VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
ÚSTAV MATEMATIKY

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
INSTITUTE OF MATHEMATICS

INŽENÝRSKÉ OPTIMALIZAČNÍ MODELY
ENGINEERING OPTIMIZATION MODELS

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE
BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE MARTIN TYDLAČKA
AUTHOR

VEDOUCÍ PRÁCE RNDr. PAVEL POPELA, Ph.D.
SUPERVISOR

BRNO 2008

Anotace

Průřez nosníku vyrobeného z profilu I je navrhován s ohledem na náhodná zatížení, kterým čelí během provozu. Jelikož se zde tyto náhodná zatížení vyskytují, bylo potřeba zvolit jiný přístup k řešení této úlohy. Vhodným přístupem bylo využití optimalizace a čtyř vybraných modelu, řešících tyto náhodnosti. Průřez byl optimalizován, za podmínky bezpečnosti, s ohledem na hmotnost konstrukce. Předmětem této práce je na jednoduché úloze bez náhodných prvků představit metodu převodu konstrukční úlohy na úlohu optimalizační, představit čtyři vybrané modely a aplikovat to na příkladu s náhodnostmi.

Annotation

A cross-section of a girder made out of profile I is designed with respect to random loads, to which a girder will face during life time. Because the random loads are there, we need another aaproach to solving this exercise. Acceptable aproach is usage of optimisation and four choosen models, solving random loads. The cross-section has been to optimize with respect to minimal weight subject the safety constraint. Goal of this thesis is to present method of transfer structural exercise to exercise of mathematical optimisation, present four choosen models and apply this to exercise with random loads.

Čestné prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci zpracoval samostatně dle pokynů vedoucího bakalářské práce a s použitím uvedené literatury.

V Brně dne 23. Května 2008

Martin Tydlačka

Poděkování

Jako první bych rád poděkoval svému vedoucímu diplomové práce, RNDr. Pavlu Popelovi, Ph.D., za jeho čas a věcné poznámky, inspiraci a kritiku, bez kterých by tato práce nemohla vzniknout. Dále bych chtěl poděkovat svému zaměstnavateli za poskytnutí dovolené, tolik potřebné k tomu, abych mohl práci zdárně dokončit. Na závěr musím poděkovat svým rodičů a přítelkyni za jejich pochopení a ohleduplnost.

Obsah

Úvod

V této práci bylo mým úkolem prohloubit si znalosti problematiky matematického programování ve vztahu k problematice optimálního návrhu konstrukcí se zaměřením na matematické modely v podmínkách neurčitosti. Rozhodl jsem se nejprve na jednoduché úloze, ve které se žádné náhodné prvky vyskytovat nebudou, ukázat jak můžeme pomocí vcelku jednoduchého postupu převést úlohu konstrukční, na úlohu optimalizace. V této části práce se zaměřím na podrobnější rozbor jednotlivých vztahů, které jsou potřebné pro úspěšné vyřešení této úlohy. V druhé části bakalářské práce už chci uvést jednoduchý příklad s neurčitými prvky, na kterém už nebudu tak podrobně představovat postup převodu z konstrukční na optimalizační úlohu, ale pomoci kterého bych chtěl představit modely řešení náhodných prvků v optimalizaci. Chci představit a popsat čtyři vybrané modely a to model využívající středních hodnot, model Wait and See, model Expected Value a model MinMax, ukázat jejich aplikaci na onom jednoduchém příkladu a rozebrat jednotlivé výsledky získané těmito metodami. Uvedené příklady budou využity při výkladu metod řešení problémů projektů GA ČR reg. čís. 103/08/1658 a MŠMT ČR čís. 1M06047.

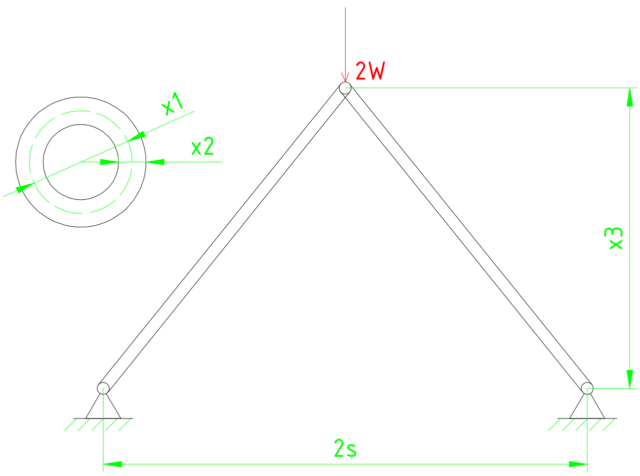
1 Konstrukční úloha bez náhodných prvků

V této kapitole si představíme na jednoduchém konstrukčním prvku postup, pomocí kterého převedeme konstrukční úlohu na úlohu matematické optimalizace. Tento převod je totiž, jak později zjistíme v textu, v mnoha případech řešení úloh výrazným zjednodušením práce a zkrácením času stráveného nad výpočtem.

1.1 Zadání příkladu

Máme konstrukci trojúhelníkového tvaru, složenou ze dvou trubek, viz Obr. 1.1. Známe zatížení 2W a vzdálenost bodů A, B 2s. Navrhněte rozměry x_1, x_2, x_3 tak, aby deformace trubek vlivem tlakového namáhání nepřekročila mez kluzu zvoleného materiálu a aby se trubky vlivem namáhání na vzpěr neprohnuly. Rozměr x_3 je omezen výškou prostoru, ve kterém bude konstrukce umístěna a proto $x_3 \leq k_3$.

Obr. 1.1



Takto nějak by mohlo vypadat zadání obyčejné, běžně řešené konstrukční úlohy. Při řešení úlohy běžným způsobem by následoval postup:

- Rozbor zatížení
- Návrh rozměrů konstrukce
- Kontrola na tlak
- Kontrola na vzpěr
- Interpretace výsledků a případné úpravy s následným opakováním kontroly na tlak a vzpěr

Pokud tuhle úlohu zadáme dvěma různým konstruktérům, můžeme dostat dvě rozdílné konstrukce, které však budou vyhovovat zadání. Jak je to možné? Jednoduše. Při řešení úlohy může dojít k tomu, že návrh konstruktéra sice projde přes obě kontroly, ale dovolená zatížení zvoleného materiálu, jsou mnohem vyšší, než zatížení vypočtená, tudíž konstrukce je předimenzovaná. Jelikož v zadání není žádné omezení na hmotnost konstrukce, může se to jednomu konstruktérovi zdát jako vyhovující, ale druhému ne.

Proto jsem se rozhodl ukázat, jak lze tento typický, ale složitý postup nahradit jednodušším výpočtem, při němž aplikuji získané znalosti z matematické disciplíny nazvané optimalizace.

1.2 Převod na úlohu optimalizace

Nejprve mírně upravíme zadání a to tak, že doplníme větičku o minimalizaci hmotnosti konstrukce.

a) Zadání optimalizační úlohy

Máme konstrukci trojúhelníkového tvaru, složenou ze dvou trubek, viz Obr. 1.1. Známe zatížení 2W a vzdálenost bodů A, B 2s. Navrhněte rozměry x_1, x_2, x_3 tak, aby deformace trubek vlivem tlakového namáhání nepřekročila mez kluzu zvoleného materiálu, aby se trubky vlivem namáhání na vzpěr neprohnuly a zároveň aby hmotnost konstrukce byla co nejnižší. Rozměr x_3 je omezen výškou prostoru v kterém bude konstrukce umístěna a proto $x_3 \leq k_3$.

Nyní bude následovat odvození jednotlivých rovnic potřebných pro optimalizační výpočet. A to odvození účelové funkce a omezujících funkcí. Všechny rovnice odvozené pro optimalizační výpočet je nutno převést na tvar, ve kterém budou jedinými neznámými námi hledané rozměry x_1, x_2, x_3.

b)Výpočet účelové funkce

Jelikož máme v zadání již zmiňovanou větičku o co nejnižší hmotnosti konstrukce, bude v našem příkladu účelovou funkcí rovnice pro výpočet hmotnosti konstrukce, pro jejíž výpočet použijeme jistě dobře známou rovnici

$$m = \rho \cdot V \tag{1.1}$$

Kde ρ … hustota materiálu
V … objem konstrukce

Pro výpočet objemu konstrukce použijeme další dobře známou rovnici
(zkosení trubek neuvažujeme)

$$V = 2 \cdot S \cdot L \tag{1.2}$$

Kde S … průřez trubky
L … délka jedné trubky

Průřez trubky spočteme z rovnice

$$S = \pi \cdot R^2 - \pi \cdot r^2 \tag{1.3}$$

Kde R … vnější poloměr trubky
r … vnitřní poloměr trubky
z tohoto vztahu dostaneme po úpravách

$$S = \pi \cdot x_1 \cdot x_2 \tag{1.4}$$

Délku jedné trubky odvodíme z Pythagorovy věty a dostaneme

$$L = \sqrt{s^2 + {x_3}^2} \tag{1.5}$$

Po dosazení (1.4) a (1.5) do (1.2) a následně do (1.1) dostáváme vztah pro výpočet hmotnosti

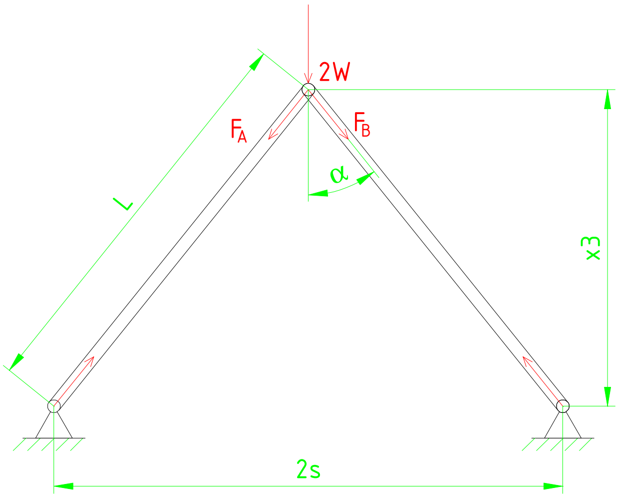
$$m = 2 \cdot \rho \cdot \pi \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot \sqrt{s^2 + {x_3}^2} \tag{1.6}$$

V této rovnici máme konstantu 2ρπ. Jelikož bude naši úlohou při optimalizačním výpočtu tuto rovnici minimalizovat, je vcelku jedno jestli ji budeme minimalizovat celou, nebo jenom její část obsahující námi hledané proměnné. Proto účelová funkce může mít tvar

$$m = x_1 \cdot x_2 \cdot \sqrt{s^2 + x_3{}^2} \tag{1.7}$$

c) <u>Rozbor zatížení</u>

Obr. 1.2



Síla 2W se rozloží rovnoměrně do obou trubek, z Obr. 1.2 vyplívá, že

$$F_A = \frac{W}{cos\alpha} = F_B \tag{1.8}$$

Kde s použitím (1.5)

$$cos\alpha = \frac{x_3}{L} = \frac{x_3}{\sqrt{s^2 + x_3{}^2}} \tag{1.9}$$

d) <u>Kontrola na tlak</u>

Hlavní podmínka kontroly na tlak je
(viz Prof. Ing. Janíček, Přemysl, DrSc. Mechanika těles, Pružnost a pevnost I)

$$\sigma_{TL} = \frac{F}{S} \leq Re \tag{1.10}$$

Kde F … normálová síla zatěžující trubku
S … průřez trubky
Re … mez kluzu zvoleného materiálu

V našem případě je normálovou silou síla $F_A = F_B$
Nyní musíme dosadit (1.9) a (1.10) do (1.8) a upravit na vhodný tvar

$$\frac{\frac{W}{\frac{x_3}{\sqrt{s^2 + x_3{}^2}}}}{\pi \cdot x_1 \cdot x_2} \leq Re \Rightarrow W \cdot \sqrt{s^2 + x_3{}^2} \leq Re \cdot \pi \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \tag{1.11}$$

Pokud všechny konstanty sloučíme do jedné $k_1 = Re \cdot \pi$ pak dostáváme námi hledanou první podmínku pro optimalizační úlohu

$$W \cdot \sqrt{s^2 + x_3{}^2} - k_1 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \leq 0 \tag{1.12}$$

e) Kontrola na vzpěr

Hlavní podmínka kontroly na vzpěr je
(viz Prof. Ing. Janíček, Přemysl, DrSc. Mechanika těles, Pružnost a pevnost I)
$$F \leq F_{kr} \tag{1.13}$$

Kde F … normálová síla zatěžující trubku
F_{kr} … kritická síla

Kritickou sílu spočteme podle vzorce
(viz Ing. Leinveber, Jan; Ing. Vávra, Pavel Strojnické Tabulky, Albra-pedagogické nakladatelství, Úvaly, 2006)
$$F_{kr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{min}}{{l_0}^2} \tag{1.14}$$

Kde E … modul pružnosti
I_{min} … minimální kvadratický moment průřezu
l_0 … redukovaná délka prutu

Vztah pro výpočet kvadratického momentu průřezu je u trubky
(viz Ing. Leinveber, Jan; Ing. Vávra, Pavel Strojnické Tabulky, Albra-pedagogické nakladatelství, Úvaly, 2006)
$$I = \frac{\pi}{64}(D^4 - d^4) = \frac{\pi}{8} \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot ({x_1}^2 + {x_2}^2) \tag{1.15}$$

Redukovaná délka prutu pro náš případ upnutí trubky je
$$l_0 = L \tag{1.16}$$

Nyní opět podosazujeme (1.15) a (1.16) do (1.14), spolu s (1.8) a (1.9) následně dosadíme do (1.13) a upravíme na vhodný tvar
$$\frac{\frac{W}{x_3}}{\sqrt{s^2 + {x_3}^2}} \leq \frac{\pi^2 \cdot E \cdot \frac{\pi}{8} \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot ({x_1}^2 + {x_2}^2)}{s^2 + {x_3}^2}$$
$$\Rightarrow W \cdot \sqrt{(s^2 + {x_3}^2)^3} \leq \frac{\pi^3 \cdot E}{8} \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot ({x_1}^2 + {x_2}^2) \tag{1.17}$$

Opět sloučíme všechny konstanty do jedné $k_2 = \frac{1}{8} \cdot \pi^3 \cdot E$, pak dostaneme druhou podmínku potřebnou pro optimalizační výpočet
$$W \cdot \sqrt{(s^2 + {x_3}^2)^3} - k_2 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot ({x_1}^2 + {x_2}^2) \leq 0 \tag{1.18}$$

f) Další podmínky

Zbylé podmínky, které si teď odvodíme, už nevycházejí z žádné mechanické kontroly, ale jsou odvozeny z normalizovaných rozměrů trubek a ze zadání.

Přímo ze zadání vyplívá třetí podmínka optimalizační úlohy
$$x_3 - k_3 \leq 0 \tag{1.19}$$

Z normy ČSN 42 5715 *(Ing. Leinveber, Jan; Ing. Vávra, Pavel Strojnické Tabulky, Albra-pedagogické nakladatelství, Úvaly, 2006)* vyplývají následující čtvrtá podmínka
$$\frac{x_1}{x_2} \leq k_4 \Rightarrow x_1 - k_4 \cdot x_2 \leq 0 \tag{1.20}$$

Poslední pátou podmínkou je samozřejmě nezápornost řešení

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0 \qquad (1.21)$$

1.3 Sestavení programu a výpočet

Pro naši úlohu zvolíme hodnoty

- Zatížení konstrukce odpovídá hmotnosti 5000 kg a zaokrouhlíme jej na 2W = 50000N
- Vzdálenost bodů A, B 2s = 1000 mm
- Výškové omezení konstrukce k_3 = 1500 mm
- Materiál trubek 11 600

Pro námi zvolený materiál jsou hodnoty meze kluzu a modulu pružnosti následující:
(viz Ing. Leinveber, Jan; Ing. Vávra, Pavel Strojnické Tabulky, Albra-pedagogické nakladatelství, Úvaly, 2006)

- E = $2 \cdot 10^5$ MPa
- Re = 310 MPa

Do výpočtů i do samotného zdrojového kódu programu použijeme jednotky MPa, mm, N.
Po dosazení a výpočtech dostáváme hodnoty prvních dvou konstant

- k_1 = 974 MPa
- k_2 = 775 157 MPa

Nyní můžeme přistoupit k samotnému výpočtu, ke kterému použijeme program GAMS se solverem OQNLP*(viz Rosenthal, Richard E. GAMS | A User's Guide, GAMS Development Corporation, Washington, 2008)*. Zdrojový kód programu najdete v příloze 1. Pokud si jej dobře prohlédnete, zjistíte, že v programu chybí podmínka nezápornosti řešení a je v něm navíc podmínka omezující poměr x_1 a x_2. Podmínka nezápornosti chybí pouze zdánlivě, je totiž obsažena v definování neznámých. Neznámé x_1, x_2 a x_3 jsou totiž definovány jako „positive variables“, což samo o sobě zaručuje nezápornost proměnných takto definovaných. Pátou podmínku $x_1 - x_2 \geq 0$ jsem doplnil až dodatečně. Pokud by v programu tahle podmínka nebyla, mohl by program vypočíst hodnotu x_2 mnohem větší než hodnotu x_1 a to je jaksi u trubky nemožné.

Výsledky, které jsme nechali GAMSem zapsat do souboru konstrukce.txt (viz. Příloha 1), jsou.

- x_1 = 21,384 mm
- x_2 = 2,138 mm
- x_3 = 394,276 mm

Podle normy ČSN 42 5715 *(Ing. Leinveber, Jan; Ing. Vávra, Pavel Strojnické Tabulky, Albra-pedagogické nakladatelství, Úvaly, 2006)* tak volíme trubku Ø22 a tloušťky stěny 2,6.

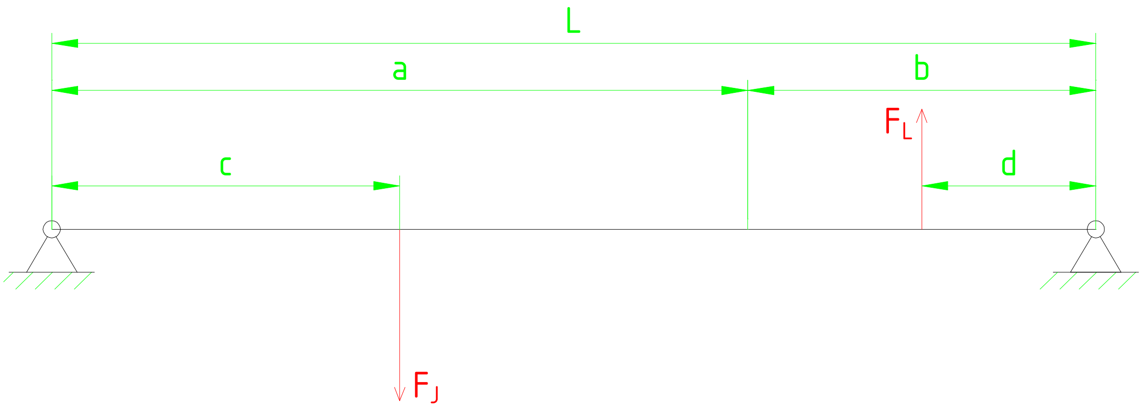
2 Konstrukční úloha s náhodnými prvky

V předešlé kapitole jsme se dozvěděli, jakým způsobem lze převést jednoduchou konstrukční úlohu na úlohu matematické optimalizace. Nyní si zadáme složitější příklad, ve kterém už nebudou všechny zadané veličiny přesně dány, ale budou se v něm vyskytovat i náhodné prvky. I tuto situaci jsme schopni vyřešit pomocí optimalizace a již použitého programu GAMS. Existuje na to mnoho různých metod řešení, my si představíme ty nejzákladnější a rozebereme si význam jejich výsledků. Nejprve si ale zadáme příklad, na kterém tyto metody provedeme.

2.1 Zadání

Máme nosnou konstrukci viz Obr. 2.1, po které se mohou pohybovat ve svých mezích dva stroje a to lis a jeřáb. Oba stroje mohou pracovat ve stejnou dobu, proto je tato konstrukce zatížena silami, způsobujícími ohyb v obou směrech a navzájem se ovlivňujícími. Nosník, po kterém se oba stroje pohybují, je z profilu I podle normy ČSN 42 5550 *(Ing. Leinveber, Jan; Ing. Vávra, Pavel Strojnické Tabulky, Albra-pedagogické nakladatelství, Úvaly, 2006)*. Naším úkolem je navrhnout takový rozměr nosníku, aby nosník toto zatížení vydržel a zároveň aby jeho hmotnost byla co nejmenší.

Obr. 2.1



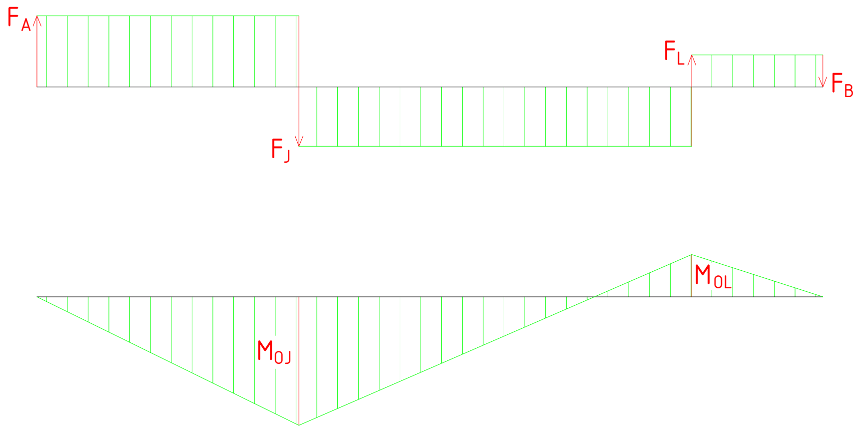
Náhodné veličiny c, d, F_J, F_L budou pro zjednodušení všechny z normálního rozložení

L = … délka nosníku
a = … část nosníku, po které se může pohybovat jeřáb
b = … část nosníku, po které se může pohybovat lis
μ_c = … střední hodnota vzdálenosti jeřábu od levého kraje
σ_c = … směrodatná odchylka vzdálenosti jeřábu od levého kraje
μ_d = … střední hodnota vzdálenosti lisu od pravého kraje
σ_d = … směrodatná odchylka vzdálenosti lisu od pravého kraje
μ_J = … střední hodnota zatížení jeřábu
σ_J = … směrodatná odchylka zatížení jeřábu
μ_L = … střední hodnota zatížení lisu
σ_L = … směrodatná odchylka zatížení lisu

2.2 Rozbor zatížení

Nejprve provedeme rozbor tečný sil a následně ohybových momentů

Obr. 2.2



Sílu F_A vypočteme z podmínky

$$\sum_{k\ bodu\ B} M_O = 0 \tag{2.1}$$

z které po dosazení dostáváme

$$F_A \cdot L - F_J \cdot (L - c) + F_L \cdot d = 0 \quad \Rightarrow \quad F_A = \frac{F_J \cdot (L - c) - F_L \cdot d}{L} \tag{2.2}$$

Sílu F_B vypočteme z podmínky

$$\sum F_Y = 0 \tag{2.3}$$

z které po dosazení dostáváme

$$F_A - F_J + F_L - F_B = 0 \quad \Rightarrow \quad F_B = F_A - F_J + F_L = \frac{F_L \cdot (L - d) - F_J \cdot c}{L} \tag{2.4}$$

Dostáváme tak ohybové momenty

$$M_{OJ} = F_A \cdot c = \frac{F_J \cdot c(L - c) - F_L \cdot cd}{L} \tag{2.5}$$

$$M_{OJ} = F_B \cdot d = \frac{F_L \cdot d(L - d) - F_J \cdot cd}{L} \tag{2.6}$$

2.3 Převod na úlohu optimalizace

Opět si zopakujeme postup z 1. kapitoly, rozdíl oproti předešlému příkladu bude ten, že nebudeme provádět kontrolu na tlak a vzpěr, ale kontrolu na ohyb. Příklad si převedeme tak jako by se v něm nevyskytovaly žádné náhodné veličiny. Pouze při úpravách jednotlivých vztahu si musíme dát pozor, abychom náhodné veličiny c, d, F_J a F_L nezahrnuli do konstant.

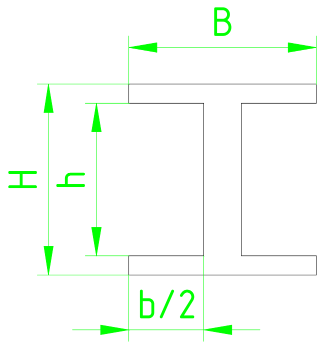
a) Kontrola na ohyb

Kontrola nosníku na ohyb se provádí podle následujícího vztahu
(viz Prof. Ing. Janíček, Přemysl, DrSc. Mechanika těles, Pružnost a pevnost I)

$$\tau_O = \frac{M_O}{W_O} \leq \tau_{DO} \tag{2. 7}$$

kde τ_O je ohybové napětí, τ_{DO} je dovolené ohybové napětí, M_O je ohybový moment v kontrolovaném průřezu a W_O je modul průřezu v ohybu, ten spočteme ze vztahu pro zjednodušený profil I viz Obr. 2.3

Obr. 2.3



(viz Ing. Leinveber, Jan; Ing. Vávra, Pavel Strojnické Tabulky, Albra-pedagogické nakladatelství, Úvaly, 2006)

$$W_O = \frac{BH^3 - bh^3}{6H} \tag{2.8}$$

po dosazení (2.5), (2.6) a (2.8) do (2.7) dostáváme vztahy

$$\tau_{OJ} = \frac{M_{OJ}}{W_O} = \frac{\frac{F_J \cdot c(L-c) - F_L \cdot cd}{L}}{\frac{BH^3 - bh^3}{6H}} \leq \tau_{DO} \tag{2.9}$$

$$\tau_{OL} = \frac{M_{OL}}{W_O} = \frac{\frac{F_L \cdot d(L-d) - F_J \cdot cd}{L}}{\frac{BH^3 - bh^3}{6H}} \leq \tau_{DO} \tag{2.10}$$

z kterých po úpravách dostaneme první dvě podmínky pro optimalizační úlohu

$$H \cdot (F_J \cdot c(L-c) - F_L \cdot cd) \leq k_1\,(BH^3 - bh^3); \quad k_1 = \frac{\tau_{DO} \cdot L}{6} \tag{2.11}$$

$$H \cdot (F_L \cdot d(L-d) - F_J \cdot cd) \leq k_1\,(BH^3 - bh^3) \tag{2.12}$$

b) Optimalizační úloha

V optimalizační úloze je našim úkolem minimalizovat hmotnost nosníku. Hmotnost nosníku definujeme opět na zjednodušeném profilu I podle obrázku 2.3.

$$m = \rho \cdot V = \rho \cdot S \cdot L = \rho \cdot L \cdot (BH - bh) \tag{2.13}$$

Kde ρ … hustota materiálu
V … objem nosníku
S … průřez nosníku

ρ a L jsou konstanty, proto nebudeme minimalizovat celou rovnici pro výpočet hmotnosti, ale jenom její proměnnou část.

Definování podmínek optimalizační úlohy

1) Podmínka vyplívající z kontroly nosníku na ohyb v místě působení síly F_J, jejíž odvození je uvedeno výše (2.11)
   $$H \cdot (F_J \cdot c(L-c) - F_L \cdot cd) \leq k_1\,(BH^3 - bh^3); \quad k_1 = \frac{\tau_{DO} \cdot L}{6}$$

2) Podmínka vyplívající z kontroly nosníku na ohyb v místě působení síly F_L, jejíž odvození je uvedeno výše (2.12)
   $$H \cdot (F_L \cdot d(L-d) - F_J \cdot cd) \leq k_1\,(BH^3 - bh^3); \quad k_1 = \frac{\tau_{DO} \cdot L}{6}$$

3) Podmínka nezápornosti řešení
   $B, H, b, h \geq 0$ (2.14)

4) Následujících pět podmínek vyplívá z rozměrů profilu I v normě ČSN 42 5550 *(Ing. Leinveber, Jan; Ing. Vávra, Pavel Strojnické Tabulky, Albra-pedagogické nakladatelství, Úvaly, 2006)*
   $$B \geq 42 \tag{2.15}$$
   $$H \geq 80 \tag{2.16}$$
   $$0{,}55 \geq \frac{B}{H} \geq 0{,}48 \tag{2.17}$$
   $$\frac{B}{b} = 1{,}1 \tag{2.18}$$
   $$1{,}17 \geq \frac{H}{h} \geq 1{,}12 \tag{2.19}$$

2.4 Vybrané modely pro řešení náhodností v optimalizační úloze

a) <u>Wait and See (WS)</u>

Tento model představuje matematický přístup k danému problému a je nejsložitější ze všech čtyř modelů, které vám chci v této práci představit. Model WS vyžaduje znalosti ze statistiky. Naším úkolem je zpracovat námi zvolený počet kombinací náhodných veličin a získat tak soubor různých výsledku, který dále statisticky zpracováváme a hledáme v něm nejvhodnější řešení.

Konkrétní příklad s náhodnými prvky by v praxi určitě nebyl zadán přímo nějakým rozložením a jeho střední hodnotou a směrodatnou odchylkou. S největší pravděpodobností by existoval nějaký soubor nashromážděných dat. Bohužel by bylo dost pracné vkládat do GAMSu data přímo z tohoto souboru a postupně je zpracovávat. Musíme proto tato data zpracovat statisticky a odhadnout tak nějakou střední hodnotu a směrodatnou odchylku. V GAMSu totiž pro výpočet pomocí tohoto modelu používáme generátory náhodných dat.

V našem konkrétním příkladu máme všechny náhodné veličiny zadány normálním rozložením a přímo středními hodnotami a směrodatnými odchylkami. Čím více kombinací náhodných veličin zpracujeme, tím lepší výsledky můžeme vydedukovat ze souboru vypočtených výsledků, ale samozřejmě tím pomalejší metoda bude.

b) Využití středních hodnot

Tento model využívá, jak již z názvu vyplývá, střední hodnoty jednotlivých veličin. Považuji ho za kompromis mezi inženýrským a matematickým přístupem. Ve výpočtu se nezabýváme celým souborem dat, ale nahrazujeme náhodné proměnné jedinou hodnotou. Tato metoda vyžaduje opět znalosti ze statistiky a pravděpodobnosti. Znovu bychom museli případný soubor dat statisticky zpracovat a odhadnout potřebné střední hodnoty.

Pokud získáme střední hodnoty náhodných veličin, ať už přímo ze zadání, nebo pomocí statistiky, použijeme je tak, že je dosadíme za všechny náhodné veličiny a pracujeme s nimi nadále jako by náhodné nebyly.

Tento model je, co se týče našeho konkrétního příkladu triviální. Není nic jednoduššího než vzít střední hodnoty ze zadání a dosadit je za náhodné veličiny.

c) Expected Value (EV)

Pokud nemáme úlohu zadanou přímo středními hodnotami a směrodatnými odchylkami a nemáme prostředky na to, abychom soubor dat zpracovávali statisticky a hledali střední hodnotu, můžeme ji odhadnout průměrnou hodnotou.

Získáme tak další model, který nahrazuje model využívající středních hodnot.

Jelikož u našeho konkrétního příkladu použijeme snadno modelu předešlého, bylo by vcelku zbytečné tento model zpracovávat. Abychom ale ukázali, jak se dá tento model naprogramovat, využijeme pro výpočet průměrných hodnot souboru dat, který vygenerujeme při zpracování modelu WS.

d) MinMax (MM)

Tento model nejvíce představuje inženýrský přístup a v podstatě kopíruje postup, jaký by použil normální konstrukční výpočtář. Pokud by dostal takovouto úlohu klasický výpočtář, postupoval by nejspíš takto.

- Provedl by rozbor zatížení
- Našel by takovou kombinaci všech náhodných prvků, která by způsobila nejhorší možné zatížení
- Dále by pracoval pouze s touto kombinací a nevěnoval by ostatním variantám náhodných prvků pozornost

Stejně tak i naším úkolem při použití tohoto modelu je totiž najít takovou kombinaci náhodných prvků, která způsobí největší možná zatížení a s touto kombinací dále pracovat, jako by úloha neměla v zadání náhodné prvky.

Najít takovou kombinaci, ale nemusí být vždy nejsnadnější věc, v našem konkrétním příkladu je to naštěstí intuitivní

- F_J → max.
- F_L → mix
- c → max.
- d → min

jinak řečeno, nejhorší možné zatížení nosníku nastane tehdy, pokud bude na jeřábu největší možná zátěž a jeřáb se bude nacházet co nejblíže středu nosníku a pokud lis bude působit co nejmenší možnou silou a bude se nacházet co nejblíže pravému okraji nosníku.

2.5 Sestavení programu a výpočty

Nyní opět můžeme přistoupit k sestavení programu a výpočtu.

a) Zkouška bez náhodností

Jelikož jsme si celou tuto úlohy vymysleli, sestrojíme si nejprve jednoduchý program, do něhož zavedeme všechny veličiny bez náhodností, abychom si ověřili, jestli hodnoty, námi zadané, mají smysl.

Pro tuto úlohu si zkusíme zadat následující hodnoty:

- F_J = 10000 N
- F_L = 5000 N
- c = 1000 mm
- d = 500 mm
- L = 3000 mm

Materiál nosníku zvolíme 11 600, z čehož vyplívá, že pro míjivé zatížení je
(viz Ing. Leinveber, Jan; Ing. Vávra, Pavel Strojnické Tabulky, Albra-pedagogické nakladatelství, Úvaly, 2006)
τ_{DO} = 125-180 MPa

zvolíme τ_{DO} = 155 MPa a dosadíme jej do vztahu pro výpočet konstanty k_1

$$k_1 = \frac{150 \cdot 3000}{6} = 77500$$

K samotnému programování a výpočtu použijeme opět program GAMS se solverem OQNLP. Zdrojový kód programu i výsledky výpočtu vygenerované programem najdete v příloze 2.

b) Příklad s náhodnostmi

Výsledky předešlého příkladu bez náhodností jsou celkem ucházející, proto můžeme říct, že zadání může odpovídat realitě a vytvořit podle něj zadání pro příklad s náhodnostmi.

Zadáváme tak tyto hodnoty:

- L = 3000 mm
- μ_c = 1000 mm
- σ_c = 400 mm
- μ_d = 500 mm
- σ_d = 150 mm
- μ_J = 10000 N

- σ_J = 2000 N
- μ_L = 5000N
- σ_L = 1500 N

Materiál nosníku opět volíme 11 600, takže hodnota konstanty k1 zůstává stejná a to 77500

K vytvoření programu a výpočtu použijeme opět program GAMS se solverem OQNLP. Zdrojový kód programu i výsledky modelů b), c) a d) najdete v příloze 3, jelikož jsem při výpočtu modelu WS zvolil 500 iterací, je v příloze 3 ukázána pouze malá část výsledků této metody.

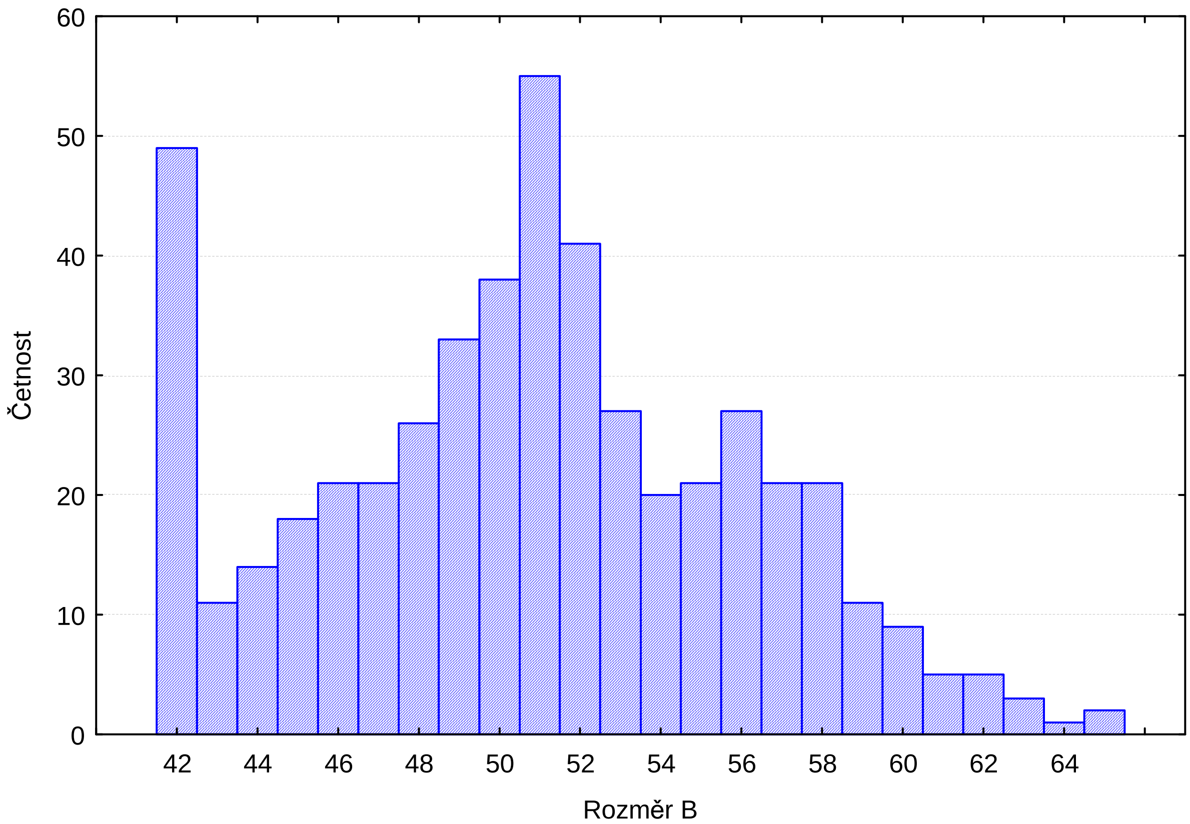
2.6 Rekapitulace výsledků a jejich vyhodnocení

a) model WS

Z vypočtených hodnot jsem vygeneroval histogramy, ze kterých lze vyčíst, jaké by mohlo být řešení této úlohy.

Podmínky pro rozměry profilu byly natolik omezující, že jsem si mohl dovolit udělat histogram pouze pro jeden rozměr a z toho posuzovat celý výsledek

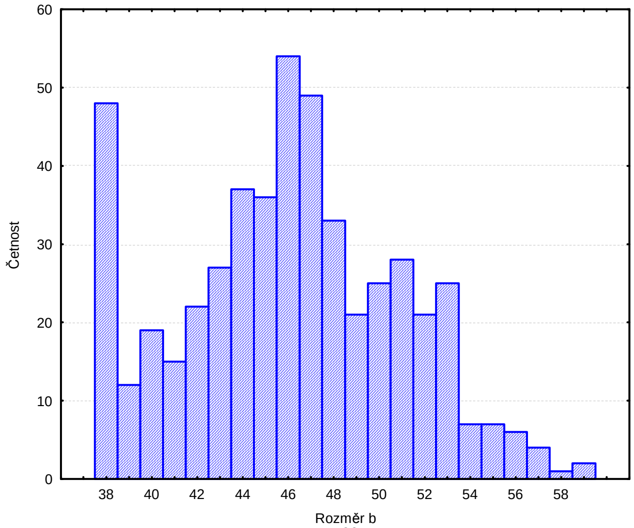
Histogram pro rozměr B vypadá takto:

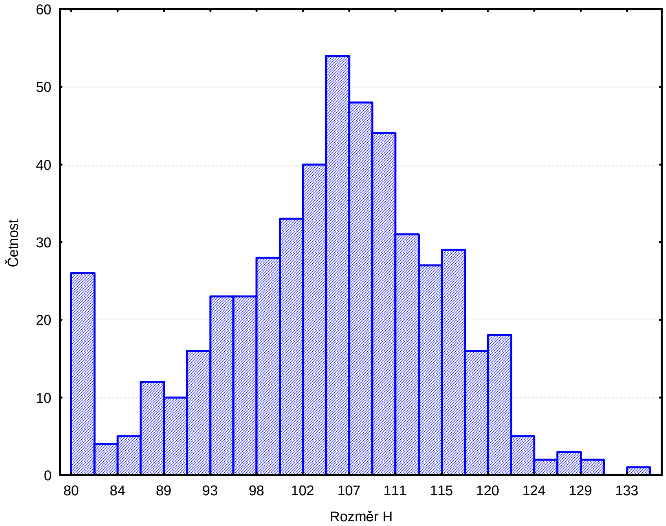


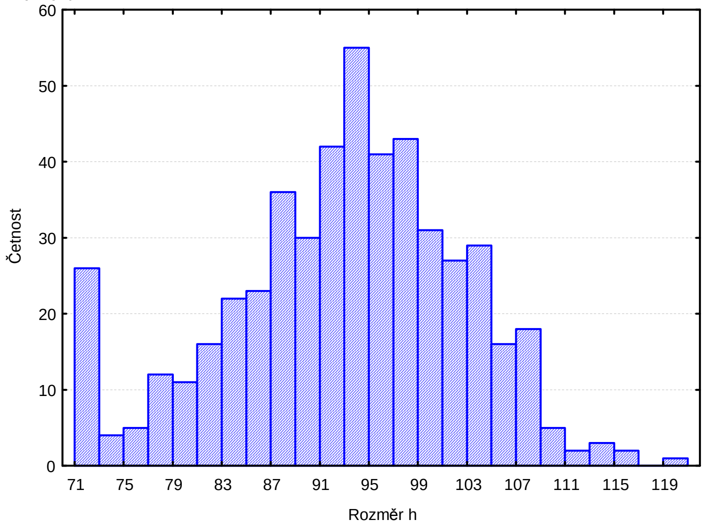
V histogramu vidíme 2 velmi významné vrcholy u hodnot 42 a 50-52 a poněkud méně významný vrchol u hodnoty 56.

Jelikož jsem zadával všechny náhodné veličiny z Normálního rozložení, očekával jsem, že i výsledky této metody budou víceméně normální, což se téměř splnilo až na četnost u hodnoty 42. To se dá vysvětlit jedině charakterem zadání a zpracováním příkladu. Nás samozřejmě zajímá nejvíce vrchol kolem hodnoty 50-52. Tuto hodnotu bychom podle mě měli považovat za řešení naši úlohy. Někdo by mohl namítat, že by nosník měl mít největší možný rozměr, jaký jsme spočetli, ale to podle mne není pravda. Na nosníku mohou sice působit kombinace náhodných veličin, které způsobí větší zatížení, než ta, ze kterých je vypočtena hodnota 51, ale tyto kombinace se vyskytují v minimálním počtu případů. Navíc při návrhu nosníku jsme z nabízeného intervalu dovolených napětí pro ohyb brali střední hodnotu, a proto by nosník měl určitě vydržet větší zatížení.

Pro kontrolu, že lze všechny rozměry profilu hodnotit jen podle jednoho z nich ukážu i ostatní tři histogramy







Z histogramů lze poznat, že opravdu mají velice podobný charakter a nejčastější kombinace B = 51, H = 107, b = 46 a h = 95 odpovídá omezujícím podmínkám, proto bylo oprávněné použít pouze jeden z těchto rozměrů pro vyhodnocení celého profilu.

b) <u>model využívající středních hodnot</u>

Jenom pro kontrolu správnosti programu by se tento výsledek měl shodovat s výsledkem zkušební verze výpočtu této úlohy bez náhodných prvků, protože střední hodnoty náhodných veličin, jsme zadali stejné, jako hodnoty u tohoto programu.

Výsledkem tohoto modelu jsou rozměry:

- B = 53
- H = 110
- b = 48
- h = 98

Programy by mohly být bez chyby, protože se opravdu výsledky shodují.

Opět by někdo mohl namítat, že využít středních hodnot pro tento výpočet je nesprávné, a já bych opět podal stejné vysvětlení jako u předešlého modelu.

c) <u>model EV</u>

Tento model je jak už jsme si uvedli v kapitole 2.4 jakýmsi nahrazením modelu využívajícího středních hodnot, kde tyto aproximujeme průměrnou hodnotou. Pokud bude soubor dat, z kterého průměrnou hodnotu počítáme, měly by se výsledky obou metod blížit.

Výsledkem tohoto modelu jsou rozměry:

- B = 53
- H = 109
- b = 48
- h = 97

Opravdu je vidět, že výsledky obou metod jsou hodně podobné, i když jsme pro výpočet průměrných hodnot použili „pouhých“ 500 hodnot.

Samozřejmě i v tomto modelu se naskýtá stejná námitka a stejná odpověď na ni.

d) model MM

Výsledky tohoto modelu by se měly blížit krajním hodnotám v histogramu modelu WS

Výsledkem tohoto modelu jsou rozměry:

- B = 67
- H = 125
- b = 61
- h = 111

Tento výsledek se opravdu velmi blíží okrajovým hodnotám.

Mnozí, by považovali toto řešení za jediné správné, ale to podle mne není pravda. Tyto kombinace náhodných veličin, způsobující maximální zatížení se vyskytují v minimálním počtu případů. Navíc při návrhu nosníku jsme z nabízeného intervalu dovolených napětí pro ohyb brali střední hodnotu, a proto by nosník měl určitě vydržet větší zatížení.

Závěrem jenom uvádím, že ze všech modelů, kromě modelu MM, který jsem zavrhl, nám vychází podle normy ČSN 42 5550 *(Ing. Leinveber, Jan; Ing. Vávra, Pavel Strojnické Tabulky, Albra-pedagogické nakladatelství, Úvaly, 2006)* jediné řešení a to, že nosník bude vyroben z profilu I 120.

Závěr

Mým úkolem v této bakalářské práci bylo prohloubení si znalostí programování ve vztahu k problematice optimálního návrhu konstrukcí a na konkrétních příkladech ukázat metody a modely řešení problémů i v podmínkách neurčitosti. Myslím si, že se mi v dostatečné míře podařilo ukázat metodu, pomocí které lze převést nejspíš každou konstrukční úlohu na úlohu optimalizace. Dále se mi na vcelku jednoduché úloze s neurčitými prvky podařilo docela dobře představit problém těchto neurčitostí a modely, pomoci nichž lze tyto úlohy řešit. Otázkou sice stále zůstává, jestli není pro řešení takovýchto úloh nejvhodnější pouze jediný model, a to model MinMax. Tento model, jak už jsem uvedl v textu, využívá nejhoršího možného scénáře a zdá se tak být tím pravým, ale můj názor zůstává pořád stejný. Totiž nejhorší možný scénář, ve většině případů bude nastávat, stejně jako v našem příkladu, ve velmi malém (dalo by se říct téměř nulovém) množství případů a při výpočtech se vždy počítá s nějakým koeficientem bezpečnosti, který by měl zaručit, že pokud vůbec tento scénář nastane, měla by konstrukce vydržet. Modely, které jsem použil pro řešení úlohy s náhodnými veličinami, jsou samozřejmě jenom základní a modelem MinMax, který je vlastně vyjádřením stoprocentní pravděpodobnosti, že se nosník neporuší, to absolutně nekončí, existuje mnoho dalších stochastických modelů využívajících různé stupně pravděpodobností a jiné pomocné prvky *(viz Klapka, J. Metody operačního výzkumu, VUT Brno, 2001. a Popela, P. Stochasstic Programming, UoM, 2004)*, ale tyto modely už jsou mnohem složitější a náročnější a přesáhují náročnost mé bakalářské práce.

Použitá literatura

- Klapka, J. Metody operačního výzkumu, VUT Brno, 2001.
- Popela, P. Nonlinear Programming, UoM, 2003.
- Popela, P. Stochasstic Programming, UoM, 2004.
- Prof. Ing. Janíček, Přemysl, DrSc. Mechanika těles, Pružnost a pevnost I
- Ing. Leinveber, Jan; Ing. Vávra, Pavel Strojnické Tabulky, Albra-pedagogické nakladatelství, Úvaly, 2006
- Rosenthal, Richard E. GAMS | A User's Guide, GAMS Development Corporation, Washington, 2008

Seznam příloh