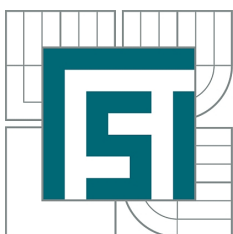


VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
ÚSTAV MATEMATIKY
FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
INSTITUTE OF MATHEMATICS

OPTIMALIZACE V INŽENÝRSKÝCH ÚLOHÁCH ENGINEERING OPTIMIZATION

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE
BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE
AUTHOR

LUKÁŠ KOKRDA

VEDOUCÍ PRÁCE
SUPERVISOR

RNDr. PAVEL POPELA, Ph.D.

Abstrakt

Tato bakalářská práce se zabývá konvexní optimalizací a konkrétně zpracovává návrh optimálních podpěr zatíženého nosníku. Pro porozumění řešené problematice jsou vloženy základní pojmy z konvexní optimalizace, teorie obyčejných diferenciálních rovnic a pružnosti a pevnosti. Po sestavení modelu, s využitím předchozích poznatků, jsme získali výsledky výpočtem v programu MATLAB.

Summary

The bachelor thesis deals with convex optimization and in particular, it processes a design of the optimal support of a loaded beam. For better understanding of the terms used, the bachelor thesis contains the brief introduction to the convex optimization problems, explanation of the basic terms of ordinary differential equations and theory of elasticity. When the original model is built, then the results are obtained by computations in the MATLAB software.

Klíčová slova

konvexní optimalizace, MATLAB, metoda konečných diferencí, obyčejné diferenciální rovnice, pružnost a pevnost

Keywords

convex optimization, MATLAB, finite difference method, ordinary differential equations, theory of elasticity

KOKRDA, L. *Optimalizace v inženýrských úlohách*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2013. 29 s. Vedoucí bakalářské práce RNDr. Pavel Popela, Ph.D.

Prohlašuji tímto, že jsem svou bakalářskou práci zpracoval samostatně a že jsem uvedl všechny použité informační zdroje.

Lukáš Kokrda

Děkuji RNDr Popelovi za cenné rady a připomínky k bakalářské práci.

Lukáš Kokrda

Obsah

1	Úvod	8
2	Optimalizace	9
2.1	Konvexní optimalizace	10
2.2	Metody řešení	14
3	Obyčejné diferenciální rovnice	15
3.1	Základy teorie ODR	15
3.2	Numerické řešení metodou konečných diferencí	15
4	Pružnost a pevnost	17
4.1	Základní pojmy	17
4.2	Prosté namáhání	17
4.3	Prostý ohyb	18
5	MATLAB	19
6	Řešený příklad	20
6.1	Konstrukční optimalizace	20
6.2	Úlohy	22
7	Závěr	24
	Literatura	25
	Seznam zkratk	26
	Seznam příloh	27

1. Úvod

V technické praxi často hledáme řešení úlohy, které bude nejlépe vyhovovat zadaným požadavkům. Úlohy tohoto typu se nazývají optimalizační, viz. kapitola 2. Tato bakalářská práce se zabývá konvexní optimalizací s důrazem na formulaci a řešení matematického modelu vybrané inženýrské úlohy. Jedná se konkrétně o návrh optimálních podpěr zatíženého nosníku, při různých požadavcích na umístění podpěr či sil působících v těchto podpěrách.

Při řešení úloh byly využity poznatky z numerických metod řešení obyčejných diferenciálních rovnic a pružnosti a pevnosti uvedené ve třetí a čtvrté kapitole. Základním problémem při řešení optimalizačních úloh je sestavení vhodného matematického modelu. Vybrané úlohy pro tento problém jsou řešeny v šesté kapitole a mohou sloužit jako vzor pro řešení podobných úloh.

Řešení vzorových příkladů bylo provedeno pomocí programového systému MATLAB, kterému je věnována kapitola 5.

2. Optimalizace

Úlohou matematického optimalizačního modelu (dále jen optimalizační model), je nalezení takových hodnot proměnných, pro které daná účelová funkce nabývá minimální nebo maximální hodnoty. Matematický optimalizační model je formulován

$$\begin{aligned} \min f_0(x) \\ f_i(x) &\leq b_i, \quad i = 1, \dots, m \\ h_j(x) &= 0, \quad j = 1, \dots, p, \end{aligned}$$

kde $x = (x_1, \dots, x_n)$ je vektor optimalizačních proměnných, funkce $f_0 : R^n \rightarrow R$ je účelová funkce, funkce $f_i : R^n \rightarrow R$, $i = 1, \dots, m$ jsou nerovnostní omezující funkce a konstanty b_1, \dots, b_m jsou hranice omezení, funkce $h_j : R^n \rightarrow R$, $j = 1, \dots, p$ jsou rovnostní omezující funkce, které dále nebudou uváděny, protože každé rovnostní omezení lze vyjádřit pomocí dvou nerovnostních omezení.

Množina bodů, na kterých je definována účelová funkce a všechny omezující funkce,

$$D = \bigcap_{i=0}^{m+2p} \text{dom } f_i,$$

je nazývána definiční oblastí optimalizační úlohy. Bod $x \in D$ je přípustný, pokud vyhovuje omezujícím funkcím $f_i(x) \leq b_i$, $i = 1, \dots, m + 2p$. Úloha je řešitelná, pokud existuje alespoň jeden přípustný bod. Množina přípustných bodů se nazývá přípustná množina.

Vektor x^* je optimálním řešením uvedeného modelu, pokud dosahuje nejmenší hodnoty účelové funkce mezi všemi přípustnými vektory

$$f_1(x) \leq b_1, \dots, f_m(x) \leq b_m,$$

pak tedy platí

$$f_0(x) \geq f_0(x^*).$$

Optimalizační úloha je nazývána lineární, pokud funkce f_0, \dots, f_m jsou lineární, to znamená, že splňují podmínku

$$f_i(\alpha x + \beta y) = \alpha f_i(x) + \beta f_i(y),$$

pro všechna $x, y \in R^n$ a pro všechna $\alpha, \beta \in R$. Pokud úloha nesplňuje výše uvedenou podmínku, budeme ji nazývat nelineární. Je tedy přínosné rozpoznat, že lze problém formulovat a řešit pomocí konvexní optimalizace. K rozvoji modelů a metod konvexní optimalizace také přispívá skutečnost, že mnohé problémy inženýrské praxe lze formulovat a řešit pomocí těchto modelů a metod. Všimněme si jejich využití v automatických kontrolních systémech, odhadech, zpracování signálů, komunikačních sítích i v analýze dat, viz [2]. My se soustředíme na jejich využití ve vybraných problémech inženýrské mechaniky. Dále uvádíme základní poznatky konvexní optimalizace podle [2].

2.1. Konvexní optimalizace

Konvexní optimalizační úloha je taková, že její účelová a omezující funkce splňují tuto nerovnost

$$f_i(\alpha x + \beta y) \leq \alpha f_i(x) + \beta f_i(y)$$

pro všechna $x, y \in R^n$ a pro všechna $\alpha, \beta \in R, \alpha + \beta = 1, \alpha \geq 0, \beta \geq 0, i = 0, \dots, m$. Jestliže formulujeme úlohu jako úlohu konvexní optimalizace, pak ji můžeme efektivně řešit.

Konvexní množiny

Řekneme, že množina $C \subseteq R^n$ je konvexní, když úsečka spojující libovolné dva body $x_1, x_2 \in C$ je obsažena v C , tedy

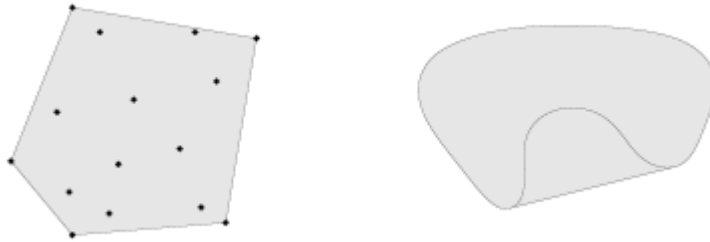
$$\theta x_1 + (1 - \theta)x_2 \in C$$

pro $\theta \in \langle 0, 1 \rangle$. Množina je konvexní, pokud obsahuje všechny konvexní kombinace bodů v ní obsažených. Konvexní kombinací nazýváme výraz ve tvaru $\theta_1 x_1 + \dots + \theta_k x_k$, kde $\theta_1 + \dots + \theta_k = 1$ a $\theta_i \geq 0, i = 1, \dots, k$. Konvexní kombinace bodů může být považována za směs nebo vážený průměr bodů, kde θ_i je podíl x_i ve směsi.

Konvexní obal množiny C , označen $\text{conv } C$, je množina všech konvexních kombinací bodů v C :

$$\text{conv } C = \{\theta_1 x_1 + \dots + \theta_k x_k \mid x_i \in C, \theta_i \geq 0, i = 1, \dots, k, \theta_1 + \dots + \theta_k = 1\}.$$

Konvexní obal $\text{conv } C$ je vždy konvexní množina. Je to nejmenší konvexní množina obsahující C . Jestliže B je jakákoliv konvexní množina obsahující C , pak $\text{conv } C \subseteq B$. Obrázek



Obrázek 2.1: Konvexní obal dvou množin v R^2 . Vlevo: Konvexní obal patnácti bodů (zobrazeny tečkami) ve tvaru pětiúhelníku (vystínováno). Vpravo: Konvexní obal množiny ve tvaru „ledviny“.

2.1 ilustruje definici konvexního obalu. Nechť S_1 a S_2 jsou konvexní množiny, pak $S_1 \cap S_2$ je konvexní množina. Jako jednoduchý příklad je možné uvést mnohostěn který je konvexní množinou.

Konvexní funkce

Funkce $f : R^n \rightarrow R$ je konvexní, když definiční obor $\text{dom } f$ je konvexní množina a $\forall x, y \in \text{dom } f$ a $\theta \in \langle 0, 1 \rangle$ platí

$$f(\theta x + (1 - \theta)y) \leq \theta f(x) + (1 - \theta)f(y). \quad (2.1)$$

Tato nerovnost v geometrii znamená, že úsečka mezi body $(x, f(x))$ a $(y, f(y))$, která je tětivou z x do y , leží nad grafem funkce f . Funkce f je striktně konvexní, když platí ostrá nerovnost v (2.1) kdykoli $x \neq y$ a $\theta \in (0, 1)$. Říkáme, že funkce f je konkávní, pokud $-f$ je konvexní a striktně konkávní, pokud $-f$ je striktně konvexní. Funkce je konvexní tehdy, pokud $\forall x \in \text{dom } f$ a $\forall v \in R^n, t \in R$ je funkce $g(t) = f(x + tv)$ konvexní (na své definiční oblasti, $\{t \in R \mid x + tv \in \text{dom } f\}$). Tato vlastnost je užitečná, protože nám dovoluje kontrolovat zda je funkce konvexní. Jako jednoduchý příklad lze uvést, že konvexní funkce je spojitá na vnitřku své definiční oblasti a může být nespojitá jen na své hranice.

Často je vhodné rozšířit definici konvexní funkce tak, že definujeme její hodnotu ∞ mimo její definiční obor, tj. na celé R^n . Pokud je f konvexní, definujeme tedy rozšířenou funkci $\tilde{f} : R^n \rightarrow R \cup \{\infty\}$ takto

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in \text{dom } f \\ \infty & x \notin \text{dom } f \end{cases}$$

Původní definiční obor funkce f z rozšířené funkce \tilde{f} dostaneme $\text{dom } f = \{x \mid \tilde{f} < \infty\}$. Rozšíření zjednodušuje zápis, protože nemusíme popisovat definiční obor. Konkávní funkce rozšiřujeme podobným způsobem, jen je definujeme $-\infty$ mimo jejich definiční obor.

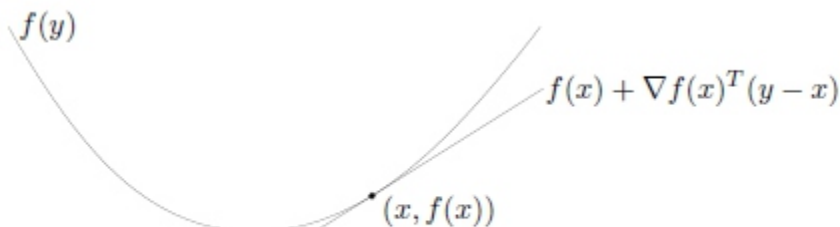
Předpokládejme, že f je diferencovatelná, to znamená, že její gradient ∇f existuje v každém bodě $\text{dom } f$ o kterém předpokládáme, že je otevřenou množinou. Pak f je konvexní, pokud $\text{dom } f$ je konvexní a

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T(y - x) \quad (2.2)$$

platí $\forall x, y \in \text{dom } f$. Tato nerovnost je ilustrována na obrázku 2.2.

Afinní funkce, proměnné y , která je dána jako $f(x) + \nabla f(x)^T(y - x)$, je Taylorův polynom prvního řádu. Nerovnost (2.2) určuje, že pro konvexní funkce je Taylorův polynom prvního řádu globálně dolní odhad funkce, viz. obr. 2.2.

Nerovnost (2.2) dále dokazuje, že z lokální informace o konvexní funkci (t.j. funkční hodnoty a derivace v bodě) můžeme odvodit globální informaci (t.j. globální dolní odhad). Toto je pravděpodobně nejdůležitější vlastnost konvexních funkcí, protože když $\nabla f(x) = 0$ pak pro $\forall y \in \text{dom } f, f(y) \geq f(x)$, to znamená, že x je globálním minimem funkce f .



Obrázek 2.2: Když f je konvexní a diferencovatelná, pak $f(x) + \nabla f(x)^T(y - x) \geq f(y)$ pro $\forall x, y \in \text{dom } f$.

Úlohy konvexní optimalizace

Optimalizační úlohu lze upravit do standardní formy. Ve standardní formě jsou pravé strany rovnostních a nerovnostních omezení nulové. To může být upraveno tak, že od levé

2.1. KONVEXNÍ OPTIMALIZACE

strany odečteme nenulovou pravou stranu. Například pro rovnostní omezení $g_i(x) = \tilde{g}_i(x)$ zavedeme $h_i(x) = 0$, kde $h_i(x) = g_i(x) - \tilde{g}_i(x)$. Nerovnici ve tvaru $f_i(x) \geq 0$ vyjádříme jako $-f_i(x) \leq 0$.

Převedení do standardní formy považujeme za příklad transformace optimalizačních úloh. Při transformaci optimalizačních úloh usilujeme o to, aby optimalizační úlohy, původní a transformovaná, byly rovnocenné. Optimalizační úlohy považujeme za rovnocenné, pokud po vyřešení jedné úlohy je snadné nalézt i řešení druhé úlohy a naopak. Jako jednoduchý příklad uvažujeme problém

$$\begin{aligned} \min \quad & \tilde{f}_0(x) \\ & \tilde{f}_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ & \tilde{h}_j(x) = 0, \quad j = 1, \dots, p, \end{aligned}$$

jestliže

$$\begin{aligned} \tilde{f}_0(x) &= \alpha_0 f_0(x) \\ \tilde{f}_i(x) &= \alpha_i f_i(x), \quad i = 1, \dots, m \\ \tilde{h}_j(x) &= \beta_j h_j(x), \quad j = 1, \dots, p, \end{aligned}$$

kde $\alpha_i \geq 0, i = 0, \dots, m$ a $\beta_j \neq 0, j = 1, \dots, p$. Tuto úlohu získáme ze standardní úlohy vynásobením účelové funkce a nerovnostních omezujících funkcí kladnou konstantou a vynásobením rovnostních omezujících funkcí nenulovou konstantou. Výsledkem je, že přípustné množiny úloh jsou identické. Bod x^* je optimálním bodem původní úlohy, pokud je optimální i pro odvozenou úlohu.

Dualita

Předpokládejme optimalizační problém ve standardním tvaru

$$\begin{aligned} \min \quad & f_0(x) \\ & f_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ & h_j(x) = 0, \quad j = 1, \dots, p, \end{aligned}$$

s proměnnou $x \in R^n$. Předpokládáme, že definiční obor $D = \bigcap_{i=0}^m \text{dom } f_i \cap \bigcap_{j=1}^p \text{dom } h_j$ je neprázdný a označíme optimální hodnotu $f_0(x^*) = p^*$. Uvažujme obecnou úlohu nelineární optimalizace, která není konvexní.

Hlavní myšlenkou Lagrangeovy duality je to, že rozšíříme účelovou funkci o sumu vážených omezujících funkcí, kde λ_i, ν_j jsou váhy jednotlivých omezení. Definujeme Lagrangeovu funkci $L : R^n \times R^m \times R^p \rightarrow R$ úlohy takto

$$L(x, \lambda, \nu) = f_0(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x) + \sum_{j=1}^p \nu_j h_j(x),$$

s definičním oborem $\text{dom } L = D \times R^m \times R^p$, λ_i je Lagrangeův multiplikátor spojený s i -tým nerovnostním omezením $f_i(x) \leq 0$, podobně ν_j je Lagrangeův multiplikátor spojený s j -tým rovnostním omezením. Vektory λ a ν jsou nazývány duálními proměnnými, viz [2].

2. OPTIMALIZACE

Lagrangeova duální funkce je definována $g : R^m \times R^p \rightarrow R$ jako minimální hodnota Lagrangeovy funkce přes x pro $\lambda \in R^m$, tedy $\nu \in R^p$,

$$g(\lambda, \nu) = \inf_{x \in D} L(x, \lambda, \nu) = \inf_{x \in D} (f_0(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x) + \sum_{i=1}^p \nu_i h_i(x)).$$

Když Lagrangeova funkce není zdola omezená v x , pak duální funkce nabývá hodnoty $-\infty$.

Duální funkce dává dolní hranici optimální hodnoty p^* pro daný problém. Pro jakékoli $\lambda \geq 0$ a jakékoli ν platí

$$g(\lambda, \nu) \leq p^*.$$

Tuto důležitou vlastnost můžeme snadno dokázat. Předpokládejme, že \tilde{x} je přípustné řešení úlohy, to znamená $f_i(\tilde{x}) \leq 0$ a $h_i(\tilde{x}) = 0$ a $\lambda \geq 0$. Pak platí

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x) + \sum_{i=1}^p \nu_i h_i(x) \leq 0,$$

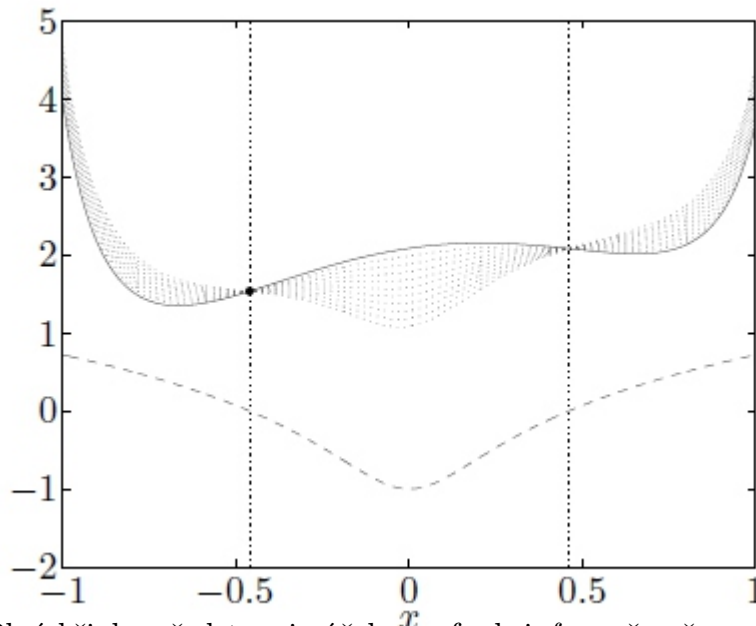
poněvadž každý výraz z první sumy je nekladný a každý výraz z druhé sumy je nulový

$$L(\tilde{x}, \lambda, \nu) = f_0(\tilde{x}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(\tilde{x}) + \sum_{i=1}^p \nu_i h_i(\tilde{x}) \leq f_0(\tilde{x}).$$

Proto platí

$$g(\lambda, \nu) = \inf_{x \in D} L(x, \lambda, \nu) \leq L(\tilde{x}, \lambda, \nu) \leq f_0(\tilde{x}).$$

Když $g(\lambda, \nu) \leq f_0(\tilde{x})$ pro každý přípustný bod \tilde{x} , potom nerovnost platí. Příklad Lagrangeovy funkce je uveden na obrázku 2.3.



Obrázek 2.3: Plná křivka představuje účelovou funkci f_0 a přerušovaná křivka omezující funkci f_1 . Množina přípustných bodů je interval $\langle -0.46, 0.46 \rangle$, která je vyznačena dvěma tečkovanými vertikálními čarami. Optimální bod o souřadnicích $x^* = -0.46$, $p^* = 1.54$ je v grafu označen tečkou. Tečkované křivky představují $L(x, \lambda)$.

2.2. Metody řešení

Minimalizace bez omezení

Uvažujme tuto optimalizační úlohu bez omezení

$$\min f(x) \tag{2.3}$$

kde $f : R^n \rightarrow R$ je konvexní a má spojitě derivace druhého řádu. Budeme předpokládat, že problém je řešitelný, tedy existuje optimální bod x^* a označíme optimální hodnotu $\min_x f(x) = f(x^*)$ jako p^* .

Vzhledem k tomu, že f je diferencovatelná a konvexní, aby byl bod x^* optimální, musí splňovat nutnou a postačující podmínku

$$\nabla f(x^*) = 0. \tag{2.4}$$

Tedy řešit úlohu (2.3) je stejné jako najít řešení (2.4), což je soustava n rovnic o n neznámých x_1, \dots, x_n . V několika výjimečných případech můžeme najít řešení úlohy (2.3) analytickým řešením rovnice (2.4), ale většinou musí být problém řešen iterativním algoritmem. Tím myslíme algoritmy, které počítají posloupnost bodů $x^{(0)}, x^{(1)}, \dots \in \text{dom } f$, kde $f(x^{(k)}) \rightarrow p^*$ pro $k \rightarrow \infty$. Taková posloupnost bodů je nazývána minimalizační posloupností úlohy (2.3). Algoritmus je ukončen, když $f(x^{(k)}) - p^* \leq \varepsilon$, kde $\varepsilon > 0$ je zadané přesnost.

Takto popsané metody vyžadují vhodný počáteční bod $x^{(0)}$. Počáteční bod musí být v $\text{dom } f$ a uzavřené podmnožině

$$S = \{x \in \text{dom } f \mid f(x) \leq f(x^{(0)})\}.$$

Minimalizace s rovnostním omezením

Uvažujme minimalizační úlohu s rovnostním omezením,

$$\min f(x) \tag{2.5}$$

$$\mathbf{A}x = b,$$

kde $f : R^n \rightarrow R$ je konvexní a má spojitě derivace druhého řádu a $A \in R^{p \times n}$ je matice hodnosti $h(\mathbf{A}) = p < n$. Předpoklad vytažený na A znamená, že máme méně rovnostních omezení než proměnných a také, že omezení jsou nezávislá. Dále předpokládejme že optimální řešení x^* existuje a p^* označuje optimální hodnotu, $p^* = \min\{f(x) \mid Ax = b\} = f(x^*)$

Bod $x^* \in \text{dom } f$ je optimálním řešením úlohy (2.6) pouze tehdy, když existuje $\nu^* \in R^p$, které vyhovuje podmínkám

$$\mathbf{A}x^* = b, \quad \nabla f(x^*) + A^T \nu^* = 0. \tag{2.6}$$

Řešení úlohy (2.5) je ekvivalentní řešení soustavy $n + p$ rovnic (2.6) s $n + p$ proměnnými x^*, ν^* . První soustava rovnic $Ax^* = b$, která je lineární, se nazývá rovnicí primární přípustnosti. Druhá soustava rovnic $\nabla f(x^*) + A^T \nu^* = 0$ se nazývá rovnicí duální přípustnosti, která je obecně nelineární. Stejně jako u úlohy bez omezení, jen málo úloh jsme schopni vyřešit analyticky.

Jakákoli úloha s rovnostním omezením může být zredukována na ekvivalentní neomezený problém eliminací rovnostních omezení. Jiný přístup k úloze je řešení neomezené duální úlohy, která se zpětně převede na řešení omezené úlohy.

3. Obyčejné diferenciální rovnice

3.1. Základy teorie ODR

V technické praxi se často setkáváme s problémy, které lze matematicky popsat pomocí rovnic, ve kterých jako proměnné vystupují neznámé funkce a jejich derivace. Tyto rovnice jsou nazývány diferenciálními rovnicemi, viz [3]. Obyčejné diferenciální rovnice jsou takové rovnice, v nichž vystupují derivace neznámé funkce jen podle jedné proměnné, zatímco rovnice obsahující derivace podle více proměnných, parciální derivace, nazýváme parciálními diferenciálními rovnicemi.

Řád diferenciální rovnice vyjadřuje nejvyšší řád derivace v rovnici se nacházející. Obecně definujeme diferenciální rovnici n -tého řádu takto

$$u^{(n)} = f(x, u, u', \dots, u^{(n-1)}),$$

kde f je reálná funkce definovaná na $(n + 1)$ rozměrné oblasti.

Hledáme-li řešení rovnice (3.1), které vyhovuje n počátečním podmínkám

$$u(x_0) = u_0, u'(x_0) = u_1, \dots, u^{(n-1)}(x_0) = u_{n-1}, \quad (3.1)$$

úlohu nazýváme počáteční problém.

Pokud řešíme diferenciální rovnici s podmínkami, které charakterizují řešení na jeho koncích, pak mluvíme o okrajové úloze. Tyto podmínky pak nazýváme okrajovými podmínkami a lze je popsat těmito vztahy

$$\alpha u(a) + \beta u'(a) = u_a$$

$$\gamma u(b) + \delta u'(b) = u_b,$$

kde a, b jsou koncové body intervalu, v němž hledáme řešení a $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ jsou čísla vyhovující podmínce

$$|\alpha| + |\beta| \neq 0, |\gamma| + |\delta| \neq 0.$$

Takto formulovanou podmínku nazveme podmínkou Newtonovou. V případě kdy β, δ jsou rovny 0, pak podmínky předepisují hodnoty řešení a jedná se o podmínky Dirichletovy a pokud α, γ jsou rovny 0, pak podmínky předepisují derivace řešení a nazýváme je Neumannovými podmínkami.

3.2. Numerické řešení metodou konečných diferencí

Metoda konečných diferencí, je klasická diskretizační metoda pro přibližné vyčíslení řešení jednorozměrných okrajových úloh, viz [4]. Metodu popíšeme na ilustračním příkladu lineární diferenciální rovnici druhého řádu

$$u'' + a(x)u' + b(x)u = f(x)$$

s Dirichletovými podmínkami

$$u(0) = u_0, u(l) = u_l$$

3.2. NUMERICKÉ ŘEŠENÍ METODOU KONEČNÝCH DIFERENCÍ

kde funkce a, b a f jsou spojité na intervalu $\langle 0, l \rangle$ a funkce $b(x) \leq 0$. Pokud úloha splňuje tyto předpoklady, pak je jednoznačně řešitelná.

Pro jednoduchost uvažujme ekvidistantní dělení intervalu $\langle 0, l \rangle$ na n částí délky $h = l/n$ s dělicími body

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = nh = l.$$

Dělicí body x_i nazveme uzly a množinu uzlů nazveme sítí. Přibližné hodnoty funkce u budeme hledat pouze ve vnitřních uzlech, protože v krajních uzlech je předepsána okrajovými podmínkami a platí tedy

$$u''(x_i) + a(x_i)u'(x_i) + b(x_i)u(x_i) = f(x_i), i = 1, \dots, n-1$$

a nahradíme-li derivace diferenčními podíly takto:

$$u'_i = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h}, \quad u''_i = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}$$

a nahradíme-li přesné hodnoty u_i jejich přibližnými hodnotami U_i , pak dostaneme $n-1$ lineárních rovnic pro $n-1$ neznámých, tohoto tvaru

$$\frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{h^2} + a_i \frac{U_{i+1} - U_{i-1}}{2h} + b_i U_i = f_i, \quad i = 1, \dots, n-1$$

a z okrajových podmínek určíme hodnoty řešení v krajních bodech

$$U_0 = u_0, U_n = u_n.$$

V maticovém zápisu vypadá soustava takto

$$\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F}$$

kde matice \mathbf{K} , \mathbf{U} a \mathbf{F} označíme takto

$$\mathbf{K} = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} -2 + b_1 h^2 & 1 + a_1 h & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 - a_2 h & -2 + b_2 h^2 & 1 + a_2 h & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 - a_3 h & -2 + b_3 h^2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -2 + b_{n-2} h^2 & 1 + a_{n-2} h \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 - a_{n-2} h & -2 + b_{n-1} h^2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{U} = (U_1, U_2, U_3, \dots, U_{n-2}, U_{n-1})^T,$$

$$\mathbf{F} = (f_1 + (a_1 h - 1)u_0, f_2, f_3, \dots, f_{n-2}, f_{n-1} - (a_{n-1} h + 1)u_n)^T.$$

4. Pružnost a pevnost

Pružnost a pevnost (zkráceně PP) je část mechaniky kontinua, která vyšetřuje deformaci těles a vnitřní silové účinky, které s deformací souvisejí, viz [6]. Z důvodu rozsáhlosti teorie PP v této kapitole budou zmíněny pouze vybrané části, které využijeme při řešení příkladu v kapitole 5.

4.1. Základní pojmy

Prut je výpočtový model trojrozměrného tělesa, které je určeno střednicí γ a v každém bodě střednice rovinným průřezem ψ , jehož těžiště leží na střednici, dále jeho geometrickými charakteristikami a osovými kvadratickými momenty, které jsou definovány takto

$$J_y = \int_{\psi} z^2 d\psi,$$

$$J_z = \int_{\psi} y^2 d\psi,$$

Pruty dělíme na otevřené a uzavřené. Střednice otevřeného prutu je jednoduše souvislá křivka. Uzavřené pruty lze rozdělit na dva prvky řezem určeným nejméně dvěma body. Dále se budeme zabývat případem otevřeného prutu.

Předpokládejme, že prut je při působení vnější silové soustavy π ve statické rovnováze. Zvolíme-li řez ω , který rozdělí prut na dva prvky Ω_1 a Ω_2 , pak je i soustava π rozdělena na dvě podsoustavy π_1 a π_2 . Má-li být prut Ω v rovnováze, pak musí být v rovnováze prvky Ω_1 a Ω_2 , tedy prvky Ω_1 a Ω_2 na sebe působí soustavou plošných sil. Tato soustava je jednoznačně určena normálnou silou \vec{N} , posouvající silou \vec{T} , kroutícím momentem \vec{M}_k a ohybovým momentem \vec{M}_o .

4.2. Prosté namáhání

Při prostém namáhání se prut deformuje tak, že se mění tvar střednice, mění se tvar příčného průřezu a průřezy se vzájemně natáčejí. Jestliže je prut při prostém namáhání vázán, pak některé z těchto deformací jsou omezeny. Množinu $D = \{u, v, w, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_k\}$ popisující vazbu, označíme jako množinu vazbových deformačních parametrů. V důsledku vazby v bodě vznikají v tomto bodě vazbové reakce, kterými jsou: osamělé síly omezující posuv a osamělé momenty omezující natáčení. Jestliže jsou u prutu omezeny jen posuvy, označuje se vazba jako podpora, jsou-li omezeny i úhly natáčení, označuje se vazba jako vetknutí. Je-li některý prvek z $D = \{u, v, w, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_k\}$ omezen, je odpovídající prvek vazbového účinku $S = \{F_x, F_y, F_z, M_{o1}, M_{o2}, M_k\}$ nenulový.

Uvažujme nyní prut který je vázán k základnímu rámu v n bodech. Pro řešení prut uvolníme, a to tak, že v každém vazbovém bodě odstraníme vazbu a zavedeme vazbovou reakci, která obsahuje právě μ_i nezávislých neznámých parametrů. Reakce ve všech n vazbových bodech představují celkem $\mu = \sum_{i=1}^n \mu_i$ nezávislých parametrů. Podle vlastností soustavy vnějších silových účinků a vazbových reakcí můžeme pro uvolněný prut napsat ν použitelných podmínek statické rovnováhy, pro rovinný případ $\nu = 3$. Jestliže $\nu = \mu$, vazba prutu je staticky určitá, což znamená, že nezávislé parametry vazbových reakcí

4.3. PROSTÝ OHYB

určíme z použitelných podmínek statické rovnováhy.

Jestliže $\mu > \nu$, je vazba prutu staticky neurčitá, což znamená, že pro určení neznámých parametrů vazbových reakcí je třeba kromě ν použitelných podmínek formulovat $\mu - \nu$ vazbových deformačních podmínek.

4.3. Prostý ohyb

Namáhání jednoduchým ohybem je definováno jako případ, kdy výsledným vnitřním účinkem v každém bodě střednice je ohybový moment \vec{M}_o a neuvažujeme vliv normální síly ani posouvající síly na přetvoření.

V případě staticky neurčitého prutu jsou vazbové deformační podmínky určeny z Castilianovy věty, vyjadřující vztah mezi posuvem, natočením a deformační prací. Jedná-li se o lineárně pružné těleso, pak posuv způsobený silovou soustavou v bodě A , ve směru osamělé síly F_A , působící v bodě A platí

$$u_A = \frac{\partial W}{\partial F_A} = \int_0^x \frac{M(x)\partial M(x)}{EJ\partial F_A} dx$$

pro případ natočení o úhel φ_A v místě působivosti silové dvojice M_A

$$\varphi_A = \frac{\partial W}{\partial M_A} = \int_0^x \frac{M(x)\partial M(x)}{EJ\partial M_A} dx,$$

kde J je kvadratický moment k příslušné ohybové ose a E je Youngův modul pružnosti v tahu, charakteristika závislá pouze na materiálu prutu, popisující tuhost materiálu. Rovnice ohybové čáry pro přímý prizmatický prut konstantního průřezu je dána diferenciální rovnicí

$$EJ \frac{d^2 u}{dx^2}(x) = -M(x).$$

Mez pružnosti σ_E je materiálová charakteristika, určující nejvyšší povolenou hodnotu napětí, při které se nevytvoří trvalé deformace.

Maximální hodnota napětí v prutu zatíženém ohybovým momentem je určena následujícím vztahem

$$\sigma_{max}(x) = \frac{M_{max}(x)}{w_0} = \frac{M_{max}(x)}{J} y_{max}.$$

Plastické deformace nenastanou pokud $|\sigma_{max}| \leq \sigma_E$.

5. MATLAB

MATLAB (matrix laboratory) je interaktivní programové prostředí a programovací jazyk čtvrté generace. MATLAB umožňuje počítání s maticemi, vykreslování funkcí a dat, implementování algoritmů, vytváření aplikací a propojení s programy psanými v jiných jazycích. MATLAB Optimization Toolbox poskytuje široce užívané algoritmy pro standardní úlohy i úlohy velkého rozsahu. Tyto algoritmy řeší omezené i neomezené spojité a diskrétní úlohy. Software optimalizačního toolboxu obsahuje funkce na řešení lineárních, kvadratických, nelineárních a vícekritériálních úloh.

Funkce, kterou jsme využili v našem programu se nazývá FMINCON, která hledá minimum omezené nelineární funkce s více proměnnými o tomto matematickém zápisu

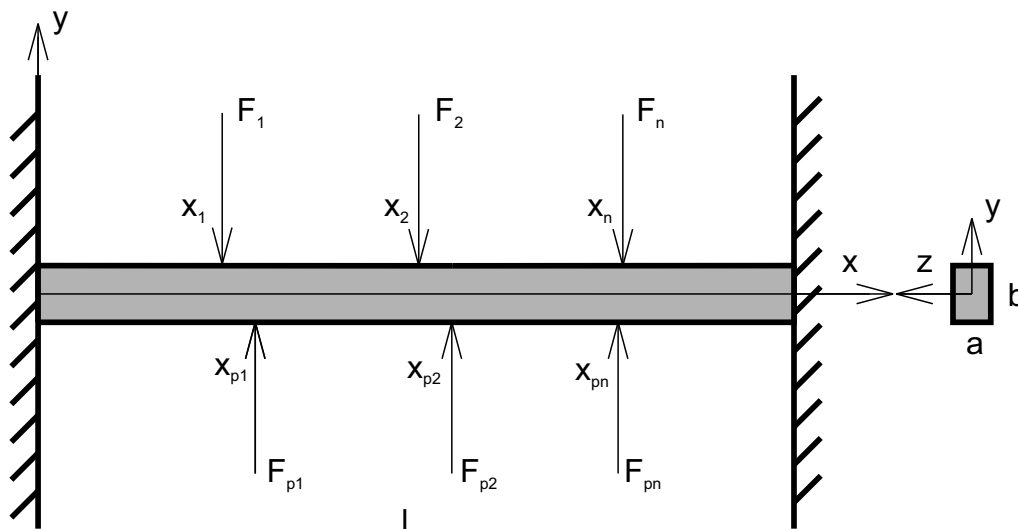
$$\begin{aligned} \min_x f(x) \\ c(x) &\leq 0, \\ ceq(x) &= 0, \\ \mathbf{A} \cdot x &\leq b, \\ \mathbf{Aeq} \cdot x &= beq, \\ lb &\leq x \leq ub. \end{aligned}$$

kde x , b , beq a ub jsou vektory, \mathbf{A} a \mathbf{Aeq} jsou matice, $c(x)$ a ceq jsou funkce vracející vektor a $f(x)$ je účelová funkce vracející skalár, $f(x)$, $c(x)$ a ceq mohou být nelineární funkce, viz [5].

6. Řešený příklad

6.1. Konstrukční optimalizace

V následujícím příkladu budeme řešit optimalizaci podpěr oboustranně vetknutého nosníku obdélníkového průřezu zatíženého osamělými silami, požadujeme minimální součet kvadrátů odchylek střednice od osy x . Nosník je znázorněn na obr 6.1.



Obrázek 6.1: Znázornění modelové úlohy

Pro řešení dané úlohy je nutné určit výsledné vnitřní účinky (VVÚ) v námi uvažovaném nosníku. Z formulované úlohy plyne, že se jedná o rovinnou úlohu o třech nezávislých parametrech F_x, F_y, M , tedy $\nu = 3$ a vazby v bodech A a B odebírají celkem šest stupňů volnosti, $\mu_A + \mu_B = 3 + 3 = 6$. Jedná se tedy o staticky neurčitou soustavu, kterou doplníme o tři deformační podmínky. Nosník zatížený m silami a podepřený n podpěrami je popsán následující soustavou rovnic:

$$F_{Ax} + F_{Bx} = 0, \quad (6.1)$$

$$F_{Ay} + F_{By} - \sum_{i=1}^m F_i + \sum_{j=1}^n F_{pj} = 0, \quad (6.2)$$

$$M_A + lF_{By} - \sum_{i=1}^m F_i x_i + \sum_{j=1}^n F_{pj} x_{pj} - M_B = 0, \quad (6.3)$$

$$u_A = \frac{\partial W}{\partial F_{Ax}} = \int_0^x \frac{N(x) \partial N(x)}{EJ \partial F_{Ax}} dx = 0, \quad (6.4)$$

$$v_A = \frac{\partial W}{\partial F_{Ay}} = \int_0^x \frac{M(x) \partial M(x)}{EJ \partial F_{Ay}} dx = 0, \quad (6.5)$$

$$\varphi_A = \frac{\partial W}{\partial M_A} = \int_0^x \frac{M(x) \partial M(x)}{EJ \partial M_A} dx = 0. \quad (6.6)$$

6. ŘEŠENÝ PŘÍKLAD

Z rovnice (6.1) a (6.4) vyplývá, že síly F_{Ax} a F_{Bx} jsou rovny nule. Tuto soustavu nyní zapíšeme pomocí matic

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & l & 1 & -1 \\ -\frac{l^3}{3} & 0 & \frac{l^2}{2} & 0 \\ -\frac{l^2}{2} & 0 & l & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{Ay} \\ F_{By} \\ M_A \\ M_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m F_i - \sum_{j=1}^n F_{p_j} \\ \sum_{i=1}^m F_i x_i - \sum_{j=1}^n F_{p_j} x_{p_j} \\ \sum_{i=1}^m F_i (x_i \frac{l^2}{2} - \frac{l^3}{3} - \frac{x_i^3}{6}) - \sum_{j=1}^n F_{p_j} (x_{p_j} \frac{l^2}{2} - \frac{l^3}{3} - \frac{x_{p_j}^3}{6}) \\ \sum_{i=1}^m F_i (x_i l - \frac{l^2}{2} - \frac{x_i^3}{2}) - \sum_{j=1}^n F_{p_j} (x_{p_j} l - \frac{l^2}{2} - \frac{x_{p_j}^3}{2}) \end{pmatrix},$$

kteřou zapíšeme následovně

$$\mathbf{PF} = \mathbf{Z}.$$

V kapitole věnované pružnosti a pevnosti byla uvedena rovnice ohybové čáry

$$EJ \frac{d^2 u}{dx^2}(x) = -M(x), \quad x \in \langle 0, l \rangle,$$

kde l je délka nosníku v [mm], E je Youngův modul pružnosti v tahu [MPa], $M(x)$ je ohybový moment působící na nosník [Nmm] a J je kvadratický moment průřezu nosníku k ose z [mm⁴], který je pro obdélníkový průřez definován takto

$$J = \frac{ab^3}{12}.$$

Naši úlohu tedy můžeme zapsat v následujícím tvaru

$$\min \int_0^l u^2(x) \quad (6.7)$$

$$\mathbf{PF} = \mathbf{Z}, \quad (6.8)$$

$$E \frac{ab^3}{12} \frac{d^2 u}{dx^2}(x) = -M(x), \quad x \in \{0, l\}, \quad (6.9)$$

$$u(0) = 0, \quad u(l) = 0, \quad (6.10)$$

$$F_{\min p_i} \leq F_{p_i} \leq F_{\max p_i} \quad i = 1, \dots, n, \quad (6.11)$$

$$x_{\min p_i} \leq x_{p_i} \leq x_{\max p_i} \quad j = i, \dots, n, \quad (6.12)$$

kde F_{p_i} je síla vyvolaná i -tou podporou působící v místě x_{p_i} .

Rovnice popisující průhyb nosníku je obyčejná diferenciální rovnice druhého řádu, provedeme diskretizaci pomocí metody konečných diferencí.

$$Eab^3 \begin{pmatrix} -2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -2 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_{N-2} \\ U_{N-1} \end{pmatrix} = 12h^2 \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{N-2} \\ M_{N-1} \end{pmatrix}$$

Vhodným označením můžeme soustavu zapsat v následujícím tvaru

$$Eab^3 \mathbf{KU} = -12h^2 \mathbf{M}.$$

6.2. ÚLOHY

Úlohu přepíšeme do následujícího tvaru

$$\min \mathbf{U}^T \mathbf{U} \quad (6.13)$$

$$\mathbf{P}\mathbf{F} = \mathbf{Z}, \quad (6.14)$$

$$Eab^3\mathbf{K}\mathbf{U} + 12h^2\mathbf{M} = \mathbf{0}, \quad (6.15)$$

$$F_{\min p_i} - F_{p_i} \leq 0, F_{p_i} - F_{\max p_i} \leq 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (6.16)$$

$$x_{\min p_i} - x_{p_i} \leq 0, x_{p_i} - x_{\max p_i} \leq 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (6.17)$$

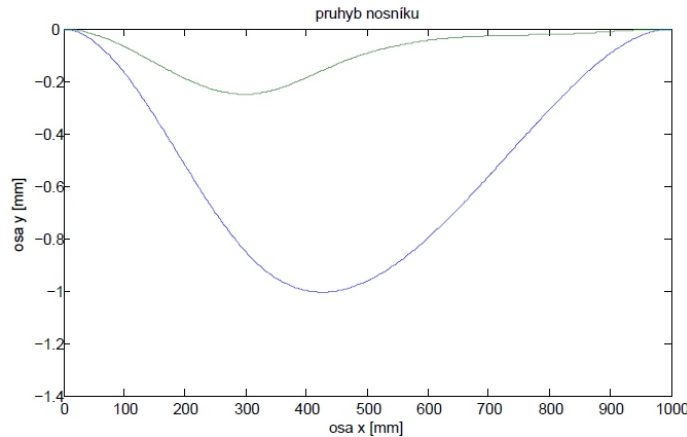
6.2. Úlohy

Následující úlohy implementujeme v programu MATLAB pomocí funkce FMINCON používající metodu vnitřního bodu. Rozměry uvažovaného nosníku jsou $l = 1000$ mm, $a = 15$ mm a $b = 25$ mm.

Úloha č.1

Určete optimální místo podepření nosníku zatíženého silami: $F_1 = 300$ N, $F_2 = 800$ N, $F_3 = 200$ N, působícími v místech $x_1 = 252$ mm, $x_2 = 320$ mm a $x_3 = 850$ mm, když máme předepsanu sílu působící podpěry $F_p = 700$ N.

Model určil minimální hodnotu účelové funkce $14,7853$ mm², pro pozici $475,5$ mm. Průhyby podepřeného a nepodepřeného nosníku jsou znázorněny na obr 6.1.

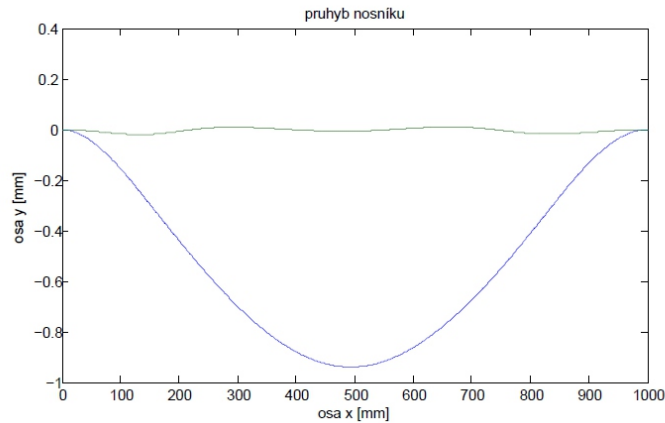


Obrázek 6.2: Modrá křivka znázorňuje průhyb nosníku bez podpory, zelená křivka znázorňuje nosník s ideální podpěrou.

Úloha č.2

Určete optimální síly podpěr zatíženého nosníku silami: $F_1 = 900$ N, $F_2 = 100$ N, $F_3 = 250$ N, $F_4 = 600$ N, působícími v místech $x_1 = 150$ mm, $x_2 = 378$ mm, $x_3 = 505$ mm a $x_4 = 800$ mm, máme-li podpěry v místech $x_{p_1} = 250$ mm a $x_{p_2} = 700$ mm.

Model určil minimální hodnotu účelové funkce $0,0908$ mm², pro síly $F_{p_1} = 712,5705$ N a $F_{p_2} = 584,8949$ N. Průhyby podepřeného a nepodepřeného nosníku jsou znázorněny na obr 6.2.

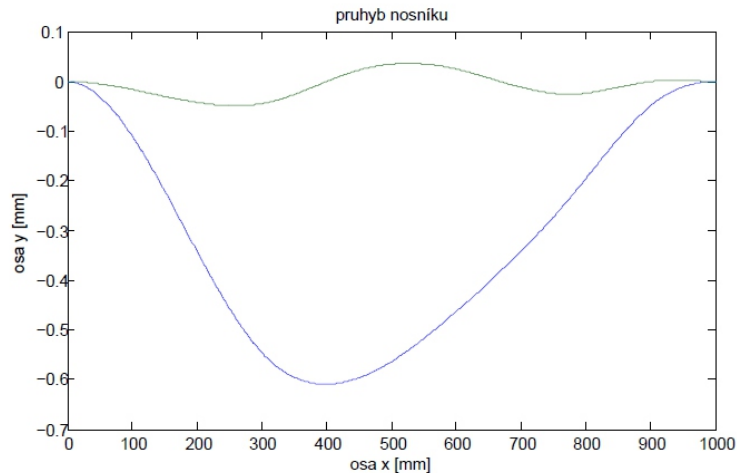


Obrázek 6.3: Modrá křivka znázorňuje průhyb nosníku bez podpory, zelená křivka znázorňuje nosník s ideální podpěrou.

Úloha č.3

Určete optimální podepření nosníku zatíženého silami: $F_1 = 900$ N, $F_2 = -100$ N, $F_3 = -250$ N, $F_4 = 600$ N, $F_5 = -800$ N, působícími v místech $x_1 = 300$ mm, $x_2 = 420$ mm, $x_3 = 598$ mm, $x_4 = 780$ mm a $x_5 = 911$ mm mají-li nosník podírat tři podpory s těmito omezeními $F_{p_1} \in \langle -400, 400 \rangle$ N, $F_{p_2} \in \langle -300, 300 \rangle$ N, $F_{p_3} \in \langle -500, 100 \rangle$ N, $x_{p_1} \in \langle 200, 390 \rangle$ mm, $x_{p_2} \in \langle 450, 550 \rangle$ mm a $x_{p_3} \in \langle 650, 800 \rangle$ mm.

Pomocí modelu byly určeny následující parametry podpěr: $F_{p_1} = 399,9981$ N, $F_{p_2} = 299,9958$ N, $F_{p_3} = -71,8879$ N, $x_{p_1} = 280,5$ mm, $x_{p_2} = 450,0014$ mm a $x_{p_3} = 650,1007$ mm, pro hodnotu účelové funkce $0,6498$ mm². Průhyby podepřeného a nepodepřeného nosníku jsou znázorněny na obr. 6.3.



Obrázek 6.4: Modrá křivka znázorňuje průhyb nosníku bez podpory, zelená křivka znázorňuje nosník s ideální podpěrou.

7. Závěr

V bakalářské práci jsme řešili optimální volbu podpěr zatíženého nosníku obdélníkového průřezu metodami konvexní optimalizace. Při volbě charakteristik podpěr bylo dáno přibližné umístění a povolený rozsah působících sil v podpěrách. Matematicky byl průhyb nosníku vyjádřen soustavou rovnic a obyčejnou diferenciální rovnicí druhého řádu. Diferenciální rovnici popisující průhyb nosníku jsme řešili diskretizací metodou konečných diferencí. Účelovou funkci jsme formulovali ve formě součtu druhých mocnin odchylek vychýlení střednice nosníku od nezatíženého stavu. Optimalizace průhybu nosníku bylo docíleno volbou počtu podpěr, jejich umístění a intenzitou sil v nich působících. Úloha byla řešena v programu MATLAB pomocí integrované funkce FMINCON využívající metodu vnitřního bodu.

Literatura

- [1] BAZARAA, M. et al.: *Nonlinear programming theory and algorithms*. New Jersey, John Wiley & Sons , 2006. ISBN 978-0-471-48600-8.
- [2] BOYD, S., VANDENBERGHE, L.: *Convex Optimization*. New York, Cambridge University Press, 2009. ISBN 978-0-521-83378-3.
- [3] ČERMÁK, J., ŽENÍŠEK, A.: *Matematika III*. Brno, CERM, 2006. ISBN 80-214-3261-6.
- [4] ČERMÁK, L.: *Numerické metody II*. Brno, CERM, 2010. ISBN 978-80-214-4110-1.
- [5] Documentation Center. Mathworks [online]. [cit. 2013-05-23]. Dostupné z: <http://www.mathworks.com/help/matlab/>
- [6] JANÍČEK, P. a kol.: *Pružnost a Pevnost I*. Praha, SNTL, 1985.
- [7] KLAPKA, J. a kol.: *Metody operačního výzkumu*. 2. vyd., Brno, VUT, 2000.

Seznam použitých zkratek a symbolů

ODR	obyčejné diferenciální rovnice
PP	pružnost a pevnost
VVÚ	výsledné vnitřní účinky

Seznam příloh

CD s matematickým modelem úlohy v programu MATLAB.

Zdrojový kód modelu

```

clc;clear;clc;
a=15;
b=25;
l=1000;
E=210*10^3;
Sily=[900;-100;-250;600;-800];
XSil=[300;420;598;780;911];

n=1000;
h=l/n;
x=linspace(0,l,n+1);
K=(1/h^2)*full(gallery('tridiag',n-1,1,-2,1));

Sil=[0;0;0];
X=[250;500;780];
W=[Sil;X];
DolOmez=[-400;-300;-500;200;450;650];
HorOmez=[400;300;100;390;550;800];

options = optimset('Algorithm','interior-point');
[Rozm S] = fmincon(@(W)MojeFce3a(W,K,Sily,XSil,l,n,a,b,E),W,[],[],[],[],[],DolOmez,HorOmez,[],options)

Sila=0;
Rozm1=Rozm(1:(length(Rozm)/2));
Poz=Rozm((length(Rozm)/2)+1:length(Rozm));
for i=1:length(Rozm)/2
    cW1(i)=l*Poz(i)- power(1,2)/2 - power(Poz(i),2)/2;
    cW2(i)=Poz(i)*power(1,2)/2 - power(1,3)/3 - power(Poz(i),3)/6;
    Sila=Sila+Rozm1(i);
end
Zatizeni=0;
for i = 1:length(Sily)
    c1(i)=l*XSil(i)- power(1,2)/2 - power(XSil(i),2)/2;
    c2(i)=XSil(i)*power(1,2)/2 - power(1,3)/3 - power(XSil(i),3)/6;
    Zatizeni=Zatizeni+Sily(i);
end
P=[1 1 0 0; 0 1 1 -1; -power(1,2)/2 0 1 0;
    -power(1,3)/3 0 power(1,2)/2 0];
r1=[Zatizeni; Sily'*XSil;c1*Sily;c2*Sily];

```

LITERATURA

```
r2=[Zatizeni-Sila; Sily'*XSil-Rozm1'*Poz;
    c1*Sily-Rozm1'*cW1';c2*Sily-Rozm1'*cW2'];
F1=P\r1;
F2=P\r2;

for i = 1: n+1
    M1(i)=-F1(1)*x(i)+F1(3);
    M2(i)=-F2(1)*x(i)+F2(3);
end
for j = 1:length(Sily)
    for i = (XSil(j)/h)+1: n+1
        M1(i)=M1(i)+Sily(j)*(x(i)-XSil(j));
        M2(i)=M2(i)+Sily(j)*(x(i)-XSil(j));
    end
end;
for j = 1:length(Rozm)/2
    for i = round(Poz(j)/h)+1: n+1
        M2(i)=M2(i)-Rozm(j)*(x(i)-Rozm((length(Rozm)/2)+j));
    end
end
Z2=-M2(2:n)';
U2=K\Z2;
Z1=-M1(2:n)';
U1=K\Z1;
U1=[0;U1;0];
U2=[0;U2;0];
U1=(12/(E*a*b^3))*U1;
U2=(12/(E*a*b^3))*U2;
plot(x,U1,x,U2);
title('pruhyb nosníku');
xlabel('osa x [mm]');
ylabel('osa y [mm]');
```

Zdrojový kód účelové funkce

```
function f = myfun(X,K,Sily,XSil,l,n,a,b,E)
Sila=0;
W=X(1:(length(X)/2));
Poz=X((length(X)/2)+1:length(X));
for i=1:length(Poz)
    cW1(i)=l*Poz(i)- power(1,2)/2 - power(Poz(i),2)/2;
    cW2(i)=Poz(i)*power(1,2)/2 - power(1,3)/3 - power(Poz(i),3)/6;
    Sila=Sila+W(i);
end
Zatizeni=0;
for i = 1:length(XSil)
    c1(i)=l*XSil(i)- power(1,2)/2 - power(XSil(i),2)/2;
```

```

    c2(i)=XSil(i)*power(1,2)/2 - power(1,3)/3 - power(XSil(i),3)/6;
    Zatizeni=Zatizeni+Sily(i);
end
P=[1 1 0 0; 0 1 1 -1; -power(1,2)/2 0 1 0;
   -power(1,3)/3 0 power(1,2)/2 0];
r=[Zatizeni-Sila; Sily'*XSil-W'*Poz ;
   c1*Sily-cW1*W ; c2*Sily-cW2*W];
F=P\r;
h=1/n;
x=linspace(0,1,n+1);
for i = 1: n+1
    M(i)=-F(1)*x(i)+F(3);
end
for j = 1:length(XSil)
    for i = (XSil(j)/h)+1: n+1
        M(i)=M(i)+Sily(j)*(x(i)-XSil(j));
    end
end;
for j = 1:length(X)/2
    for i = round(Poz(j)/h)+1: n+1
        M(i)=M(i)-W(j)*(x(i)-Poz(j));
    end
end
end
Z=-M(2:n)';
U=K\Z;
U=(12/(E*a*b^3))*U;
f = U'*U;
end

```