztah (84)

$$t_{xz} = \tau_{xz} dS = 2 \tau_{max} \frac{y}{b} dy ds \quad (84)$$

$$t_{xz} \rho = 2 \rho \tau_{max} \frac{y}{b} dy ds . \quad (85)$$

Podle statické rovnováhy dostáváme rovnici (86)

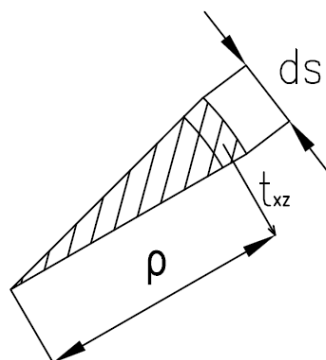
$$dM_k = 2 \tau_{max} \frac{y}{b} dy \int \rho ds. \quad (86)$$

Obsah vyznačeného trojúhelníka  $S$  můžeme pro dostatečně malé  $ds$  aproximovat jako

$$S = \frac{1}{2} \rho ds .$$

Součet všech trojúhelníků přes celý obvod vlákna můžeme vyjádřit jako

$$S(y) = \frac{1}{2} \int \rho ds . \quad (87)$$



Obrázek 49 Geometrický význam počítaného integrálu

Dosadíme-li do (86), dostáváme

$$dM_k = \frac{4y}{b} S(y) dy$$

$$M_k = \frac{4}{b} \tau_{max} \int_{-b/2}^{b/2} y S(y) dy . \quad (88)$$

Zřejmě platí, že  $S(y) = ay$ . Čili

$$M_k = \frac{4a}{b} \tau_{max} \int_{-b/2}^{b/2} y^2 dy. \quad (89)$$

Po úpravě dostáváme výraz pro krouticí moment

$$M_k = \frac{ab^2}{3} \tau_{max} \quad (90)$$

z toho vyjádříme  $\tau_{max}$  jako

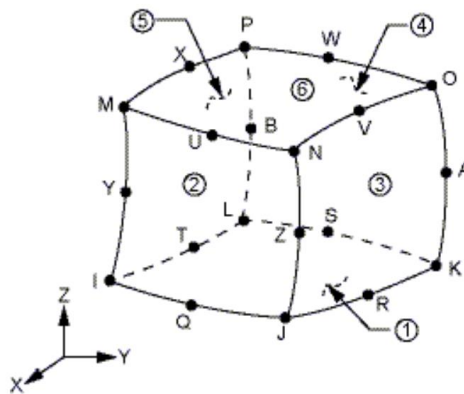
$$\tau_{max} = \frac{3M_k}{ab^2}. \quad (91)$$

Porovnání výrazů (82) a (91) vede k nalezení vztahu pro výpočet zkrutu

$$\vartheta = \frac{3M_k}{ab^3G}. \quad (92)$$

## 6 POUŽITÍ MKP A SROVNÁNÍ S ANALYTICKÝM PŘÍSTUPEM

Řešení pomocí metody konečných prvků spočívá v nahrazení infinitezimálního prvku deformovaného tělesa elementem konečných rozměrů. Rozměry elementárního prvku musíme tedy pečlivě promyslet, abychom dosáhli požadované přesnosti řešení. Dále je také důležité vybrat vhodný tvar elementárního prvku, který bude tvořit síť modelu.

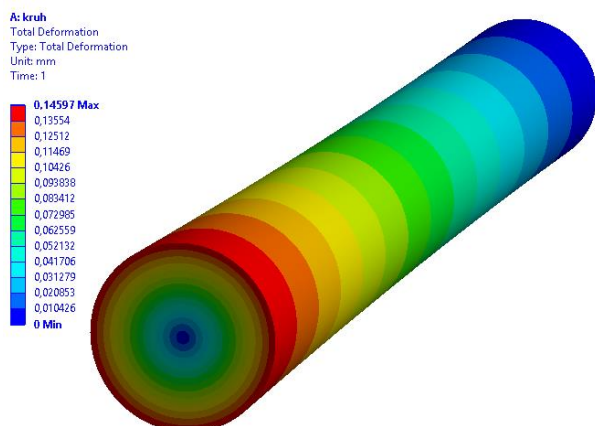


Obrázek 50 Solid186

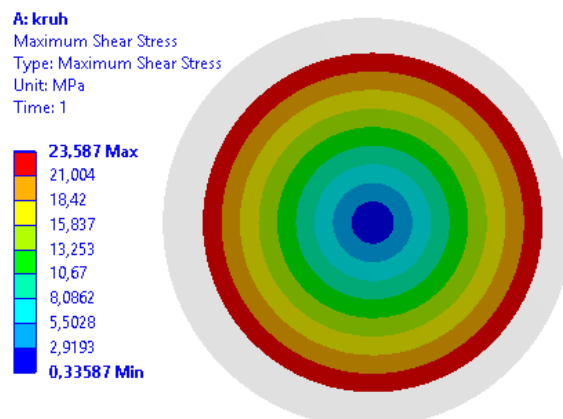
Při modelování v softwaru ANSYS jsem použil elementární prvek *solid186* (obrázek 50). Velikost elementárního prvku jsem postupně zmenšoval, až bylo dosaženo změny výsledků menší než 5%. Toto kritérium s přehledem splňovala krychle o délce hrany 2 mm. Pro všechny modely tyčí byly použity stejné velikosti krouticích momentů  $M_k = 1000 \text{ Nm}$ . Odečítané maximální smykové napětí  $\tau_{max}$  je měřeno uprostřed tyče (čili v rovině kolmé na střednici prutu v místě 50 cm od každého konce). Dále je odečítáno celkové zkroucení tyče po deformaci  $\vartheta$ .

## 6.1 Model tyče s kruhovým příčným průřezem

Tyč kruhového průřezu o poloměru  $r = 30 \text{ mm}$  zatěžujeme momentem  $M_k = 1000 \text{ Nm}$ .



Obrázek 51 Celková deformace kruhového profilu



Obrázek 52 Maximální smykové napětí kruhového profilu

Analyticky vypočítáme poměrné zkroucení  $\vartheta = \frac{M_k}{G J_p}$  a dále vypočítáme maximální tangenciální napětí prostou pružností a pevností podle rovnice (12) a pomocí Airyho funkce napětí podle (47). Výsledné hodnoty maximálního tangenciálního napětí jsou uvedeny v tabulce 5.

Tabulka 5 Hodnoty maximálního tangenciálního napětí kruhového průřezu

	MKP (ANSYS)	Airyho funkce napětí	Prostá pevnost a pružnost
$\tau_{max} [MPa]$	23,587	23,574	23,578

Obrázek 52 potvrzuje teorii prosté pružnosti a pevnosti, a také výsledky z kapitoly 4.1. Tedy, že maximální tangenciální napětí se nachází v místě, které je nejvzdálenější od střednice prutu.

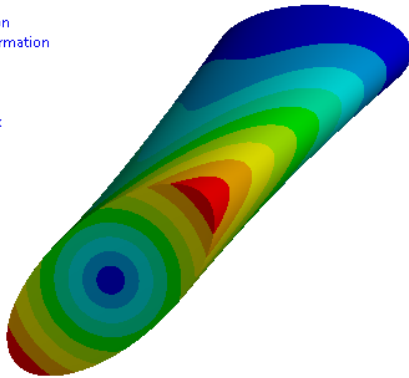
Hodnoty z tabulky 5 se liší jen zanedbatelnými rozdíly, a tím se potvrdila správnost výpočtu metodou prosté pružnosti a pevnosti, a také metodou Airyho funkce napětí.

## 6.2 Model tyče eliptického příčného průřezu

Kroutíme tyč elipsovitého profilu, jejíž poloosy jsou  $a = 30 \text{ mm}$ ,  $b = 15 \text{ mm}$ .

F: elipsa  
Total Deformation  
Type: Total Deformation  
Unit: mm  
Time: 1

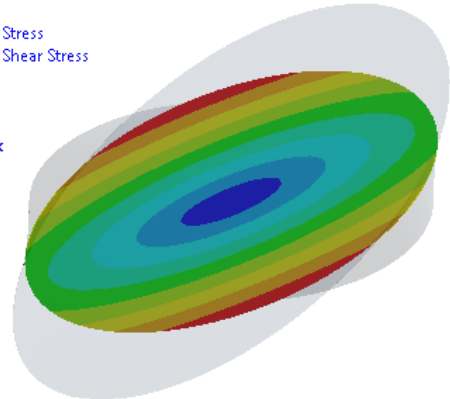
0,7315 Max  
0,65022  
0,56895  
0,48767  
0,40639  
0,32511  
0,24383  
0,16256  
0,081278  
0 Min



Obrázek 53 Celková deformace eliptického profilu

F: elipsa  
Maximum Shear Stress  
Type: Maximum Shear Stress  
Unit: MPa  
Time: 1

94,312 Max  
83,976  
73,64  
63,304  
52,968  
42,632  
32,297  
21,961  
11,625  
1,2891 Min



Obrázek 54 Maximální smykové napětí eliptického profilu

Analyticky vypočítáme zkrut  $\vartheta = \frac{M_k(a^2+b^2)}{G\pi a^3 b^3}$  a poté ze vztahu (56) vypočítáme maximální smykové napětí. Výsledek výpočtu pomocí Airyho funkce napětí se oproti numerickému výsledku liší až v tisícinách, proto můžeme říci, že analytický výpočet se zde shoduje s numerickým.

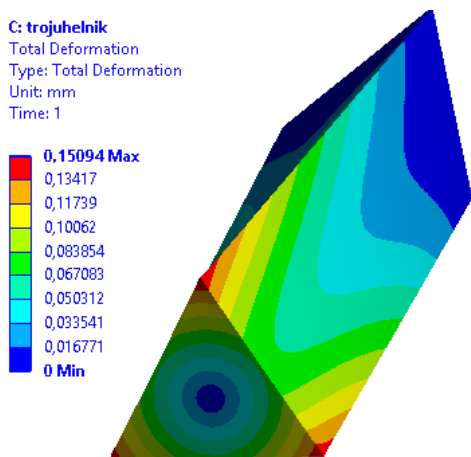
Maximální smykové napětí je, stejně jako podle výpočtů z kapitoly 4.2, ve vrcholech vedlejší poloosy elipsy.

Tabulka 6 Hodnoty maximálního tangenciálního napětí elipsovitého průřezu

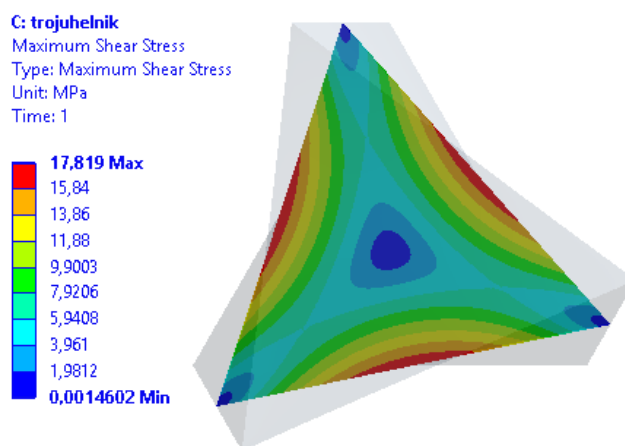
	MKP (ANSYS)	Airyho funkce napětí
$\tau_{max} [MPa]$	94,312	94,314

### 6.3 Model tyče trojúhelníkového profilu

Prut, jehož příčný průřez tvoří rovnostranný trojúhelník o výšce  $90\text{ mm}$  je namáhán krouticím momentem  $M_k = 1000\text{ Nm}$ .



Obrázek 55 Celková deformace trojúhelníkového profilu



Obrázek 56 Maximální smykové napětí trojúhelníkového profilu

Zkrut trojúhelníkového průřezu spočítáme z  $\vartheta = \frac{5M_k}{Gc^4 9\sqrt{3}}$ . Dále vypočítáme z (63) maximální tangenciální napětí. Stejně jako v kapitole 4.3 lze vidět, že maximální smykové napětí je ve středu stran rovnostranného trojúhelníka. Hodnoty maximálního smykového napětí z tabulky jsou pro obě metody stejné, a tak můžeme říct, že výpočet pomocí Airyho funkce napětí je dostatečně přesný.

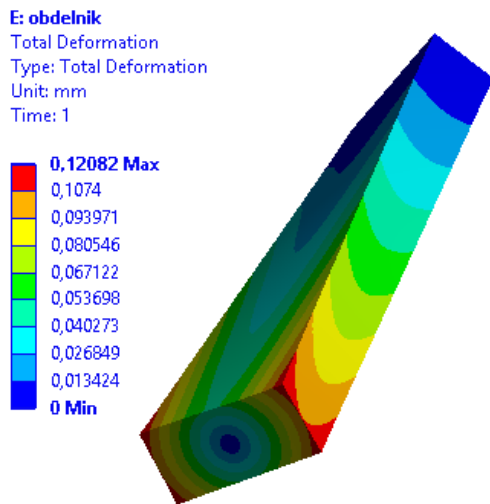
Tabulka 7 Hodnoty maximálního smykového napětí trojúhelníkového profilu

	MKP (ANSYS)	Airyho funkce napětí
$\tau_{max}$ [MPa]	17,819	17,819

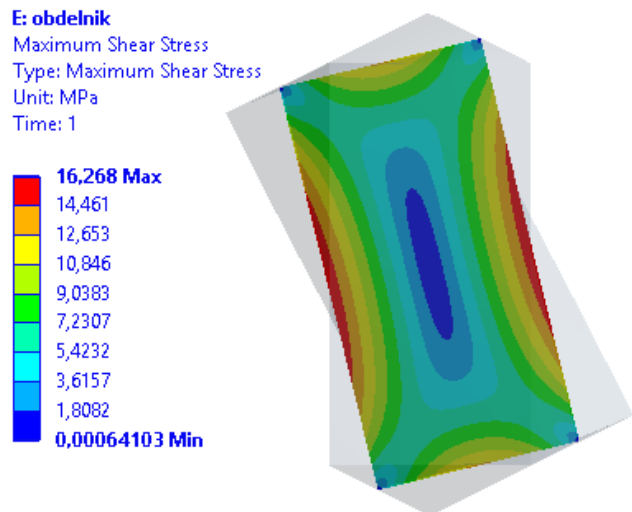


## 6.4 Model tyče obdélníkového příčného průřezu

Obdélník o stranách  $a = 100 \text{ mm}$ ,  $b = 50 \text{ mm}$  je namáhán kroutícím momentem  $M_k = 1000 \text{ Nm}$ .



Obrázek 57 Celková deformace obdélníkového profilu



Obrázek 58 Celková deformace obdélníkového profilu

Maximální smykové napětí vypočítáme podle vztahu z kapitoly 4.5  $|T_{max}| = \frac{M}{W} = \frac{M}{ab^2K_2\left(\frac{a}{b}\right)}$ .

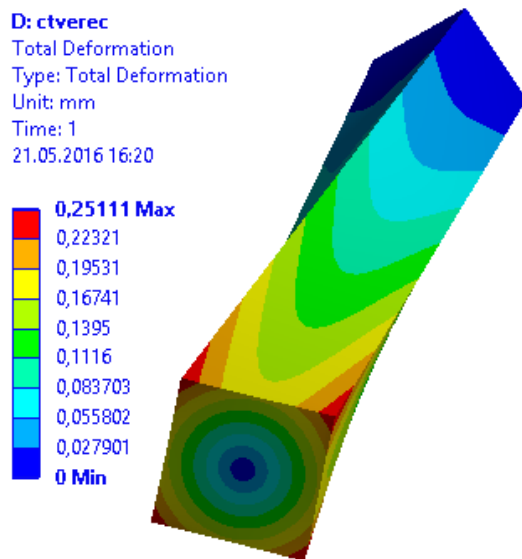
Maximální smykové napětí je podle MKP ve středu delší strany obdélníka, čili ve stejném místě, které nám vyšlo analyticky pomocí Airyho funkce napětí.

Tabulka 8 Hodnoty maximálního smykového napětí obdélníkového průřezu

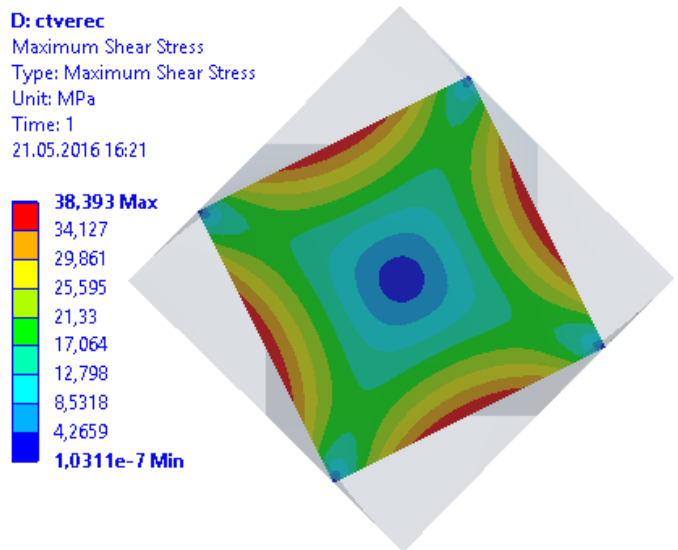
	MKP (ANSYS)	Airyho funkce napětí
$\tau_{max} [MPa]$	16,268	16,26

## 6.5 Model tyče čtvercového příčného průřezu

Tyč s čtvercovým příčným průřezem je zkrucována krouticím momentem  $M_k = 1000 \text{ Nm}$ .



Obrázek 59 Celková deformace čtvercového profilu



Obrázek 60 Maximální smykové napětí čtvercového profilu

Výsledné smykové napětí vypočítáme pomocí vztahu  $|T_{max}| = \frac{M}{0,208 \cdot A^3}$  z kapitoly 4.5. Opět se potvrzuje správnost analytického řešení. Maximální smykové napětí je ve středu stran čtverce a jeho hodnota je podle metody Airyho funkce napětí přibližně stejná jako výsledek numerické metody MKP, viz tabulka 9.

Tabulka 9 Hodnoty maximálního smykového napětí čtvercového průřezu

	MKP (ANSYS)	Airyho funkce napětí
$\tau_{max} [MPa]$	38,393	38,4

## 6.6 Srovnání MKP s analytickým přístupem

V minulosti bylo k řešení úloh z mechaniky používáno především analytické řešení, dnes je postupně nahrazováno řešením numerickým, obzvláště řešením pomocí MKP. Numerické metody nám nabízejí řešení pro jakoukoli navrhnutou geometrii, materiál a zatížení. Pokud bychom chtěli analyticky počítat složitější tvary příčných průřezů zkrucovaných tyčí, byl by výpočet velmi složitý, zvláště komplikovaný by byl v místech koncentrátoru napětí a v místech neplynulých přechodů. MKP nám také poskytuje grafické řešení ve formě modelu, ze kterého lze ve všech bodech odečítat počítané veličiny.

Může se zdát, že jsou analytické metody řešení již nepotřebné a plně zastupitelné numerickými metodami. To ale zdaleka není pravda. Pomocí numerických metod jsme sice schopni spočítat hodnotu smykového napětí při dané geometrii, materiálu a zatížení, ale výsledek nám neudá vztahy, které panují mezi danými veličinami. Kvůli tomu nejsme schopni předvídat chování počítané soustavy při změně vstupních dat. Dále si myslím, že by každý inženýr měl znát analytické postupy řešení, což mu může sloužit alespoň jako kontrola výsledků získaných numerickým výpočtem.

---

## 7 ZÁVĚR

V práci jsem analyzoval vybrané metody řešení krutu tyčí s nekuhovým příčným průřezem. Zejména jsem se zaměřil na tyče s plným a uzavřeným profilem tvaru základních geometrických útvarů jako např. kruh, elipsa, trojúhelník, čtverec a obdélník. Práce je rozdělena na rešeršní a výpočtovou část.

V rešeršní části jsem zavedl potřebné pojmy a vztahy, které jsem dále používal k popsání různých metod. Provedl jsem výčet metod, kterými se daný problém dá efektivně řešit a u některých metod uvedl jejich podstatu. Konkrétně jsem popsal základní princip řešení kroucení tyčí s nekuhovým příčným průřezem pomocí prosté PP, Airyho funkce napětí, numerických metod (metoda konečných diferencí, Southwellova relaxační metoda, MKP) a analogických metod (membránová analogie, hydrodynamická analogie, elektrická analogie).

Ve výpočtové části jsem se zabýval konfrontací výsledků analytických metod řešení pomocí Airyho funkce napětí a pomocí prosté pružnosti a pevnosti s výsledky obdržené numerickou metodou konečných prvků (MKP) v softwaru ANSYS. Nakonec jsem v kapitole 6.6 porovnával užití numerických a analytických metod.

## SEZNAM LITERATURY

### Česká literatura

- [1] Dobrovolný, B. (1946): Pružnost a pevnost – IV. Díl, Státní nakladatelství, Praha
- [2] Kovář, A. (1954): Theorie kroucení, Československá akademie věd, Praha
- [3] Kuba, F. (1977): Theorie pružnosti a vybrané aplikace, SNTL, Praha
- [4] Ondráček, E., Vrbka, J., Janíček P., Burša, J. (2006): Mechanika těles: Pružnost a pevnost II. CERM, Brno
- [5] Janíček, P. (2008): Systémové pojetí vybraných oborů pro techniky. Hledání souvislostí. 1. Díl. VUTIUM, Brno

### Anglická literatura

- [6] Ugural, A.C., Fenster, S.K. (2003 – fourth edition): Advanced Strength and Applied Elasticity.
- [7] Sadd, M.H. (2013): Elasticity – Theory, Applications and Numerics. Elsevier, Oxford.
- [8] Franců, J., Nováčková, P., Janíček, P. (2012): Torsion of a non-circular bar. Engineering Mechanics, vol. 19., no. 1, pp 45-60.
- [9] Hibbeler, R.C. (2011 – eighth edition). Mechanics of materials. Prentice Hall, USA.
- [10] Ritz, W. (1909): Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik. Journal für die reine und angewandte Mathematik. pp 1-61.
- [11] Higgins, T.J. (1942): A comprehensive review of Saint-Venant torsion problém, Amer. Jour. Of Physics, vol. 10, pp 248-259.
- [12] Higgins, T.J. (1943): The approximate mathematical methods of applied physics as exemplified by application to Saint-Venant torsion problem. Jour. of Appl. Physics, vol 14, pp 469-480.
- [13] Southwell R.W. (1940): Relaxation problems in Engineering Science, Oxford.
- [14] Prandtl, L. (1903): Zur Torsion von prismatischen Stäben. Phys. Zeitschr. 4, pp 758.

- 
- [15] Duncan W.J. (1932): The torsion and flexure of cylinders and tubes. Aero. Res. Council R. & M., no. 1444.
- [16] Runge, C. (1908): Über eine Methode die partielle Differentialgleichung  $\Delta u = \text{const}$ , numerisch zu integrieren. Zeitschrift für Mathematische Physik, 56, pp 225-232.
- [17] Ajovalasit, A., Nigrelli, V., Pitarresi, G., Mariotti, G.V. (2014): On the history of torsional stress concentrations in shafts: From electrical analogies to numerical methods. The Journal of Strain analysis for Engineering Design, vol. 49, no. 6, pp 452-466.
- [18] Timoshenko, S., Goodier, J.N. (1951): Theory of elasticity. McGraw-Hill Book Company, Inc., USA.
- [19] WALTHER, Rottsieper. (1914): Graphische Lösung einer randwertaufgabe der Gleichung  $\Delta u = \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] = 0$ . Göttingen.
- [20] QIN, Q. (2000): The Trefftz Finite and Boundary Element Method. WIT Press, 296.
- [21] REDDY, J. (2006): An introduction to the finite element method. McGraw-Hill Book Company, Singapore

### Internetové odkazy

- [22] 72 Masi GC [online]. [cit. 2016-05-2]. Dostupné z: [http://www.raydobbins.com/ebay/bike-masi/bike-masi\\_for\\_CR.htm](http://www.raydobbins.com/ebay/bike-masi/bike-masi_for_CR.htm)
- [23] HENI CZ [online]. [cit. 2016-05-2]. Dostupné z: <http://shop.heni.cz/index.php/cs/10259-imbus-klic-l-vel-1mm>
- [24] Petruška, J. (2011): MKP v Inženýrských výpočtech, [online] Dostupné z: <http://www.umt.fme.vutbr.cz/img/fckeditor/file/opory/RIV/MKP2011.pdf>
- [25] Míka, S., Příkryl, P a Brandner, M. (2006): Numerické metody řešení okrajových úloh pro diferenciální rovnice, [online] Dostupné z: <http://home.zcu.cz/~mika/SNM2/SNM2.pdf>

## SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK

Veličina/Symbol	Jednotka	Popis
$MKP$		Metoda konečných prvků
$VUT$		Vysoké učení technické
$VVÚ$		Vnitřní výsledné účinky
$PP$		Pružnost a Pevnost
$\mathbb{N}_l$		Množina přirozených lichých čísel
$\mathbb{R}$		Množina reálných čísel
$A$	$[J]/[m]$	Práce/ Strana čtverce
$a, b$	$[m]$	Strany obdélníka/Vedlejší poloosy elipsy
$D$	$[m]$	Průměr
$E$	$[Pa]$	Youngův modul
$F$	$[N]$	Síla
$G$	$[Pa]$	Modul pružnosti ve smyku
$J_p$	$[m^4]$	Polární moment setrvačnosti
$K$	$[N]$	Vnitřní síla
$M_k$	$[Nm]$	Krouticí moment
$p$	$[Pa]$	Tlak
$S$	$[m^2]$	Plocha průřezu
$T$	$[Pa]$	Výsledné smykové napětí
$u / \delta_A$	$[m]$	Posuv při deformaci
$V$	$[m^2]$	Funkce rozložení elektrického napětí
$w$	$[m \cdot s^{-1}]$	Rychlost proudění
$W$	$[J]$	Energie napjatosti
$W_k$	$[m^3]$	Modul průřezu v krutu
$\delta$	$[m]$	Krok sítě
$\varepsilon$		Délkové přetvoření
$\vartheta$	$[rad \cdot m^{-1}]$	Poměrný úhel zkroucení
$\gamma$		Úhlové přetvoření

---

$\varphi$	$[rad]$	Vzájemný úhel natočení
$\rho / R$	$[m]$	Poloměr
$\sigma$	$[Pa]$	Normálové napětí
$\tau$	$[Pa]$	Smykové napětí
$\Omega$		Elementární prvek
$\psi$		Příčný průřez
$\Phi$	$[Pa \cdot rad \cdot m]$	Airyho funkce napětí
$\varphi$	$[m]$	Deformační funkce
$\Pi$		Lagrangeův funkcionál



## SEZNAM OBRÁZKŮ

Obrázek 1 Hřídel obdélníkového příčného průřezu přenáší krouticí moment na zemní vrták [9]	14
Obrázek 2 Imbusový klíč šestiúhelníkového profilu [23]	14
Obrázek 3 Klika šlapátka, která se nasadí na osu s kruhovým příčným průřezem. Samotná klika (s přibližně obdélníkovým příčným průřezem) je pak namáhána cyklicky ohybem a krutem [22]	14
Obrázek 4 Nedeforovaný prut [9]	17
Obrázek 5 Deformovaný prut krouticím momentem [9]	17
Obrázek 6 Deplanace příčného průřezu [9]	17
Obrázek 7 Smykové napětí je v ostrých bodech průřezu nulové [9]	17
Obrázek 8 Elementární prvek	19
Obrázek 9 Přetvoření elementárního prvku	20
Obrázek 10 Zobrazení lineárního rozložení napětí, které platí i u mezikruhového průřezu [9]	21
Obrázek 11 Elementární krychle	23
Obrázek 12 Napínaná membrána v rovině $yz$	26
Obrázek 13 Výška $v$ napínané membrány	26
Obrázek 14 Obecný řez membrány	27
Obrázek 15 Podstata metody sítí	30
Obrázek 16 Princip Southwellovy relaxační metody	32
Obrázek 17 Airyho funkce napětí pro kruhový průřez 2D	38
Obrázek 18 Airyho funkce napětí pro kruhový průřez 3D	38
Obrázek 19 Výsledné tangenciální napětí kruhového průřezu 2D	40
Obrázek 20 Výsledné tangenciální napětí kruhového průřezu 3D	40
Obrázek 21 Průběh Airyho funkce 2D	41
Obrázek 22 Průběh Airyho funkce 3D	41
Obrázek 23 Průběh výsledného smykového napětí 2D	43
Obrázek 24 Průběh výsledného smykového napětí 3D	43
Obrázek 25 Průběh deformační funkce 2D	43
Obrázek 26 Průběh deformační funkce 3D	43
Obrázek 27 Předpis Airyho funkce 2D	44
Obrázek 28 Předpis Airyho funkce 3D	44
Obrázek 29 Průběh výsledného smykového napětí 2D	45
Obrázek 30 Průběh výsledného smykového napětí 3D	45
Obrázek 31 Předpis deformační funkce 2D	46
Obrázek 32 Předpis deformační funkce 3D	46
Obrázek 33 Airyho funkce pro obdélníkový průřez 2D	51
Obrázek 34 Předpis deformační funkce 3D	51
Obrázek 35 Funkce napětí pro obdélníkový profil 2D	51
Obrázek 36 Funkce napětí pro obdélníkový profil 3D	51
Obrázek 37 Deformační funkce obdélníkového profilu 2D	51
Obrázek 38 Deformační funkce obdélníkového profilu 3D	51
Obrázek 39 Airyho funkce napětí pro čtvercový průřez 2D	52
Obrázek 40 Airyho funkce napětí pro čtvercový průřez 3D	52
Obrázek 41 Výsledné tangenciální napětí čtvercového průřezu 2D	53
Obrázek 42 Výsledné tangenciální napětí čtvercového průřezu 3D	53
Obrázek 43 Deformační funkce čtvercového průřezu 2D	53
Obrázek 44 Deformační funkce čtvercového průřezu 3D	53

---

Obrázek 45 Proudnice obtékající překážku .....	55
Obrázek 46 Hydroanalogie na úzkém obdélníku .....	56
Obrázek 47 Smyková napětí .....	57
Obrázek 48 Porovnání analogických složek tečných napětí a rychlosti proudění .....	57
Obrázek 49 Geometrický význam počítaného integrálu .....	58
Obrázek 50 Solid186 .....	60
Obrázek 51 Celková deformace kruhového profilu .....	61
Obrázek 52 Maximální smykové napětí kruhového profilu .....	61
Obrázek 53 Celková deformace eliptického profilu .....	62
Obrázek 54 Maximální smykové napětí eliptického profilu .....	62
Obrázek 55 Celková deformace trojúhelníkového profilu .....	63
Obrázek 56 Maximální smykové napětí trojúhelníkového profilu .....	63
Obrázek 57 Celková deformace obdélníkového profilu .....	64
Obrázek 58 Celková deformace obdélníkového profilu .....	64
Obrázek 59 Celková deformace čtvercového profilu .....	65
Obrázek 60 Maximální smykové napětí čtvercového profilu .....	65

## SEZNAM TABULEK

Tabulka 1. Koeficienty pro výpočet maximálního smykového napětí a poměrného úhlu zkroucení .....	18
Tabulka 2 Historický přehled použitých analogií.....	25
Tabulka 3: Metody řešení vybraných průřezů .....	36
Tabulka 4 Číselné hodnoty funkcí $K_1(r)$ a $K_2(r)$ .....	49
Tabulka 5 Hodnoty maximálního tangenciálního napětí kruhového průřezu .....	61
Tabulka 6 Hodnoty maximálního tangenciálního napětí elipsovitého průřezu .....	62
Tabulka 7 Hodnoty maximálního smykového napětí trojúhelníkového profilu.....	63
Tabulka 8 Hodnoty maximálního smykového napětí obdélníkového průřezu.....	64
Tabulka 9 Hodnoty maximálního smykového napětí čtvercového průřezu .....	65