



# VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

## FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

## ÚSTAV MATEMATIKY

INSTITUTE OF MATHEMATICS

# ÚLOHY O PRONÁSLEDOVÁNÍ: ZÁKLADNÍ MODELY A JEJICH ANALÝZA

PURSUIT PROBLEMS: BASIC MODELS AND THEIR ANALYSIS

## BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

### AUTOR PRÁCE

AUTHOR

TOMÁŠ NEUGEBAUER

### VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

prof. RNDr. JAN ČERMÁK, CSc.

BRNO 2021



# Zadání bakalářské práce

Ústav:	Ústav matematiky
Student:	<b>Tomáš Neugebauer</b>
Studijní program:	Aplikované vědy v inženýrství
Studijní obor:	Matematické inženýrství
Vedoucí práce:	<b>prof. RNDr. Jan Čermák, CSc.</b>
Akademický rok:	2020/21

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

## Úlohy o pronásledování: základní modely a jejich analýza

### **Stručná charakteristika problematiky úkolu:**

Úlohy o pronásledování patří mezi nejvýznamnější (byť nepříliš často zmiňované) aplikace diferenciálních rovnic. Zahrnují široké spektrum úloh počínaje klasickým problémem Pierre Bouguera o pirátském pronásledování obchodní lodi až po složité problémy současné letecké dynamiky.

### **Cíle bakalářské práce:**

1. Sestavení dynamických modelů vybraných úloh o pronásledování.
2. Analýza pronásledovacích křivek reprezentujících příslušná řešení.
3. Diskuse strategie pronásledujícího i pronásledovaného objektu.

### **Seznam doporučené literatury:**

NAHIN, P.J. The Mathematics of Pursuit and Evasion, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 2007.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2020/21

V Brně, dne

L. S.

---

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc.  
ředitel ústavu

---

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.  
děkan fakulty

## **Abstrakt**

Tato práce se zabývá sestavením modelů a analýzou základních úloh o pronásledování. Konkrétně je zde obsažena Perraultova úloha, Bouguerova úloha, Hathawayova úloha, úloha o hlemýždi na popruhu a Baileyho úloha. Všechny úlohy jsou opatřeny analytickým nebo numerickým řešením, včetně kvalitativní analýzy.

## **Summary**

This thesis is focused on creation of mathematical models and analysis of basic pursuit problems. In particular, the Perrault's problem, the Bouguer's problem, the Hathaway's problem, the snail-racehorse problem and the Bailey's problem are involved. Each of the problems is solved analytically or numerically, including qualitative analysis.

## **Klíčová slova**

Úlohy o pronásledování, diferenciální rovnice, ryzí pronásledování, matematický model

## **Keywords**

Pursuit problems, differential equations, pure pursuit, mathematical model

NEUGEBAUER, T. *Úlohy o pronásledování: základní modely a jejich analýza*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2021. 51 s. Vedoucí prof. RNDr. Jan Čermák, CSc.



Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci *Úlohy o pronásledování: základní model a jejich analýzy* vypracoval samostatně pod vedením prof. RNDr. Jana Čermáka, CSc. s použitím materiálů uvedených v seznamu literatury.

Tomáš Neugebauer





Na tomto místě bych chtěl poděkovat prof. RNDr. Janu Čermákovi, CSc. za odborné vedení mé práce ve velmi obtížné době, ochotu zodpovídat mé dotazy a za cenné rady. Dále bych chtěl poděkovat za podporu mé Elišce a mé rodině.

Tomáš Neugebauer



# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Perraultova úloha</b>	<b>5</b>
2.1	Tractrix . . . . .	5
2.1.1	Zadání úlohy . . . . .	5
2.1.2	Sestavení modelu a jeho řešení . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Bouguerova úloha</b>	<b>9</b>
3.1	Originální úloha . . . . .	9
3.1.1	Zadání úlohy . . . . .	9
3.1.2	Sestavení modelu . . . . .	9
3.1.3	Řešení . . . . .	10
3.1.4	Diskuze . . . . .	12
3.2	Dvě pronásledující lodě . . . . .	14
3.2.1	Zadání rozšířené úlohy . . . . .	14
3.2.2	Řešení úlohy a diskuze . . . . .	14
<b>4</b>	<b>Pronásledování po kružnici</b>	<b>17</b>
4.1	Hathawayova úloha . . . . .	17
4.1.1	Zadání úlohy . . . . .	17
4.1.2	Sestavení modelu . . . . .	17
4.1.3	Analýza modelu . . . . .	19
4.1.4	Řešení rovnice . . . . .	21
4.2	Alternativní pronásledovací strategie . . . . .	24
4.2.1	Zadání upravené úlohy . . . . .	24
4.2.2	Sestavení modelu . . . . .	24
4.2.3	Řešení rovnice . . . . .	24
4.2.4	Diskuze . . . . .	25
<b>5</b>	<b>Hlemýžď na popruhu</b>	<b>29</b>
5.1	Konstantní rychlost popruhu . . . . .	29
5.1.1	Zadání úlohy . . . . .	29
5.1.2	Sestavení modelu . . . . .	29
5.1.3	Řešení . . . . .	30
5.1.4	Analýza modelu . . . . .	31
5.2	Nekonstantní rychlost popruhu . . . . .	31
5.2.1	Zadání a řešení upravené úlohy . . . . .	31
5.2.2	Analýza upraveného modelu . . . . .	35

<b>6</b>	<b>Úniková strategie</b>	<b>37</b>
6.1	Úloha o kočce a myši . . . . .	37
6.1.1	Zadání úlohy . . . . .	37
6.1.2	Sestavení modelu . . . . .	37
6.1.3	Analýza modelu . . . . .	40
6.1.4	Komentáře k publikovaným řešením . . . . .	41
6.1.5	Řešení rovnic . . . . .	43
<b>7</b>	<b>Závěr</b>	<b>49</b>

# Kapitola 1

## Úvod

Úlohy o pronásledování jsou velmi důležitou, byť poměrně málo zmiňovanou aplikací diferenciálních rovnic. Ze své podstaty jsou tyto problémy s lidstvem od nepaměti, pouze se dle doby mění interpretace problému. Jedná se o systémy, které typicky popisují situaci, kdy máme pronásledovaného a pronásledujícího, přičemž diferenciální rovnice nám dávají informaci o trajektoriích těchto dvou subjektů a také dávají odpověď na otázku, zda k dostižení dojde nebo ne. Velmi důležitým pojmem pro celou práci je princip tzv. *pure pursuit*, což bychom nejlépe přeložili jako ryzí pronásledování. Jedná se o nejprostší pronásledovací strategii, kdy pronásledující míří v každém okamžiku přímo na pronásledovaného.

V této práci se budeme zabývat odvozením a analýzou základních pronásledovacích modelů. Ve většině úloh bude předepsána trajektorie jednoho ze dříve zmíněných subjektů a bude nás zajímat po jaké trajektorii se pohybuje druhý subjekt, případně za jakých podmínek dojde k dostižení a v jakém čase k dostižení dojde.

Práce je členěna do pěti odborných kapitol, přičemž každá kapitola se zabývá jedním konkrétním modelem. Součástí každé kapitoly je sestavení modelu a diskuze, kde jsou popsány důležité vlastnosti modelu. U modelů, které to umožňují, je uvedeno přesné řešení. Pokud není možné nalezení analytického řešení obsahuje kapitola, alespoň řešení numerické s případnou podporou kvalitativního vyšetřování řešení. Úvodní úlohou v kapitole druhé je Perraultův problém, jehož řešením je známá křivka *tractrix*. Tato úloha je zvolena jako úvodní kvůli historické návaznosti a také proto, že se jedná o jednoduchou úlohu, která se dobře hodí na demonstraci sestavení pronásledovacího modelu, který je v dalších případech komplikovanější. V kapitole třetí následuje Bouguerova úloha, která se obecně považuje za první úlohu o pronásledování vůbec. Kromě klasické úlohy zde zmíníme i jisté rozšíření, kdy budeme uvažovat dva konkurenční pronásledující objekty. V kapitole čtvrté je uvedena analogie Bouguerovy úlohy, kdy uvažujeme, že se pronásledovaný objekt pohybuje po kružnici. Model je v této kapitole sestaven pro dvě varianty. V první variantě uplatňuje pronásledující princip ryzího pronásledování a ve druhé využívá alternativní strategii. Obsahem páté kapitoly je problém pohybu hlemýžďe na ujíždějícím popruhu. Tento problém se od předešlých úloh liší tím, že nás nezajímají trajektorie daných objektů (ty jsou v podstatě známy ze zadání), ale zajímá nás pouze, zda k dostižení dojde či ne. Kromě klasického modelu, kde uvažujeme konstantní rychlost volného konce popruhu, je zde analyzována i varianta, kdy se volný konec popruhu vzdaluje hlemýžďi s konstantním zrychlením. Poslední úlohou diskutovanou v šesté kapitole je tzv. Baileyho úloha, kdy hledáme strategii pronásledovaného tak, aby byl po celou dobu před pronásledujícím skryt za optickou překážkou.



# Kapitola 2

## Perraultova úloha

### 2.1 Tractrix

Jako první úlohu uvedeme úlohu o křivce zvané *tractrix*. Nejedná se o standardní úlohu o pronásledování, nicméně s tímto tématem úzce souvisí. Historie této úlohy sahá do druhé poloviny sedmnáctého století. Gottfried Leibnitz v roce 1693 vzpomínal na událost, kdy ho francouzský fyzik Claude Perrault během jeho studií v Paříži konfrontoval s jistým problémem. Perrault sám nedokázal tento problém vyřešit, stejně jako ho nedokázal vyřešit nikdo z matematiků, kterým ho předložil (údajně ani Pierre de Fermat si s ním neporadil). Ukázalo se, že Isaac Newton tuto úlohu nezávisle na Perraultovi vyřešil mnohem dříve a je tak spolu s nizozemským matematikem Christiaanem Huygensem brán jako hlavní autor řešení této úlohy (Huygens pojmenoval výslednou křivku trajektorie). Řešení tohoto problému je možné najít také v [4].

#### 2.1.1 Zadání úlohy

Představme si kapesní řetízkové hodinky s řetízkem délky  $L$ , které jsou položeny na stole. Řetízek je napnutý, s hranou stolu svírá pravý úhel a jeho volný konec na této hraně leží. V jistý moment začneme volný konec řetízku táhnout podél hrany stolu. Jakou křivku opíše při svém pohybu ciferník?

#### 2.1.2 Sestavení modelu a jeho řešení

Nejprve si zavedme souřadný systém. Za osu  $x$  zvolme hranu stolu, přičemž kladný směr je určen pohybem řetízku. Osu  $y$  určíme jako přímkou určenou počáteční polohou řetízku. Předpokládáme přitom, že poloha ciferníku na počátku děje se nachází v bodě  $[0, a]$ , kde  $a = L$ . Podobně poloha volného konce řetízku na začátku děje je popsána souřadnicemi  $[0, 0]$ .

V libovolném čase  $t \geq 0$  se ciferník nachází v bodě  $[x, y]$ , přičemž řetízek je tečnou ke křivce (kterou ciferník při své cestě opisuje) v bodě  $[x, y]$ . Tato tečna má rovnici

$$y = k_t x + b, \quad k_t = y'. \quad (2.1)$$

Víme, že v tom stejném čase  $t$  se konec řetízku nachází někde na ose  $x$ , označme tuto polohu  $x_i$ . Je zřejmé, že tečna určená rovnicí (2.1) musí protínat osu  $x$  v bodě  $x_i$ . Z toho plyne

$$b = -y'x_i,$$

takže můžeme rovnici (2.1) přepsat na tvar

$$y = y'x - y'x_i = y'(x - x_i). \quad (2.2)$$

Dále z Pythagorovy věty plyne

$$(x - x_i)^2 + y^2 = a^2.$$

Člen  $(x - x_i)$  si můžeme vyjádřit z (2.2). Dosadíme-li toto vyjádření do předchozí rovnice, dostáváme

$$\left(\frac{y}{y'}\right)^2 + y^2 = a^2 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{y}{y'}\right)^2 = a^2 - y^2.$$

Vzhledem k tomu, že hodnota  $y$  je kladná, zatímco hodnota  $y'$  je záporná, z předcházející rovnosti vyplývá

$$\frac{y}{y'} = -\sqrt{a^2 - y^2}.$$

Tím jsme odvodili výslednou rovnici, která je rovnicí se separovanými proměnnými a lze ji převést na diferenciální tvar

$$dx + dy \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y} = 0.$$

Integrace prvního členu je triviální. Zaměříme se na člen druhý. Nejprve zavedme substituci  $y = a \sin u$ . Po úpravě diferenciálů můžeme psát integrál pro druhý člen jako

$$a \int \frac{\cos^2 u}{\sin u} du.$$

Zavedeme další substituci  $\cos u = t$ . Po několika úpravách lze dojít ke tvaru

$$a \int 1 dt + \frac{a}{2} \int \left( \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right) dt.$$

Nyní již můžeme tento výraz zintegrovat. Po dosazení ze substitucí a několika úpravách dostáváme

$$\sqrt{a^2 - y^2} - a \ln \left( \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} \right) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

(specifikaci číselného oboru, z něhož obecnou konstantu  $C$  uvažujeme, nebudeme v dalším textu již uvádět). Nyní můžeme dosadit takto zintegrovaný člen zpět do rovnice:

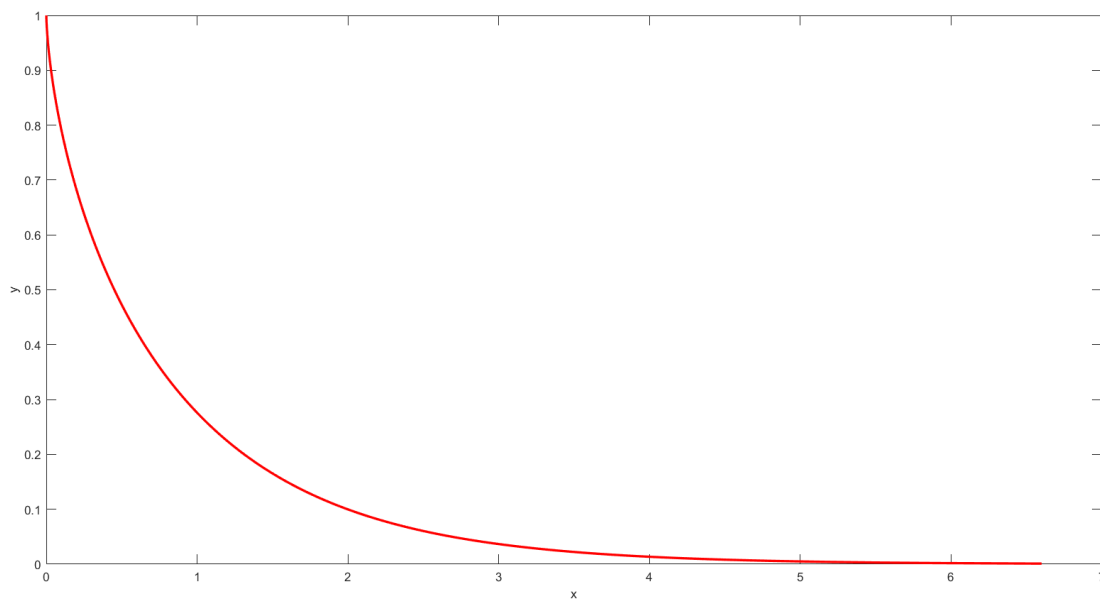
$$x + \sqrt{a^2 - y^2} - a \ln \left( \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} \right) = C.$$

Dosazením počáteční podmínky  $y(0) = a$  dostáváme  $C = 0$  a můžeme tedy psát výslednou rovnici trajektorie

$$x(y) = a \ln \left( \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} \right) - \sqrt{a^2 - y^2}, \quad y \in (0, a),$$

která je zobrazena na obrázku 2.1.



Obrázek 2.1: Tractrix pro  $a = 1$



# Kapitola 3

## Bouguerova úloha

### 3.1 Originální úloha

Za otce moderní analýzy úloh o pronásledování můžeme považovat francouzského geofyzika, astronoma a matematika Pierra Bouguera (1698 - 1758), který v roce 1732 prezentoval úlohu modelující situaci pronásledování obchodní lodi piráty. Řešení úlohy lze najít v mnoha publikacích, zmiňme např. [4].

#### 3.1.1 Zadání úlohy

Znění této úlohy je následující. Obchodní loď pluje konstantní rychlostí  $v_o$  po přímce. V blízkosti se nachází pirátská loď. V čase  $t_0 = 0$  projíždí obchodní loď kolem pirátů (v čase  $t_0$  je spojnice polohy obchodní lodi a pirátů kolmá na trajektorii obchodní lodi). Ti ji v tento moment zaregistrují a zahájí své pronásledování, přičemž si počínají tak, že v libovolný moment míří přímo na obchodní loď (jejich strategie je tzv. ryzí pronásledování).

#### 3.1.2 Sestavení modelu

Nejprve si zavedme souřadný systém. Za počátek si zvolme polohu pirátské lodi v čase  $t_0$ . Osa  $x$  je tvořena spojnicí polohy obou lodí na začátku pronásledování, přičemž předpokládejme, že obchodní loď se nachází na její kladné části a osa  $y$  je tvořena rovnoběžkou s trajektorií obchodní lodi, přičemž směr pohybu lodi určuje kladný směr osy  $y$ . Platí tedy, že v čase  $t_0$  se obchodní loď nachází v bodě  $[x_0, 0]$ , kde  $x_0$  je počáteční vzdálenost mezi piráty a obchodníky.

K sestavení rovnice využijeme toho, že dráhu, kterou urazila pirátská loď za čas  $t$ , můžeme vyjádřit dvojnásobným způsobem. Jelikož se loď pohybuje konstantní rychlostí  $v_p$ , ze zákonů klasické mechaniky plyne, že v čase  $t$  urazí pirátská loď dráhu

$$s = v_p \cdot t.$$

V čase  $t$  se pirátská loď nachází v bodě  $[x, y(x)]$ , z toho můžeme určit dráhu, kterou loď urazila, jako délku příslušného oblouku, tedy

$$s = \int_0^x \sqrt{1 + (y'(z))^2} dz.$$

Porovnáním těchto dvou vztahů dostáváme

$$v_p \cdot t = \int_0^x \sqrt{1 + (y'(z))^2} dz. \quad (3.1.1)$$

Nyní je potřeba najít vyjádření pro čas  $t$ . V tento moment vstupuje do hry strategie, se kterou piráti pronásledují svou kořist, jelikož dle zadání v libovolný moment směřují přímo na obchodní loď. Z toho vyvodíme, že směrnice tečny k trajektorii musí být shodná s tangentou úhlu spojnice polohy pirátů  $[x, y]$  a obchodní lodi  $[x_0, v_o \cdot t]$  s osou  $x$ . To nás opravňuje napsat následující rovnost

$$y' = \frac{v_o \cdot t - y}{x_0 - x} = \frac{y - v_o \cdot t}{x - x_0}. \quad (3.1.2)$$

Z tohoto vztahu už si stačí pouze vyjádřit čas  $t$  jako

$$t = \frac{y - y' \cdot (x - x_0)}{v_o}.$$

Dosazením do (3.1.1) dostáváme

$$\frac{v_p}{v_o} \cdot [y - y' \cdot (x - x_0)] = \int_0^x \sqrt{1 + (y'(z))^2} dz.$$

Nyní celou rovnici zderivujeme podle  $x$ , abychom se zbavili integrálu na pravé straně. Dostaneme

$$\frac{v_p}{v_o} \cdot [y' - y'' \cdot (x - x_0) - y'] = \sqrt{1 + (y')^2},$$

což můžeme přepsat na tvar

$$y'' \cdot (x - x_0) = -\frac{v_o}{v_p} \cdot \sqrt{1 + (y')^2}.$$

### 3.1.3 Řešení

Rovnice, kterou jsme obdrželi, je nelineární obyčejná diferenciální rovnice druhého řádu, což může vypadat jako problém, neboť takovéto úlohy neumíme obecně řešit. My si zde pomůžeme substitucí  $y'(x) = p(x)$ , čímž dostaneme rovnici prvního řádu se separovanými proměnnými, přičemž námi hledanou funkci  $y$  dostaneme následně prostou integrací řešení této rovnice. Máme tedy

$$\frac{dp}{dx} \cdot (x - x_0) = -\frac{v_o}{v_p} \cdot \sqrt{1 + p^2}.$$

Nyní pro snadnější manipulaci s rovnicí označme konstantu  $\frac{v_o}{v_p}$  jako  $k$  (ze zřejmých důvodů budeme nadále předpokládat  $k \leq 1$ ) a provedme separaci proměnných

$$\frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}} = k \cdot \frac{dx}{x_0 - x}.$$

Integrací rovnice, na jejíž levé straně využíváme substituci  $p = \sinh u$ , dostáváme

$$u + \ln C = -k \cdot \ln(x_0 - x)$$

Pro určení integrační konstanty  $C$  je třeba znát počáteční podmínky. Ty ze zadání úlohy plynou vcelku jasně, neboť v bodě  $[0, 0]$  má zcela jistě tečna k trajektorii pirátské lodi nulovou směrnici a tedy splývá s osou  $x$ , neboť v tomto okamžiku se obchodní loď nachází v bodě  $[x_0, 0]$  a dle zadání piráti směřují v každém bodě své trajektorie přímo na ni. Dostáváme tedy počáteční podmínku  $y'(0) = p(0) = 0 \Rightarrow u = 0$ . Z toho vyplývá

$$C = x_0^{-k}.$$

Můžeme tedy psát

$$u = \ln \left( \frac{x_0}{x_0 - x} \right)^k.$$

Jelikož  $p = \sinh u$  platí

$$p = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{x_0}{x_0 - x} \right)^k - \left( \frac{x_0 - x}{x_0} \right)^k \right].$$

Nyní předpokládejme  $k < 1$ . Z takto upravené rovnice už snadno jednoduchou integrací dostaneme hledanou funkci  $y$  jako

$$y + C = \frac{x_0 - x}{2} \left[ \frac{\left(1 - \frac{x}{x_0}\right)^k}{1 + k} - \frac{\left(1 - \frac{x}{x_0}\right)^{-k}}{1 - k} \right] \quad (3.1.3)$$

(graf této křivky při  $k = 0.5$  a  $x_0 = 5$  je znázorněn na obrázku 3.1). Nyní opět určíme integrační konstantu  $C$ . Stejně jako v minulém kroku nám počáteční podmínky plynou ze zadání, neboť funkce  $y$  popisuje trajektorii pirátské lodi, musí na ní tedy ležet všechny body, ve kterých se pirátská loď během pronásledování nacházela, tedy i bod, ze kterého pronásledování zahájila. Víme tedy, že v bodě  $x = 0$  platí  $y = 0$ . Odtud dostaneme

$$C = \frac{x_0}{2} \left[ \frac{1}{1 + k} - \frac{1}{1 - k} \right] = -\frac{x_0 \cdot k}{1 - k^2}.$$

Partikulárním řešením naší počáteční úlohy je tedy funkce

$$y(x) = \frac{x_0 \cdot k}{1 - k^2} + \frac{x_0 - x}{2} \left[ \frac{\left(1 - \frac{x}{x_0}\right)^k}{1 + k} - \frac{\left(1 - \frac{x}{x_0}\right)^{-k}}{1 - k} \right], \quad x \in \langle 0, x_0 \rangle. \quad (3.1.4)$$

Nyní necht'  $k = 1$ . Integrací rovnice

$$p = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \left( \frac{x_0}{x_0 - x} - \frac{x_0 - x}{x_0} \right)$$

dostáváme

$$y + C = \frac{1}{2} \left[ \frac{(x_0 - x)^2}{2x_0} - x_0 \cdot \ln(x_0 - x) \right].$$

Počáteční podmínka je stejná jako v případě  $k < 1$ , platí tedy

$$C = \frac{x_0}{4} (1 - 2 \ln x_0).$$

V tomto případě je námi hledané partikulární řešení tvaru

$$y(x) = \frac{1}{2} \left[ \frac{(x_0 - x)^2}{2x_0} - x_0 \cdot \ln(x_0 - x) \right] - \frac{x_0}{4} (1 - 2 \ln x_0), \quad x \in \langle 0, x_0 \rangle. \quad (3.1.5)$$

Ještě zmiňme, že nalezené řešení odpovídá intuitivní představě, jelikož přímka  $x = x_0$  je asymptotou takovéto funkce  $y$ , a tedy funkce  $y$  neprotíná trajektorii obchodní lodi.

### 3.1.4 Diskuze

Nyní provedeme některé dodatečné úvahy v závislosti na hodnotě konstanty  $k$ , kterou jsme si zavedli jako  $\frac{v_o}{v_p}$ . Je zřejmé, že případ, kdy  $k > 1$ , nemá cenu příliš diskutovat, protože v tomto případě se pohybuje obchodní loď vyšší rychlostí než piráti, a ti ji tedy nikdy nemohou dostihnout.

Uvažujme nyní  $k < 1$  a zabývejme se otázkou, jakou dráhu urazí piráti a obchodní loď do místa dostižení. Především zdůrazněme, že v tomto případě zcela jistě piráti svou kořist dostihnou, a to přesně v bodě  $[x_0, y(x_0)] = [x_0, \frac{x_0 \cdot k}{1-k^2}]$ . Vzhledem k trajektorii obchodní lodi tedy víme, že urazila dráhu  $s_o = \frac{x_0 \cdot k}{1-k^2}$ . Známe rovněž rychlost  $v_o$ , která je konstantní, a tak si můžeme dle známého vzorce vypočítat celkový čas pronásledování jako

$$T = \frac{s_o}{v_o} = \frac{x_0}{v_p(1-k^2)}. \quad (3.1.6)$$

Známe-li čas pronásledování, můžeme bez nutnosti integrace spočítat dráhu, kterou pirátská loď urazila, a to jako

$$s_p = v_p \cdot T = \frac{x_0}{1-k^2}.$$

Nyní probereme případ  $k = 1$ , tedy případ, kdy se piráti a obchodníci pohybují shodně rychle. Je zřejmé, že v tomto případě k dostižení nedojde, neboť na začátku je mezi loděmi nenulová vzdálenost. V této souvislosti je nepochybně zajímavou otázkou, na kolik se pirátské lodi podaří tuto vzdálenost zkrátit (při  $t \rightarrow \infty$ ). Vyjdeme z obecného vyjádření vzdálenosti lodí v libovolném okamžiku. Piráti mají polohu  $[x, y(x)]$  a obchodní loď má v tento okamžik polohu  $[x_0, y_o]$ ; kvadrát jejich vzdálenosti je tedy

$$d^2 = (x_0 - x)^2 + (y_o - y)^2 = (x_0 - x)^2 \cdot \left[ 1 + \left( \frac{y_o - y}{x_0 - x} \right)^2 \right].$$

Z předcházející sekce víme, že hodnota výše uvedeného zlomku je rovna  $y'$ , takže můžeme psát

$$d^2 = (x_0 - x)^2 \cdot [1 + (y')^2].$$

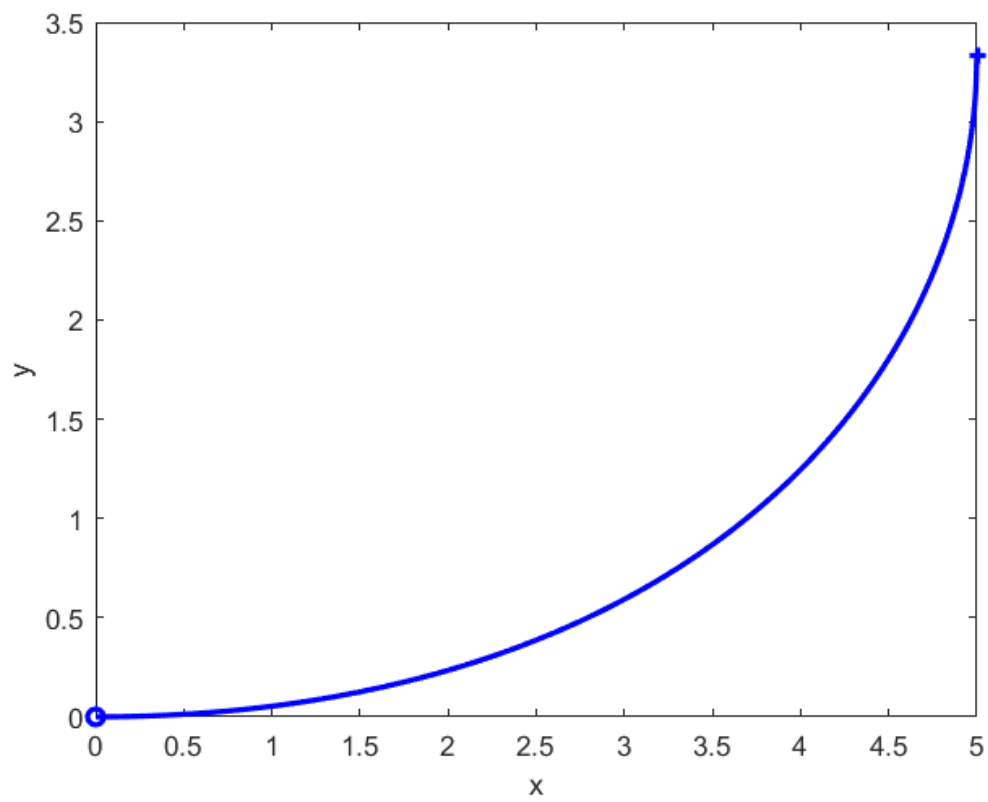
Po úpravě výrazu a užitím (3.1.5) dostáváme

$$d^2 = (x_0 - x)^2 \cdot \left[ 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{x_0}{x_0 - x} - \frac{x_0 - x}{x_0} \right)^2 \right] = (x_0 - x)^2 \cdot \left[ \frac{x_0^2}{(x_0 - x)^2} + \frac{(x_0 - x)^2}{x_0^2} + \frac{1}{2} \right].$$

Při  $t \rightarrow \infty$  se kvadrát vzdálenosti, kterou budou lodě mít mezi sebou, tedy blíží hodnotě

$$\lim_{x \rightarrow x_0} d^2 = \frac{x_0^2}{4}.$$

Limitní vzdálenost mezi oběma loděmi tedy bude  $x_0/2$  (jinak vyjádřeno, pirátům se podaří při  $t \rightarrow \infty$  zkrátit původní vzdálenost na polovinu).



Obrázek 3.1: Pronásledovací křivka pro  $k = 0.5$  a  $x_0 = 5$ .

## 3.2 Dvě pronásledující lodě

### 3.2.1 Zadání rozšířené úlohy

Nyní, když známe řešení původní Bouguerovy úlohy, využijme této znalosti při řešení následujícího rozšíření. V [4] je uveden jistý rozšířený problém se sokolem a orlem, který je v podstatě konkrétním případem úlohy, kterou si zde vyřešíme obecně. Ponecháme přitom původní interpretaci o pronásledování lodí (mírně přitom pozměníme zavedení kartézského souřadného systému).

Předpokládejme, že do pronásledování obchodní lodi se zapojí dvě konkurenční pirátské posádky  $A$  a  $B$ . Úlohu můžeme zadat zcela obecně, tj. nepožadujeme, aby byly obě pirátské lodě na počátku pronásledování na stejné úrovni (v čase  $t_0$  tedy nemusí platit, že  $y_A = y_B$ , kde  $y_A$  a  $y_B$  jsou ypsilonové souřadnice v kartézském souřadném systému, který si záhy zavedeme); zachovejme pouze předpoklad, že piráti zahájí pronásledování až v momentě, kdy obchodní loď projíždí kolem. Aby měla diskuze nad řešením smysl, uvažujme, že obě pirátské lodě se v průběhu pronásledování pohybují větší rychlostí než obchodníci, tj.  $v_A > v_o \wedge v_B > v_o$  a také, že ani jedna z lodí se nenachází na dráze obchodní lodi. Bez újmy na obecnosti řešení předpokládejme, že obchodníci neprojedou kolem lodi  $B$  dříve než kolem lodi  $A$ , která tedy zahajuje pronásledování buď dříve nebo zároveň s lodí  $B$ . Časem  $t_0$  rozumíme tedy čas, kdy své pronásledování zahájí loď  $A$ . Polohu obchodní lodi v tento okamžik budeme považovat za počátek  $[0, 0]$ , osa  $x$  je určena spojnicí počátku a polohy lodi  $A$  (loď  $A$  tedy začíná své pronásledování z bodu  $[a, 0]$ , kde  $a$  je počáteční vzdálenost obchodní lodi a lodi  $A$ ) a osa  $y$  je dána trajektorií obchodní lodi. V takto zformovaném souřadném systému má loď  $B$  obecnou polohu  $[b, s_0]$ , přičemž z našeho předpokladu, že obchodníci proplouvají nejdříve kolem lodi  $A$ , plyne, že  $s_0 \in \mathbb{R}_0^+$ . Je celkem zřejmé, že řešení Bouguerovy úlohy je zcela nezávislé na tom, zda se pronásledující nachází na kladné nebo záporné části osy  $x$  (trajektorie budou osově symetrické kolem osy  $y$ ) ve smyslu otázky dostižení a tvaru trajektorie. Můžeme proto pro jednodušší představu a práci s výrazy uvažovat pouze kladnou poloosu  $x$ , takže předpokládáme, že  $a > 0 \wedge b > 0$ .

### 3.2.2 Řešení úlohy a diskuze

Řešíme vlastně pro každou loď Bouguerovu úlohu, přičemž tato řešení jsou na sobě nezávislá (nepředpokládáme, že by se piráti vzájemně v průběhu pronásledování ovlivňovali). Se znalostí řešení Bouguerovy úlohy (3.1.4) není problém určit trajektorii lodi  $A$ . Můžeme ji zapsat ve tvaru

$$y_A(x) = \frac{a \cdot k_A}{1 - k_A^2} - \frac{x}{2} \left[ \frac{\left(\frac{a}{x}\right)^{k_A}}{1 - k_A} - \frac{\left(\frac{x}{a}\right)^{k_A}}{1 + k_A} \right],$$

kde  $k_A = \frac{v_o}{v_A}$ . Abychom určili trajektorii lodi  $B$ , je potřeba následující úvaha. Pokud ve vztahu (3.1.2) za  $t$  dosadíme čas, který uplynul od počátku pronásledování (čas, který uplynul od času  $t_0$ , kdy pronásledování zahájila posádka lodi  $A$ ), naše řešení bude platné i pro loď  $B$ . Rozdílná bude však počáteční podmínka pro  $y_B$ , kdy musíme zohlednit posun ve směru osy  $y$ . Počáteční podmínka pro loď  $B$  bude  $y(b) = s_0$ , což nám po dosazení do vztahu (3.1.3) dává

$$C_B = \frac{b \cdot k_B}{1 - k_B^2} + s_0,$$

kde je zcela analogicky  $k_B = \frac{v_o}{v_B}$ . Trajektorie lodě  $B$  je tedy popsána funkcí

$$y_B(x) = \frac{b \cdot k_B}{1 - k_B^2} + s_0 - \frac{x}{2} \left[ \frac{\left(\frac{b}{x}\right)^{k_B}}{1 - k_B} - \frac{\left(\frac{x}{b}\right)^{k_B}}{1 + k_B} \right].$$



Nyní se již můžeme podívat na vzájemný vztah těchto dvou nezávislých pronásledování. Posádky lodí  $A$  a  $B$  samozřejmě dostihnou obchodníky ve stejný moment v případě, kdy budou jejich pronásledovací časy stejné, nicméně nesmíme zapomenut, že loď  $A$  zahajuje své pronásledování dřív, a tak tuto skutečnost musíme zvyhodnit. Pro současné dostižení platí tedy vztah

$$t_B = t_A - t_{s_0},$$

kde  $t_B$  je pronásledovací čas lodi  $B$ ,  $t_A$  pronásledovací čas lodi  $A$  a  $t_{s_0}$  je čas, který uplyne od času  $t_0$  po čas, kdy své pronásledování zahajuje loď  $B$ . Čas  $t_{s_0}$  můžeme vyjádřit jako  $\frac{s_0}{v_o}$ . Dosazením vztahu (3.1.6) za pronásledovací časy  $t_A$ ,  $t_B$  a dosazením vyjádření  $t_{s_0}$  dojdeme ke vztahu

$$\frac{b}{v_B(1-k_B^2)} = \frac{a}{v_A(1-k_A^2)} - \frac{s_0}{v_o}. \quad (3.2.1)$$

Aby byl náš výsledek fyzikálně interpretovatelný, je potřeba zavést podmínku  $\frac{a}{v_A(1-k_A^2)} - \frac{s_0}{v_o} > 0$ . Samozřejmě i další možné otázky, např. za jakého předpokladu dostihne loď  $B$  obchodníky dříve než loď  $A$  atd., vychází ze stejné úvahy, jen by byla rovnost v předchozím vztahu nahrazena příslušnou nerovností.

Podívejme se, jaké by bylo řešení, pokud bychom znali rychlost obchodní lodi, polohu a rychlost pirátské lodi  $A$  (tedy známe  $a$  a  $v_A$ ), počáteční polohu lodi  $B$  (známe  $b$  a  $s_0$ ) a chtěli bychom určit rychlost  $v_B$  tak, aby posádka  $B$  dostihla obchodníky zároveň s posádkou  $A$ . Vyjdeme z odvozeného vztahu (3.2.1):

$$\begin{aligned} \frac{b}{v_B(1-k_B^2)} &= \frac{a}{v_A(1-k_A^2)} - \frac{s_0}{v_o}, \\ \frac{b}{\frac{a}{v_A(1-k_A^2)} - \frac{s_0}{v_o}} &= v_B(1-k_B^2), \\ v_B - \frac{v_o^2}{v_B} &= \frac{bv_o\left(v_A - \frac{v_o^2}{v_A}\right)}{av_o - s_0\left(v_A - \frac{v_o^2}{v_A}\right)}, \\ v_B^2 - \frac{bv_o\left(v_A - \frac{v_o^2}{v_A}\right)}{av_o - s_0\left(v_A - \frac{v_o^2}{v_A}\right)}v_B - v_o^2 &= 0. \end{aligned}$$

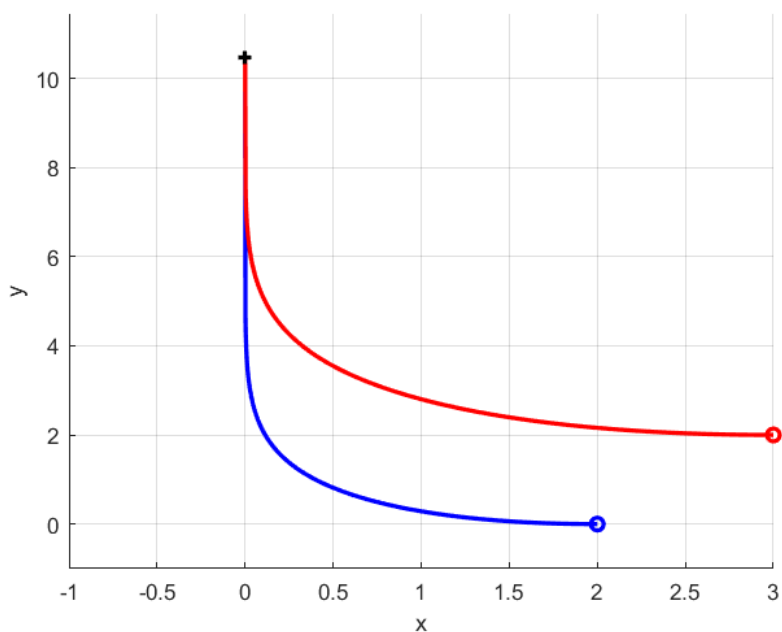
Postupnou úpravou jsme přešli ke kvadratické rovnici, kterou můžeme jednoduše vyřešit. Řešení můžeme psát ve tvaru

$$v_{B1,2} = \frac{\frac{bv_o\left(v_A - \frac{v_o^2}{v_A}\right)}{av_o - s_0\left(v_A - \frac{v_o^2}{v_A}\right)} \pm \sqrt{\left(\frac{bv_o\left(v_A - \frac{v_o^2}{v_A}\right)}{av_o - s_0\left(v_A - \frac{v_o^2}{v_A}\right)}\right)^2 + 4v_o^2}}{2},$$

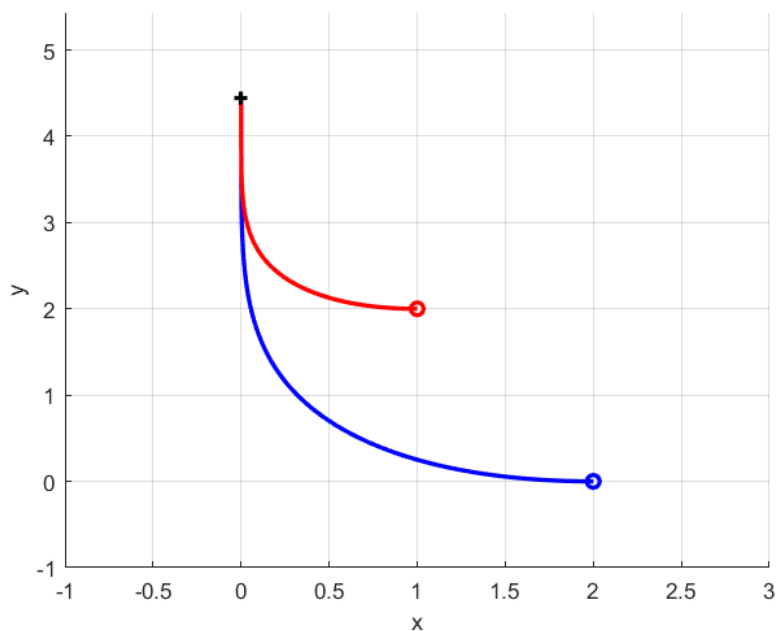
přičemž z fyzikálního hlediska má samozřejmě smysl nezáporné řešení, a tak klademe

$$v_B = \frac{\frac{bv_o\left(v_A - \frac{v_o^2}{v_A}\right)}{av_o - s_0\left(v_A - \frac{v_o^2}{v_A}\right)} + \sqrt{\left(\frac{bv_o\left(v_A - \frac{v_o^2}{v_A}\right)}{av_o - s_0\left(v_A - \frac{v_o^2}{v_A}\right)}\right)^2 + 4v_o^2}}{2}.$$

Trajektorie obou pronásledujících lodí pro různé hodnoty vstupních parametrů jsou zachyceny na obrázku 3.2. a 3.3.



Obrázek 3.2: Ukázková trajektorie pro  $v_o = 1$ ,  $v_A = 1.1$ ,  $a = 2$ ,  $b = 3$  a  $s_0 = 2$ . Dopočítaná rychlost  $v_B$  má pro tento případ hodnotu  $v_B = 1.1925$ .



Obrázek 3.3: Ukázková trajektorie pro  $v_o = 4$ ,  $v_A = 5$ ,  $a = 2$ ,  $b = 1$  a  $s_0 = 2$ . Dopočítaná rychlost  $v_B$  má pro tento případ hodnotu  $v_B = 4.901$ .

# Kapitola 4

## Pronásledování po kružnici

### 4.1 Hathawayova úloha

V případě Bouguerovy úlohy jsme uvažovali, že kořist se pohybuje konstantní rychlostí po přímce. Podívejme se nyní na zajímavou obměnu této úlohy, kdy stále uvažujeme, že se kořist pohybuje konstantní rychlostí, nicméně tentokrát bude její trajektorie kružnice. V roce 1920 přišel s tímto problémem v časopise *American Mathematical Monthly* Arthur Hathaway (1855-1934). Řešení této úlohy můžeme opět nalézt v [4], nicméně zde uvedené řešení je poměrně zdlouhavé a nepříliš efektivní proto se jej nebudeme držet. Úloha je řešena mnohem elegantněji a za daleko menšího početního úsilí v [2], a proto zde vyjdeme z tohoto textu.

#### 4.1.1 Zadání úlohy

Pes, který se nachází uprostřed kruhového rybníku, spatří v čase  $t_0 = 0$  kachnu, která plave kolem břehu rybníka, a začne ji pronásledovat. Pes (stejně jako v klasické Bouguerově úloze) pronásleduje kachnu tak, že v libovolném okamžiku míří přímo na ni. Kachna i pes plavou v rybníku konstantní rychlostí, přičemž platí, že poměr jejich rychlostí je roven konstantě  $k$ , tedy platí

$$\frac{v_p}{v_k} = k,$$

kde  $v_p$  je rychlost psa a  $v_k$  rychlost kachny.

#### 4.1.2 Sestavení modelu

##### Úvodní poznámky

Ze všeho nejdříve poznamenejme, že vhodnou volbou jednotek délky a času můžeme docílit toho, že rychlost kachny  $v_k$  bude rovna 1 a poloměr rybníku  $R$  bude rovněž 1. Tato úvaha nám zjednoduší úpravy výrazů, které budeme k analýze problému potřebovat.

Označme střed rybníku jako  $S$ . V libovolném čase  $t$  označíme  $K$  aktuální polohu kachny a  $P$  aktuální polohu psa. Nyní zavedme

$$r = |PK| \quad \text{a} \quad \phi = \angle SKP.$$

To znamená, že funkce  $r(t)$  nám udává aktuální vzdálenost psa od kachny a funkce  $\phi(t)$  nám dává informaci, jak velký úhel svírá úsečka  $\overline{PK}$  s úsečkou  $\overline{KS}$ .

### Sestavení rovnic

Nyní si je třeba uvědomit, že pes se vzhledem ke kachně pohybuje rychlostí  $v_r = -\dot{r}$ . Je totiž zřejmé, že derivací funkce, vyjadřující vzájemnou vzdálenost kořisti a lovce, podle času dostaneme rychlost. Zamysleme se ještě nad znaménkem mínus, kterým jsme rychlost opatřili. V čase  $t_0$  je mezi psem a kachnou nenulová vzdálenost, v závislosti na poměru jejich absolutních rychlostí  $k$  se tato vzdálenost může zvyšovat, či snižovat. Pokud se vzdálenost zmenšuje, znamená to, že  $r$  klesá, z čehož plyne, že derivace bude záporná. Jestliže však vzdálenost klesá, znamená to, že pes se ke kachně přibližuje a tedy jeho relativní rychlost musí být kladná, proto  $v_r = -\dot{r}$ . V opačném případě, kdy se kachna psovi vzdaluje, je situace zcela analogická, proto ji zde již rozebírat nebudeme.

Rychlost, kterou se pes pohybuje relativně ke kachně, můžeme vyjádřit i jinak. Ze zadání úlohy plyne, že pes vždy míří přímo na svou potenciální oběť, což můžeme využít k tomu, že jeho rychlost vzhledem ke kachně můžeme určit rozdílem rychlosti psa a průmětu vektoru rychlosti kachny do přímky spojující  $P$  a  $K$  (směr absolutní rychlosti kachny je v libovolném čase tečna ke kružnici). Tedy

$$v_r = v_p - v_k \cdot \sin \phi.$$

Jelikož jsme v úvodním odstavci uvedli, že vždy můžeme najít takové jednotky, aby rychlost kachny byla rovna jedné (z čehož plyne, že rychlost psa je  $k$ ) můžeme psát

$$v_r = k - \sin \phi \quad \Rightarrow \quad \dot{r} = \sin \phi - k. \quad (4.1.1)$$

Nyní označme

$$\rho = |PS|,$$

(viz obrázek 4.1). Vzdálenost  $\rho$  můžeme rovněž vyjádřit pomocí kosinové věty

$$\rho^2 = 1 + r^2 - 2r \cos \phi. \quad (4.1.2)$$

Uvědomme si přitom, že derivací  $\rho$  podle času dostaneme rychlost, kterou se pes vzdaluje od středu rybníku, tedy bodu, ze kterého zahájil své pronásledování. Alternativně můžeme tuto rychlost vyjádřit jako průmět vektoru absolutní rychlosti psa na přímku, která spojuje střed kružnice s aktuální polohou psa. Uvažujme Thaletovu kružnici  $\tau$  nad průměrem  $\overline{KS}$ . Průsečík polopřímky  $KP$  s  $\tau$  označme jako  $V$ . Pak

$$\dot{\rho} = k \cdot \sin \angle VSP = k \cdot \frac{|PV|}{\rho} = \frac{\cos \phi - r}{\rho}.$$

Zároveň derivací (4.1.2) podle času dostaneme

$$2\rho\dot{\rho} = 2r\dot{r} - 2\dot{r} \cos \phi + 2r\dot{\phi} \sin \phi. \quad (4.1.3)$$

Odtud po úpravě dostáváme

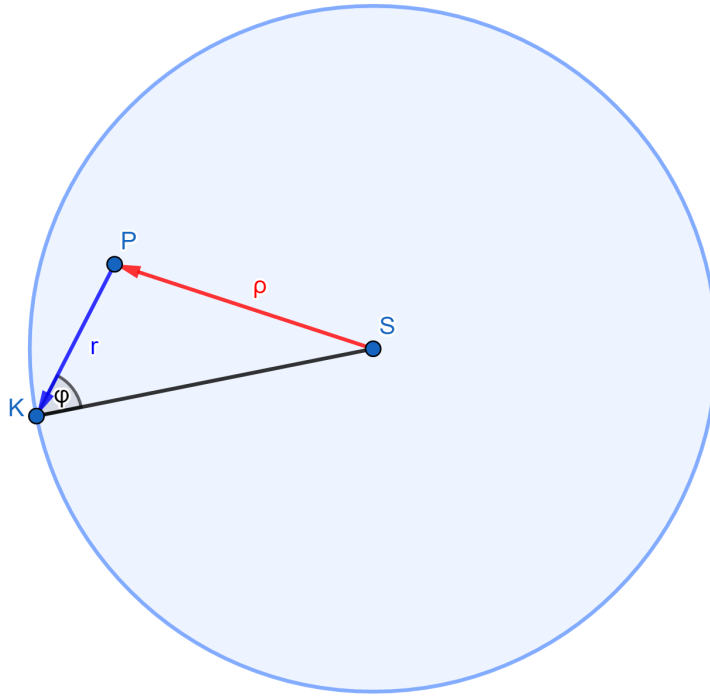
$$\rho\dot{\rho} = \dot{r}(r - \cos \phi) + r\dot{\phi} \sin \phi.$$

Z kombinace vztahů (4.1.1) a (4.1.3) plyne rovnice

$$k(\cos \phi - r) = (r - \cos \phi)(\sin \phi - k) + r\dot{\phi} \sin \phi.$$

Po úpravě máme finální tvar

$$r\dot{\phi} = \cos \phi - r. \quad (4.1.4)$$



Obrázek 4.1: Geometrie úlohy

### 4.1.3 Analýza modelu

Námi sestavená rovnice není analyticky řešitelná. To nám ovšem nebrání v tom, abychom zkoumali chování tohoto modelu. Stejně jako tomu bylo u Bougerovi úlohy, budeme nyní diskutovat vlastnosti řešení v závislosti na poměru rychlostí  $k$ .

#### Průběh pronásledování pro $k > 1$ :

Jestliže je  $k > 1$ , což znamená, že se pes pohybuje rychleji než kachna, dojde stejně jako v případě původní Bouguerovy úlohy k dostižení kořisti predátorem. Vzhledem k analytické neřešitelnosti ovšem neumíme na rozdíl od dříve diskutovaného případu určit přesný čas dostižení. Z odvozených vztahů můžeme však alespoň učinit horní odhad času pronásledování  $T$ . Protože  $k > 1$ , platí nerovnost

$$\dot{r} = \sin \phi - k \leq 1 - k < 0.$$

Vidíme, že  $\dot{r}$  je pro tento případ vždy záporná, navíc shora ohraničená konstantou  $1 - k$ , takže je jisté, že k dostižení dojde v čase  $T < \infty$ , kdy tedy platí  $r(T) = 0$ . Odhad  $T$  můžeme určit následovně:

$$-r(0) = r(T) - r(0) = \int_0^T \dot{r} dt \leq T \cdot (1 - k) \quad \Rightarrow \quad T \leq \frac{r(0)}{k - 1} = \frac{1}{k - 1}.$$

#### Průběh pronásledování pro $k = 1$ :

Ze vztahu (4.1.1) s vědomím, že  $k = 1$ , plyne

$$\dot{r} = \sin \phi - 1 \leq 0.$$

Znaménko rovnosti nastane pouze při  $\phi = \frac{\pi}{2}$ , což jak později uvedeme nastane pouze v případě dostižení. Z toho plyne, že vzdálenost  $r$  je klesající funkce pro  $\forall t \geq 0$ . Odtud můžeme vyvodit, že buď  $r(T) = 0$  pro vhodnou konečnou hodnotu  $T$ , nebo

$$\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = r^*, \quad r^* \in \mathbb{R}_0^+.$$

Jinak vyjádřeno: buď dojde k dostižení v konečném čase  $T$ , nebo při  $T = \infty$  (za předpokladu, že dokážeme  $r^* = 0$ ). Naším cílem je ukázat, že nastane druhá varianta, tedy že funkce  $r$  je stále kladná, přičemž její limita při  $t \rightarrow \infty$  má nulovou hodnotu.

Nejprve je třeba ukázat, že k dostižení nedojde. K tomu je zapotřebí několika vcelku náročných technických kroků, které jdou nad rámec této práce. Nejprve se šikovnou manipulací s (4.1.4) ukáže, že platí  $\phi = \frac{\pi}{2}$  právě tehdy když pes dostihne kachnu, a pak se sporem (využije se Lagrangeova věta o střední hodnotě) ukáže, že pro  $k = 1$  k dostižení v konečném čase nemůže dojít. Detailní odvození těchto skutečností je obsahem [2].

Ukažme ještě, že i přesto, že k dostižení nedojde v konečném čase, se pes dostane libovolně blízko ke kachně. Dá se ukázat, že  $\phi$  je od určitého okamžiku pronásledování rostoucí funkcí (odvození lze nalézt v [2]). Z toho plyne, že existuje její limita pro  $t \rightarrow T = \infty$ . Označme ji  $\phi^*$ . Předpokládejme, že  $\phi^* < \frac{\pi}{2}$ . Z toho nám s využitím (4.1.1) plyne

$$\dot{r} \leq \sin \phi^* - 1 < 0,$$

což by ovšem vedlo k tomu, že by muselo dojít k dostižení kořisti v čase  $T < \infty$ . Musí tedy platit, že  $\phi^* = \frac{\pi}{2}$ , z čehož nám ovšem plyne, že pro  $t \rightarrow \infty$  dojde k dostižení, a tedy  $\forall \epsilon > 0 \exists t_\epsilon : r(t_\epsilon) < \epsilon$ , takže pes se může přiblížit libovolně blízko kachně.

Porovnejme ještě tento výsledek s klasickou Bouguerovou úlohou. Pokud  $k = 1$ , tak v případě, kdy kořist uniká po přímce, dojde v nekonečnu ke zkrácení vzdálenosti mezi kořistí a pronásledovatelem na polovinu původní hodnoty. V případě, kdy se kořist pohybuje po kružnici, dojde pro  $k = 1$  v nekonečnu k dostižení.

### Průběh pronásledování pro $k < 1$ :

Na závěr diskutujeme případ, kdy se pes pohybuje nižší rychlostí než kachna. Lze očekávat, že v tomto případě nedojde k dostižení (prvním argumentem je fakt, že při  $k = 1$  dochází k dostižení v nekonečnu a tento případ je svým způsobem mezní, druhým argumentem je zkušenost s tímto případem z Bouguerovy úlohy).

Uvažujme nyní bod  $P_0$  na výše zavedené Thaletově kružnici  $\tau$  se specifickými souřadnicemi  $[r_0, \phi_0]$ , které jsou určeny vztahy

$$\sin \phi_0 = k, \quad r_0 = \cos \phi_0 = \sqrt{1 - k^2}. \quad (4.1.5)$$

Poslední rovnost jsme dostali dosazením prvního vztahu do vzorce pro goniometrickou jedničku. Tento bod je unikátní v tom, že pokud je pes v bodě  $P_0$ , jeho relativní poloha se vůči kachně nemění a můžeme ho tedy nazvat *stacionárním bodem*. Skutečně, vezmeme-li (4.1.1) a dosadíme  $\dot{r} = 0$ , dostáváme první rovnost z (4.1.5); stejně tak, vezmeme-li (4.1.4) a dosadíme  $\dot{\phi} = 0$ , dostáváme druhou rovnost z (4.1.5). Z toho plyne, že pokud se pes při pronásledování dostane na tyto hodnoty polárních souřadnic, bude se pohybovat po kružnici s poloměrem  $k$  se středem  $S$  a bude mít od kachny konstantní vzdálenost  $\sqrt{1 - k^2}$ . Lze ukázat, že se jedná o limitní chování pro  $k < 1$ , tento důkaz je však poměrně náročný, a proto pouze opět odkážeme čtenáře na [2], kde je tento důkaz korektně proveden.

#### 4.1.4 Řešení rovnice

Jak jsme již dříve uvedli, rovnice (4.1.4) není analyticky řešitelná, nicméně můžeme aplikovat nástroje numerické matematiky a rovnici vyřešit přibližně. Zavedme pro tento účel vektorové funkce  $\mathbf{p}(t) = (x_p(t), y_p(t))$  a  $\mathbf{k}(t) = (x_k(t), y_k(t))$ , které popisují polohu psa respektive kachny v čase  $t$  vyjádřenou v kartézské soustavě souřadnic. Dále nám nic nebrání v tom, abychom našli vyjádření námi použité funkce  $r$  v kartézských souřadnicích (stačí například zvolit spojnicí středu rybníka a počáteční polohy kachny jako osu  $x$  a středem vést kolmou osu  $y$ ), tedy  $\mathbf{r}(t) = (x_r(t), y_r(t))$ . Použitím elementárních znalostí z lineární algebry můžeme snadno odvodit

$$\mathbf{k}(t) = \mathbf{p}(t) + \mathbf{r}(t).$$

Ze zadání víme, že vektor rychlosti psa  $\mathbf{v}_p = \dot{\mathbf{p}}(t)$  vždy míří přímo na aktuální pozici kachny. Je zřejmé, že vektor  $\mathbf{r}(t)$  je jeho nějakým násobkem. Můžeme tedy psát

$$\dot{\mathbf{p}} = \|\dot{\mathbf{p}}\| \cdot \frac{\mathbf{r}(t)}{\|\mathbf{r}(t)\|},$$

kde symbol  $\|\cdot\|$  znamená libovolnou normu. Na začátku této úlohy jsme uvedli, že vždy je možné transformovat souřadnice (ať už časové či prostorové) tak, aby velikost rychlosti kachny byla jednotková a u psa byla tato velikost rovna  $k$ . Z toho plyne, že výraz můžeme upravit na

$$\dot{\mathbf{p}} = k \cdot \frac{\mathbf{r}(t)}{\|\mathbf{r}(t)\|} = k \cdot \frac{\mathbf{k}(t) - \mathbf{p}(t)}{\|\mathbf{k}(t) - \mathbf{p}(t)\|}.$$

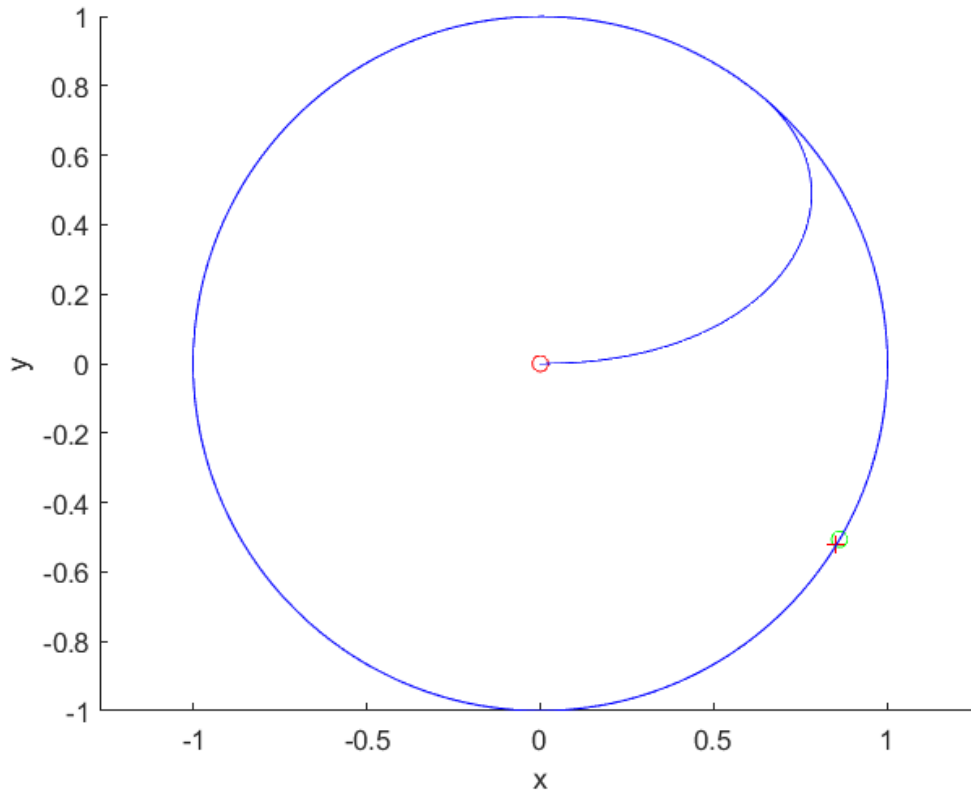
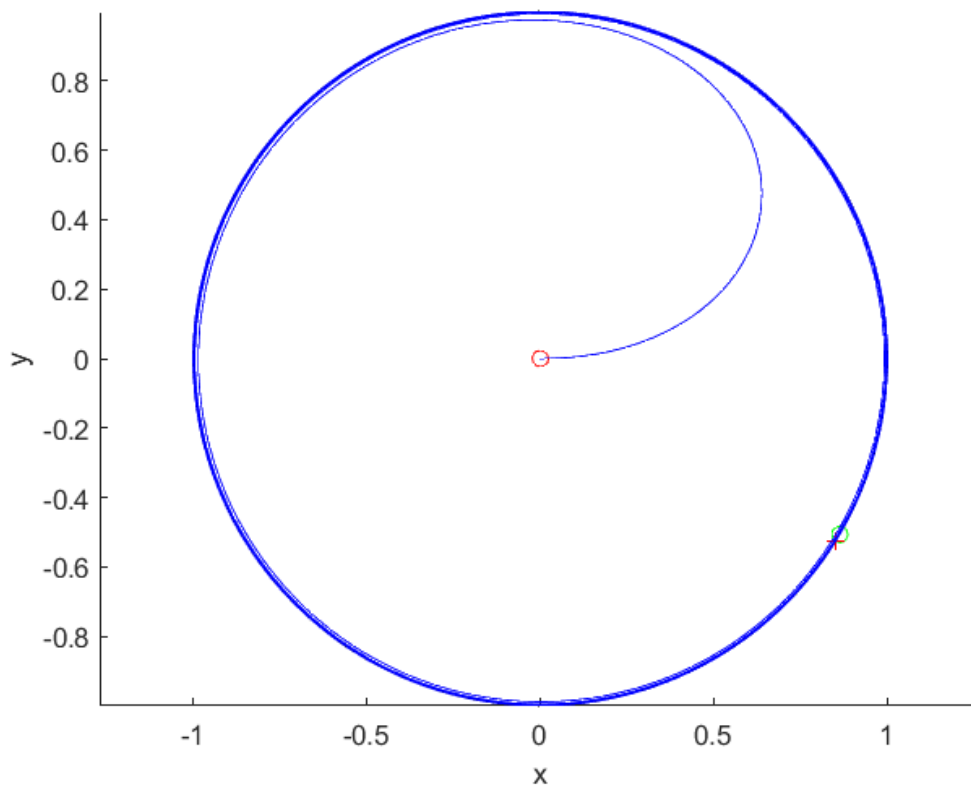
To nám po rozepsání do souřadnic dává

$$\begin{aligned} \frac{dx_p(t)}{dt} &= k \cdot \frac{x_k - x_p}{\sqrt{(x_k - x_p)^2 + (y_k - y_p)^2}}, \\ \frac{dy_p(t)}{dt} &= k \cdot \frac{y_k - y_p}{\sqrt{(x_k - x_p)^2 + (y_k - y_p)^2}}. \end{aligned}$$

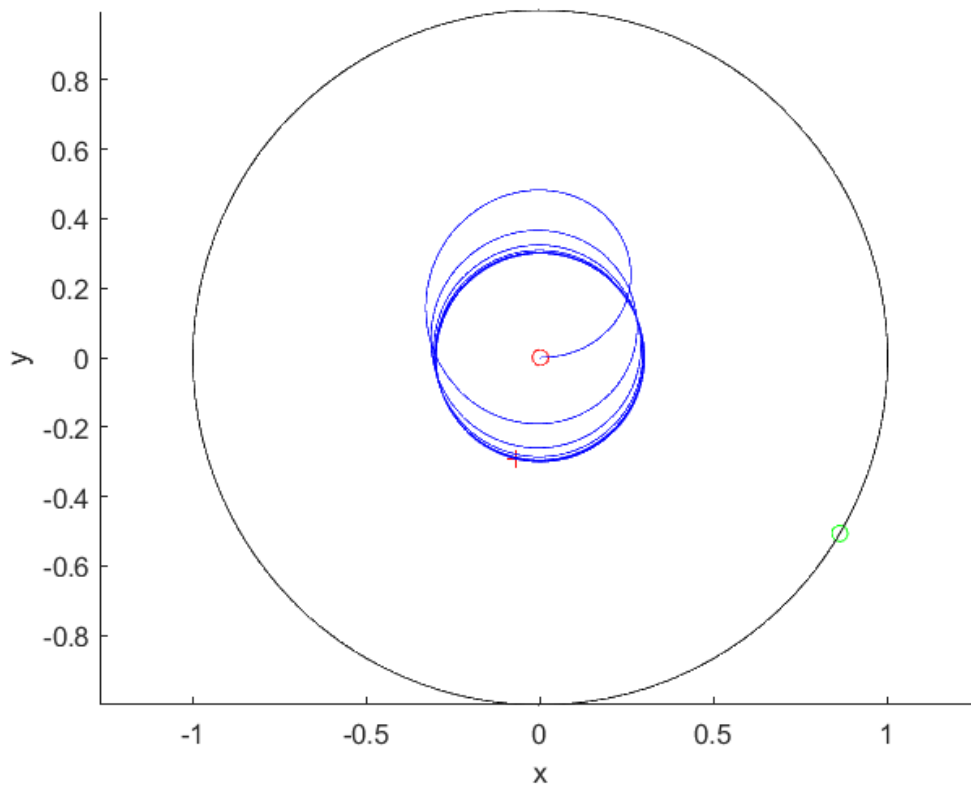
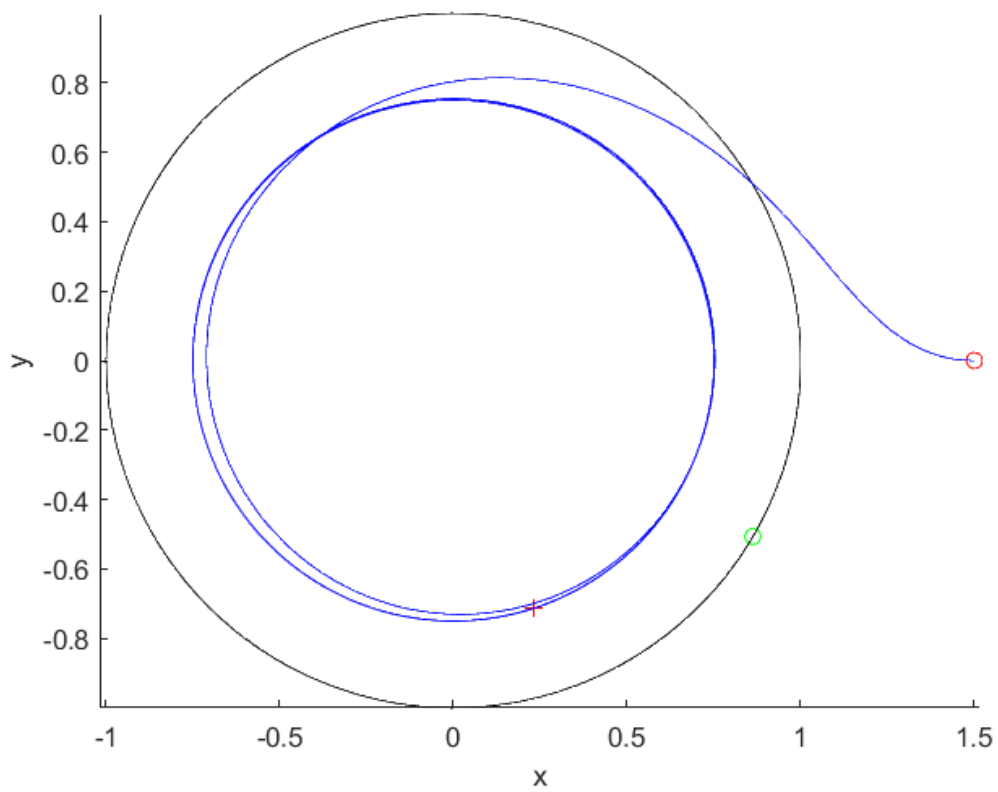
Dále vzhledem k tomu, že se kachna pohybuje rovnoměrně s jednotkovou rychlostí po kružnici s poloměrem jedna, můžeme  $\mathbf{k}(t)$  vyjádřit jako

$$\mathbf{k}(t) = (\cos(t), \sin(t)).$$

K numerické ilustraci dříve provedených závěrů uijeme dopřednou Eulerovu metodu jako nejjednodušší algoritmus pro numerické řešení obyčejných diferenciálních rovnic (pro naše účely je zcela dostačující). Na obrázcích 4.2 - 4.5 jsou zobrazeny různé varianty trajektorií, které byly vykresleny pomocí implementace výše uvedeného numerického algoritmu v MATLABu.

Obrázek 4.2: Trajektorie pro  $k = 2$  se startovací pozicí ve středuObrázek 4.3: Trajektorie pro  $k = 1$  se startovací pozicí ve středu



Obrázek 4.4: Trajektorie pro  $k = 0.3$  se startovací pozicí ve středuObrázek 4.5: Trajektorie pro  $k = 0.75$  se startovací pozicí mimo rybník

## 4.2 Alternativní pronásledovací strategie

### 4.2.1 Zadání upravené úlohy

Nyní si položíme otázku, jak by námi diskutovaná úloha vypadala, kdyby se pes rozhodl pronásledovat kachnu jiným způsobem. Předpokládejme nyní, že pes pronásleduje kachnu tak, že se v libovolném okamžiku nachází na spojnici polohy kachny a středu rybníka, tedy v libovolném čase  $t$  platí  $P \in \overline{KS}$ . Tato úloha je zmíněna a řešena v [4].

### 4.2.2 Sestavení modelu

Bez újmy na obecnosti můžeme stále předpokládat transformaci souřadnic, kterou jsme uvedli v sekci 4.1.4. Jak jsem již diskutovali v minulé sekci, polohu kachny můžeme popsat vektorovou funkcí

$$\mathbf{k}(t) = (\cos(t), \sin(t)).$$

Vzhledem ke strategii, kterou pes tentokrát zvolil, obíhá střed rybníka se stejnou úhlovou rychlostí jako kachna. Jeho polohu můžeme tedy popsat vektorovou funkcí

$$\mathbf{p}(t) = \rho(t) (\cos(t), \sin(t)),$$

kde  $\rho(t)$  je skalární funkce, která popisuje vzdálenost psa od středu kružnice. Platí tedy  $\rho(0) = 0$  a  $\rho(T) = R = 1$ , kde  $T$  je čas dostižení (druhý vztah samozřejmě platí pouze v případě, že k dostižení dojde).

Rychlost psa  $v_p$  si nyní rozložíme na radiální složku  $v_\rho = \dot{\rho}$  a na k ní kolmou složku  $v_\perp$ . Dle Pythagorovy věty platí

$$v_p = k = \sqrt{v_\rho^2 + v_\perp^2} = \sqrt{\dot{\rho}^2 + v_\perp^2}. \quad (4.2.1)$$

Uvědomme si, že  $v_\perp$  je v libovolném okamžiku kolineární s  $v_k$  a můžeme ji chápat jako oběhovou rychlost psa po kružnici s poloměrem  $\rho(t)$ . Tato rychlost je tedy určena vztahem

$$v_\perp = \omega \cdot \rho(t) = \frac{v_k}{R} \cdot \rho(t) = \dot{\rho}(t).$$

Dosazením předchozího vyjádření do (4.2.1) a úpravou dojdeme k rovnici

$$\dot{\rho} = \sqrt{k^2 - \rho^2}. \quad (4.2.2)$$

### 4.2.3 Řešení rovnice

Na rozdíl od původní úlohy je takto upravená úloha analyticky řešitelná. Jednoduše přejdeme na diferenciální tvar

$$\frac{d\rho}{\sqrt{k^2 - \rho^2}} = dt. \quad (4.2.3)$$

Jedná se tedy o obyčejnou diferenciální rovnici prvního řádu se separovanými proměnnými, kterou můžeme bez větších obtíží integrací vztahu (4.2.3) vyřešit. Integrace pravé strany je triviální. K integraci strany levé uijeme nejprve úpravu

$$\int \frac{d\rho}{\sqrt{k^2 - \rho^2}} = \frac{1}{k} \int \frac{d\rho}{\sqrt{1 - \left(\frac{\rho}{k}\right)^2}}.$$

Zaveďme substituci  $\frac{\rho}{k} = s$  a dosadme spolu s převodem diferenciálu ( $d\rho = k \cdot ds$ ). Dostaneme

$$\int \frac{d\rho}{\sqrt{1-s^2}} = \arcsin(s) + C = \arcsin\left(\frac{\rho}{k}\right) + C.$$

Dohromady tedy obecné řešení (4.2.2) je

$$\arcsin\left(\frac{\rho}{k}\right) = t + C.$$

K určení hodnoty obecné konstanty  $C$  uijeme počáteční podmínku  $\rho(0) = 0$ , odkud plyne  $C = 0$ . Dostáváme tedy partikulární řešení  $\arcsin\left(\frac{\rho}{k}\right) = t$ . Odtud snadno

$$\rho(t) = k \sin(t). \quad (4.2.5)$$

Ilustrace možných trajektorií jsou uvedeny na obrázcích 4.6 - 4.8.

#### 4.2.4 Diskuze

Nejdříve poznamenejme, že toto řešení je platné pouze pro  $t \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ , a to z důvodu volby kladného znaménka před odmocninou ve výrazu (4.2.2) (zcela přirozeně předpokládáme nezápornou rychlost  $v_\rho$ ). V čase  $t > \frac{\pi}{2}$  by platilo  $\dot{\rho} < 0$ , což je spor s vyjádřením (4.2.2). Nyní se podívejme na chování řešení pro  $k \geq 1$  ( a poté okometujeme "očekávaný" způsob chování v případě  $k < 1$ ).

**Průběh pronásledování pro  $k \geq 1$ :** Stejně jako v původní úloze pro  $k > 1$  samozřejmě k dostižení dojde. Skutečně, dosadme v rovnici (4.2.5)  $\rho = R = 1$ . Tím dojdeme ke vztahu

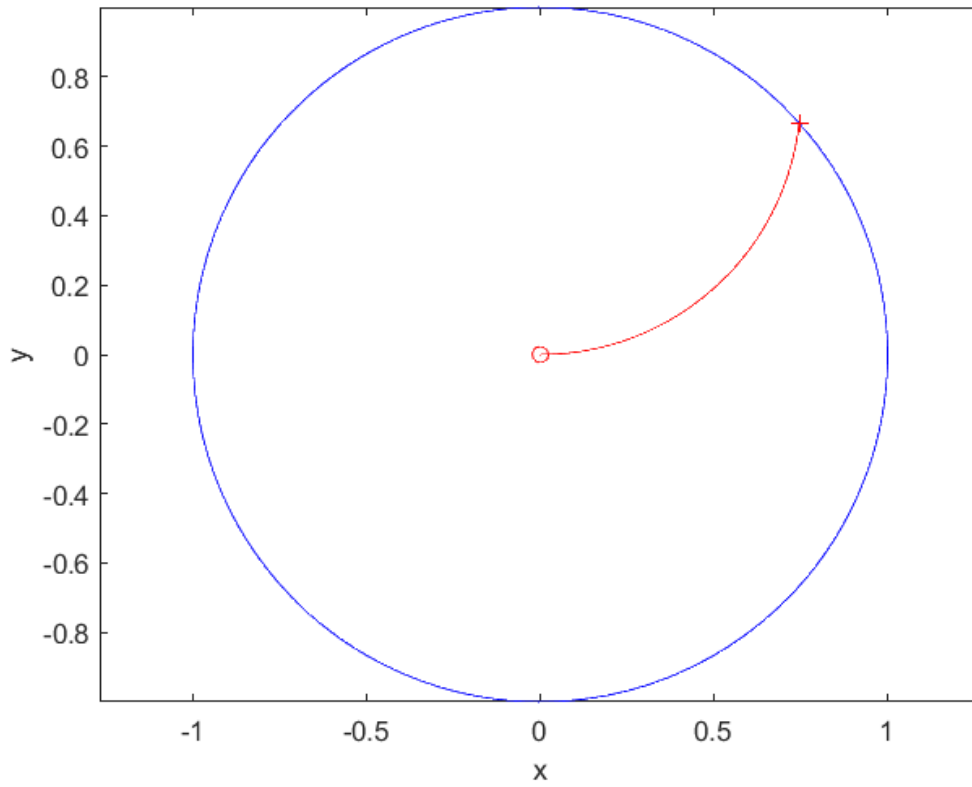
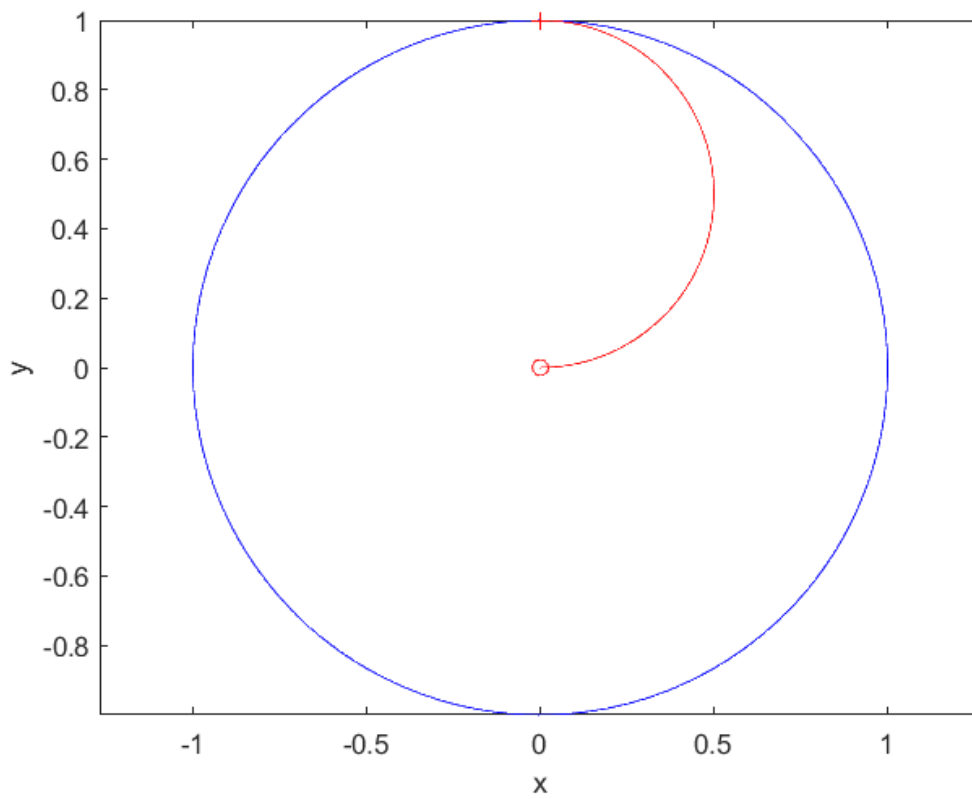
$$\sin(T) = \frac{1}{k},$$

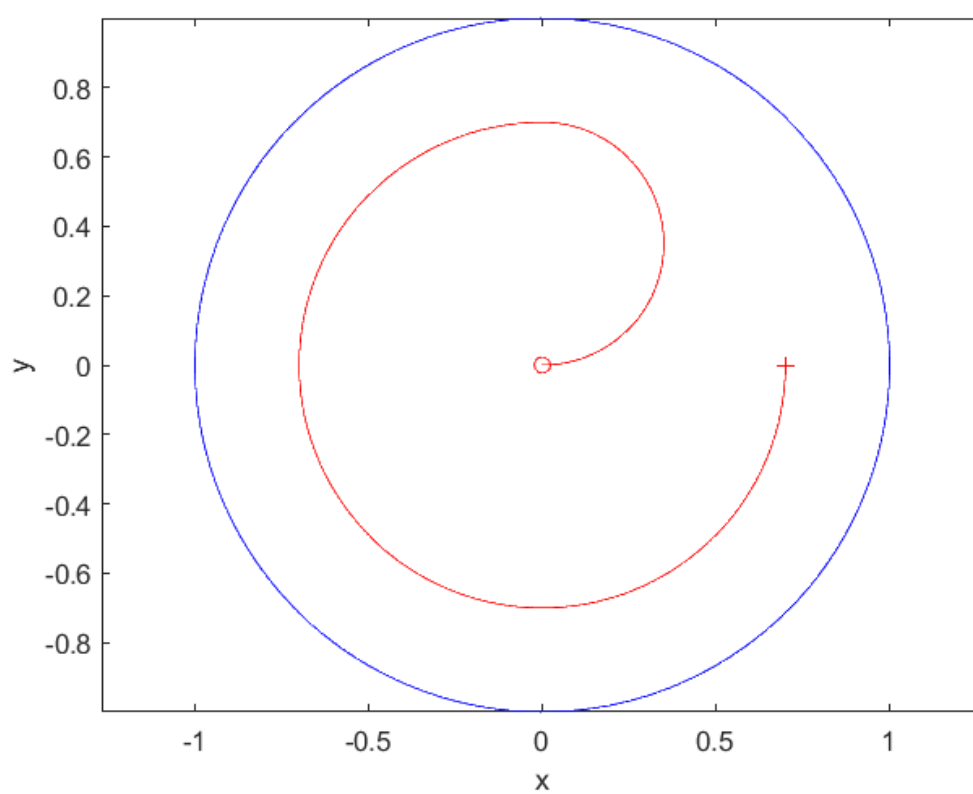
který můžeme jednoduše upravit a vyjádřit čas dostižení  $T$  jako

$$T = \arcsin\left(\frac{1}{k}\right).$$

Všimněme si, že na rozdíl od případu tzv. *pure pursuit*, který jsme diskutovali v 4.1, dojde nyní k dostižení v konečném čase i v případě  $k = 1$ , kdy  $T = \frac{\pi}{2}$ .

**Průběh pronásledování pro  $k < 1$ :** Je zřejmé, že v případě, kdy rychlost psa je nižší než rychlost kachny, dojde v čase  $t = \frac{\pi}{2}$  k dosažení minimální vzdálenosti, která psa a jeho kořist odděluje. V tento moment je radiální složka  $v_r$  nulová, což znamená, že pes musí všechny své síly využít k tomu, aby splňoval naše zadání a udržoval vektor  $\mathbf{p}$  kolineární s vektorem  $\mathbf{k}$ . Interpretace očekávaného chování modelu je tedy taková, že v čase  $t > \frac{\pi}{2}$  pes obíhá střed rybníka po kružnici s poloměrem  $k$  s jednotkovou úhlovou rychlostí, přičemž udržuje kolinearitu mezi svou polohou a polohou kachny.

Obrázek 4.6: Trajektorie pro  $k = 1.5$ Obrázek 4.7: Trajektorie pro  $k = 1$

Obrázek 4.8: Trajektorie pro  $k = 0.7$



# Kapitola 5

## Hlemýžď na popruhu

Nyní uvedeme úlohu, která se od předchozích mírně liší. V zadání nenajdeme kořist a lovce jako dříve, nicméně z matematického hlediska se rovněž jedná o úlohu o pronásledování.

### 5.1 Konstantní rychlost popruhu

#### 5.1.1 Zadání úlohy

Hlemýžď leze po gumovém elastickém popruhu konstantní rychlostí  $v_h$ . Jeden konec popruhu je pevně upevněn, druhý konec je natahován konstantní rychlostí  $v_p$ , přičemž délka popruhu na začátku děje je  $L_0$ . Hlemýžď svoji cestu začíná na pevném konci popruhu. Dostihne hlemýžď pohyblivý konec popruhu? Analogická úloha je řešena v [3], kde je popruh natahován závodním koněm, který běží konstantní rychlostí (odtud anglický název úlohy *The snail-racehorse problem*).

#### 5.1.2 Sestavení modelu

Označme nyní  $L(t)$  délku popruhu a  $x(t)$  vzdálenost hlemýžďe od pevného konce popruhu. Derivací  $L$  podle času dostaneme rychlost, kterou je popruh natahován, takže můžeme psát

$$\dot{L} = v_p.$$

Sestavení rovnice pro  $x(t)$  je o něco složitější. Kromě pohybu hlemýžďe je nutné zohlednit i natahování popruhu. Je třeba si uvědomit, že rychlost má v popruhu lineární průběh, je nulová na pevném konci a na natahovaném konci má velikost  $v_p$ . Můžeme tedy psát

$$v(x) = ax + b.$$

S dosazením známých hodnot v krajních bodech dostaneme

$$v(x) = \frac{v_p}{L}x.$$

Absolutní rychlost  $\dot{x}$  hlemýžďe je dána součtem jeho rychlosti  $v_h$  a rychlosti natahování popruhu v daném bodě  $x$ . Dostáváme tedy rovnici

$$\dot{x} = v_h + \frac{v_p}{L}x. \quad (5.1.1)$$

Dohromady máme soustavu dvou obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu. Tyto rovnice opatříme dvěma přirozenými počátečními podmínkami  $L(0) = L_0$  a  $x(0) = 0$ . Platí, že hlemýžď dostihne konec popruhu, jestliže bude platit  $L(T) = x(T)$  pro vhodné konečné  $T$ .

### 5.1.3 Řešení

Rovnice pro  $L$  je triviální a vyřešíme ji prostou integrací

$$L = \int v_p dt = v_p \cdot t + C.$$

S přihlédnutím k počátečním podmínkám dostaneme

$$L(t) = v_p \cdot t + L_0. \quad (5.1.2)$$

Toto řešení můžeme dosadit do (5.1.1), čímž dostaneme

$$\dot{x} = v_h + \frac{v_p}{v_p \cdot t + L_0} x. \quad (5.1.3)$$

Jedná se o nehomogenní lineární obyčejnou diferenciální rovnici prvního řádu. V prvním kroku vyřešíme příslušnou homogenní rovnici, u které můžeme separovat proměnné

$$\begin{aligned} \dot{x} = \frac{dx}{dt} &= \frac{v_p}{v_p \cdot t + L_0} x, \\ \frac{dx}{x} &= \frac{v_p \cdot dt}{v_p \cdot t + L_0}. \end{aligned}$$

Takto upravenou rovnici můžeme již integrací vyřešit následovně

$$\ln x = \ln(v_p \cdot t + L_0) + \ln C,$$

(absolutní hodnotu argumentu logaritmu můžeme vynechat, protože vzdálenost  $x$  i délka  $L$  budou vždy kladné). Odlogaritmováním dostáváme

$$x_H = C \cdot (v_p \cdot t + L_0),$$

což je obecné řešení homogenní rovnice. Nyní budeme hledat řešení rovnice (5.1.3) ve tvaru

$$x = C(t) (v_p \cdot t + L_0).$$

Derivováním tohoto vztahu a dosazením do (5.1.3) máme

$$\dot{C} = \frac{v_h}{v_p \cdot t + L_0}.$$

Tento vztah zintegrujeme a dostaneme předpis pro  $C(t)$  :

$$C(t) = \frac{v_h}{v_p} \ln(v_p \cdot t + L_0) + C.$$

Tedy obecné řešení rovnice (5.1.3) má tvar

$$x(t) = \frac{v_h}{v_p} (v_p \cdot t + L_0) \ln(v_p \cdot t + L_0) + C(v_p \cdot t + L_0).$$

Jelikož  $x(0) = 0$ , konstanta  $C$  má hodnotu  $C = -\frac{v_h}{v_p} \ln L_0$ , takže partikulární řešení můžeme po dosazení a úpravě psát ve tvaru

$$x(t) = \frac{v_h}{v_p} (v_p \cdot t + L_0) \ln \left( 1 + \frac{v_p \cdot t}{L_0} \right). \quad (5.1.4)$$

Vztahy (5.1.2) a (5.1.4) představují pohybové rovnice pravého konce popruhu a hlemýžďě.



### 5.1.4 Analýza modelu

Užitím předcházejících vztahů nyní zodpovíme základní otázku, zda hlemýžď někdy dorazí na konec popruhu, tedy jestli existuje čas dostižení  $T < \infty$ . Tato situace nastane v případě, kdy platí rovnost

$$v_p \cdot T + L_0 = \frac{v_h}{v_p} (v_p \cdot T + L_0) \ln \left( 1 + \frac{v_p \cdot T}{L_0} \right).$$

Úpravou dojdeme ke tvaru

$$\ln \left( 1 + \frac{v_p \cdot T}{L_0} \right) = \frac{v_p}{v_h}.$$

Tuto rovnost odlogaritmujeme a vyjádříme hodnotu  $T$  jako

$$T = \frac{L_0}{v_p} \left( e^{\frac{v_p}{v_h}} - 1 \right). \quad (5.1.5)$$

Vzhledem k tomu, že předpokládáme zadané veličiny  $v_p$  a  $v_h$  kladné a nenulové, hodnota závorky vyjde kladná a hodnota  $T$  je tedy také kladná (a konečná). Vidíme proto, že hlemýžď dostihne konec popruhu bez ohledu na zadané veličiny  $v_p, v_h$  a  $L_0$ .

Podívejme se ještě na délku  $L^*$ , na kterou se za tuto dobu popruh natáhne

$$L^* = L_0 + v_p \frac{L_0}{v_p} \left( e^{\frac{v_p}{v_h}} - 1 \right) = L_0 e^{\frac{v_p}{v_h}}. \quad (5.1.6)$$

Podle očekávání délka, na kterou se popruh natáhne, již samozřejmě na poměru rychlostí popruhu a hlemýžďe závisí. Ještě poznamenejme, že se nejedná o dráhu, kterou urazil hlemýžď. Je to stejné jako kdybychom stoupali na eskalátoru, námi uražená dráha není rovna dráze, po které nás eskalátor vyvezl. Hlemýžďem uraženou dráhu můžeme jednoduše vyjádřit jako

$$s_h = v_h \cdot T = v_h \frac{L_0}{v_p} \left( e^{\frac{v_p}{v_h}} - 1 \right).$$

Pro lepší ilustraci dosaženého výsledku můžeme dosadit konkrétní hodnoty. Uvažujme například  $L_0 = 1 [m]$ ,  $v_h = 1 [mm \cdot s^{-1}]$  a  $v_p = 1 [cm \cdot s^{-1}]$ . Pokud tyto hodnoty dosadíme do vztahů (5.1.5) a (5.1.6), dojdeme k tomu, že hlemýžďovi by trvalo více než 25 dnů než by dorazil na konec popruhu a popruh by se za tuto dobu natáhnul na délku přibližně 22 kilometrů.

## 5.2 Nekonstantní rychlost popruhu

### 5.2.1 Zadání a řešení upravené úlohy

Nyní modifikujme zadání a uvažujme, že se volný konec popruhu bude pohybovat se zrychlením  $a$ , tedy rychlost  $v_p$  bude lineárně rostoucí funkcí tvaru  $v_p(t) = at + v_0$  (uvažujeme tedy případy, kdy  $a > 0$ , rovněž se omezme pouze na případy, kdy počáteční rychlost  $v_0 \geq 0$ ). Stejně jako v prvním případě bychom dospěli k soustavě dvou ODR1 se stejnými počátečními podmínkami, ale rovnice pro  $L$  by se lišila, a to následujícím způsobem:

$$\dot{L} = at + v_0.$$

Rovnici zintegrujeme a po dosazení počáteční podmínky dostáváme

$$L(t) = \frac{at^2}{2} + v_0 t + L_0.$$

Podobně dostáváme rovnici pro  $x$  ve tvaru

$$\dot{x} = v_h + \frac{\dot{L}}{L}x. \quad (5.2.1)$$

Stejně jako v předchozím případě vyřešíme nejprve homogenní rovnici.

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{\dot{L}}{L}x, \\ \frac{dx}{x} &= \frac{\dot{L}}{L}dt. \end{aligned}$$

Integrací posledního vztahu dojdeme k vyjádření

$$\ln x = \ln L + \ln C$$

(opět jen poznamenejme, že zde není nutná absolutní hodnota v argumentu logaritmu, neboť výrazy v argumentu jsou dle zadání a dle předpokladů vždy kladné).

Odlogaritmováním dostáváme

$$x_H = C \cdot L(t) = C \cdot \left( \frac{at^2}{2} + v_0t + L_0 \right). \quad (5.2.2)$$

Nehomogenní rovnici vyřešíme opět variací konstanty. Po derivaci (5.2.2) a dosazení do rovnice (5.2.1) dostaneme vztah

$$\dot{C} = \frac{v_h}{\frac{at^2}{2} + v_0t + L_0}.$$

Integrace tohoto vztahu není zcela triviální; nejprve provedeme úpravu integrandu

$$\begin{aligned} C(t) &= \int \frac{v_h}{\frac{at^2}{2} + v_0t + L_0} dt = v_h \int \frac{1}{\frac{at^2}{2} + v_0t + L_0} dt = v_h \int \frac{1}{\left( \frac{\sqrt{at}}{\sqrt{2}} + \frac{v_0}{\sqrt{2a}} \right)^2 + \frac{2aL_0 - v_0^2}{2a}} dt \\ &= v_h \int \frac{1}{\frac{1}{2a} (at + v_0)^2 + \frac{2aL_0 - v_0^2}{2a}} dt = 2av_h \int \frac{1}{(at + v_0)^2 + 2aL_0 - v_0^2} dt \\ &= 2av_h \int \frac{1}{(at + v_0)^2 + 2aL_0 - v_0^2} dt. \end{aligned} \quad (5.2.3)$$

Zde musíme náš výpočet rozdělit na tři možnosti dle hodnoty konstanty  $2aL_0 - v_0^2$ .

**Výpočet pro  $2aL_0 - v_0^2 > 0$ :**

Nejprve upravíme vztah z (5.2.3) na

$$C(t) = \frac{2av_h}{2aL_0 - v_0^2} \int \frac{1}{\left( \frac{at+v_0}{\sqrt{2aL_0 - v_0^2}} \right)^2 + 1} dt.$$

Nyní zavedeme substituci  $u = \frac{at+v_0}{\sqrt{2aL_0 - v_0^2}}$ . Po dosazení této substituce a převodu diferenciálů přejde integrál na tvar

$$C(t) = \frac{2v_h}{\sqrt{2aL_0 - v_0^2}} \int \frac{1}{1 + u^2} du,$$

který už snadno vyřešíme. Tedy

$$C(t) = \frac{2v_h}{\sqrt{2aL_0 - v_0^2}} \arctan\left(\frac{at + v_0}{\sqrt{2aL_0 - v_0^2}}\right) + C_1.$$

Nyní už jen určíme hodnotu reálné konstanty  $C_1$  a to dosažením počátečních podmínky  $x(0) = 0$

$$0 = \frac{2L_0v_h}{\sqrt{2aL_0 - v_0^2}} \arctan\left(\frac{v_0}{\sqrt{2aL_0 - v_0^2}}\right) + C_1L_0.$$

Odtud  $C_1 = -\frac{2v_h}{\sqrt{2aL_0 - v_0^2}} \arctan\left(\frac{v_0}{\sqrt{2aL_0 - v_0^2}}\right)$ . Dohromady tedy dostáváme partikulární řešení počátečního problému ve tvaru

$$x(t) = \left[ \frac{2v_h}{\sqrt{2aL_0 - v_0^2}} \arctan\left(\frac{at + v_0}{\sqrt{2aL_0 - v_0^2}}\right) - \frac{2v_h}{\sqrt{2aL_0 - v_0^2}} \arctan\left(\frac{v_0}{\sqrt{2aL_0 - v_0^2}}\right) \right] \times \left( \frac{at^2}{2} + v_0t + L_0 \right).$$

Tento vztah můžeme dále upravovat. Jelikož z podmínek za jakých jsme úlohu řešili plyne, že oba argumenty arctan jsou kladné můžeme užít vzorce

$$\arctan u - \arctan v = \arctan \frac{u - v}{1 + uv}.$$

Tím po několika elementárních úpravách přejdeme k vyjádření

$$x(t) = \frac{2v_h}{\sqrt{2aL_0 - v_0^2}} \arctan \frac{\sqrt{2aL_0 - v_0^2}t}{v_0t + 2L_0} \left( \frac{at^2}{2} + v_0t + L_0 \right),$$

což lze také napsat ve tvaru

$$x(t) = \frac{2v_h}{\sqrt{2aL_0 - v_0^2}} \arctan \frac{\sqrt{2aL_0 - v_0^2}t}{v_0t + 2L_0} L(t).$$

**Výpočet pro  $2aL_0 - v_0^2 = 0$ :**

Vraťme se ke vztahu (5.2.3) a položme  $2aL_0 - v_0^2 = 0$ ; tím se nám vztah zjednoduší na tvar

$$C(t) = 2av_h \int \frac{1}{(at + v_0)^2} dt.$$

Tento integrál vyřešíme jednoduše substitucí  $at + v_0 = u$ . Po přepočtu diferenciálů můžeme již vztah zintegrovat jako

$$C(t) = 2v_h \int \frac{1}{u^2} du = -\frac{2v_h}{u} + C_1 = -\frac{2v_h}{at + v_0} + C_1.$$

Opět dosadíme počáteční podmínku  $x(0) = 0$

$$0 = -\frac{2v_hL_0}{v_0} + C_1L_0,$$

z čehož dostáváme, že  $C_1 = \frac{2v_h}{v_0}$ . Pro tento případ má partikulární řešení počátečního problému tvar

$$x(t) = \left( -\frac{2v_h}{at + v_0} + \frac{2v_h}{v_0} \right) \left( \frac{at^2}{2} + v_0t + L_0 \right),$$

tedy

$$x(t) = \left( -\frac{2v_h}{at + v_0} + \frac{2v_h}{v_0} \right) L(t).$$

**Výpočet pro  $2aL_0 - v_0^2 < 0$ :**

Pro tento případ si upravme vztah (5.2.3) následovně

$$\begin{aligned} C(t) &= 2av_h \int \frac{1}{(at + v_0)^2 + 2aL_0 - v_0^2} dt = 2av_h \int \frac{1}{(at + v_0)^2 - (v_0^2 - 2aL_0)} dt \\ &= 2av_h \int \frac{1}{\left(at + v_0 + \sqrt{v_0^2 - 2aL_0}\right) \left(at + v_0 - \sqrt{v_0^2 - 2aL_0}\right)} dt. \end{aligned}$$

Takto upravený výraz si můžeme rozložit na parciální zlomky

$$\begin{aligned} C(t) &= 2av_h \int \frac{1}{\left(at + v_0 + \sqrt{v_0^2 - 2aL_0}\right) \left(at + v_0 - \sqrt{v_0^2 - 2aL_0}\right)} dt \\ &= \frac{av_h}{\sqrt{v_0^2 - 2aL_0}} \int \left( \frac{1}{at + v_0 - \sqrt{v_0^2 - 2aL_0}} - \frac{1}{at + v_0 + \sqrt{v_0^2 - 2aL_0}} \right) dt \\ &= \frac{av_h}{\sqrt{v_0^2 - 2aL_0}} \left( \int \frac{1}{at + v_0 - \sqrt{v_0^2 - 2aL_0}} dt - \int \frac{1}{at + v_0 + \sqrt{v_0^2 - 2aL_0}} dt \right). \end{aligned}$$

Zavedme nyní substituci  $u_1 = at + v_0 - \sqrt{v_0^2 - 2aL_0}$  pro první integrál a  $u_2 = at + v_0 + \sqrt{v_0^2 - 2aL_0}$  pro integrál druhý. Po přepočtu diferenciálů přejdeme na tvar

$$\begin{aligned} C(t) &= \frac{v_h}{\sqrt{v_0^2 - 2aL_0}} \left( \int \frac{1}{u_1} du_1 - \int \frac{1}{u_2} du_2 \right) = \frac{v_h}{\sqrt{v_0^2 - 2aL_0}} (\ln u_1 - \ln u_2) + C_1 \\ &= \frac{v_h}{\sqrt{v_0^2 - 2aL_0}} \left[ \ln \left( at + v_0 - \sqrt{v_0^2 - 2aL_0} \right) - \ln \left( at + v_0 + \sqrt{v_0^2 - 2aL_0} \right) \right] + C_1 \\ &= \frac{v_h}{\sqrt{v_0^2 - 2aL_0}} \ln \frac{at + v_0 - \sqrt{v_0^2 - 2aL_0}}{at + v_0 + \sqrt{v_0^2 - 2aL_0}} + C_1, \end{aligned}$$

(argument logaritmu můžeme psát bez absolutní hodnoty neboť úlohu řešíme pouze pro  $t \geq 0$ , což nám dohromady s předpokladem, že  $2aL_0 < v_0^2$ , zaručí kladnost obou argumentů). Konstantu  $C_1$  opět určíme z počáteční podmínky  $x(0) = 0$ . Po dosazení dostáváme

$$0 = \frac{L_0 v_h}{\sqrt{v_0^2 - 2aL_0}} \ln \frac{v_0 - \sqrt{v_0^2 - 2aL_0}}{v_0 + \sqrt{v_0^2 - 2aL_0}} + C_1 L_0,$$

z čehož nám plyne  $C_1 = -\frac{v_h}{\sqrt{v_0^2 - 2aL_0}} \ln \frac{v_0 - \sqrt{v_0^2 - 2aL_0}}{v_0 + \sqrt{v_0^2 - 2aL_0}}$ . Partikulární řešení má tedy tvar

$$x(t) = \frac{v_h}{\sqrt{v_0^2 - 2aL_0}} \left( \ln \frac{at + v_0 - \sqrt{v_0^2 - 2aL_0}}{at + v_0 + \sqrt{v_0^2 - 2aL_0}} - \ln \frac{v_0 - \sqrt{v_0^2 - 2aL_0}}{v_0 + \sqrt{v_0^2 - 2aL_0}} \right) \left( \frac{at^2}{2} + v_0 t + L_0 \right).$$

I v tomto případě si výraz pro  $x$  upravíme. S využitím toho, že rozdíl logaritmu je logaritmus podílu, můžeme psát

$$x(t) = \frac{v_h}{\sqrt{v_0^2 - 2aL_0}} \ln \frac{\left(at + v_0 - \sqrt{v_0^2 - 2aL_0}\right) \left(v_0 + \sqrt{v_0^2 - 2aL_0}\right)}{\left(at + v_0 + \sqrt{v_0^2 - 2aL_0}\right) \left(v_0 - \sqrt{v_0^2 - 2aL_0}\right)} L(t).$$

Jmenovatel i čítec můžeme roznásobit následujícím způsobem

$$x(t) = \frac{v_h}{\sqrt{v_0^2 - 2aL_0}} \ln \frac{at \left( v_0 + \sqrt{v_0^2 - 2aL_0} \right) + \left( v_0 - \sqrt{v_0^2 - 2aL_0} \right) \left( v_0 + \sqrt{v_0^2 - 2aL_0} \right)}{at \left( v_0 - \sqrt{v_0^2 - 2aL_0} \right) + \left( v_0 + \sqrt{v_0^2 - 2aL_0} \right) \left( v_0 - \sqrt{v_0^2 - 2aL_0} \right)} L(t),$$

což nás po několika krocích dovede k vyjádření

$$x(t) = \frac{v_h}{\sqrt{v_0^2 - 2aL_0}} \ln \frac{\left( v_0 + \sqrt{v_0^2 - 2aL_0} \right) t + 2L_0}{\left( v_0 - \sqrt{v_0^2 - 2aL_0} \right) t + 2L_0} L(t).$$

### 5.2.2 Analýza upraveného modelu

Stejně jako v minulém případě, hlemýžď dorazí na konec popruhu v případě, bude-li platit  $x(T) = L(T)$ . Opět hledejme čas dostižení  $T$ , při kterém bude tato rovnost platit.

**Dostižení pro  $2aL_0 - v_0^2 > 0$ :**

Dosazením vyjádření těchto funkcí dostáváme

$$\frac{2v_h}{\sqrt{2aL_0 - v_0^2}} \arctan \frac{\sqrt{2aL_0 - v_0^2} T}{v_0 T + 2L_0} L(T) = L(T),$$

přičemž po úpravách přejdeme k tvaru

$$\arctan \frac{\sqrt{2aL_0 - v_0^2} T}{v_0 T + 2L_0} = \frac{\sqrt{2aL_0 - v_0^2}}{2v_h}. \quad (5.2.6)$$

Z tohoto vyjádření můžeme určit podmínky, za kterých k dostižení dojde. Výraz na pravé straně musí patřit do oboru hodnot funkce arctan, tedy musí platit  $\frac{\sqrt{2aL_0 - v_0^2}}{2v_h} < \frac{\pi}{2}$ . Zároveň musí platit podmínka, za které jsme úlohu řešili, což nám dohromady dává podmínku

$$0 < 2aL_0 - v_0^2 < \pi^2 v_h^2. \quad (5.2.7)$$

Pokud bude tato podmínka splněna, bude konec popruhu dostižen v reálném čase.

Vraťme se ke vztahu (5.2.6). Použitím funkce tangens a několika algebraickými úpravami můžeme dojít ke vztahu

$$T = \frac{2L_0 \tan \frac{\sqrt{2aL_0 - v_0^2}}{2v_h}}{\sqrt{2aL_0 - v_0^2} - v_0 \tan \frac{\sqrt{2aL_0 - v_0^2}}{2v_h}},$$

což je vyjádření času dostižení za předpokladu, že je splněna podmínka (5.2.7).

**Dostižení pro  $2aL_0 - v_0^2 = 0$ :**

V tomto případě po dosazení dostaneme

$$\left( -\frac{2v_h L_0}{v_0} + \frac{2v_h}{v_0} L_0 \right) L(t) = L(t).$$

Po jednoduchých úpravách dojdeme k vyjádření času dostižení

$$T = \frac{v_0}{a} \left( \frac{v_0}{2v_h - v_0} \right).$$

Aby k dostižení došlo, musí být čas  $T$  kladný. Jelikož jsou všechny konstanty z jeho vyjádření kladné, je k dodržení této podmínky nutné, aby  $2v_h - v_0 > 0$ .

**Dostižení pro  $2aL_0 - v_0^2 < 0$ :**

Pro tento případ je vyjádření času dostižení nejkomplicovanější. Stejně jako v předchozích případech dosadíme do rovnice  $x(T) = L(T)$ , tedy

$$\frac{v_h}{\sqrt{v_0^2 - 2aL_0}} \ln \frac{\left(v_0 + \sqrt{v_0^2 - 2aL_0}\right) T + 2L_0}{\left(v_0 - \sqrt{v_0^2 - 2aL_0}\right) T + 2L_0} L(T) = L(T).$$

Rovnici si můžeme upravit na tvar

$$\ln \frac{\left(v_0 + \sqrt{v_0^2 - 2aL_0}\right) T + 2L_0}{\left(v_0 - \sqrt{v_0^2 - 2aL_0}\right) T + 2L_0} = \frac{\sqrt{v_0^2 - 2aL_0}}{v_h}.$$

Nyní provedeme odlogaritmování, čímž dostaneme

$$\frac{\left(v_0 + \sqrt{v_0^2 - 2aL_0}\right) T + 2L_0}{\left(v_0 - \sqrt{v_0^2 - 2aL_0}\right) T + 2L_0} = e^{\frac{\sqrt{v_0^2 - 2aL_0}}{v_h}}.$$

Rovnici můžeme dále upravovat a vyjádřit čas dostižení  $T$  jako

$$T = \frac{2L_0 \left( e^{\frac{\sqrt{v_0^2 - 2aL_0}}{v_h}} - 1 \right)}{v_0 + \sqrt{v_0^2 - 2aL_0} - e^{\frac{\sqrt{v_0^2 - 2aL_0}}{v_h}} \left( v_0 - \sqrt{v_0^2 - 2aL_0} \right)}.$$

Aby došlo k dostižení, musí samozřejmě platit  $T > 0$ . Jelikož argument exponenciály bude zcela jistě kladný, bude kladný i celý čitatel. Je tedy třeba požadovat, aby byl jmenovatel zlomku větší než 0, z čehož po několika málo úpravách dostáváme podmínku

$$e^{\frac{\sqrt{v_0^2 - 2aL_0}}{v_h}} \frac{v_0^2 - \sqrt{v_0^2 - 2aL_0}}{v_0^2 + \sqrt{v_0^2 - 2aL_0}} < 1.$$

Pokud budou konstanty splňovat tuto nerovnici, dojde k dostižení konce popruhu v konečném čase.

# Kapitola 6

## Úniková strategie

Až dosud jsme se zaobírali spíše trajektorií lovce, přičemž kořist měla svoji trajektorii jasně definovanou. To nyní napravíme, jelikož v této sekci budeme diskutovat trajektorii kořisti tak, aby nebyla ulovena. Podívejme se nyní na zadání naší modelové úlohy, která vychází z článku [1].

### 6.1 Úloha o kočce a myši

#### 6.1.1 Zadání úlohy

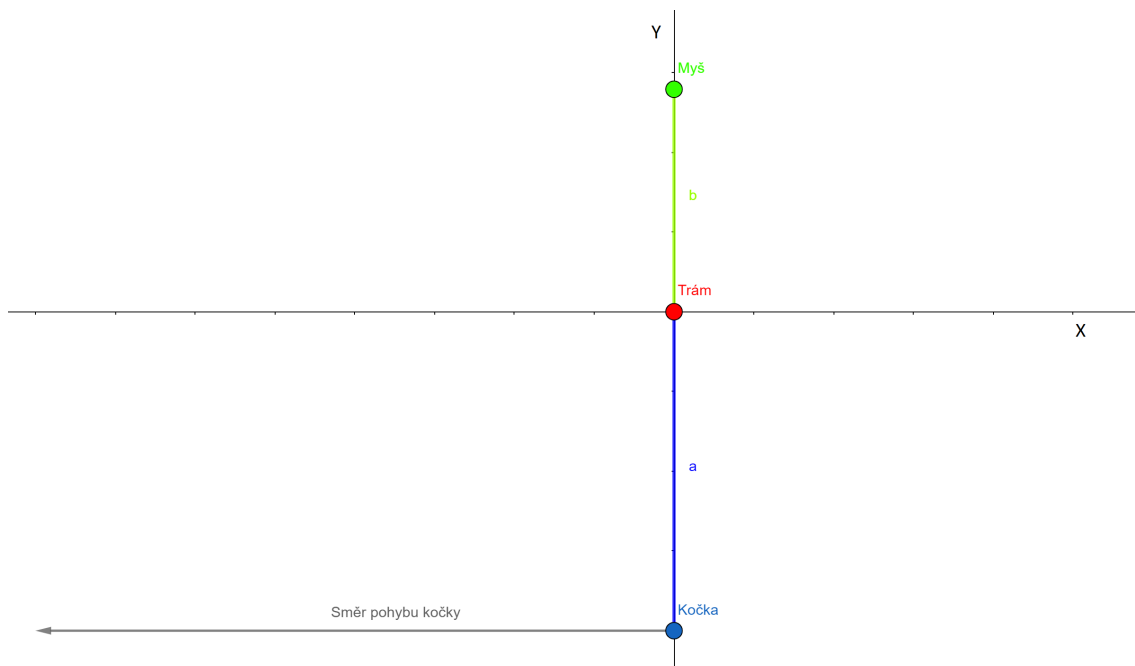
Ve stodole se nachází kočka a myš, přičemž uprostřed stodoly stojí trám. V čase  $t_0 = 0$  je situace taková, že myš se schovává před kočkou za trámem, tedy trám se nachází na spojnici polohy kočky a myši. V tento okamžik je kočka ve vzdálenosti  $a$  od trámu. Myš je od této překážky vzdálena o  $b$ . Kočka stojí čelem k trámu a v čase  $t_0$  se rozběhne doleva a běží kolmo ke spojnici její polohy s myši v čase  $t_0$ , přičemž se pohybuje konstantní rychlostí  $v_k$  a stále udržuje přímou trajektorii. Myš musí na pohyb kočky reagovat a rovněž se dát do pohybu tak, aby trám neustále bránil přímé viditelnosti. Myš se pohybuje s konstantní rychlostí  $v_m$ . Jaká bude strategie myši, aby ji kočka nespatriila?

#### 6.1.2 Sestavení modelu

Ze všeho nejdříve si zavedme souřadný systém, ve kterém budeme úlohu řešit. Přírozenou volbou počátku je poloha trámu. Osu  $y$  nám bude určovat počáteční spojnice polohy kočky a myši, přičemž kočka se v tento okamžik nachází na záporné poloose a myš na kladné. Osa  $x$  je samozřejmě kolmá na osu  $y$  a prochází počátkem. Kočka tedy běží ve směru záporné osy  $x$ . Počáteční situace je zobrazena na obrázku 6.1.

Než aplikujeme diferenciální počet, podívejme se, jak by situace vypadala, kdybychom na začátku požadovali, aby se myš pohybovala rovněž po přímce kolmé na osu  $y$ . Aby byla myš stále v zákrytu trámu, musí neustále platit, že trám leží na spojnici myši a kočky. Z důvodu podobnosti trojúhelníků musí platit

$$\frac{a}{v_k t} = \frac{b}{v_m t},$$



Obrázek 6.1: Počáteční situace

z čehož okamžitě plyne, že rychlost myši pro tento případ musí splňovat rovnost

$$v_m = v_k \frac{b}{a}.$$

Tento případ je jakýmsi speciálním případem obecného chování. Pokud se myš pohybuje rychlostí, která uvedenou rovnost nespĺňuje, musí se pohybovat po zakřivené trajektorii tak, aby udržovala neustále mezi sebou a kočkou trám. Stejně jako v tomto speciálním případě ovšem vždy platí

$$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{a}{v_k t}, \quad (6.1.1)$$

kde  $[x(t), y(t)]$  je poloha myši. Označme  $s(t)$  dráhu uraženou myši. Kvadrát infinitesimální změny dráhy myši v čase můžeme z Pythagorovy věty vyjádřit ve tvaru

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2.$$

Uvědomme si, že  $\frac{ds}{dt} = v_m$ . Nyní si můžeme vyjádřit z (6.1.1)  $x$  jako

$$x(t) = \frac{v_k t}{a} y(t) \quad (6.1.2)$$

a spolu s vyjádřením derivace  $s$  dosadit do předchozí rovnice. Dostaneme rovnici

$$v_m^2 = \left(\frac{v_k}{a} y + \frac{v_k t}{a} \frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2,$$

kterou můžeme upravit na tvar

$$v_m^2 = \left[1 + \left(\frac{v_k t}{a}\right)^2\right] \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + 2 \left(\frac{v_k}{a}\right)^2 y t \frac{dy}{dt} + \left(\frac{v_k y}{a}\right)^2. \quad (6.1.3)$$



Abychom mohli s rovnicí lépe pracovat, transformujeme si souřadnice na bezrozměrný tvar, a to podle následujícího předpisu

$$Y = \frac{v_k}{v_m a} y, \quad X = \frac{v_k}{v_m a} x, \quad T = \frac{v_k}{a} t. \quad (6.1.4)$$

Nyní je třeba vyjádřit derivaci v našich nových souřadnicích. Platí

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{v_m a Y}{v_k} = \frac{v_m a}{v_k} \frac{dY}{dt} = \frac{v_m a}{v_k} \frac{dY}{\frac{a}{v_k} dT} = v_m \frac{dY}{dT}.$$

Dosazením za  $\frac{dy}{dt}$  do rovnice (6.1.3) dostáváme

$$v_m^2 = \left[ 1 + \left( \frac{v_k a T}{a v_k} \right)^2 \right] v_m^2 \left( \frac{dY}{dT} \right)^2 + 2 \left( \frac{v_k}{a} \right)^2 \frac{a}{v_k} T \frac{a v_m}{v_k} Y v_m \frac{dY}{dT} + v_m^2 Y^2.$$

Tuto rovnici upravíme na tvar

$$(1 + T^2) \left( \frac{dY}{dT} \right)^2 + 2YT \frac{dY}{dT} + Y^2 - 1 = 0.$$

Námi uvedený tvar již napovídá další postup. Rovnice je kvadratická v členu  $\frac{dY}{dT}$ , ten si tedy můžeme vyjádřit jako

$$\frac{dY}{dT} = \frac{-2YT \pm \sqrt{4Y^2 T^2 - 4(1 + T^2)(Y^2 - 1)}}{2(1 + T^2)} = \frac{-YT \pm \sqrt{1 + T^2 - Y^2}}{1 + T^2}. \quad (6.1.5)$$

Nyní si vezměme vyjádření  $X$  z (6.1.4) a dosadíme za  $x$  z (6.1.2). Dostaneme

$$X = \frac{v_k}{v_m a} \frac{v_k t}{a} y,$$

což můžeme s použitím vztahů pro  $Y$  a  $T$  v (6.1.4) psát jako

$$X = YT. \quad (6.1.6)$$

Derivací tohoto vztahu podle  $T$  přejdeme k rovnosti

$$\frac{dX}{dT} = Y + T \frac{dY}{dT}.$$

Tento vztah po dosazení (6.1.5) můžeme upravit na

$$\frac{dX}{dT} = Y + \frac{-YT^2 \pm T\sqrt{1 + T^2 - Y^2}}{(1 + T^2)} = \frac{Y \pm T\sqrt{1 + T^2 - Y^2}}{1 + T^2}, \quad (6.1.7)$$

čímž získáváme finální rovnici pro  $X$ . Dohromady jsme dostali soustavu dvou obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu, které ovšem nejsou lineární, takže je neumíme analyticky vyřešit. I bez znalosti řešení však můžeme provést diskuzi a náš model analyzovat.

### 6.1.3 Analýza modelu

Všimněme si, že v obou rovnicích, které jsme odvodili, se vyskytuje odmocnina  $\sqrt{1 + T^2 - Y^2}$ . Pokud dosadíme počáteční čas  $T = 0$  ( $t = 0$ ), dojdeme k tomu, že musí platit

$$Y(0) \leq 1,$$

jelikož musíme mít pod odmocninou nezáporný výraz. Přitom víme, že  $y(0) = b$ . Když se vrátíme ke vztahům (6.1.4) a dosadíme

$$Y(0) = \frac{v_k}{v_m a} y(0) = \frac{v_k}{v_m a} b,$$

je vidět, že  $Y(0) > 0$ , jelikož všechny zadané konstanty uvažujeme kladné. Dohromady tedy máme informaci, že

$$0 < Y(0) = \frac{v_k}{v_m a} b \leq 1.$$

Předešlý vztah je důležitý, neboť nám udává podmínku řešitelnosti úlohy. Z nerovnosti totiž plyne, že  $v_m$  musí být větší než  $\frac{b}{a} v_k$ , což je tedy minimální rychlost myši k tomu, aby mohla za trámem manévrovat a udržet tak mezi ní kočkou optickou překážku.

Nyní si vezměme rovnice (6.1.5) se znaménkovou variantou plus. Podívejme se, co dostaneme při dosazení  $Y = 1$  a  $X = T$ . Po dosazení do první rovnice dostáváme

$$\frac{dY}{dT} = \frac{-T + \sqrt{1 + T^2 - 1}}{1 + T^2} = \frac{-T + T}{1 + T^2} = 0.$$

Pro druhou rovnici analogicky dojdeme k

$$\frac{dX}{dT} = \frac{1 + T\sqrt{1 + T^2 - 1}}{1 + T^2} = \frac{1 + T^2}{1 + T^2} = 1.$$

Z těchto rovností plyne, že  $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T \\ 1 \end{pmatrix}$  je řešením počátečního problému. Pokud provedeme zpětnou transformaci souřadnic, zjistíme, že toto řešení odpovídá  $x = v_m t$  a  $y = \frac{v_m a}{v_k} = \text{const.}$ , což je právě speciální případ, kdy se myš pohybuje po přímé trajektorii, který jsme diskutovali na začátku. Z teorie diferenciálních rovnic (viz Picardova věta) plyne, že je toto řešení jednoznačné v tom smyslu, že ho neprotíná žádná jiná trajektorie. Pro každé řešení  $Y$  rovnice (6.1.5) s znaménkovou variantou plus tedy musí platit

$$Y(T) < 1 \quad \forall T > 0.$$

Tohoto zjištění můžeme využít k odhalení monotonie funkce  $Y$ . Uvažujme odmocninu z rovnice (6.1.5), kterou můžeme psát ve tvaru

$$\sqrt{1 + T^2 - Y^2} = \sqrt{Y^2 T^2 - (1 + T^2)(Y^2 - 1)}.$$

Jelikož  $Y < 1$ , platí také  $Y^2 - 1 < 0$ , z čehož plyne, že

$$\sqrt{Y^2 T^2 - (1 + T^2)(Y^2 - 1)} > YT.$$

Jelikož  $1 + T^2 > 0$ , tak dohromady musí platit

$$\frac{dY}{dT} > 0 \quad \forall T > 0,$$

a tedy  $Y$  je při volbě kladného znaménka monotónně rostoucí funkcí. V případě funkce  $X$  máme v rovnici stejnou odmocninu, kterou můžeme analogicky upravit. Po této úpravě dojdeme ke stejné informaci jako u  $Y$ , tedy

$$\frac{dX}{dT} > 0 \quad \forall T > 0.$$

Podívejme se nyní, co se stane, když zvolíme znaménko mínus v rovnicích (6.1.5) a (6.1.7). Pro  $Y$  dostaneme

$$\frac{dY}{dT} = \frac{-YT - \sqrt{Y^2T^2 - (1+T^2)(Y^2-1)}}{(1+T^2)} < 0,$$

tedy v tomto znaménkovém případě je  $Y$  monotónně klesající funkce. Když se podíváme na rovnici (6.1.7) se znaménkem mínus vidíme, že její pravá strana může nabývat kladné, záporné i nulové hodnoty. Zvažme proto nejprve možnost  $\frac{dX}{dT} = 0$ . Tato situace nastane v případě, když bude platit  $Y = T$ , což může nastat jen v nějakém izolovaném bodě. Zmiňovaná situace je mezní. Pokud je  $Y > T$ , bude  $\frac{dX}{dT} > 0$ . Skutečně, pokud vezmeme  $Y > T$  libovolně, pod odmocninou dostaneme kladné číslo  $\theta < 1$ , což znamená, že číselník bude tvaru  $Y - T\sqrt{\theta}$ , což je jistě kladný výraz, a vzhledem k tomu, že jmenovatel zlomku je kladný pro každé  $T \in \mathbb{R}$ , musí platit  $\frac{dX}{dT} > 0$ . Stejně tak si vezměme situaci  $Y < T$ . V tomto případě dostaneme pod odmocninou kladné číslo  $\xi > 1$ . Jmenovatel bude tedy tvaru  $Y - T\sqrt{\xi}$  a to je zcela jistě záporný výraz. Opět v kombinaci se vždy kladným jmenovatelem dostáváme  $\frac{dX}{dT} < 0$ , tedy  $X$  bude pro  $Y < T$  klesající funkce. Z těchto poznatků vidíme, že když myš na začátku zvolí trajektorii popsanou rovnicí s znaménkem mínus, dojde po uplynutí určitého času k jakési "otáčce do protisměru". Tento případ je ilustrován na obázku 6.2. Mezní případ  $\frac{dX}{dT} = 0$  lze interpretovat také tak, že v daném bodě je tečna sestrojena k trajektorii myši vertikální.

Připustíme-li, že myš dorazí k trámu, je otázkou, co může udělat dále. Ve své dosavadní trajektorii pokračovat nemůže, protože by se vystavila riziku přímé viditelnosti. Musí proto změnit znaménko v rovnici popisující její pohyb a vydat se po trajektorii vzdalující se trámu. Zdůrazněme přitom, že myš může tuto znaménkovou změnu ve své pohybové rovnici podniknout kdykoliv, opakovaně, a stále bude přitom platit kruciólní předpoklad, že bude zamezeno přímé viditelnosti mezi ní a kočkou.

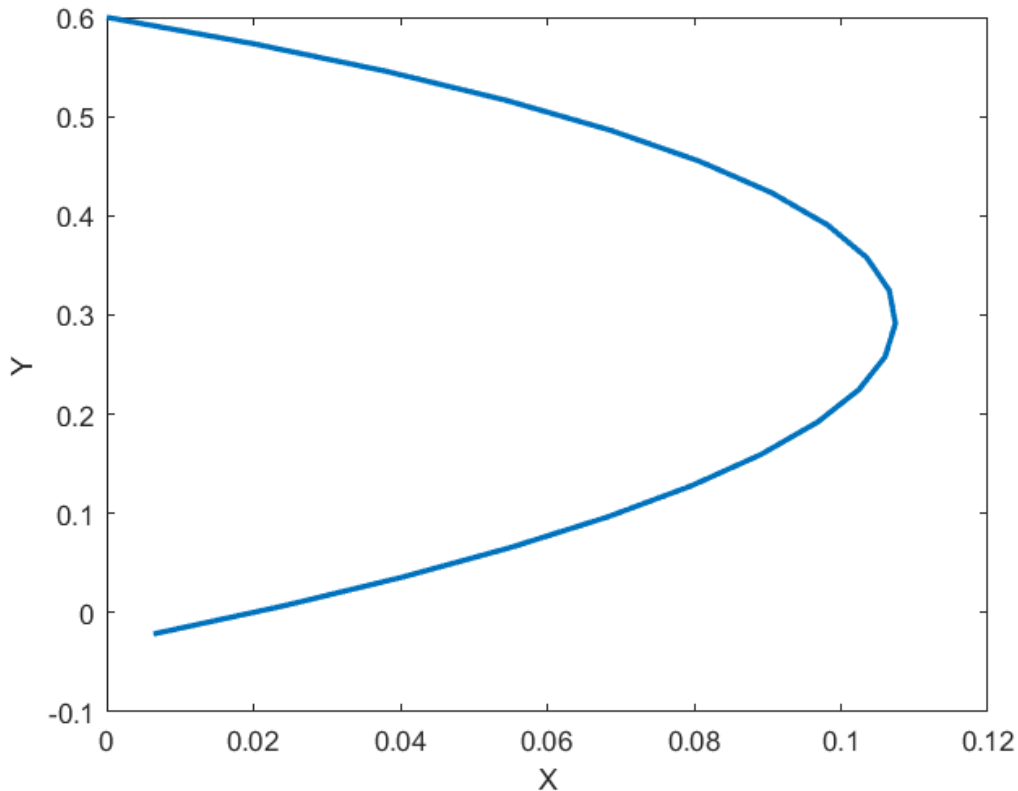
#### 6.1.4 Komentáře k publikovaným řešením

V článku [1] jsou podle mínění autora této práce tři místa, kde je argumentace buď nepřesná nebo nedostatečná (tentýž komentář platí i pro příslušné pasáže v knize [4]). Připojujeme proto následující komentář.

##### Konvergence $Y$ k 1:

V obou výše uvedených zdrojích se uvádí, že v případě volby kladného znaménka v příslušné diferenciální rovnici bude funkce  $Y$  konvergovat v nekonečnu k jedničce. Je zde argumentováno tím, že  $Y$  je v tomto případě vždy rostoucí funkcí a je omezena shora právě jedničkou. Tato argumentace je zjevně nedostatečná. Konvergenci  $Y$  k jedničce však můžeme ukázat jinak. Využijme vztahu (6.1.6) a vyjádřeme si  $Y$  jako  $Y = \frac{X}{T}$ , přičemž předpokládáme

$$\lim_{T \rightarrow \infty} Y(T) = \alpha < 1.$$



Obrázek 6.2: Ukázka trajektorie se znaménkem mínus s "otáčkou" do protisměru

Odtud tedy

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{X(T)}{\alpha T} = 1. \quad (6.1.9)$$

Uvažujme nyní rovnici (6.1.7), zvolme znaménko plus a výraz na pravé straně rozdělme na dva zlomky  $\frac{Y}{1+T^2}$  a  $\frac{T\sqrt{1+T^2-Y^2}}{1+T^2}$ . Vezměme si první zlomek a udělejme jeho nejpřísnější odhad vůči růstu, tedy položme  $Y = 0$ ; dále tedy tento zlomek vynechejme. Pro druhý zlomek opět zvolme jeho nejpřísnější odhad a položme  $Y = 1$ ; tím dostaneme výraz  $\frac{T^2}{1+T^2}$ . Platí tedy

$$\frac{dX}{dT} \geq \frac{T^2}{1+T^2} \quad \forall T > 0.$$

Jinak vyjádřeno, pro všechna  $T$  dostatečně velká platí

$$\frac{dX}{dT} \geq \beta > \alpha,$$

což je v rozporu (6.1.9). Musí tedy platit  $\lim_{T \rightarrow \infty} Y = 1$ .

### Dosažení počátku

Ve výše uvedených zdrojích je uvedeno, že v případě volby znaménka mínus myš musí dorazit až k trámu. Je zde argumentováno tím, že derivace  $Y$  je v tomto případě záporná a tedy musí nastat situace, kdy  $Y(T) = 0$  pro vhodné  $T$ . Poněvadž  $X$  je s  $Y$  svázáno vztahem  $X = YT$ , pokud je nulové  $Y$ , musí být nulové i  $X$ . Argument, že  $Y(T) = 0$  pro vhodné  $T$  však z pouhého faktu  $\frac{dY}{dT} < 0$  nevyplývá. K dosažení počátku skutečně dojde, je k tomu ovšem zapotřebí důkladnější argumentace. Vezměme si stejně jako v minulém případě výraz pro  $\frac{dX}{dT}$

(ovšem tentokrát se znaménkovou variantou mínus) a opět si ho rozdělme na dva zlomky  $\frac{Y}{1+T^2}$  a  $\frac{-T\sqrt{1+T^2-Y^2}}{1+T^2}$ . První zlomek bude vždy nezáporný. Udělejme jeho nejpřísnější odhad a položme  $Y = 1$ . Dostaneme výraz  $\frac{1}{1+T^2}$ . Druhý výraz bude pro  $\forall T > 0$  záporný. Udělejme opět jeho nejpřísnější odhad (co nejvíce jej v absolutní hodnotě zmenšíme) a položme  $Y = 1$ , dostáváme výraz  $\frac{-T^2}{1+T^2}$ . Zcela jistě tedy platí

$$\frac{dX}{dT} \leq \left( \frac{1 - T^2}{1 + T^2} \right),$$

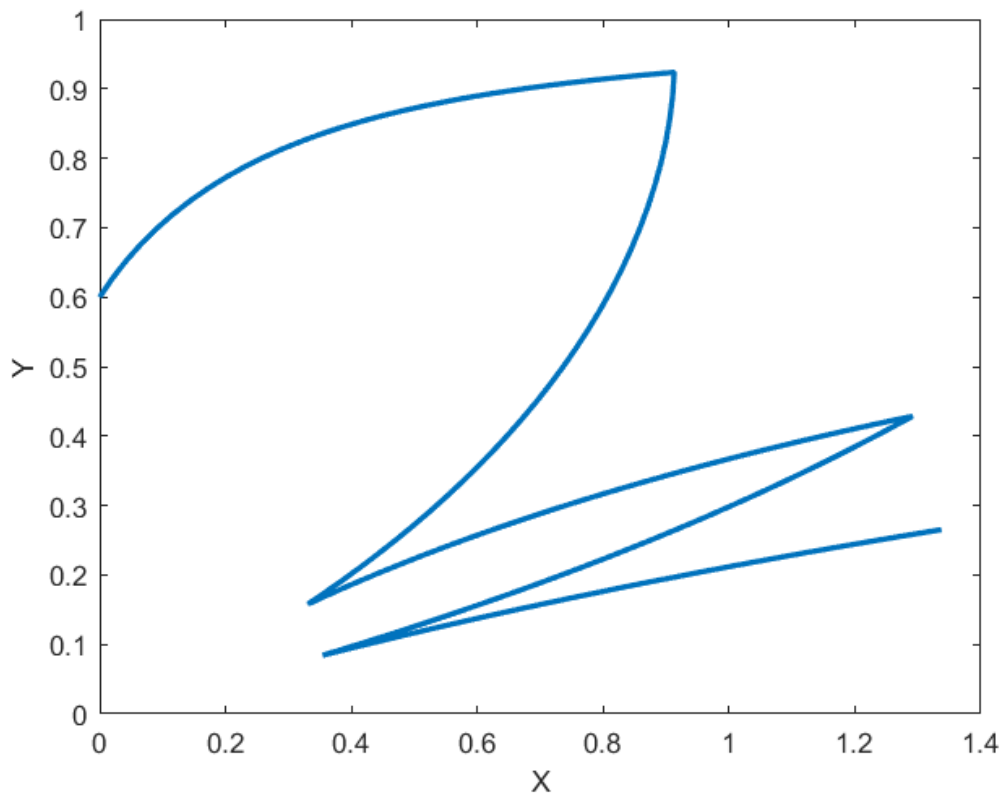
a odtud musí platit  $X(T^*) = 0$  v nějakém čase  $0 < T^* < \infty$ .  $Y$  je s  $X$  svázané vztahem  $X = YT$ , z čehož plyne, že pokud pro nějaké  $T^* > 0$  platí  $X = 0$ , musí rovněž platit  $Y = 0$ . Tímto jsme tvrzení dokázali a myš tedy skutečně při volbě záporného znaménka dorazí až k trámu.

### Vyčkávací strategie:

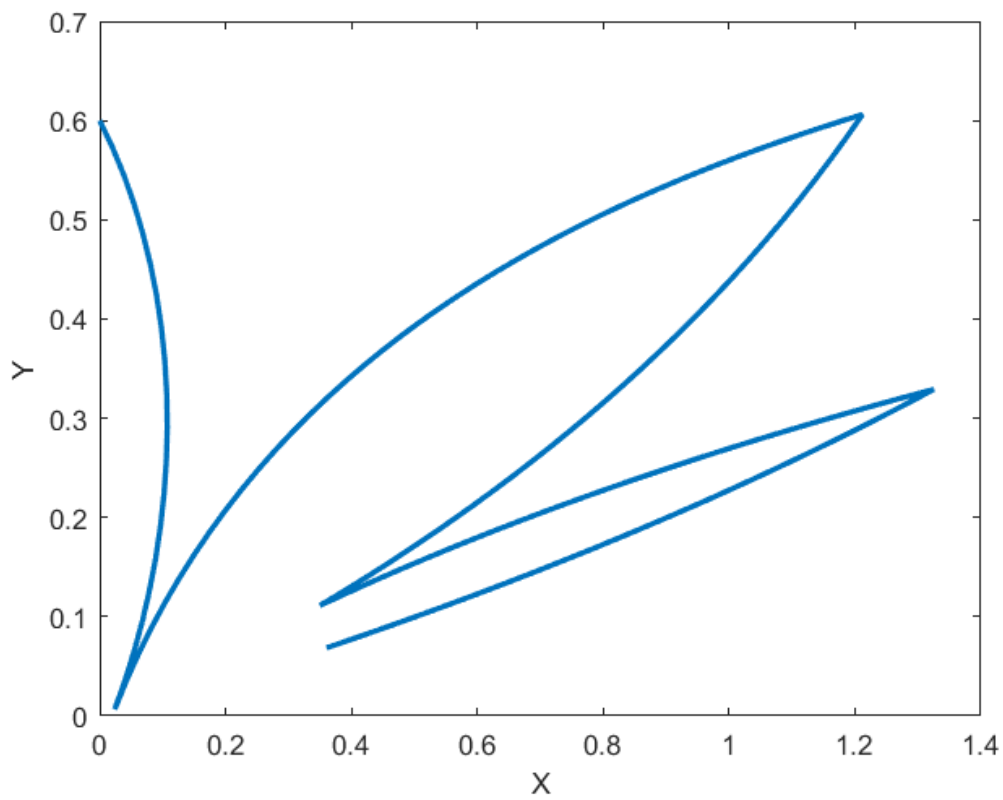
Problematická je také vyčkávací strategie (zmíněná v uvedených zdrojích) v případě, kdy myš dorazí k trámu. Oba zdroje zmiňují, že v tento moment se myš může rozhodnout, zda opět změni znaménko ve své pohybové rovnici a začne putovat po rostoucí trajektorii, nebo zůstane schována za trámem. Tato vyčkávací strategie sice vyhovuje tomu, že mezi myší a kočkou je optická překážka, nicméně nevyhovuje zadání úlohy, kde je uvedeno, že myš i kočka se neustále pohybují konstantní rychlostí. Myš proto nemá jinou možnost, než pokračovat ve své cestě podle pohybové rovnice se znaménkem plus.

### 6.1.5 Řešení rovnic

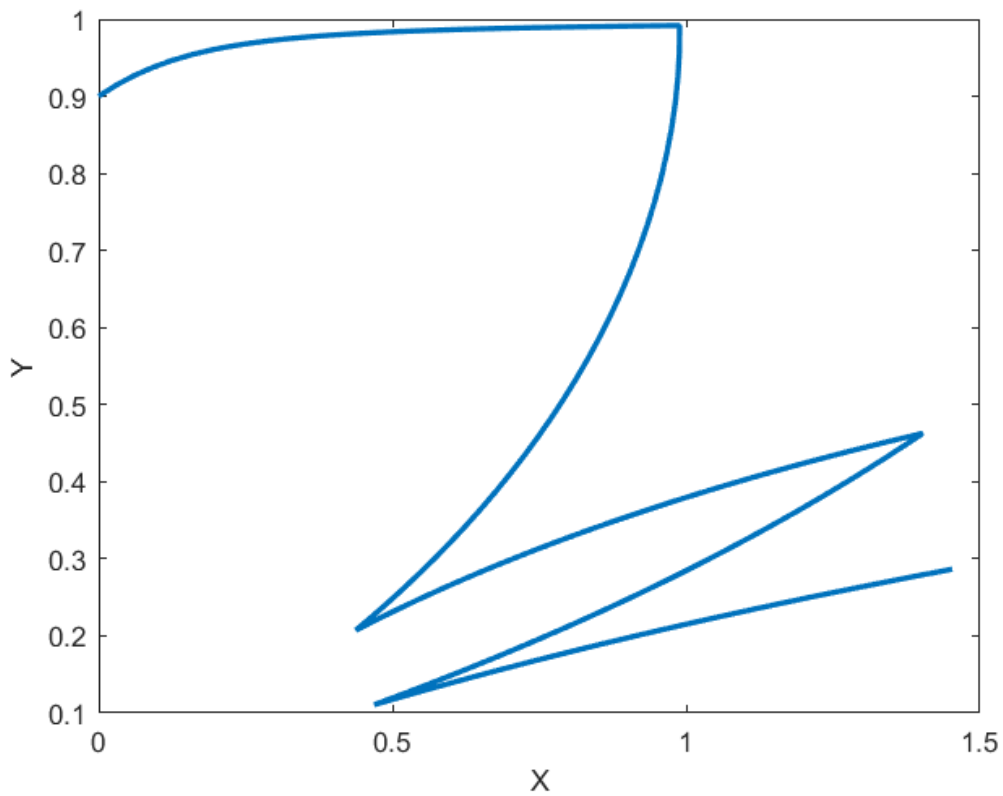
Soustava diferenciálních rovnic (6.1.5) a (6.1.7) je nelineární a neumíme ji tedy analyticky vyřešit. Nepomůže nám ani fakt, že rovnice pro  $Y$  je skalární. Soustavu proto vyřešíme numericky a to Eulerovou dopřednou metodou. Jak jsme již poznamenali, znaménko se v algoritmu může měnit v libovolný okamžik, přičemž úvodní premisa o udržení optické překážky mezi kočkou a myší bude stále platná. Na obrázcích 6.3, 6.4, 6.5 a 6.6 jsou příklady možných trajektorií. Grafy vznikly implementací výše uvedeného numerického algoritmu v MATLABu. Trajektorie jsou vykresleny tak, že v celočíselných hodnotách  $T$  dochází ke změně znaménka, přičemž je vykreslen interval  $T \in \langle 0, 5 \rangle$ .



Obrázek 6.3: Trajektorie s počáteční podmínkou  $Y_0 = 0.6$  a s počáteční volbou rostoucí trajektorie.

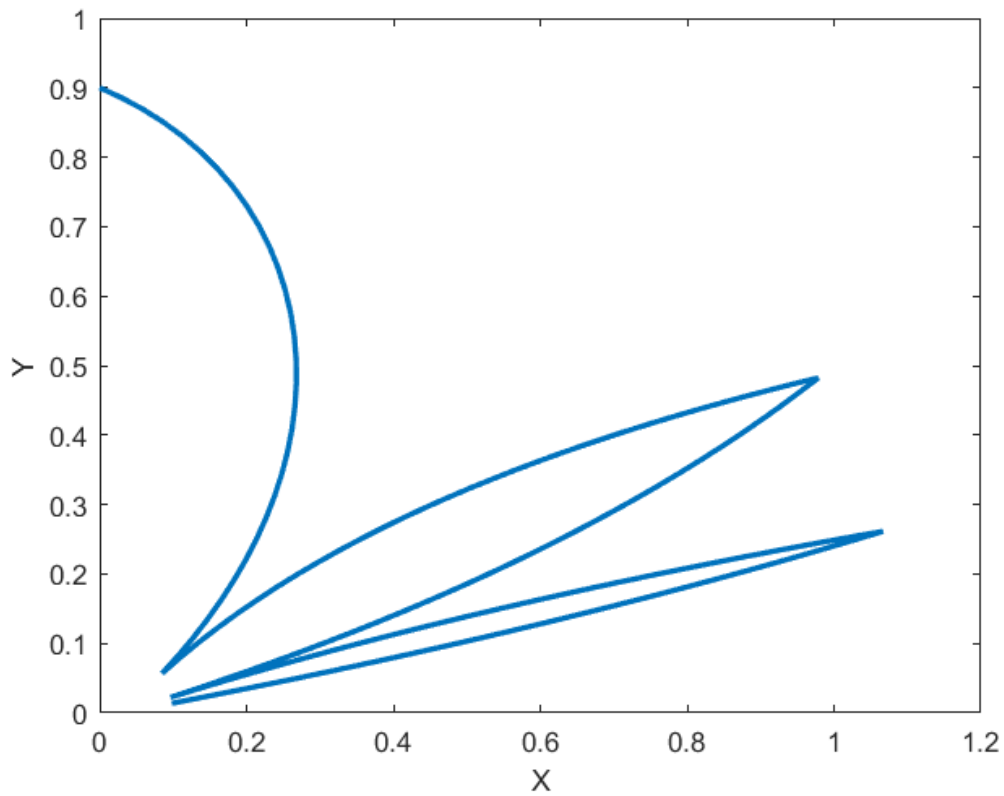


Obrázek 6.4: Trajektorie s počáteční podmínkou  $Y_0 = 0.6$  a s počáteční volbou klesající trajektorie.



Obrázek 6.5: Trajektorie s počáteční podmínkou  $Y_0 = 0.9$  a s počáteční volbou rostoucí trajektorie. Je zde vidět chování řešení v blízkosti limitního konstantního řešení.





Obrázek 6.6: Trajektorie s počáteční podmínkou  $Y_0 = 0.9$  a s počáteční volbou klesající trajektorie. Zde ilustrovaný případ zahrnuje "otáčku" do protisměru v první části trajektorie.



# Kapitola 7

## Závěr

Práce měla za cíl sestavení, analýzu a případně i řešení základních modelů z oblasti úloh o pronásledování. Tato oblast aplikace diferenciálních rovnic je zde reprezentována pěti modely.

První kapitolu jsem věnovali Perraultovu problému, který je zde uveden jako motivační úloha a můstek ke složitějším problémům. Druhá kapitola se zabývá problémem Pierra Bouguera o pronásledování obchodní lodi piráty. Kromě sestavení modelu popisujícího základní úlohu jsme se v této kapitole věnovali situaci, kdy jsou obchodníci pronásledováni dvojicí konkurenčních pirátských posádek, které mají vůči sobě zcela obecnou polohu. Výsledkem těchto úvah je vzorec pro vypočtení rychlosti, kterou musí disponovat loď, která své pronásledování zahajuje později tak, aby dostihla obchodní loď ve stejný moment jako první posádka. V následující kapitole jsme se zabývali pronásledováním po kružnici, což je analogie Bouguerovy úlohy jen s tím rozdílem, že pronásledovaný uniká po kružnici. Tato úloha je zde nejprve rozvedena pro variantu, kdy pronásledující volí strategii ryzího pronásledování (tzv. Hathawayova úloha) a následně je model sestaven i pro alternativní strategii, kdy se pronásledující pohybuje tak, že se v každém okamžiku nachází na spojnici polohy pronásledovaného a středu kružnice. Pro tuto dvojici úloh je zajímavé, že pro  $k = 1$  (poměr rychlostí pronásledujícího a pronásledovaného) v případě ryzího pronásledování dojde k dostižení až v nekonečnu, kdežto při alternativní strategii dojde k dostižení přesně po oběhnutí čtvrtkružnice. V páté kapitole jsme se věnovali úloze o hlemýždi na elastickém popruhu. V této kapitole je kromě klasického případu, kdy je popruh natahován konstantní rychlostí, detailně rozebrán i případ, kdy se volný konec popruhu vzdaluje s konstantním zrychlením. Zajímavým výsledkem zkoumání chování tohoto upraveného modelu je, že na rozdíl od verze, kdy je rychlost volného konce popruhu konstantní, záleží dostižení volného konce popruhu hlemýžděm na volbě konstant. Poslední úlohou je Baileyho úloha. Jedná se o jakousi inverzní úlohu k Bouguerově úloze. V tomto případě se pronásledující pohybuje po přímce a pronásledovaný se musí pohybovat tak, aby měl mezi sebou a pronásledujícím neustále optickou překážku a nebyl tak spatřen.

Autor při zpracování vycházel z doporučených zdrojů, některé pasáže jsou však původní. Jedná se o vybrané partie sekcí 3.2.1 a 3.2.2, celou sekci 5.2 a v neposlední řadě sekci 6.1.4, kde bylo provedeno vymezení vůči některým tvrzením v doporučené literatuře.

Na tuto práci by bylo možné navázat a zpracovat složitější pronásledovací modely. Velmi zajímavá by také mohla být práce, která by se zabývala hledáním optimálních trajektorií v jednotlivých úlohách. Mohli bychom tak určit optimální pronásledovací respektive únikové strategie.



# Literatura

- [1] BAILEY, Herbert R.: The Hiding Path. *Mathematics Magazine* [online]. 1994, 1994(1), 40-44 [cit. 2021-03-16]. Dostupné z: <https://www.maa.org/sites/default/files/Bailey55410950.pdf>
- [2] BORNEMANN, F. *On Hathaway's Circular Pursuit Problem* [online]. 2017 [cit. 2021-03-15]. Dostupné z: <https://www-m3.ma.tum.de/foswiki/pub/M3/Allgemeines/FolkmarBornemannPublications/hathaway.pdf>
- [3] HERRMANN, Norbert. *The Snail–Racehorse Problem. The Beauty of Everyday Mathematics*. [online]. Berlín, Heidelberg, 2012 [cit. 2021-5-21]. ISBN 978-3-642-22103-3. Dostupné z: [https://doi.org/10.1007/978-3-642-22104-0\\_9](https://doi.org/10.1007/978-3-642-22104-0_9)
- [4] NAHIN, Paul J. *Chases and Escapes: The Mathematics of Pursuit and Evasion*. 3rd ed., revised. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 2012. ISBN 978-0-691-15501-2.