



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A BIOMECHANIKY

INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND BIOMECHANICS

ANALÝZA VIBRACÍ INTERIÉRU JEDOUCÍHO VLAKU

INTERIER VIBRATION ANALYSIS OF MOVING TRAIN

DIPLOMOVÁ PRÁCE

MASTER'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Bc. Gabriel Železník

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

doc. Ing. Zdeněk Hadaš, Ph.D.

BRNO 2022

Zadání diplomové práce

Ústav:	Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky
Student:	Bc. Gabriel Železník
Studijní program:	Mechatronika
Studijní obor:	bez specializace
Vedoucí práce:	doc. Ing. Zdeněk Hadaš, Ph.D.
Akademický rok:	2021/22

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma diplomové práce:

Analýza vibrací interiéru jedoucího vlaku

1. Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Práce je zaměřena na vytvoření zjednodušeného dynamického modelu kolejíště a vlaku pro účely zjišťování odezvy jednotlivých prvků soustavy (např. vibrace interiéru atd.). Celá soustava kolejíště a její interakce s vlakovou soupravou bude realizována pomocí metod dynamiky soustav těles. Takto vytvořený model je vhodný pro analýzu kmitání jednotlivých prvků systému, především v souvislosti s modelovanými případy opotřebení trati či soupravy.

2. Cíle diplomové práce:

1. rešerše výpočtových modelů pro simulaci dynamiky interakce kolejíště/vlaková souprava,
2. sestavení multi-body systému na základě parametrů dostupných v literatuře,
3. analýza odezvy systému na vstupní parametry jízdy, včetně mimořádných stavů, např. opotřebení klíčových komponent,
4. stanovení odezvy vozu pro potřeby analýzy vibrací interiéru,
5. analýza kmitání vybraných komponent interiéru vozu.

3. Seznam doporučené literatury:

OUYANG, H., 2011. Moving-load dynamic problems: A tutorial (with a brief overview). 2011.

GAO, M. Y., P. WANG, Y. CAO, R. CHEN a C. LIU, 2016. A rail-borne piezoelectric transducer for energy harvesting of railway vibration. Journal of Vibroengineering. 18(7), 4647–4663. ISSN 1392-8716.

CAHILL, P, N.A.N. NUALLAIN, N. JACKSON, A. MATHEWSON, R. KAROUMI a V. PAKRASHI, 2014. Energy Harvesting from Train-Induced Response in Bridges. Journal of Bridge Engineering. 19(9), 04014034.

CLEANTE, V.G., M.J. BRENNAN, G. GATTI a D.J. THOMPSON, 2017. On the spectrum of rail vibration generated by a passing train. Procedia Engineering. 199, 2657–2662.

Termín odevzdání diplomové práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2021/22

V Brně, dne

L. S.

prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc.
ředitel ústavu

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.
děkan fakulty

ABSTRAKT

V této diplomové práci je sestaven multi-body systém, simulující jízdu vlaku po železniční trati. Model je zaměřen na vznik vibrací v případě defektních stavů. Předmětem práce je zkoumání vlivu vibrací v interiéru kolejového vozidla. V první části práce je provedena rešerše publikovaných dynamických modelů. Jsou popsány různé možnosti při modelování železniční tratě a vlaku. Dále je v rámci rešerše představeno několik způsobů řešení, které lze pro simulaci jízdy vlaku po trati použít. Na základě rešerše byla konkrétně specifikována struktura modelu a způsob řešení. Hlavní oblastí zájmu je kolej, na které vibrace při kontaktu s kolem vznikají, a skříň vozu, ve které budou vibrace dále analyzovány. Z tohoto důvodu byly obě tyto části modelovány jako flexibilní tělesa. Sestavený model využívá pro popis flexibilních těles diskretizaci metodou konečných prvků. Výpočet v časové doméně je proveden pomocí zobecněných souřadnic a modální superpozice. V práci je podrobně popsáno sestavení modelu. Celý model je sestaven v prostředí Matlab a všechny kódy jsou součástí přílohy. Model umožňuje libovolně měnit všechny parametry tratě i vozu, včetně jejich geometrických vlastností. V modelu jsou zahrnuty 4 excitační mechanismy simulující tyto defekty: ploché kolo, podemletý pražec, poškozený pražec a opotřebení kolejnice. Po sestavení modelu jsou provedeny simulace za bezporuchových podmínek a podrobný popis chování jednotlivých komponent systému. Následně jsou provedeny simulace poruchových stavů, načež je kombinací všech defektů sestavena odezva skříně vozu pro analýzu vibrací v interiéru. V poslední části je odezva získaná z modelu převedena do frekvenčního spektra a využita k analýze náhodných vibrací v interiéru vozidla v prostředí Ansys. K analýze slouží 3D model stropního obložení vlaku, na kterém jsou porovnány účinky statického a dynamického zatížení. Pomocí analýzy náhodných vibrací byla stanovena oblast s největším napětím. V závěru je navržena úprava dílu, která vede ke zlepšení pevnostních vlastností sestavy.

KLÍČOVÉ SLOVA

multi-body systém, dynamika jedoucího vlaku, dynamika tratě, analýza defektů, vibrace interiéru vozu

ABSTRACT

In this work, a multibody system of a passing train on a railway is created. The model is focused on the vibrations, which are related to defect conditions. The subject of this work is to investigate the effect of vibrations in the interior of a rail vehicle. In the first part of the work, research of published dynamic models is performed. Various options for track and train modeling are described. Furthermore, the research presents several solution methods that can be used to simulate the moving train. Based on the research, the structure of the model and the method of solution were determined. The main areas of interest are the track, on which vibrations occur in contact with the wheel, and the car body, in which the vibrations will be further analyzed. For this reason, both parts were modeled as flexible bodies. The assembled model uses finite element discretization to describe flexible bodies. The time domain simulation is done by using generalized coordinates and modal superposition. The work describes the construction of the model in detail. The whole model is written in the Matlab and all codes are part of the appendix. The model allows change of all the parameters of the track and the car, including their geometric dimensions. The model includes 4 excitation mechanisms simulating the following defects: flat wheel, lifted sleeper, damaged sleeper and rail wear. After the model algorithm is fully described, the simulations without any defect are performed and a behavior of each system component is described. Finally, simulations of defect conditions are performed. Thanks to the combination of all defect conditions the response of the car body for the analysis of vibrations in the interior is compiled. In the last part, the compiled response in the frequency domain is used for the analysis of random vibrations in the vehicle interior in the Ansys environment. A 3D model of the train's ceiling paneling is used for the analysis, on which the effects of static and dynamic loads are compared. The area with the highest stress was determined by random vibration analysis. In the end, the modification of the part is proposed, which leads to the improvement of the strength properties of the assembly.

KEY WORDS

multibody system, moving train dynamics, railway dynamics, defect analysis, vehicle interior vibrations

Bibliografická citace

ŽELEZNÍK, Gabriel. *Analýza vibrací interiéru jedoucího vlaku* [online]. Brno, 2022 [cit. 2022-05-20]. Dostupné z: <https://www.vutbr.cz/studenti/zav-prace/detail/139966>. Diplomová práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky. Vedoucí práce Zdeněk Hadaš.

Čestné prohlášení:

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci na téma „Analýza vibrací interiéru jedoucího vlaku“ vypracoval samostatně s použitím odborné literatury a pramenů, uvedených na seznamu, který tvoří přílohu této práce.

V Brně dne

.....

Podpis autora

Poděkování

Tímto bych chtěl poděkovat všem, kteří mi pomáhali s vypracováním této diplomové práce. Předně bych chtěl poděkovat mému vedoucímu práce doc. Ing. Zděnkovi Hadašovi, Ph.D., za odbornou pomoc. Dále bych chtěl poděkovat za pomoc všem kolegům z práce, mé ženě a celé rodině.

Obsah

1	Úvod.....	11
2	Formulace problému a stanovení cílů	13
3	Teoretický přehled problematiky	14
4	Matematický popis dynamiky vlaku a železniční tratě	16
4.1	Modely dle prutové teorie	16
4.1.1	Euler-Bernoulliho prutová teorie (E-B).....	16
4.1.2	Timoshenkova prutová teorie	17
4.2	Typy podloží	17
4.3	Modely vozu.....	21
4.4	Ukázka různých typů řešení	24
4.4.1	Spojité podloží řešené pomocí bezrozměrné souřadnice.....	24
4.4.2	Spojité podloží řešené pomocí Fourierovy transformace	26
4.4.3	Diskrétní podloží řešené analyticky.....	27
4.4.4	Numerické řešení diskrétního podloží.....	30
5	Cíle práce	33
6	Sestavení dynamického modelu.....	35
6.1	Sestavení modelu vozu.....	35
6.1.1	Sestavení submatic skříně vozu.....	35
6.1.2	Sestavení submatic podvozku a kol.....	38
6.2	Sestavení modelu tratě.....	41
6.3	Algoritmus propojení modelu vozu a tratě.....	44
6.4	Řešení problému vlastních hodnot	46
6.4.1	Normalizace vlastních tvarů.....	46
6.5	Výpočet zobecněné souřadnice a modální superpozice	47
6.5.1	Sestavení matice tlumení.....	48
6.5.2	Výpočet zobecněné souřadnice a zpětný převod do normálních souřadnic	48
6.6	Simulace pohybujícího se zatížení	49
6.6.1	Zahrnutí setrvačnosti hmoty v působícím zatížení.....	50
6.6.2	Zahrnutí dynamických silových účinků	51
6.7	Algoritmus simulace	51
7	Simulace chování systému	53
7.1	Přehled použitých parametrů	53

7.2	Korekce vlastních tvarů.....	55
7.3	Odezvy systému za normálních podmínek	58
7.4	Odezvy systému s defektem.....	63
7.4.1	Simulace plochého kola	63
7.4.2	Odezva systému při přejezdu přes podemletý nebo poškozený pražec	66
7.4.3	Simulace jízdy po opotřebené koleji.....	69
7.5	Frekvenční zátěžové spektrum pro analýzu vibrací v interiéru	71
8	Dynamická analýza interiérového prvku	73
8.1	Vyšetřovaná část interiéru	73
8.2	Statická analýza	74
8.3	Dynamická analýza náhodných vibrací	75
8.4	Analýza modifikovaného stropního panelu.....	77
9	Závěr.....	80
10	Zdroje	82
	SEZNÁM OBRÁZKŮ	87
	SEZNAM TABULEK.....	89
	SEZNAM PŘÍLOH	90

1 Úvod

V rozvoji dopravní infrastruktury hraje železniční doprava významnou roli. Díky vysoké efektivitě jsou kolejová vozidla zastoupena ve všech dopravních odvětvích. Tramvaje a metra tvoří skupinu tzv. lehkých vozidel, zajišťujících přepravu ve městech. Další skupiny tvoří regionální a vysokorychlostní vlaky, které pokrývají osobní dopravu na větší vzdálenosti. Kromě osobní přepravy hraje železnice také významnou roli na poli průmyslové přepravy. Ve všech oblastech dopravy je současný trend vývoje zaměřen na zvýšení efektivity. Úroveň železniční dopravy stále roste, a to jak po stránce rychlosti, tak po stránce komfortu pasažérů. Na železnici, podobně jako v jiných dopravních odvětvích, je kladen velký důraz na bezpečnost. Provozní rychlosti vlaku musí být kromě jeho samotné konstrukce přizpůsobena také železniční trať. Historie ukázala, jak fatální mohou být následky technického pochybení a nedůsledné údržby, když v roce 1998 v Eschede v Německu vykolejil vysokorychlostní vlak ICE. Není proto divu, že je zavedeno nesmírné množství norem, které dbají na dodržování bezpečnosti při provozu. Například na nové regionální vozidlo je při vývoji kladeno normami až 5000 různých požadavků, které jsou součástí technických norem dané země či kontinentu. Splnění požadavků se dokládá technickou dokumentací, která pojednává o provedeném ověřovacím testu či výpočtu. Aby se omezily výdaje za opakované typové testy, které vždy vyžadují již vyrobené díly, využívá se hojně počítačových simulací. Výkon techniky dnes umožňuje provádět výpočetně náročné simulace, které pomáhají při vývoji a optimalizaci technických řešení. Ve sféře železniční dopravy je experimentální testování obzvláště nákladné, proto se počítačové simulace využívají v hojné míře. Za každou simulací stojí algoritmus, který popisuje konkrétní jev pomocí matematických vztahů, jejichž zavedení je výsledkem mnoholeté vědecké činnosti. Snahou vědeckých výzkumů v oblasti dynamiky železnice je pochopení vyskytujících se fenoménů, jejich matematický popis, predikce chování při změně vstupních parametrů a následné ověření předpokladů měření. Podrobnější znalosti v dané oblasti poté vedou k efektivním způsobům řešení, omezení bezpečnostních rizik a posouvání celkové technické úrovně.

Důležitou oblastí v železniční oblasti je samotný kontakt kola s kolejnicí, jakožto místo velkého silového přenosu. Vzruch, který tímto přenosem vzniká zásadně ovlivňuje životnost tratě i vlaku. Vznik vibrací je závislý na provozním stavu tratě i vozu. Závislost projevu defektu tratě na vozidlo, stejně jako závislost projevu defektu vozu na trať, je předmětem mnoha výzkumu. Pomocí měření v reálném čase je například v některých zemích, na základě odezvy tratě při přejezdu vozu, vyhodnocena míra opotřebení jeho kol. Vlaky, které jsou v horším stavu, musí následně platit větší sazbu za použití tratě. Podobně se vyhodnocuje také stav trati. Mezi nejčastější poruchy na železnici patří ploché kolo, opotřebená trať nebo podemletý pražec. Porucha jedné části vede k většímu opotřebení části druhé, proto je velice důležitá pravidelná kontrola, a s ní spojená údržba tratě i vozu. K identifikaci rozdílných druhů poruch se využívají matematické modely, díky kterým je možné simulovat chování jednotlivých částí vozu i tratě při poruše. Největší pozornost byla

doposud věnována deformaci samotného kola a vlivu deformovaného kola na kolej. Postupně se vliv těchto defektů začal zohledňovat při návrhu vypružení vozů a výstavbě železničních koridorů. Pomocí matematických modelů a simulací byly stanoveny frekvenční pásma, ve kterých se jednotlivé poruchy na mechanických částech projevují, což bylo možné dále zohlednit v konkrétních konstrukčních řešeních. V poslední době je díky výpočetnímu výkonu možné sestavovat komplexní dynamické modely celé železniční soustavy, což umožňuje detailněji zkoumat vzájemné interakce.

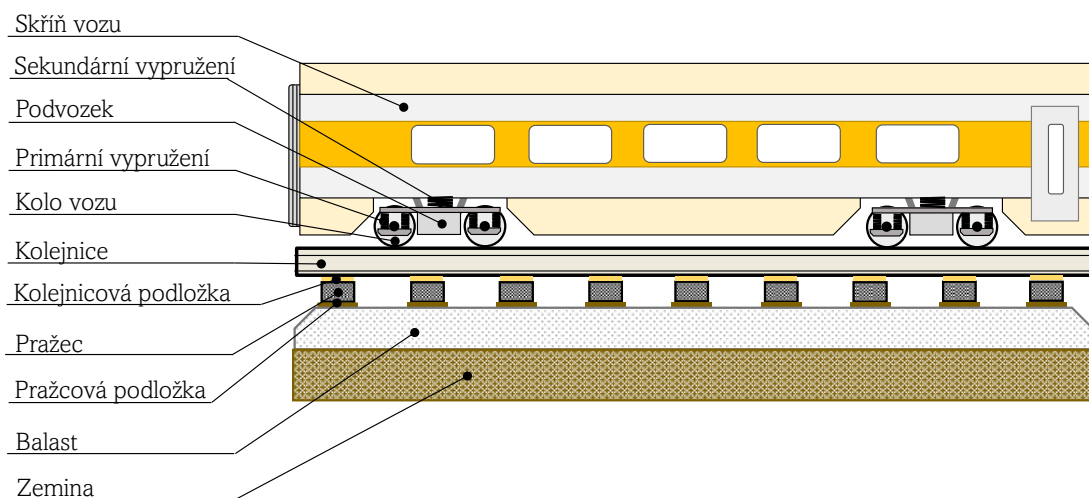
V osobní kolejové přepravě je jedním z hlavních kritérií komfort pasažérů, na který mají hlavní vliv dvě následující složky. Zaprvé podvozek, který je osazen primárním a sekundárním vypružením, jehož hlavní funkcí je eliminace vibrací vstupujících do skříně vozu. Druhou složkou jsou interiérové prvky, se kterými pasažér při jízdě přichází do přímého kontaktu. Mezi takové prvky patří například sedadla vozu, toaleta, ventilace, madla a spousta dalších věcí, které musí splňovat svou mechanickou funkci a zároveň požadavky na design. Jelikož interiérové prvky přicházejí do přímého kontaktu s člověkem, jsou na ně rovněž kladeny vysoké bezpečnostní požadavky. Normy ve většině případů předepisují zatížení, při kterém má daná součást splňovat určenou bezpečnost. Toto zatížení bývá téměř vždy statické. S dynamickým zatížením, které se projevuje zejména vlivem opotřebení částí podvozku či tratě, se v interiéru moc nepočítá. Téměř každý člověk se při jízdě kolejovým dopravním prostředkem setkal s vibracemi, které zásadně ovlivnily komfort při jízdě. Kromě ztráty komfortu mohou tyto vibrace vést také k poškození interiérových částí, u kterých se s tímto typem zatížení nepočítalo. Proto bude předmětem této práce analýza a vliv nejčastějších poruch na interiér kolejových vozidel.

2 Formulace problému a stanovení cílů

Za účelem analýzy vibrací v interiéru kolejového vozidla bude sestaven matematický model, pomocí kterého bude možné simulovat jízdu vlaku. Model bude popisovat chování tratě, vozu a jejich vzájemnou interakci. Dále umožní simulovat jízdu po poškozené trati a jízdu vozu s poškozenými koly. Hlavním výstupem z modelu bude odezva skříně vozu při jízdě poškozeného vozu po poškozené trati. Výsledná odezva bude následně sloužit jako vstup do analýzy v prostředí Ansys, ve kterém se porovnájí dynamické účinky, způsobené defekty, se statickými silovými účinky, které jsou předepsány normami. Pro porovnání bude sloužit konkrétní část interiéru.

3 Teoretický přehled problematiky

Dynamika vlaku a tratě je předmětem výzkumu již více než sto let. Během této doby přinesly výsledky vědecké činnosti v této oblasti výrazný nárůst efektivity a bezpečnosti provozu. Mezi prvními, kdo se problematikou dynamiky koleje zabýval byl Timoshenko, který v letech 1915–1930 publikoval články, zabývající se napětím v kolejnicích, zatížených statickou i dynamickou silou. Na jeho práci postupně navazovali další autoři, kteří zdokonalovali matematické popisy jednotlivých částí tratě a vozu. Velké množství publikací, které během let vznikly, poprvé přehledně zkompletovali v roce 1993 Knothe a Grassie [1]. V této publikaci je popsán postupný vývoj modelování dynamiky vozu a tratě, výsledky, kterých bylo dosaženo a různé přístupy při řešení. Jak již bylo zmíněno, prvním autorem byl Timoshenko, který modeloval kolej jako nekonečný prut dle Euler-Bernoulliho prutové teorie. Kolej byla uložena na homogenním elastickém podloží, které bylo popsáno jedním parametrem tuhosti. Výpočty byly prováděny ve frekvenční oblasti pomocí Fourierovy transformace. Dynamické účinky, způsobené pohybujícím se zatížením, dále detailněji popsal Frýba ve své knize [2]. Rozšíření modelů o další vrstvy prezentující pražce představil Sato, Y. [3]. Periodickou strukturou traťového podloží se zabývali Jezequel, L. [4] a Bogacz, R. [5]. V této době byly modely převážně lineární a řešení se hledalo v analytickém tvaru. Autoři prvního přehledu možných přístupů rozdělují vibrace soustavy zahrnující vlak a železniční trať, která je na Obr. 2.1, do dvou frekvenčních



Obr. 3.1 Schéma základních částí vozu a tratě

oblastí. Pásmo nízkých frekvencí od 0 do 20 Hz, ve kterém je důležitá především dynamika vozu a komfort během jízdy. Pásmo vysokých frekvencí je dle autorů potom vše nad 20 Hz a výrazně se v něm projevuje dynamika tratě. O několik let později Popp K., Kruse H., a Kaiser I. publikovali další přehled dynamiky vlaku [6], který je zaměřen na tzv. pásmo středních frekvencí. Toto pásmo dle autorů leží na intervalu 50-500 Hz a projevují se v něm především vady jako je deformace koleje, poškozená kola vozu nebo podloží tratě. Je-li předmětem zájmu pásmo středních frekvencí, musí být dané komponenty modelovány jako flexibilní tělesa, nikoliv jako dokonale tuhá.

Konkrétně to znamená, že v případě podrobné analýze pohybu a deformace pražců při přejezdu vysokorychlostního vlaku, by měly být pražce modelovány jako flexibilní tělesa. V obou publikacích [1], [6] se navíc autoři shodují, že Euler-Bernoulliho prutová teorie je aplikovatelná pouze do frekvencí okolo 500 Hz. Při zkoumání vysokofrekvenčních jevů (nad 500 Hz), jako jsou například jevy spojené s akustikou, nebo přenosu vibrací zemí do okolních budov, je nutné použít při modelování flexibilních těles Timoshenkovu prutovou teorii. Některé dynamické jevy nelze dostatečně přesně popsat lineárním modelem. Za silně nelineární se obecně považuje styk kola s kolejnicí, elasticita kolejových podložek nebo deformace balastu. Při simulaci těchto jevů nelze využít analytických přístupů k řešení, jako je Fourierova transformace, ale je nutné problém řešit numericky. S pokrokem výpočetní techniky se začaly hojně využívat numerické přístupy, které umožňují komplexní popis dynamiky vozu a tratě. Obyčejně se při řešení využívá metoda konečných prvků (FEM), nebo modální superpozice. Využití metody konečných prvků představil například Dong R.[7], který se ve své práci zabývá dynamickými vlivy plochého kola a mnozí další autoři, jejichž práce budou uvedeny při bližším popisu jednotlivých přístupů.

Mezi novější komplexní shrnutí poznatků patří práce Connollyho a spol. [8] z roku 2015, ve které je kromě klasického shrnutí dosavadních poznatků, detailně rozebráno chování jednotlivých částí soustavy vůz a trať, možnosti při modelování a různé aspekty, ovlivňující jejich chování. V roce 2021 publikoval Connolly a spol. další přehled [9], který podrobně shrnuje všechny možné přístupy při modelování tratě a vozu. Kromě struktury soustav jsou v článku uvedeny různé matematické přístupy při řešení, a to jak analytické, tak numerické. Autoři vědeckých publikací se v posledních letech shodují, že k přesnějšímu popisu dynamiky vlaku nebo tratě je třeba komplexnějších modelů, které zahrnují vždy model vozu, model tratě a jejich vzájemnou interakci. Dřívější přístupy se vždy zaměřily buď na dynamiku tratě a vůz zjednodušily na pohybující se zatížení po trati, nebo naopak, byl sestaven model vozu a jeho jízda byla simulována silovým působením na kola. Výpočetní technika však v dnešní době umožňuje sestavovat komplexní modely, které do výsledků, zaměřených na konkrétní oblast, dokážou zahrnout vlivy celé soustavy. Tento přístup je v anglické literatuře označován jako „*Vehicle-Track Coupled Dynamics*“ a mezi hlavní představitelé patří Zhai W., který na toto téma publikoval knihu [10]. V knize jsou představeny nejen 2D, ale i 3D dynamické modely včetně všech parametrů tratí i různých typů vozů.

Dynamika vlaku a koleje je komplexní problém, k jehož podrobnějšímu pochopení vede více než stoletý nepřetržitý výzkum. Jde o technickou oblast, která se stále vyvíjí a posouvá dopředu trend v dopravě po celém světě. Pro lepší vzhled do problematiky je vhodné začít studiem publikací poskytující celkový přehled přístupů při popisování dynamiky [1], [6], [8], [9], které čtenáře pomocí hojných referencí odkážou do konkrétní oblasti zájmu.

4 Matematický popis dynamiky vlaku a železniční tratě

Aplikace jednotlivých matematických modelů v oblasti dynamiky vozu a tratě může být velice odlišná, proto neexistuje jeden univerzální model, který by bylo možné prohlásit za ideální ve všech ohledech. Model zabývající se vlastnostmi pražců bude vypadat jinak, než model zkoumající vlivy rychlosti vozidla a opět odlišně bude vypadat model sloužící k odhadu parametrů struktury tratě. Obecně platí pravidlo, že při splnění požadované přesnosti má být model co nejjednodušší. Na jednoduchost modelu se klade důraz především z hlediska výpočetního času, který se může pohybovat v řádu hodin až dnů. Je proto velice důležité mít na samém počátku jasně definované, co je předmětem zkoumání, a na základě toho rozhodnout, co v modelu zahrnuto být má a co ne. V této kapitole budou blíže popsány používané prutové teorie, některé struktury kolejového podloží, přístupy při modelování vozidla a možné způsoby při řešení dynamiky soustavy.

4.1 Modely dle prutové teorie

Při popisu chování tratě byla kolej od počátku modelována jako flexibilní prut pomocí teorie dynamiky kontinuí. Postupem času některé výzkumné práce ve svých modelech začaly zahrnovat flexibilitu těles i v rámci jiných částí systému. Matematický popis flexibilních těles je řádově složitější než popis těles tuhých. Konkrétně při popisu prutových těles je nejběžnější Euler-Bernoulliho prutová teorie, která je díky zjednodušujícím předpokladům z matematického hlediska snadněji aplikovatelná. Druhou běžně používanou teorií je Timoshenkova prutová teorie, která má matematicky složitější popis, ale v některých aplikacích poskytuje lepší výsledky.

4.1.1 Euler-Bernoulliho prutová teorie (E-B)

Prutová teorie předpokládá malý osový moment setrvačnosti, proto zanedbává rotační setrvačnost elementu. Dále zanedbává úhlové přetvoření posouvajících sil, což znamená, že příčné průřezy jsou před i po deformaci kolmé na střednici. Rovnice popisující vertikální posuv je odvozena ze statické rovnováhy prutového elementu a je ve tvaru (4-1):

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right) + \rho A \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = f(x, t) \quad (4-1)$$

kde součin modulu pružnosti a kvadratického momentu setrvačnosti EI je ohybová tuhost a součin hustoty a průřezu ρA je hmotnost na jednotku délky. E-B je hojně užívaná, zejména při modelování koleje jako nekonečně dlouhého nosníku. Obecný předpoklad pro použití je takový, že délka prutu (koleje) by měla být minimálně 10x větší než jeho šířka. Tento předpoklad kolej obecně splňuje. V [11] je porovnání obou teorií v závislosti na poměru šířka/délka prutu, ze kterého vyplývá, že při poměru 1/8

jsou výsledky téměř shodné. Dalším omezením při některých analýzách může být maximální frekvence koleje, kterou lze s E-B teorií zahrnout. Knothe [1] uvádí frekvence do 500 Hz pro E-B teorii a až 2500 Hz pro Timoshenkovu prutovou teorii.

4.1.2 Timoshenkova prutová teorie

Tato teorie odbourává předešlé omezení zahrnutím posuvných sil. Rovnice pro vertikální posuv je opět odvozena ze statické rovnováhy uvolněného elementu (4-2).

$$EI \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} - \rho I \left(1 + \frac{E}{kG} \right) \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\rho^2 I}{kG} \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial t^4} = 0 \quad (4-2)$$

Význam prvních dvou členů je stejný jako u E-B teorie. Třetí výraz $\rho I (\partial^4 w(x, t) / \partial x^2 \partial t^2)$ vyjadřuje vliv rotační setrvačnosti. Poslední člen v rovnici je vliv posouvajících sil. Konstanta k je faktor korekce posouvajícího zatížení a G je modul pružnosti ve smyku. Teorie se především využívá ve vysokofrekvenčních aplikacích, které řeší problémy vysokorychlostních vlaků a akustiky.

4.2 Typy podloží

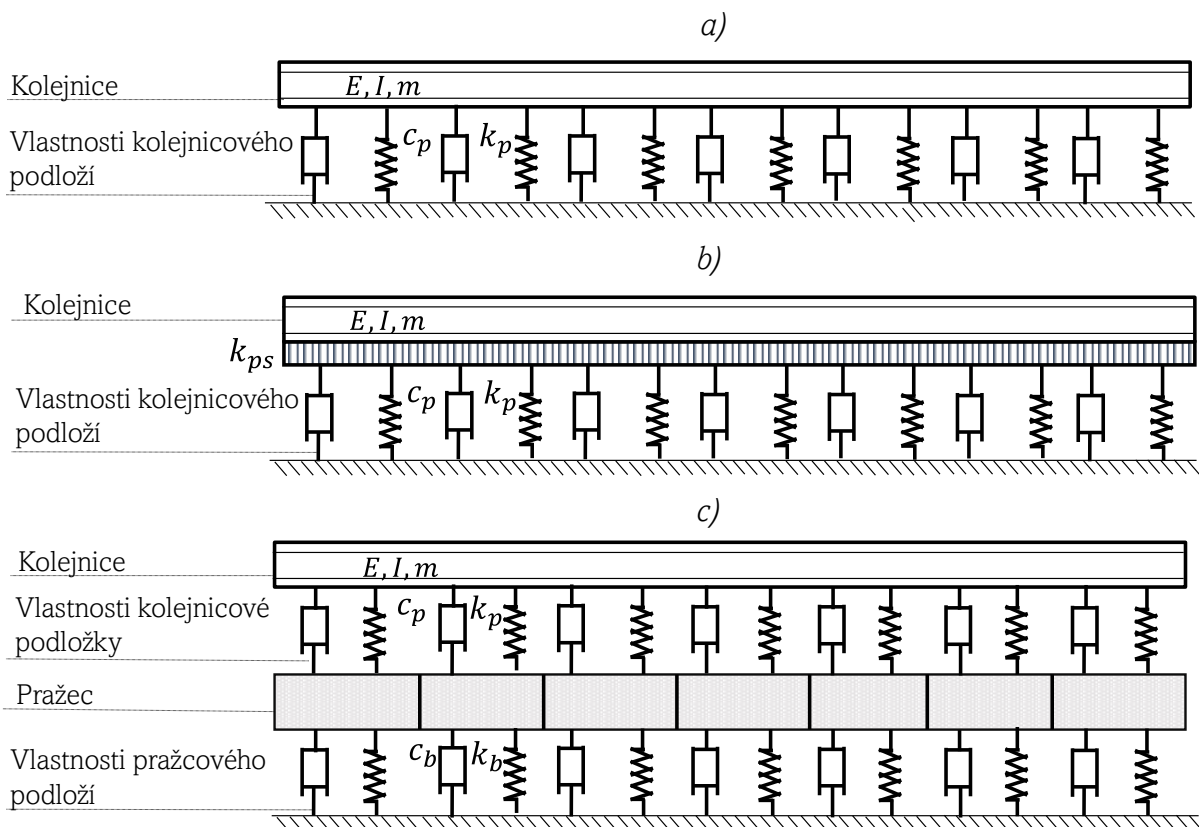
Model podloží hraje zásadní roli při modelování dynamiky tratě. Základní rozdíl je mezi podložím spojitým a diskrétním. U spojitého podloží je kolej běžně modelována jako nekonečně dlouhý nosník, který je uložen na homogenní visko-elastické struktuře, představující pražec, balast a zeminu pod kolejí. Konstrukci spojitého podloží si lze představit tak, že v bodě, ve kterém je kolej podepřena pražcem, jsou vlastnosti podloží popsány sadou parametrů, které jsou následně rozprostřeny po celé délce koleje. Tento přístup použilo a dále zdokonalilo mnoho autorů. Byly publikovány modely, které přidávají další vrstvy, díky kterým je možné přesněji simulovat chování jednotlivých částí podloží. Řešení těchto modelů je téměř vždy analytické, díky čemuž je z hlediska výpočetního výkonu tento přístup velice efektivní. Naopak mezi hlavní nevýhody patří to, že vlastnosti celého podloží jsou definovány jednou sadou parametrů, což znemožňuje simulace lokálních defektů. Další limitací je skutečnost, že simulovaná odezva odpovídá vždy místům, ve kterých je kolej podepřena pražcem. Obecně jsou modely s diskrétním podložím přesnější již při frekvencích nad 100 Hz [9]. V literatuře minulého století se lze často setkat se složitými matematickými popisy, pomocí kterých lze získat jejich analytické řešení. Díky dnešní výpočetní technice se lze u většiny složitějších modelů setkat s využitím numerických metod, které se neomezují jen na lineární systémy. V následujících podkapitolách budou blíže popsány některé konkrétní struktury podloží.

Na Obr. 3.1 jsou znázorněny nejběžnější typy spojitých podloží. Nejjednodušší model, se kterým se lze setkat je jednovrstvý model popsáný jedním parametrem na Obr. 3.1.a). Jde o modifikovaný druh Winklerova podloží. Původní Winklerovo podloží bylo složeno pouze z elastických členů, tudíž nezahrnovalo tlumení. S aplikací tohoto typu podloží se lze setkat v pracích [12]–[14], které popisují teoretickou aplikaci, nebo také v české práci [15], ve které jsou výsledky modelu porovnány se skutečným

měřením. Druhým typem je jednovrstvé podloží popsané dvěma parametry, které je na Obr. 3.1.b). V tomto modelu je přidána visko-elastická homogenní vrstva, která přenáší smykové zatížení. Tento typ podloží se v literatuře označuje jako Pasternakovo podloží a lze se s ním setkat například v práci [16], která porovnává různé přístupy při simulaci pohyblivého zatížení nebo také v teoretické studii [17]. Tuhost podloží se u jednovrstvých modelů určuje jako součet převrácených hodnot dílčích tuhostí dle vztahu (4-3)

$$\frac{1}{k_p} = \frac{1}{k_{rp}} + \frac{1}{k_b} \quad (4-3)$$

kde k_p je u jednovrstvého modelu tuhost celého podloží, která je složená ze součtu převrácených hodnot tuhosti kolejnicové podložky (v anglické literatuře „rail pad“) k_{rp} a tuhosti balastu k_b . Postupem času se ukázalo, že přesnost aproximace vlastností více komponent v jedné vrstvě je nedostatečná. Proto byly modely rozšířeny o další vrstvu viz Obr. 3.1.c), pomocí které lze přesněji simulovat odezvu tratě. Porovnání jednovrstvého a více vrstvého modelu lze opět nalézt v práci [15], a další teoretické i praktické aplikace v publikacích [18], [19].



Obr. 4.1 Modely tratě se spojitým podložím, a) Jednovrstvý jednoparametrický model, b) Jednovrstvý dvouparametrický model, c) Dvovrstvý dvou parametrický model

Modely se spojitým podložím ve většině případech používají Euler-Bernoulliho prutovou teorii k popsání kolejnice. Jednovrstvý model na Obr. 3.1.a) je popsán rovnicí (4-4).

$$EI \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} + c_p \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} + k_p w(x, t) = f(x, t) \quad (4-4)$$

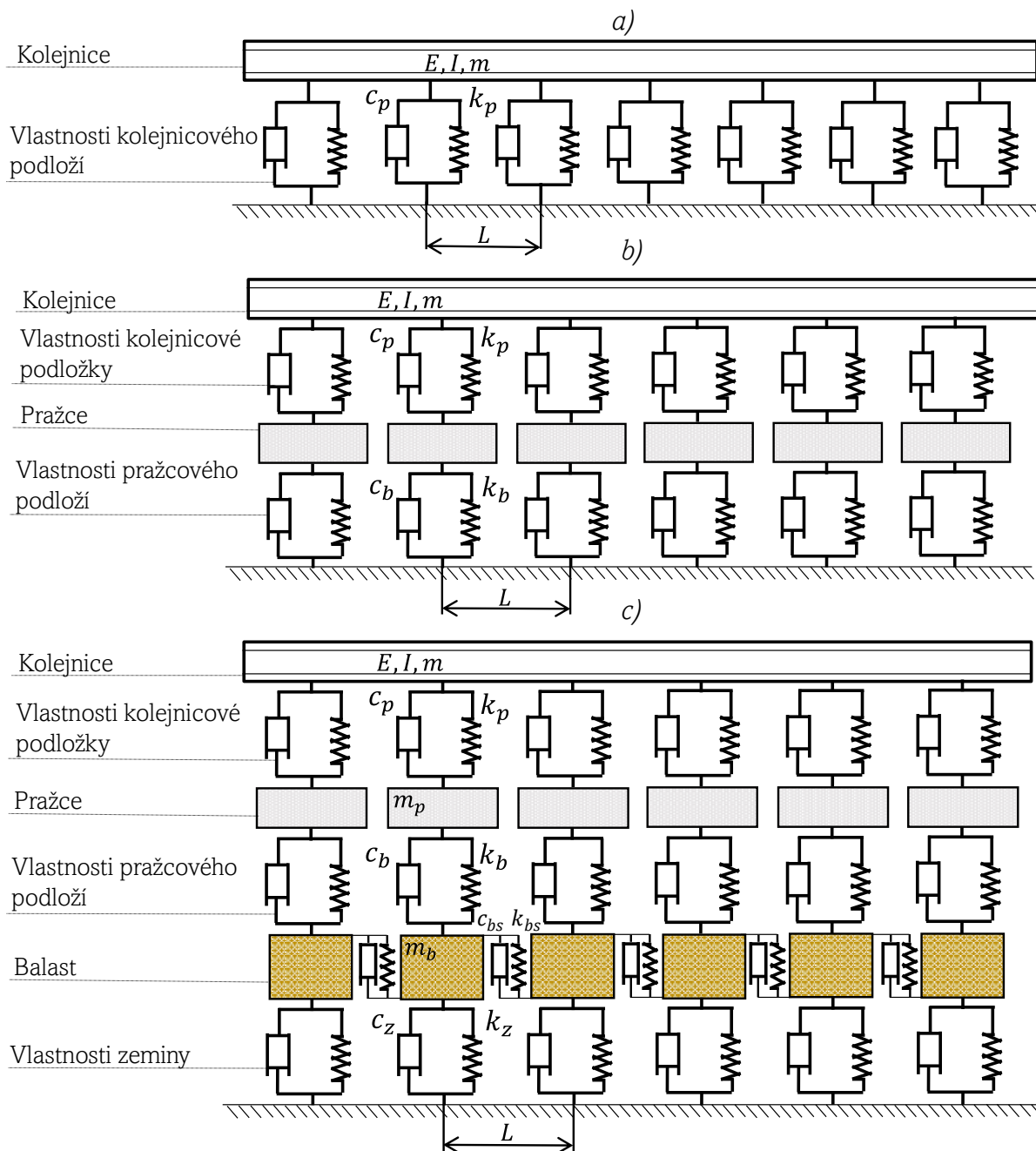
První dva členy popisují kolej dle výše popsané teorie. Třetí a čtvrtý člen popisují chování podloží, kdy parametr tuhosti se vždy váže s výchylkou koleje a parametr tlumení s parciální derivací výchylky podle času. Viskózní člen $c_p \partial w(x, t) / \partial t$ při čistě elastickém podloží (původní Winklerovo podloží) v rovnici chybí. V případě přidání visko-elastické vrstvy (Pasternakovo podloží) Obr. 3.1.b), přenášející smykové zatížení, je v rovnici (4-4) přidán člen $k_{ps}(\partial^3 w(x, t)) / (\partial x^3)$.

Chování dvouvrstvého modelu je popsáno pomocí dvou vzájemně propojených diferenciálních rovnic:

$$\begin{aligned} EI \frac{\partial^4 w_1(x, t)}{\partial x^4} + m_k \frac{\partial^2 w_1(x, t)}{\partial t^2} + c_p \left(\frac{\partial w_1(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial w_2(x, t)}{\partial t} \right) \\ + k_p (w_1(x, t) - w_2(x, t)) = f(x, t) \\ m_s \frac{\partial^2 w_2(x, t)}{\partial t^2} - c_p \left(\frac{\partial w_1(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial w_2(x, t)}{\partial t} \right) + c_b \frac{\partial w_2(x, t)}{\partial t} \\ - k_p (w_1(x, t) - w_2(x, t)) + k_b w_2(x, t) = 0 \end{aligned} \quad (4-5)$$

kde souřadnice s indexem 1 popisuje chování kolejnice a souřadnice s indexem 2 popisuje pražcovou vrstvu. Další druhy spojitých podloží a jejich detailní popis lze najít v publikacích [20], [21].

V případě diskretních podloží na Obr. 3.2 se stále rozlišuje počet vrstev modelu, ale už se nemluví o počtu parametrů, pomocí kterých je podloží popsáno. Je to dáno tím, že parametr každé podpory může mít jinou hodnotu. Příbýl parametr rozteče podpor L , který vyjadřuje periodicitu podloží a pro většinu způsobů řešení musí zůstat konstantní. Model na Obr. 3.2.a) má jen jednu diskretní vrstvu, kterou reprezentuje vlastnosti celého podloží. Dvouvrstvý model na Obr. 3.2.b) dokáže simulovat chování jednotlivých pražců, které jsou uloženy na visko-elastické vrstvě prezentující balast. Tento typ podloží byl použit v pracích [22], [23]. Třetí, a nejpokročilejší model podloží uvedený v této práci je na Obr. 3.2.c). Tento model kromě chování pražců zachycuje také chování balastu neboli kolejového lože, na kterém je pražec uložen. V praxi jde většinou o šterk s maximální velikostí 40 mm. Ahlbeck [24] navrhl pyramidový model balastu na základě teorie elasticity, který následně použili mnozí autoři ve svém modelech [25]–[27]. V práci [25] je tento typ podloží detailně popsán včetně výpočtu tuhosti balastu a odvození dynamických rovnic pro celou strukturu podloží.



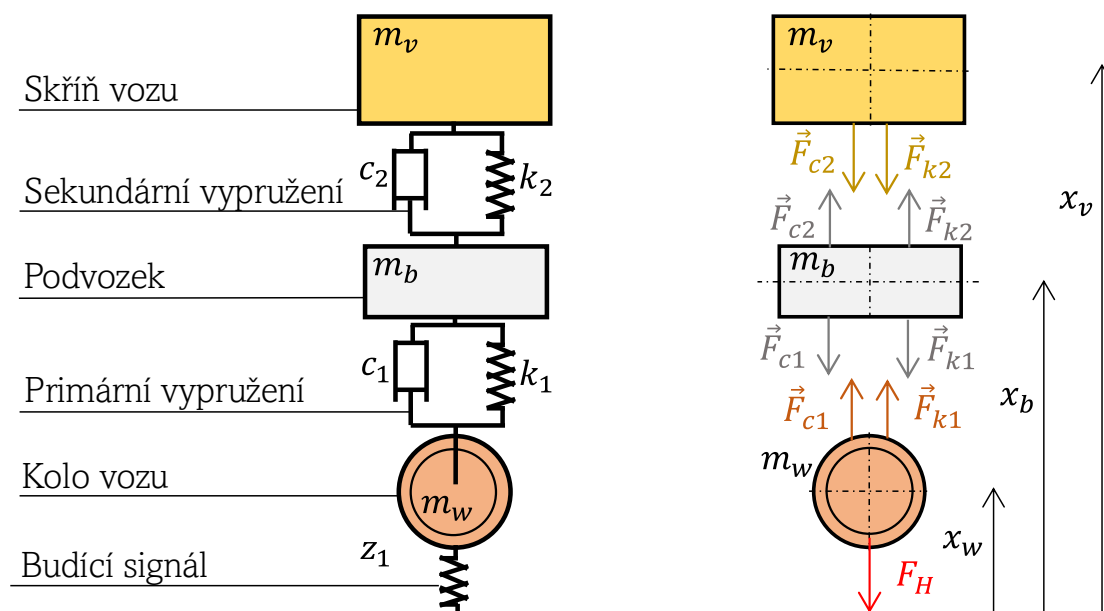
Obr. 4.2 Modely tratě s diskretním podložím, a) Jednovrstvý model, b) Dvouvrstvý model
c) Třívrstvý model

Se stejným modelem podloží se lze také setkat v publikacích, které uvažují celý model v 3D prostoru [28].

Možné řešení modelů s diskretním podložím bude stručně ukázáno v rámci přehledu možných přístupů řešení v následující podkapitole. Detailnější postup s matematickým odvozením i numerickou realizací bude probrán v rámci uvedení vlastního modelu.

4.3 Modely vozu

Podobně jako u modelu koleje a podloží, je také při modelování vozu v první části nutné stanovit stupeň komplexnosti modelu k zahrnutí všech sledovaných jevů. Práce, které se zabývají převážně dynamikou tratě a samotné vozidlo není hlavním předmětem zájmu, modelují celé vozidlo jako systém složený z dokonale tuhých těles „*rigid bodies*“. Na Obr. 3.3 je čtvrtinový model složený z tuhých těles. Základní struktura je následující. Kolo vozu o hmotnosti m_w spojené s podvozkem pomocí primárního vypružení, které se skládá z pružiny k_1 a tlumiče c_1 . Podvozek je následně spojen se skříň vozu pomocí sekundárního vypružení, které je složené opět z pružiny k_2 a tlumiče c_2 . Případné provázání vozu s modelem koleje je realizováno pomocí Hertzovy pružiny. Jde-li pouze o analýzu chování vozu jako takového, bývají kola buzeny signálem, který simuluje kontakt s kolejí.



Obr. 4.3 Čtvrtinový model vozu, a) Schéma modelu, b) Úplné uvolnění modelu

Model vozu složený z tuhých těles je popsán obyčejnými diferenciálními rovnicemi druhého řádu, které lze sestavit pomocí druhého Newtonova pohybového zákona. Pohybové rovnice vycházejí ze statické rovnováhy, která je pro čtvrtinový model znázorněno na Obr. 3.3.a).

Při uvažování gravitační síly je pohybová rovnice pro skříň vozu ve tvaru:

$$\vec{F}_{k2} + \vec{F}_{c2} + \vec{F}_{gv} = m_v \ddot{x}_v \quad (4-6)$$

kde síla \vec{F}_{k2} je síla generovaná pružinou sekundárního vypružení, \vec{F}_{c2} je síla generovaná tlumičem sekundárního vypružení a \vec{F}_{gv} je gravitační síla působící na skříň. Stejným způsobem lze psát rovnici pro podvozek:

$$\vec{F}_{k1} + \vec{F}_{c1} - \vec{F}_{k2} - \vec{F}_{c2} + \vec{F}_{gb} = m_b \ddot{x}_b \quad (4-7)$$

a pro kolo vozu:

$$\vec{F}_H - \vec{F}_{k1} - \vec{F}_{c1} = m_v \ddot{x}_w \quad (4-8)$$

kde \vec{F}_{k1} je síla v pružině a \vec{F}_{c1} je síla generovaná tlumičem primárního vypružení, \vec{F}_H je kontaktní síla. Jednotlivé síly jsou dány relativními výchylkami těles, které spojují.

$$\begin{aligned} \vec{F}_{k1} &= k_1(x_b - x_w) & \vec{F}_{c1} &= c_1(\dot{x}_b - \dot{x}_w) \\ \vec{F}_{k2} &= k_2(x_v - x_b) & \vec{F}_{c2} &= c_2(\dot{x}_v - \dot{x}_b) \end{aligned} \quad (4-9)$$

$$\vec{F}_H = k_2(x_w - z)$$

Souřadnice z závisí na typu modelu. V případě, že je v simulaci jenom vůz, tak tato souřadnice může představovat profil nerovné tratě. V modelech, ve kterých je simulována interakce mezi tratí a vozem, představuje souřadnice z výchylku koleje.

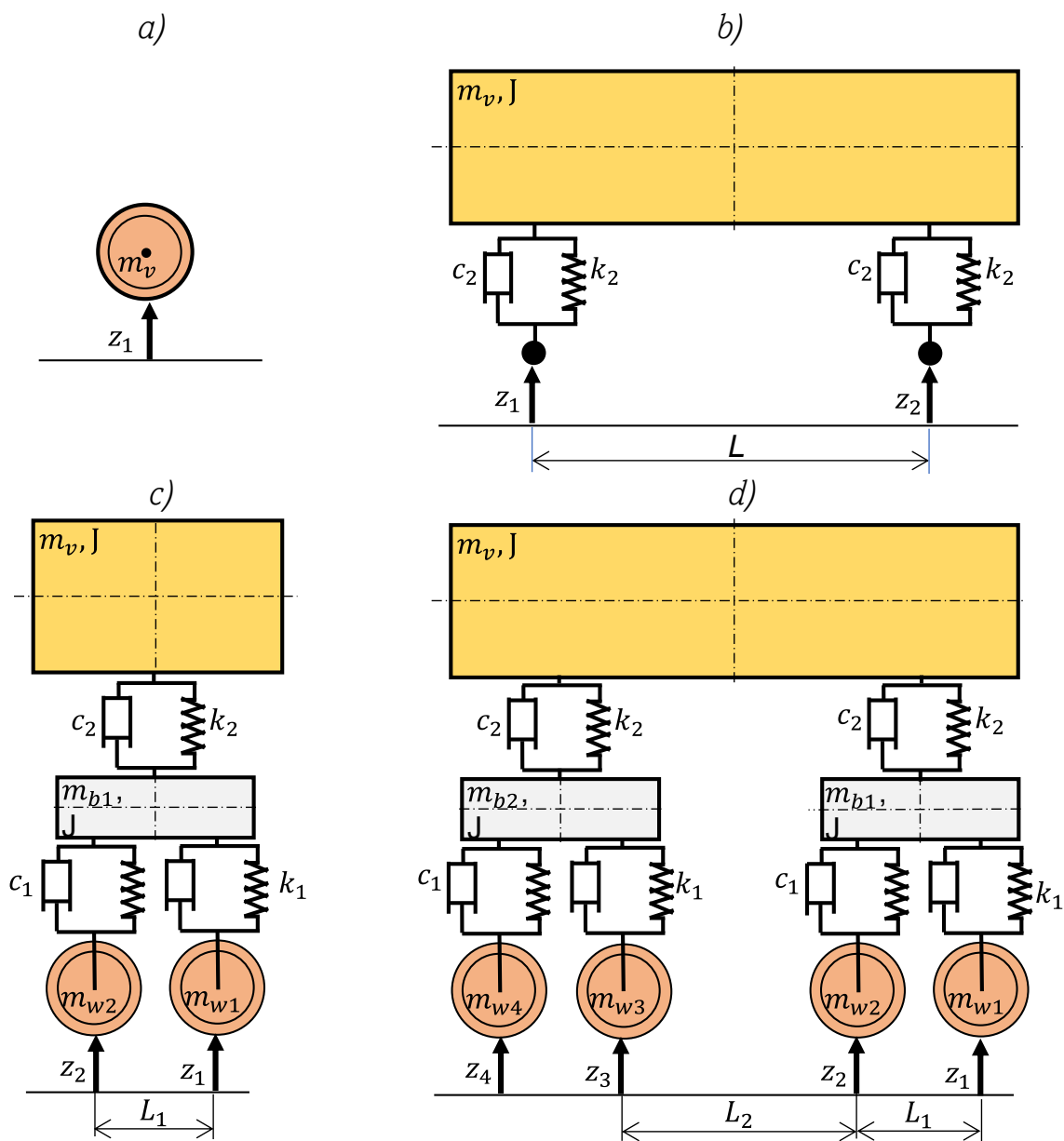
Kolik stupňů volnosti v modelu vozu je potřeba, a které jeho prvky jsou pro danou úlohu podstatné je vždy na vlastním uvážení. Na Obr. 3.4. jsou znázorněny některé typy modelů. Jak již bylo zmíněno, z počátku byla předmětem zkoumání především dynamika kolejí, a to tím způsobem, že model tratě byl zatížen silou, která se v čase pohybovala po délce koleje. Frýba [2] se zabýval účinky setrvačností hmoty při deformaci koleje. Model trati byl tedy svázán s jednoduchým modelem vozu, který je na Obr. 3.4.a), kdy hmota vozu je prezentována jedním tělesem. Porovnání při zatížení silou a hmotou je uvedeno v publikaci [16], ve které je znázorněn nárůst deformace koleje s rostoucí rychlostí, a to vlivem setrvačností hmoty. Zatížení hmotou bylo do modelu zaneseno ve formě:

$$p(t) = \left[m_v g - m_v \frac{\partial^2 w(vt, t)}{\partial t^2} \right] \cdot \delta(x - vt) \quad (4-10)$$

kde m_v je hmotnost vozu a druhý člen v závorce lze rozepsat jako:

$$\frac{\partial^2 w(vt, t)}{\partial t^2} = \left[v^2 \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} + 2v \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} \right] \quad (4-11)$$

První člen v závorce je ve tvaru dostředivého zrychlení, druhý ve tvaru Coriolisova zrychlení a třetí je vertikální zrychlení místa, ve kterém je umístěná hmota. Autoři uvádějí, že pro nižší rychlosti do 200 km/h lze první dva členy zanedbat [16], [29]. Zatížení jednou hmotou je v komplexnějších modelech nahrazeno zatížením celého vozu zobrazeného na Obr. 3.4.d), který při použití dokonale tuhých těles má 10 stupňů volnosti. Poloviční model na Obr. 3.4.b) bývá využíván k simulacím chování skříně. Takový model je v publikaci [30], ve které autoři zkoumají chování skříně buzené iregularitou tratě, nebo v článku [31], který se zabývá optimalizací parametrů tlumení za účelem redukce vibrací. Druhý typ polovičního modelu na Obr. 3.4.c), může být využit při zkoumání uplatnění adaptivního podvozku, jako tomu je v publikaci [32], kde autoři pomocí adaptivního PID regulátoru regulují vibrace vozu.



Obr. 4.4 Modely vozu, a) Model s jedním stupněm volnosti, b) Poloviční model s dvěma stupni volnost, c) Poloviční model s pěti stupni volnosti, d) Celý model s deseti stupni volnosti

Komfort pasažerů je jeden z hlavních předmětů zájmu při investigacích skříně vozu. Byly provedeny mnohé experimenty, jejichž výsledky jsou shrnuty v [8]. Bylo zjištěno, že vibrace v rozmezích 1–8 Hz způsobují potíže při čtení i psaní, zatímco frekvence do 1 Hz způsobují při jízdě nevolnost. Vypružení podvozku je vždy navrženo tak, aby tyto nízké frekvence byly potlačeny. Vznik těchto nežádoucích vibrací je způsoben v důsledku vad vozu nebo samotné tratě. Proti vzniku těchto defektů se bojuje pravidelnou údržbou tratě i vozu nebo konstrukčními inovacemi. Například při návrhu podvozků se klade důraz na redukci hmotnosti samotných kol, při zachování jejich pevnosti. Místo klasických pasivních tlumičů se začínají uplatňovat tlumiče adaptivní a k pravidelné diagnostice trati se začíná využívat sensorika rozmístěná podél trati, která vyhodnocuje dynamické jevy v reálném čase. Ve všech těchto aplikacích se lze setkat s matematickými modely, které slouží k optimalizaci návrhu, predikci chování navrženého technického řešení nebo k rekonstrukci poruchových stavů.

4.4 Ukázka různých typů řešení

V této podkapitole budou blíže představeny některé dynamické modely a jejich matematické řešení. Hlavní cíl této podkapitoly je poskytnout čtenáři matematický vhled do řešení dynamiky vozu a železniční tratě. Uvedené příklady slouží k získání základní orientace v používaných přístupech.

4.4.1 Spojité podloží řešené pomocí bezrozměrné souřadnice

Tento postup při řešení dynamiky koleje je teoreticky zpracován v knize doc. Otty Plaška [33] a prakticky použit v diplomové práci [15]. Vychází se z uvedené diferenciální rovnice pro visko-elastické podloží (4-4), která je řešena v homogenním tvaru a pohyblivé zatížení vyjádřené vztahem (4-12), je v řešení zahrnuto až v rámci okrajových podmínek.

$$f(x, t) = F_0(x - vt) \quad (4-12)$$

Kde F_0 je statická tíhová síla a v je rychlost vozu po trati. Následně se zavede bezrozměrná veličina s [–], přičemž L [m] je charakteristická délka kolejového roštu a λ je její převrácená hodnota.

$$s = \frac{x - vt}{L} = \lambda(x - vt); \quad \lambda = \frac{1}{L} = \sqrt[4]{\frac{k_p}{4EI}} \quad (4-13)$$

Dále jsou zavedeny poměry ke kritické rychlosti α a kritickému tlumení β následujícími rovnicemi:

$$\alpha = \frac{v}{2\lambda} \sqrt{\frac{m}{EI}} \quad (4-14)$$

$$\beta = \frac{c}{2m} \sqrt{\frac{m}{k_p}} \quad (4-15)$$

Kde $m[\text{kg} \cdot \text{m}^{-1}]$ je hmotnost koleje na metr. Po zavedení bezrozměrných veličin lze rovnici (4-4) v homogenním tvaru napsat následovně:

$$EI\lambda^4 \frac{d^4 w(s)}{ds^4} + m\lambda^2 v^2 \frac{d^2 w(s)}{ds^2} - c\lambda v \frac{dw(s)}{ds} + kw(s) = 0 \quad (4-16)$$

Do rovnice (4-16) se dosadí poměry (4-14) a (4-15) a výsledné řešení se hledá ve tvaru $w = e^{\gamma s}$. Po matematických úpravách se získá charakteristická rovnice ve tvaru (4-17)

$$\gamma^4 + 4\alpha^2 \gamma^2 - 8\alpha\beta\gamma + 4 = 0 \quad (4-17)$$

Pomocí komplexních kořenů $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ je dále řešen obecný tvar diferenciální rovnice

$$w(s) = A_1 e^{\gamma_1 s} + A_2 e^{\gamma_2 s} + A_3 e^{\gamma_3 s} + A_4 e^{\gamma_4 s} \quad (4-18)$$

Úloha je nesymetrická a řešení je nutné hledat na dvou samostatných intervalech, a to $s \in (-\infty; 0)$ a $s \in [0; \infty)$, kdy v nekonečnu se zavádějí nulové okrajové podmínky $w(\pm\infty) = 0$. Uprostřed intervalu $s = 0$ se zavádějí 4 okrajové podmínky spojitosti (průhyb, natočení, moment, tečná síla). V rámci okrajové podmínky síly je zavedeno zatížení, působící statický průhyb.

$$w_0 = \frac{F_0}{8EI\lambda^3} \quad (4-19)$$

Po zavedení okrajových podmínek se získá soustava čtyř rovnic o čtyřech neznámých, kterou je možné zapsat v maticovém tvaru jako:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & -\gamma_3 & -\gamma_4 \\ \gamma_1^2 & \gamma_2^2 & -\gamma_3^2 & -\gamma_4^2 \\ \gamma_1^3 & \gamma_2^3 & \gamma_3^3 & \gamma_4^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{bmatrix} = w_0 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix} \quad (4-20)$$

Výsledkem je relativní bezrozměrný průhyb $\eta(s)$ závislý na relativní bezrozměrné veličině s . Zpětnými transformacemi lze získat časový průběh průhybu w závislém na čase t v bodě $x = 0$.

Kulich [15] ve své práci uvádí také model s dvouvrstevným podložím a viskoelastickou vrstvou přenášející smykové zatížení, který je definován celkově pěti parametry. Dvěma parametry tuhosti, dvěma parametry tlumení a modulem pružnosti ve smyku smykové vrstvy. Z matematického hlediska je postup řešení dvouvrstvého modelu stejný jako u výše uvedeného jednovrstvého, jednotlivé kroky jsou však pracnější. Při porovnání modelu s reálnými daty je u jednovrstvého modelu relativně dobrá shoda v maximální výchylce, ale tvar průhybu je zcela odlišný. Dvouvrstvý model má kromě výchylky relativně dobrou shodu i v průběhu průhybu.

4.4.2 Spojité podloží řešené pomocí Fourierovy transformace

Pro modely se spojitým podložím je řešení diferenciální rovnice (4-4) velice často získáváno pomocí Fourierovy transformace. Převážně v minulém století byla tato analytická metoda pro svou výpočetní efektivitu hojně využívána k řešení pohybujícího zatížení, v angličtině „*Moving load problem*“. Podobně jako u předchozí metody se předpokládá čistě lineární chování modelu.

Fourierova transformace je definována dle rovnice (4-21):

$$W(\beta, t) = \int_{-\infty}^{\infty} w(x, t) e^{-i\beta x} dx \quad (4-21)$$

A inverzní Fourierova transformace jako:

$$w(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(\beta, t) e^{i\beta x} d\beta \quad (4-22)$$

kde β [rad/m] je vlnové číslo. Pohyblivé zatížení se zavádí v nejběžnější podobě vztahem (4-23).

$$F(x, t) = F_0 \delta(x - vt) \quad (4-23)$$

Kde δ je Dirackova funkce. Aplikováním transformace je získán následující tvar diferenciální rovnice (4-4).

$$EI(i\beta)^4 W(\beta, t) + m \frac{\partial^2 W(\beta, t)}{\partial t^2} + c \frac{\partial W(\beta, t)}{\partial t} + kW(\beta, t) = - \sum_{l=1}^n F_l e^{-i\beta(a_l + vt)} \quad (4-24)$$

Zatížení vozidla se uvažuje jako harmonické a lze psát ve tvaru $F_l = F_l e^{i\Omega t}$. Pomocí vlnového čísla β je možné buzení přepsat do tvaru (4-25).

$$\tilde{F}(\beta) = \sum_{l=1}^n F_l e^{-i\beta a_l} \quad (4-25)$$

Celý řešený systém se uvažuje jako lineární, z čehož vyplývá, že harmonické buzení musí způsobit také harmonickou odezvu. Tuto odezvu lze vyjádřit jako:

$$W(\beta, t) = \tilde{W}(\beta) e^{i\omega t} \quad (4-26)$$

Kde $\omega = \Omega - \beta v$ a Ω [rad/s] je frekvence buzení. Když se následně vztahy (4-26) a (4-25) dosadí do rovnice (4-24), provedou se matematické úpravy a vyjádří se $\tilde{W}(\beta)$, získá se vztah pro harmonickou odezvu systému:

$$\tilde{W}(\beta) = -\frac{\tilde{F}(\beta)}{EI\beta^4 - m(\Omega - \beta v)^2 + ic(\Omega - \beta v) + k} \quad (4-27)$$

Rovnice (4-27) se nejprve dosadí do (4-26) a následně do vztahu pro inverzní Fourierovu transformaci (4-22), čímž se získá harmonická odezva v prostorových souřadnicích.

$$\tilde{w}(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(\beta, t) e^{i\beta x} d\beta \quad (4-28)$$

Postup zde uvedený je pro jednovrstvý spojitý model. Pro dvouvrstvý model by byl postup podobný. Místo jedné diferenciální rovnice by byly dvě viz rovnice (4-5). Detailnější postup lze nalézt v [34]. Fourierova transformace při řešení problému s pohybujícím se zatížením je v dnešní době mnohými autory dobře zpracovaná. Pomyslný základ, ze kterého se odráží většina autorů vědeckých článků je kniha Ladislava Frýby [2], která svým obsahem popisuje velice podrobně problematiku elastických spojitých podloží a pohybujících se zatížení.

4.4.3 Diskrétní podloží řešené analyticky

Jak již bylo v úvodu zmíněno, pro diskrétně uložený model je matematické odvození řešení poměrně složitější. V této podkapitole bude zmíněn jen stručný popis dvou nejčastějších analytických přístupů, se kterými se lze v literatuře setkat.

Řešení pomocí Diracova hřebene (Dirac Comb approach) [4], [35] vychází z popisu diskrétního podloží pomocí Dirac Delta funkce $\delta(x - nL)$, která zajišťuje nenulovou odezvu podloží v místě pražce $x = nL$. V řešení je tedy zahrnut libovolný počet periodicky se opakující struktury podloží, což je vyjádřeno funkcí Diracova Hřebene $\Pi(x)$ vztahem (4-29).

$$\Pi(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - nL) \quad (4-29)$$

kde $\pm\infty$ v sumaci vyjadřuje zahrnutí všech podpor podél koleje. Uvažuje-li se kolej dle Euler-Bernoulliho teorie, lze rovnici (4-4) přepsat pomocí Diracova hřebene do tvaru:

$$EI \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} + \Pi(x) \left[kw(x, t) + c \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} \right] = F(x, t) \quad (4-30)$$

kdy první dva členy popisují vlastnosti samotné koleje a druhé dva členy v hranaté závorce vlastnosti podloží. Následně se pomocí Fourierovy transformace provede převod souřadnic prostoru a času (x, t) do souřadnic frekvence a vlnových čísel (β, ω) . S použitím již uvedených vztahů (4-21),(4-25),(4-26) lze diferenciální rovnici (4-30) napsat ve tvaru:

$$EI\beta^4 \tilde{W} - \omega^2 m \tilde{W} + [i\omega c + k] \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{W}(nL, \omega) e^{-i\beta nL} = \tilde{F} \quad (4-31)$$

kde $\hat{W}(nL, \omega)$ je odezva v místě podpory. V případě, že se uvažuje rovnoměrné rozložení podpěr n po délkách L , lze prohlásit strukturu za periodickou s periodou L . Díky této vlastnosti lze následně použít Floquetovu teorii pro periodické lineární diferenciální rovnice [36]:

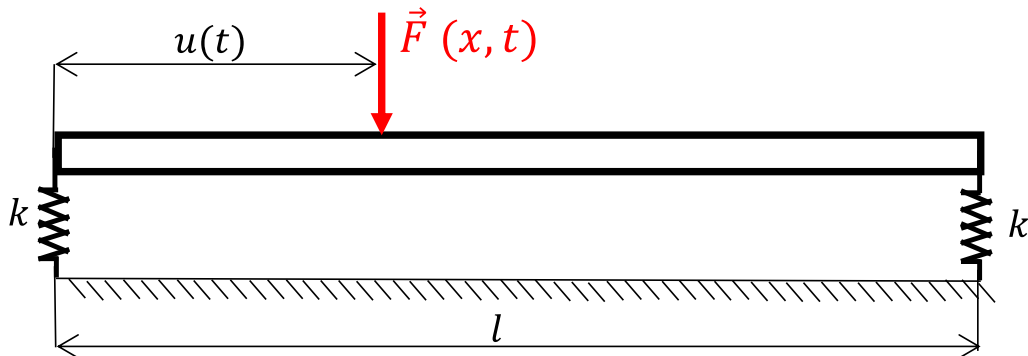
$$\hat{W}(x + nL, \omega) = \hat{W}(x, \omega) e^{ng} \quad (4-32)$$

kde g je komplexní koeficient šíření. Dle vztahu (4-32) lze na základě odezvy v místě podpory přepočítat odezvu v jakémkoliv jiném místě. Tato vlastnost platí také pro natočení, moment a sílu [37]. Tato metoda tedy zavádí diskretní podloží, ale s nutností zachování periodicity.

Řešení pomocí Greenovy funkce (Green's function approach) [38], [39], spočívá v nalezení Greenovy funkce $G(x)$, která odpovídá odezvě tratě na kontaktní sílu v konkrétním čase na konkrétním místě. Postup při řešení bude vysvětlen na jednoduchém případě prutu uloženém na obou koncích na pružinách, na který působí pohyblivé zatížení viz Obr. 3.5. Platí rovnice:

$$EI \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = F(x, t) \quad (4-33)$$

Pro tento typ řešení diskrétního podloží je zaveden vliv podpor až v rámci okrajových podmínek, proto na rozdíl od rovnice (4-4) chybí členy s tuhostí a tlumením.



Obr. 4.5 Prut uložený na elastických podporách

Pomocí Greenovy funkce se rovnice (4-34) přepíše do tvaru:

$$w(x, t) = G(x, u)F_0 \quad (4-34)$$

kde u představuje souřadnici zatížení. $G(x, u)$ je řešením diferenciální rovnice (4-35):

$$\frac{d^4 w(x)}{dx^4} - \psi^4 w(x) = \delta(x - u) \quad (4-35)$$

ve které je ψ frekvenční parametr definován jako:

$$\psi^4 = \frac{\omega^2 m}{EI} \quad (4-36)$$

kde ω je úhlová frekvence vyjadřující pohyb hmoty a je rovna $\pi v/l$. Řešení rovnice (4-35) je potom ve tvaru:

$$G(x, u) = \begin{cases} C_1 \cos(\psi x) + C_2 \sin(\psi x) + C_3 \cosh(\psi x) + C_4 (\sinh(\psi x)) & 0 \leq x \leq u \\ C_5 \cos(\psi x) + C_6 \sin(\psi x) + C_7 \cosh(\psi x) + C_8 (\sinh(\psi x)) & x \leq u \leq l \end{cases} \quad (4-37)$$

Konstanty $C_1 \dots C_8$ jsou získány tak, aby Greenova funkce splňovala tři typy okrajových podmínek, a to sice okrajové podmínky závislé na typu uložení prutu, okrajové podmínky spojitosti průhybu, natočení a momentu v bodě $x = u$ a okrajovou podmínku nespojitosti tečné síly v bodě $x = u$ [40]. Vypočítá-li se Greenová funkce pro všechny zvolené body na koleji, získá se celková odezva pomocí konvolučního integrálu dle

$$w(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, u - \tau) F_0(\tau) d\tau \quad (4-38)$$

kde τ je zvolený časový krok.

Zde uvedený postup činí jen základ do celého přístupu řešení. Ve většině případech je použita Greenova funkce v kombinaci s Fourierovou transformací ve frekvenční oblasti [41],[42].

$$\hat{G}(x, x_0, \omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{G}_n(x, \omega) e^{-2\pi n x / l} \quad (4-39)$$

Rovnice (4-39) vyjadřuje odezvu tratě \hat{G} v bodě x na impuls v bodě x_0 a při úhlové frekvenci ω . Použitím inverzní Fourierovy transformace se získá Greenova funkce v časové oblasti.

Z matematického hlediska se jedná o složitější přístup, ale dle výše uvedených autorů je tato metoda efektivní z hlediska výpočetního času. V základu je tato metoda stavěná na řešení lineárních úloh, ale byly publikovány semi-analytické přístupy, které dokáží zahrnout i nelineární kontakt kola s kolejnicí [39] [43].

4.4.4 Numerické řešení diskrétního podloží

Numerické řešení diferenciálních rovnic, které popisují dynamiku tratě, poskytují snadnější implementaci nelinearit, a to nejen v oblasti kontaktu kola s kolejnicí, ale také při řešení nelineárního chování podloží. Kromě nelinearit umožňují numerické přístupy detailnější zpracování zatížení ve formě pohybujícího vozidla. S tím jsou spojeny vědecké práce prezentující modely rozšířené o detailnější systém pohybujícího vozidla, které se v anglické literatuře označují názvem „*Vehicle-track coupled dynamics models*“. Simulace v časové doméně je realizována pomocí modální superpozice [23], [25], [26], [44], nebo pomocí přímé metody konečných prvků (FEM) [7], [22], [45]. V rámci této podkapitoly bude stručně popsána první metoda.

U propojených modelů (coupled models) se nejprve zvlášť popíše pohybovými rovnicemi chování jednotlivých sub-modelů jako je vůz, kolej nebo podloží, a následně se všechny dynamické rovnice poskládají do matice, reprezentující celý systém.

Pro jednoduchost bude opět uvažována kolej dle Euler-Bernoulliho teorie. Struktura podloží může být libovolná z možností na Obr. 3.2. Pro kolej platí diferenciální rovnice:

$$EI \frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial t^2} = - \sum_{i=1}^N F_{si}(t) \delta(x - x_i) + \sum_{j=1}^M P_j(t) \delta(x - x_{wj}) \quad (4-40)$$

Levá strana rovnice vyjadřuje vlastnosti koleje a je stejná jako v případě Greenovy metody (4-34), což je dáno stejnou prutovou teorií. Na pravé straně jsou však dvě silové složky. Síla F_{sl} je reakční síla podloží v místech, kde je kolej podepřena pražcem a N je celkový počet uvažovaných pražců. Síla P_j je dynamická síla způsobená kolem a M je počet uvažovaných kol. K převedení parciální diferenciální rovnice tratě na obyčejnou diferenciální rovnici je využita tvarová funkce ve tvaru:

$$Y_k(x) = \sqrt{\frac{2}{ml}} \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) \quad (4-41)$$

kde l je délka koleje a k je počet uvažovaných vlastních tvarů. Tato tvarová funkce je dána okrajovými podmínkami, které závisí na uložení prutu. Tvarová funkce (4-41) odpovídá prutu, který je oboustranně podepřen. Takto jednoduchá tvarová funkce lze využít z toho důvodu, že podepření po délce koleje se uvažuje čistě v silovém tvaru. Nabízí se možnost zahrnutí elastických podpor do okrajových podmínek, ale při větším množství uvažovaných podpor nelze tvarovou funkci získat v analytickém tvaru a numerické řešení je nestabilní. Díky tvarové funkci, která je mimo jiné výsledkem problému vlastních hodnot, lze řešení rovnice (4-40) psát jako:

$$w(x, t) = \sum_{k=1}^R Y_k(x) q_k(t) \quad (4-42)$$

kde $q_k(t)$ je k -ty tvar zobecněné souřadnice a R udává počet uvažovaných tvarů. Aplikací Ritzovy metody [46] lze získat obyčejnou diferenciální rovnici závislou pouze na čase pro k -ty tvar.

$$\ddot{q}_k(t) + \frac{EI}{m} \left(\frac{k\pi}{l}\right)^4 q_k(t) = - \sum_{i=1}^N F_{sl}(t) Y_k(x_i) + \sum_{j=1}^M P_j(t) Y_k(x_{Gk}) \quad (4-43)$$

Matematické popsání koleje je z důvodu parciální diferenciální rovnice nejsložitější. Popis zbytku modelu tratě je poměrně snazší a vychází buď z d'Alambertova principu, nebo z 2. Newtonova zákonu, podobně jako bylo ukázáno při odvození rovnic pro zjednodušený model vozu v předešlé kapitole.

Kontaktní síla $P_j(t)$ se získá na základě nelineární teorie Hertzova elastického kontaktu, dle které se kontaktní síla vypočítá jako:

$$p(t) = \left[\frac{1}{G} \delta Z(t) \right]^{\frac{3}{2}} \quad (4-44)$$

kde $G \left[m/N^{\frac{2}{3}} \right]$ je koeficient styku kola s kolejnicí. V některých publikacích se lze setkat s jeho převrácenou hodnotou, která se označuje jako Hertzova konstanta

$C_H [N/m^2]$. V [10] jsou uvedeny koeficienty kontaktu pro nové a opotřebené kolo. Pro nové:

$$G_n = 4.57R^{-0.149} \times 10^{-8} \quad (4-45)$$

kde R je rádius kola. Pro opotřebené kolo má koeficient tvar:

$$G_s = 3.86R^{-0.115} \times 10^{-8} \quad (4-46)$$

Nejběžněji se v publikacích lze setkat s hodnotou Hertzovy konstanty $C_H = 1 \times 10^{-11}$.

$\delta Z(t)$ v rovnici (4-44) je elastická deformace vyjádřená jako:

$$\delta Z(t) = \delta Z_0 + \delta Z_{wr}(t) - \eta(t) \quad (4-47)$$

$$\delta Z_{wr}(t) = \delta Z_w + \delta Z_r(t) \quad (4-48)$$

kde δZ_0 je statická deformace úměrná statickému zatížení vozu. $\delta Z_{wr}(t)$ je relativní výchylka kola a kolejnice a $\eta(t)$ může být funkce vyjadřující nerovnost tratě.

Sestavené submodely provázané kontaktní silou jsou potom ve tvaru:

$$[M_W]\{\ddot{w}_W\} + [C_W]\{\dot{w}_W\} + [K_W]\{w_W\} = \{F_W\} \quad (4-49)$$

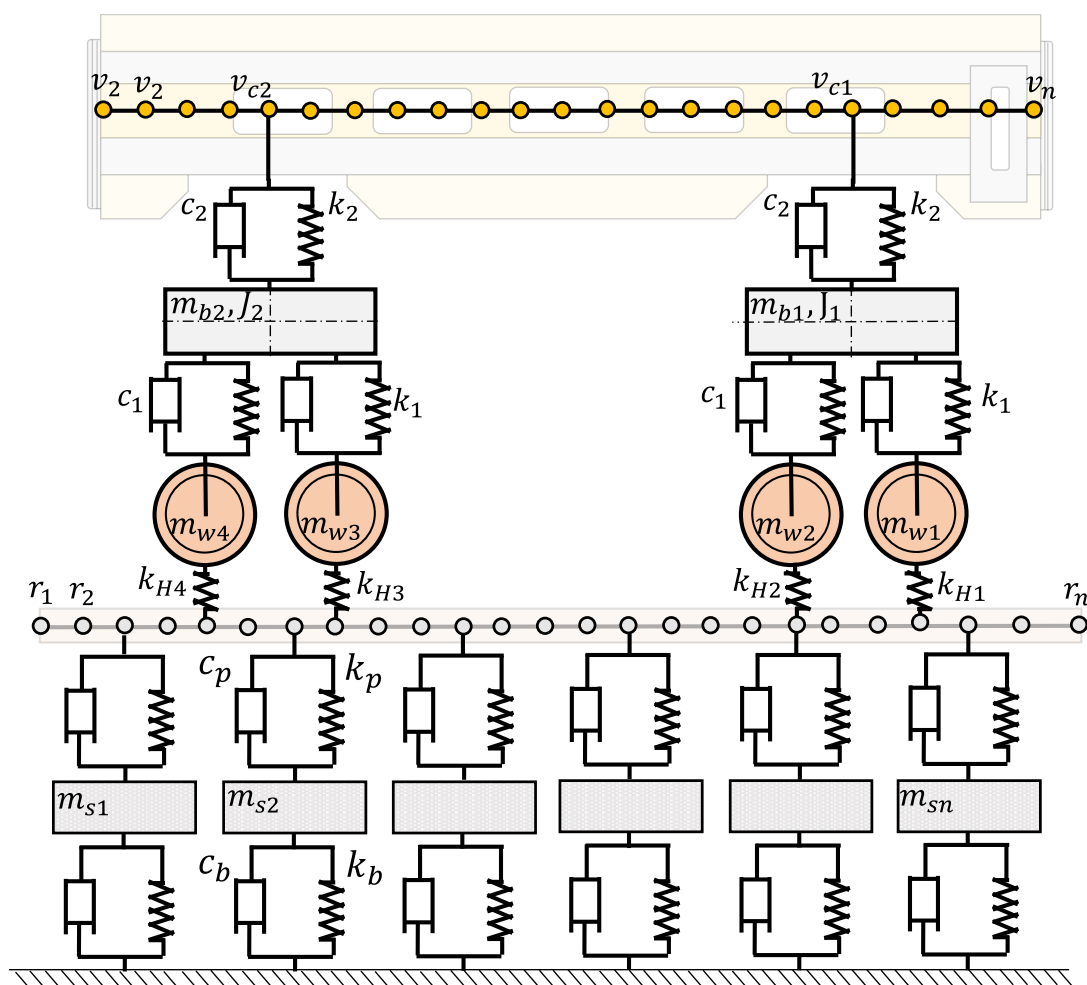
$$[M_T]\{\ddot{w}_T\} + [C_T]\{\dot{w}_T\} + [K_T]\{w_T\} = \{F_T\} \quad (4-50)$$

kde rovnice (4-49) je pro submodel vozu a rovnice (4-50) pro submodel tratě. $\{F_W\}$ je vektor působících kontaktních sil na vůz a $\{F_T\}$ je vektor působících sil na trať, ve kterých jsou kromě kontaktní síly zahrnuty také silové účinky podloží.

Po sestavení rovnic pro celý systém se k řešení využije numerická integrace. Ve vědeckých pracích je nejčastěji užívána Newmarkova metoda a její modifikace, které autoři uvádějí za účelem zvýšení rychlosti výpočtu. „*Vehicle-track coupling method*“ je tedy numerický přístup, který komplexně pojímá celou dynamiku vozu a tratě a je ideálním přístupem při modelování vad jak trati, tak vozu.

5 Cíle práce

Na základě teoretických poznatků z předešlé kapitoly budou nyní blíže specifikovány požadavky na vlastní model. Jak již bylo v úvodu zmíněno, hlavní oblastí zájmu této práce je interiér vozu a reakce interiéru na okolní poruchy. V dynamickém modelu bude brán hlavní zřetel na zpracování modelu tratě, jako místa, z kterého vzruch při kontaktu s kolem vychází a modelu samotné skříně, ve které se budou vibrace analyzovat. To znamená, že kolej i skříň vozu budou modelovány jako flexibilní tělesa. Jak z provedené rešerše vyplývá, vibrace samotné skříně spadají do pásma nízkých frekvencí [8]. Skříň vozu a samotná kolej splňují prutové předpoklady, proto bude k jejich popisu využita v obou případech Euler-Bernoulliho prutová teorie. Model má sloužit k simulaci vad tratě i vozu, což jak už v teoretické části bylo zmíněno, jsou jevy nelineární. Proto se simulace chování budou provádět v časové oblasti a vzhledem ke komplexnosti soustavy, bude při řešení zvolen numerický přístup. Aby bylo možné simulovat lokální vady tratě, jako je porušený pražec nebo podemletý úsek tratě, bude model podloží diskretní. Submodely vozu a tratě budou posléze spojeny na základě Hertzovy kontaktní teorie. Model dle výše uvedeného popisu je na



Obr. 5.1 Navržený dynamický model koleje a tratě

Obr. 4.1. Sestavení modelu a simulace defektních stavů budou prováděny v prostředí Matlabu.

Sestavený model by měl umožnit sledovat vzájemné interakce jednotlivých částí při dynamickém zatížení, které bude způsobené poruchou. Při zavádění poruch se bude vycházet z publikací, které jsou výhradně zaměřeny na daný problém a poskytují potřebné parametry k popsání konkrétní poruchy. Následně bude provedeno testování jednotlivých poruch a kontrola jejich vlivů na trať i vůz. Kombinací všech použitých mechanismů defektů bude vytvořena odezva skříně při jízdě vlaku, která bude sloužit jako vstup do analýzy náhodných vibrací v prostředí Ansys. Odezvy skříně v časových oblastech budou převáděny do frekvenční oblasti pomocí výkonové spektrální hustoty (PSD). PSD se při analýze náhodných vibrací upřednostňuje před klasickou Fourierovou transformací, a to z důvodu, že popisuje rozložení energie signálu na daném frekvenčním spektru, zatímco Fourierova transformace dává informaci pouze o frekvenčních složkách, které se v signálu vyskytují.

V poslední části práce bude odezva získaná z matematického modelu využita jako vstup do analýzy vibrací v prostředí Ansys. Analýza se bude zaměřovat na vibrace stropních panelů kolejového vozidla, které jsou připevněny k jeho hrubé stavbě. Při analýze budou využity 3D modely, které svou konstrukční podstatou vystihují stropní obložení. Cílem této analýzy bude porovnat dynamickou zátěž ve formě vibrací se statickým zatížením, na které jsou v praxi tyto interiérové části běžně navrhovány. Odezva skříně bude vytvořena pro regionální typ vozu, jehož parametry vypružení lze čerpat z publikace [47].

6 Sestavení dynamického modelu

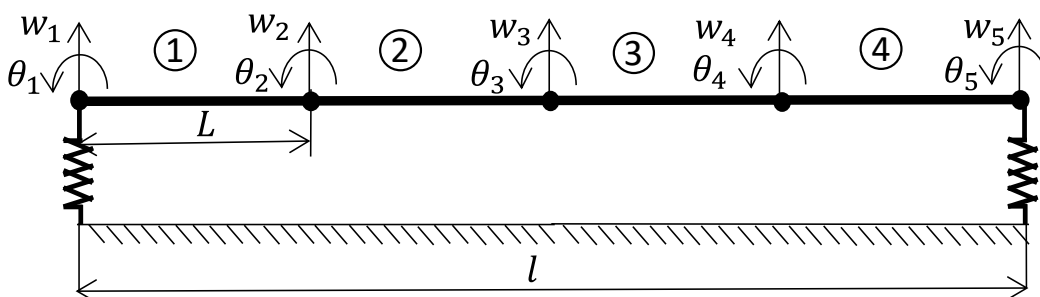
V této kapitole bude podrobně popsán algoritmus pro sestavení dynamického modelu vozu a tratě. Nejprve bude matematicky popsán model vozu a jeho realizace v prostředí Matlab. Podobně bude popsána také trať. Následně bude ukázán algoritmus pro sestavení celého systému, včetně propojení skrze Hertzovu pružinu. Po kompletním sestavení modelu se přistoupí k jeho numerickému řešení pomocí modální superpozice a zobecněných souřadnic.

6.1 Sestavení modelu vozu

Vůz na Obr. 4.1 je složen ze 4 kol a 2 podvozků, které jsou uvažovány jako dokonalá tuhá tělesa. Kola se mohou pohybovat pouze ve vertikálním směru, zatímco podvozky kromě posuvů mohou také rotovat. Skříň vozu je modelována jako prut dle Euler-Bernoulliho teorie. K jejímu sestavení bude využita diskretizace pomocí metody konečných prvků. Geometrie skříně je vyjádřena kvadratickým momentem, který byl zjištěn pomocí 3D modelu v práci [49]. Matice hmotnosti, tuhosti a tlumení celého vozu jsou složeny ze tří submatic vozu. První submatice odpovídá flexibilní skříni, druhá a třetí submatice prezentuje přední a zadní podvozek s nápravami.

6.1.1 Sestavení submatic skříně vozu

K demonstraci diskretizace pomocí metody konečných prvků je na Obr. 5.1 model prutu prezentující skříň na elastických podporách. Celý prut je rozdělen na N elementů, kdy každý element má dva uzly, jejichž pohyb je definován posuvem v příčném směru w_i a natočením θ_i . Následující matematické odvození vychází z podstaty metody konečných prvků, a je převzato z [50].



Obr. 6.1 Diskrétní model prutu

Pohyb elementu je popsán kubickým polynomem v rovnici (6-1), kde čtvrtý stupeň polynomu odpovídá počtu stupňů volnosti elementu. Zároveň tato funkce splňuje základní diferenciální rovnici prutu a podmínky spojitosti průhybu a natočení.

$$w(x) = a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 \quad (6-1)$$

Při uvažování malých úhlů natočení lze pohyb elementu psát v maticovém tvaru jako:

$$w = [N]\{d\} \quad (6-2)$$

kde $\{d\}$ je vektor výchylek a natočení elementu a $[N]$ jsou tvarové funkce ve tvaru:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{L^3}(2x^3 - 3x^2L + L^3) & N_2 &= \frac{1}{L^3}(x^3L - 2x^2L^2 + xL^3) \\ N_3 &= \frac{1}{L^3}(-2x^3 + 3x^2L) & N_4 &= \frac{1}{L^3}(x^3L - x^2L^2) \end{aligned} \quad (6-3)$$

Matice tuhosti se získá ze silové rovnováhy elementu. Závislost tečné síly V a momentu m na průhybu jsou dány vztahy:

$$m(x) = EI \frac{d^2w}{dx^2} \quad V(x) = EI \frac{d^3w}{dx^3} \quad (6-4)$$

Označí-li se krajní uzly elementu indexy 1 a 2 je možné napsat silovou a momentovou rovnováhu pomocí rovnic:

$$\begin{aligned} f_{1y} = V &= EI \frac{d^3v(0)}{dx^3} = \frac{EI}{L^3}(12v_1 + 6L\phi_1 - 12v_2 + 6L\phi_2) \\ m_1 = -m &= -EI \frac{d^2v(0)}{dx^2} = \frac{EI}{L^3}(6Lv_1 + 4L^2\phi_1 - 6Lv_2 + 2L^2\phi_2) \\ f_{2y} = -V &= -EI \frac{d^3v(L)}{dx^3} = \frac{EI}{L^3}(-12v_1 - 6L\phi_1 + 12v_2 - 6L\phi_2) \\ m_2 = m &= EI \frac{d^2v(L)}{dx^2} = \frac{EI}{L^3}(6Lv_1 + 2L^2\phi_1 - 6Lv_2 + 4L^2\phi_2) \end{aligned} \quad (6-5)$$

odkud lze matici tuhosti následně psát ve tvaru:

$$[k] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (6-6)$$

kde L je délka elementu.

Matice hmotnosti vychází z objemového integrálu tvarových funkcí.

$$[m] = \iiint_V \rho [N]^T [N] dV \quad (6-7)$$

kde vektor tvarových funkcí je stejný jako v rovnici (6-2). Integrací se získá matice hmotnosti elementu ve tvaru:

$$[m] = \frac{\rho AL}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (6-8)$$

kde ρ je hmotnost elementu a A je jeho průřez.

Pomocí těchto matic pro jeden element se skládá matice pro celý model skříně vozu. Díky této diskretizaci je také možné měnit hmotnost jednotlivých elementů, a tím simulovat rozložení hmotnosti po délce vozu. Pomocí hrubé diskretizace na Obr. 5.1 je možné ukázat propojování jednotlivých elementů, včetně zahrnutí elastické podpory. Matice tuhost pro uvedený model skříně je ve tvaru:

$$[K_{sk}] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} w_1 & \theta_1 & w_2 & \theta_2 & w_3 & \theta_3 & w_4 & \theta_4 & w_5 & \theta_5 & | & \\ \hline 12 + k & 6L & -12 & 6L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & w_1 \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & \theta_1 \\ -12 & -6L & 24 & 0 & -12 & 6L & 0 & 0 & 0 & 0 & | & w_2 \\ 6L & 2L^2 & 0 & 8L^2 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & \theta_2 \\ 0 & 0 & -12 & -6L & 24 + k & 0 & -12 & 6L & 0 & 0 & | & w_3 \\ 0 & 0 & 6L & 2L^2 & 0 & 8L^2 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 & | & \theta_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & -6L & 24 & 0 & -12 & 6L & | & w_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6L & 2L^2 & 0 & 8L^2 & -6L & 2L^2 & | & \theta_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & -6L & 12 + k & -6L & | & w_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 & | & \theta_5 \\ \hline \end{bmatrix} \quad (6-9)$$

kde v jednotlivých modrých rámečcích jsou prvky dílčích elementů, které se vždy překrývají ve sdíleném uzlu. Uvedené výchylky a natočení uzlů v první řádce a posledním sloupci, slouží pouze k lepší orientaci ve struktuře matice. Zároveň je patrný způsob, kterým se projevují elastické podpory, a to přičtením tuhosti elastické podpory na pozici, která odpovídá posuvu podepřeného uzlu. Obdobným způsobem lze složit matici hmotnosti, která pro daný příklad je ve tvaru:

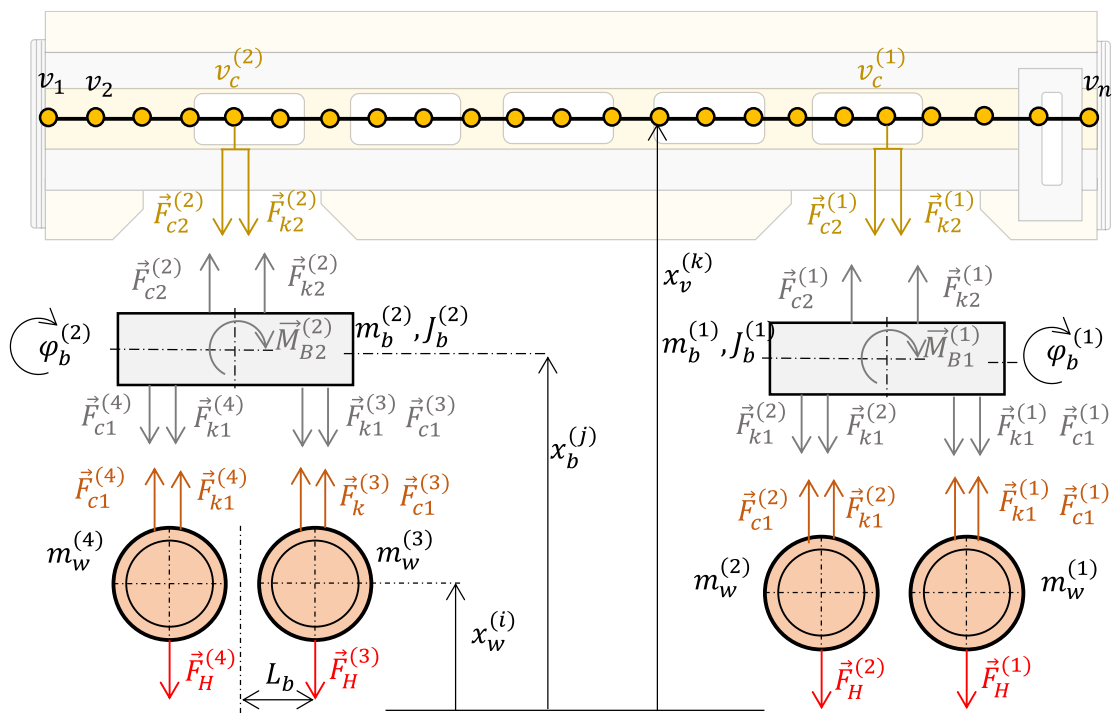
$$[M_{sk}] = \frac{\rho Al}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 22l & 4l^2 & -13l & -3l^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 54 & 13l & 312 & 0 & 54 & -13l & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -13l & -3l^2 & 0 & 8l^2 & 13l & -3l^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 54 & 13l & 312 & 0 & 54 & -13l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -13l & -3l^2 & 0 & 8l^2 & 13l & -3l^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 54 & 13l & 312 & 0 & 54 & -13l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -13l & -3l^2 & 0 & 8l^2 & 13l & -3l^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 54 & -6l & 156 & -22l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -13l & -3l^2 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (6-10)$$

Je možné si všimnout, že elastická podpora se nijak neprojeví v matici hmotnosti. V matici hmotnosti se projeví podpory až v momentě, kdy se bude jednat o hmotnou podporu.

V použitém modelu bude diskretizace skříně uskutečněna pomocí většího množství elementů. K zajištění modulárnosti je sestaven algoritmus, který na základě délky vozu a zvolené velikosti elementu poskládá matice skříně. Je také zřejmé, že skutečné vozidlo není spojeno s podvozky na koncích skříně. Z toho důvodu je uživatelsky zvolena vzdálenost prvního kola od hrany skříně. Podle zvoleného místa spojení pak algoritmus sám přidá tuhosti a tlumení sekundárního vypružení na příslušné místo v matici.

6.1.2 Sestavení submatic podvozku a kol

Na Obr. 5.2 je použitý model vozu ve statické rovnováze. Horní indexy v závorkách slouží k rozlišení stejných částí vozu. Uzly skříně vozu, které jsou spojeny s podvozky jsou označeny v_c^k , kde horní index k , označuje číslo podvozku. Výchytky $x_w^{(i)}, x_b^{(j)}, x_v^{(k)}$ jsou výchytky kol, podvozků a uzlů skříně. Natočení podvozků je označeno $\varphi_b^{(1)}, \varphi_b^{(2)}$ a $J_b^{(1)}, J_b^{(2)}$ jsou jejich momenty setrvačnosti.



Obr. 6.2 Uvolněný model vozu

Jak bylo již v kapitole 4.3 ukázáno, sestavení pohybových rovnic pro jednotlivé části systému vycházejí z 2. Newtonová pohybového zákona. S využitím rovnic (4-9) lze psát pohybovou rovnicí pro první kolo jako:

$$m_w^{(1)} \ddot{x}_w^{(1)} + k_H^{(1)} x_w^{(1)} - k_1^{(1)} (x_b^{(1)} - x_w^{(1)} + \varphi_b^{(1)} L_b) - c_1^{(1)} (\dot{x}_b^{(1)} - \dot{x}_w^{(1)} + \dot{\varphi}_b^{(1)} L_b) = m_w^{(1)} g \quad (6-11)$$

kde L_b je polovina osové vzdálenosti mezi koly. Podobně lze vyjádřit pohybovou rovnici pro druhé kolo.

$$m_w^{(2)} \ddot{x}_w^{(2)} + k_H^{(2)} x_w^{(2)} - k_1^{(2)} (x_b^{(1)} - x_w^{(2)} - \varphi_b^{(2)} L_b) - c_1^{(2)} (\dot{x}_b^{(2)} - \dot{x}_w^{(2)} - \dot{\varphi}_b^{(2)} L_b) = m_w^{(2)} g \quad (6-12)$$

Podvozek má dva stupně volnosti, proto je jeho pohyb popsán dvěma pohybovými rovnicemi. Rovnice pro vertikální pohyb je ve tvaru:

$$m_b^{(1)} \ddot{x}_b^{(1)} + k_1^{(1)} (x_b^{(1)} - x_w^{(1)} + \varphi_b^{(1)} L_b) + c_1^{(1)} (\dot{x}_b^{(1)} - \dot{x}_w^{(1)} + \dot{\varphi}_b^{(1)} L_b) + k_1^{(2)} (x_b^{(1)} - x_w^{(2)} - \varphi_b^{(2)} L_b) + c_1^{(2)} (\dot{x}_b^{(1)} - \dot{x}_w^{(2)} - \dot{\varphi}_b^{(2)} L_b) - k_2^{(1)} (x_r^{(1)} - x_b^{(1)}) - c_2^{(1)} (\dot{x}_r^{(1)} - \dot{x}_b^{(1)}) = m_b^{(1)} g \quad (6-13)$$

Rovnice popisující moment vychází z momentové rovnováhy.

$$L_b (\vec{F}_k^{(1)} + \vec{F}_c^{(1)} - \vec{F}_k^{(2)} - \vec{F}_c^{(2)}) = J_b^{(1)} \ddot{\varphi}_b^1 \quad (6-14)$$

A po rozepsání jednotlivých silových složek se získá rovnice (6-14).

$$J_b^{(1)} \ddot{\varphi}_b^1 + k_1^{(1)} L_b (x_b^{(1)} - x_w^{(1)} + \varphi_b^{(1)} L_b) + c_1^{(1)} L_b (\dot{x}_b^{(1)} - \dot{x}_w^{(1)} + \dot{\varphi}_b^{(1)} L_b) - k_1^{(2)} L_b (x_b^{(1)} - x_w^{(2)} - \varphi_b^{(2)} L_b) - c_1^{(2)} L_b (\dot{x}_b^{(1)} - \dot{x}_w^{(2)} - \dot{\varphi}_b^{(2)} L_b) = 0 \quad (6-15)$$

Uvažuje se, že skříň vozu je připevněna k podvozku v jeho středu, tudíž síly sekundárního vypružení nemají na natočení podvozku vliv. A síly spojené s uzlem skříňe lze rozepsat jako:

$$k_2^{(1)} (x_r^{(1)} - x_b^{(1)}) + c_2^{(1)} (\dot{x}_r^{(1)} - \dot{x}_b^{(1)}) = 0 \quad (6-16)$$

K snadnějšímu sestavení matic je vhodné vytknout všechny výchylky a rychlosti. Po matematické úpravě lze pak pro první kolo psát:

$$m_w^{(1)} \ddot{x}_w^{(1)} + x_w^{(1)} (k_H^{(1)} + k_1^{(1)}) - x_b^{(1)} k_w^{(1)} + \dot{x}_w^{(1)} c_1^{(1)} - \dot{x}_b^{(1)} c_1^{(1)} = m_w^{(1)} g \quad (6-17)$$

Pro druhé kolo:

$$m_w^{(2)} \ddot{x}_w^{(2)} + x_w^{(2)} (k_H^{(2)} + k_1^{(2)}) - x_b^{(1)} k_w^{(2)} + \dot{x}_w^{(2)} c_1^{(2)} - \dot{x}_b^{(1)} c_1^{(2)} = m_w^{(2)} g \quad (6-18)$$

Vertikální posuv podvozku:

$$\begin{aligned} m_b^{(1)} \ddot{x}_b^{(1)} + x_b^{(1)} (k_1^{(1)} + k_1^{(2)} + k_2^{(1)}) - x_w^{(1)} k_1^{(1)} - x_w^{(2)} k_1^{(2)} \\ - x_r^{(1)} k_2^{(1)} + \varphi_b^{(1)} L_b (k_1^{(1)} - k_1^{(2)}) \\ + \dot{x}_b^{(1)} (c_1^{(1)} + c_1^{(2)} + c_2^{(1)}) - \dot{x}_w^{(1)} c_1^{(1)} - \dot{x}_w^{(2)} c_1^{(2)} \\ - \dot{x}_r^{(1)} c_2^{(1)} + \varphi_b^{(1)} (c_1^{(1)} - c_1^{(2)}) = 0 \end{aligned} \quad (6-19)$$

Natočení podvozku:

$$\begin{aligned} J_b^{(1)} \ddot{\varphi}_b^{(1)} - x_w^{(1)} k_1^{(1)} L_b + x_w^{(2)} k_1^{(2)} L_b + x_b^{(1)} L_b (k_1^{(1)} - k_1^{(2)}) \\ + \varphi_b^{(1)} L_b^2 (k_1^{(1)} + k_1^{(2)}) - \dot{x}_w^{(1)} c_1^{(1)} L_b + \dot{x}_w^{(2)} c_1^{(2)} L_b \\ + \dot{x}_b^{(1)} L_b (c_1^{(1)} - c_1^{(2)}) + \dot{\varphi}_b^{(1)} L_b^2 (c_b^{(1)} + c_b^{(2)}) = 0 \end{aligned} \quad (6-20)$$

kdy v případě, že tuhosti $k_1^{(1)}, k_1^{(2)}$ a tlumení $c_1^{(1)}, c_1^{(2)}$ jsou stejné, rovnice pro posuv i natočení se zjednoduší. Rovnice pro druhý podvozek a kola s ním spojená, by byly identické s rovnicemi (6-17) - (6-20), s rozdílem horních indexů. Z rovnic (6-17) - (6-20) lze sestavit submatici tuhosti prvního podvozku s koly K_{b1} , která při uvažování stejných hodnot primárních a sekundárních tlumičů vypadá následovně:

$$K_{b1} = \left[\begin{array}{ccccc|c} w_v^{(1)} & w_b^{(1)} & \varphi_b^{(1)} & w_w^{(1)} & w_w^{(2)} & w_v^{(1)} \\ k_2 & -k_2 & 0 & 0 & 0 & w_b^{(1)} \\ -k_2 & 2k_1 + k_2 & 0 & -k_1 & -k_1 & \varphi_b^{(1)} \\ 0 & 0 & 2k_1 L_b^2 & -k_1 L_b & k_1 L_b & w_w^{(1)} \\ 0 & -k_1 & -k_1 L_b & k_1 + k_H^{(1)} & 0 & w_w^{(2)} \\ 0 & -k_1 & k_1 L_b & 0 & k_1 + k_H^{(2)} & w_w^{(2)} \end{array} \right] \quad (6-21)$$

kde jednotlivé stupně volnosti v prvním řádku a posledním sloupci, opět slouží pouze k lepší orientaci ve struktuře matice. Obdobně lze sestavit submatici tlumení C_{b1} prvního podvozku s nápravami.

$$C_{b1} = \left[\begin{array}{ccccc} c_2 & -c_2 & 0 & 0 & 0 \\ -c_2 & 2c_1 + c_2 & 0 & -c_1 & -c_1 \\ 0 & 0 & 2c_1 L_b^2 & -c_1 L_b & c_1 L_b \\ 0 & -c_1 & -c_1 L_b & c_1 & 0 \\ 0 & -c_1 & c_1 L_b & 0 & c_1 \end{array} \right] \quad (6-22)$$

a submatici hmotnosti:

$$M_{b1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_w & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_w \end{bmatrix} \quad (6-23)$$

kde matice hmotnosti se nijak neprojevuje v provázání podvozku se skříní vozu. Struktura celé matice tuhosti vozu je potom pro následující:

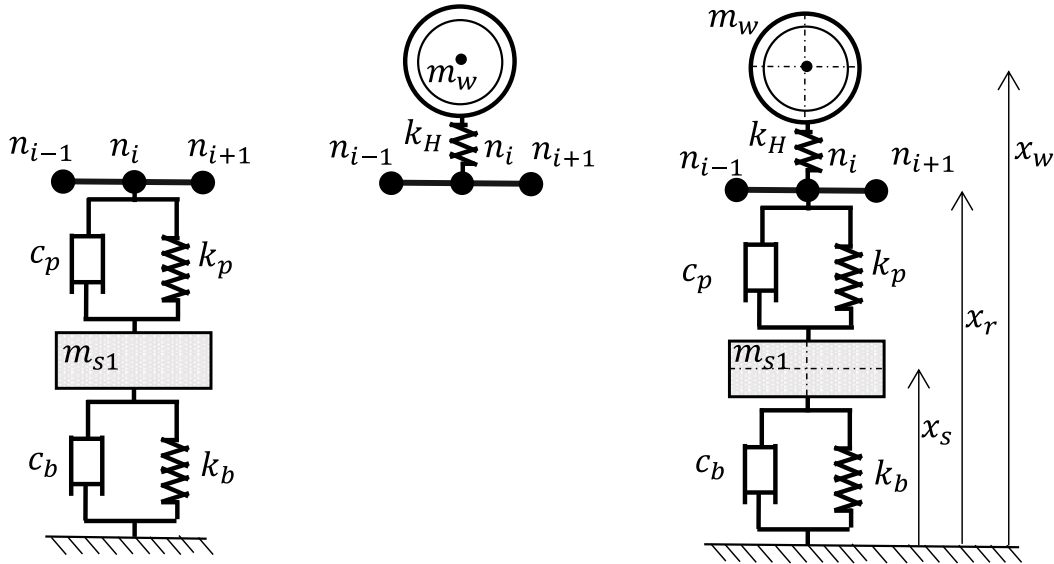
$$K_v = \begin{bmatrix} K_{sk} & 0 & 0 \\ 0 & K_{b1} & 0 \\ 0 & 0 & K_{b2} \end{bmatrix} \quad (6-24)$$

kde K_{sk} je submatice tuhosti samotné skříně, jejíž velikost závisí na délce skříně a diskretizaci. Tato struktura je shodná pro matici hmotnosti i tlumení. Uživatelem jsou tedy nastaveny parametry vozidla, včetně rozměrových údajů zavěšení, a zvolený počet elementů diskretizace. Algoritmus na základě nastavených vstupů vrátí matici hmotnosti, tuhosti a tlumení zvoleného modelu vozu. O matici tlumení bude blíže pojednáno pro případ koleje i vozu níže.

6.2 Sestavení modelu tratě

Z Obr. 4.1 je patrné, že zvolený model podloží je dvouvrstvý. Většina měření vibrací v terénu, se provádí pomocí akcelometru, nebo piezoelektrického snímače, které se zpravidla umísťují na kolej, popřípadě na pražec. Aby bylo možné experimentálně naměřená data porovnávat se simulacemi, musí být v matematickém modelu hmotně zahrnuty ty části tratě, na kterých byly senzory při měřeních nalepeny. Aby popis chování podloží nebyl zbytečně komplikovaný, není do modelu v rámci této práce přidána třetí vrstva. Její přidání by však v případě potřeby nebyl problém. Potřebná teorie a matematické vyjádření jsou k nalezení v publikacích [24], [25]. Z matematického hlediska je v modelu nejobtížnější popis koleje. Stejně jako v minulé podkapitole bude pro její popis využita diskretizace metodou konečných prvků. Pro jednoduchost se využije stejně jako v případě skříně Euler-Bernoulliho prutová teorie. Matice tuhosti a hmotnosti pro Timoshenkovu prutovou teorii vycházejí ze stejných principů, které byly ukázány v předešlé kapitole a v případě potřeby by nebyl problém jimi nahradit odvozené matice pro E-B teorii.

Kolej na Obr. 4.1. je složená z elementů s rozdílnou konfigurací, jejichž matice se budou lišit. Tam kde element není podepřen pražcem, ani zatížen hmotou kola, mají matice elementu strukturu dle rovnic (6-6) a (6-8). V ostatních případech, které jsou na Obr. 5.3 bude podoba matic lehce odlišná. Jejich struktura je dána pohybovými rovnicemi, které lze stejně jako v případě vozu odvodit z 2. Newtonova pohybového



Obr. 6.3 Elementy připojené k dalším částem modelu, zleva a) Element s pražcem, b) Element s hmotou, c) Element s pražcem a hmotou

zákonu. Pohyb kola i pražce se uvažuje pouze vertikální. Pohybové rovnice pro pražec, uzel koleje a kolo, lze podobně jako v předešlé kapitole psát jako:

$$\begin{aligned}
 m_s \ddot{x}_s + c_b \dot{x}_s + k_b x_s - c_p (\dot{x}_r - \dot{x}_s) - k_p (x_r - x_s) &= 0 \\
 m_r \ddot{x}_r + c_p (\dot{x}_r - \dot{x}_s) + k_p (x_r - x_s) - k_H (x_w - x_r) &= 0 \\
 w \ddot{x}_w + k_H (x_w - x_r) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{6-25}$$

Hmotnost uzlu prutu m_r je zahrnutá v matici hmotnosti elementu, tudíž se do matic po druhé již nepřidává. Dají-li se dohromady pohybové rovnice (6-25) a matice elementů (6-6), (6-8), je možné postupně sestavit matice tuhosti a hmotnosti pro případy na Obr. 5.3. Matice tuhosti pro případ elementu s pražcem je následující:

$$[k_s] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 + k_p & 6L & -k_p & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & 0 & -6L & 2L^2 \\ -k_p & 0 & k_p + k_b & 0 & 0 \\ -12 & -6L & 0 & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & 0 & -6L^2 & 4L^2 \end{bmatrix}
 \tag{6-26}$$

kde tuhost k_p představuje tuhost pražce a tuhost k_b tuhost balastu. Matice hmotnosti pro tento element je ve tvaru:

$$[m_s] = \frac{\rho AL}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 0 & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 0 & 13L & -3L^2 \\ 0 & 0 & m_s & 0 & 0 \\ 54 & 13L & 0 & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & 0 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (6-27)$$

Matice pro druhý případ na Obr. 5.3 je velice podobná jako matice elasticky podepřeného prutu. Její velikost je 4x4 a od matice volného elementu (6-8) se liší tím, že na pozici výchylky uzlu je přičtena tuhost Hertzovy pružiny. V případě, že je prutový element spojen s vozem i pražcem, je rozměr elementární matice 5x5 a lze psát ve tvaru:

$$[k_{sw}] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 + k_p + k_H & 6L & -k_p & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & 0 & -6L & 2L^2 \\ -k_p & 0 & k_p + k_b & 0 & 0 \\ -12 & -6L & 0 & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & 0 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (6-28)$$

Hmotnost kola není vložena do elementárních matic tratě, protože se do globální matice hmotnosti soustavy dostane z modelu vozu, což bude ukázáno při propojení modelů

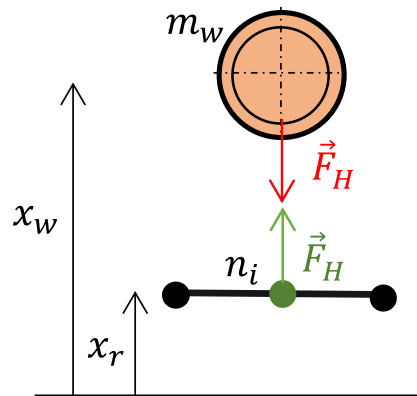
Z uvedených matic je patrné, že nezávisle na typu struktury elementu, jsou matice vždy symetrické. Zároveň, díky polynomiálním tvarovým funkcím diskrétního prutu, jsou výsledné matice poměrně dobře podmíněné. Kromě uvedených matic je třeba mít ještě připraveny matice reprezentující defektní stav. Tyto matice budou mít stejnou velikost i strukturu. Jak již bylo zmíněno, defektní stav se projeví změnou parametru tuhosti. Je tedy potřeba mít připravené matice, ve kterých bude místo normální hodnoty tuhosti mezi kolejí a pražcem k_p , hodnota tuhosti prezentující defekt k_{pe} . Podobně tomu je i v případě balastu. Za tímto účelem je v Matlabu vytvořena knihovna všech možných variací matic. Dále je zřejmé, že žádná reálná trať nemá po své délce stejné vlastnosti. Pražce a jejich upevnění se vzájemně mohou mírně lišit a v průběhu jejich životnosti se může lišit rychlost jejich degradace. Podobně tomu je také s balastem. V praxi se tyto náhodné změny vlastností experimentálně měří a vyhodnocují ve frekvenční oblasti pomocí výkonové spektrální hustoty (PSD). Naměřené PSD se v literatuře uvádějí vždy ve spojitosti se zemí, ve které byly pořízeny. Jejich ukázky jsou v knize [10]. Toto stochastické buzení lze v modelu zavést také pomocí náhodné veličiny s normálním rozložením, která bude mít po délce koleje stejnou střední hodnotu. Elementární matice tuhosti pro prvek spojený s pražcem bude pak ve tvaru (6-29).

$$[k_s] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 + (k_p + r_p) & 6L & -(k_p + r_p) & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & 0 & -6L & 2L^2 \\ -(k_p + r_p) & 0 & (k_p + r_p) + (k_b + r_b) & 0 & 0 \\ -12 & -6L & 0 & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & 0 & -6L^2 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (6-29)$$

kde k_p , k_b jsou střední hodnoty tuhosti pražce a balastu a r_p, r_b jsou náhodné odchylky.

6.3 Algoritmus propojení modelu vozu a tratě

V rámci propojení vozu s tratí je vytvořen algoritmus, který začne postupně skládat globální matici systému pomocí elementární matice tratě. V momentě, kdy narazí na uzel s prvním kolem, vloží do globální matice celý model vozu a poté, bude



Obr. 6.4 Schéma rovnováhy mezi uzlem a kolem vozu

dál pokračovat ve skládání modelu tratě. Ze statické rovnováhy mezi uzlem tratě a kolem vozu, která je na Obr. 5.4 lze napsat následující rovnice:

$$x_w k_H - x_r k_H = 0, \quad x_r k_H - x_w k_H = 0 \quad (6-30)$$

kde první rovnice vlevo je pro kolo a rovnice vpravo pro uzel koleje. V první rovnici je kladný člen zahrnut v matici vozu a druhý. Rovněž v druhé rovnici je první člen zahrnut v matici elementu tratě. Aby bylo propojení obou modelů korektní, je nutné do globální matice na patřičné indexy přidat záporné členy z obou rovnic. Toto doplnění je nutné provést pro všechna kola.

Samotný algoritmus sestavení bude vysvětlen pomocí následujícího schématu.

Algoritmus 6-1 Sestavení matic systému

```

function [gM] = buildSystem(eM, tM, index)
  for i = 1 : Nel
    if stav1
      gM(index, index) = gM(index, index) + eM.free
      index update
    elseif stav2
      rM(index, index) = rM(index, index) + tM.train
      index update
    elseif ...
      .
      .
    end
  end
end

```

Do funkce vstupují elementární matice tratě eM , matice vozu tM a informace o poloze $index$. Všechny vstupní parametry jsou datového typu struktura (struct). Ve struktuře $index$, která se v každém časovém kroku aktualizuje, jsou uloženy indexy těch elementů, které jsou spojeny s vozem, pražcem nebo s defektním podloží. Následně funkce běží ve *for* smyčce, která iteruje od 1 až po počet použitých elementů tratě N_{el} . Na základě logických operátorů se v rozhodovací smyčce vybere odpovídající matice, která se přičte na pozice určené strukturou $index$ do celkové matice systému. Aby na sebe matice navazovaly na správných místech, musí se po každém přičtení aktualizovat tzv. startovací index, který udává pozici prvního uzlu v následující matici. Funkce dopředu tedy zná elementy, na kterých je trať v daném časovém kroku spojená s vozem, normálním pražcem nebo poškozeným pražcem, a díky tomu při proběhnutí *for* smyčky přes všechny elementy tratě, přiřadí na správné pozice odpovídající matice. Tímto způsobem se vytvoří matice hmotnosti a tuhosti pro celý systém v každém časovém kroku.

Tento přístup skládání matic má hlavní výhody především ve své univerzálnosti. Stačí znát pouze velikosti jednotlivých elementárních matic a celkovou velikost globální matice systému, která se určí jako:

$$M_{length} = (2N_{el} + 2) + N_{sl} + N_v \quad (6-31)$$

kde $(2N_{el} + 2)$ je počet stupňů volnosti samotné koleje závislý na zvoleném počtu diskretních elementů N_{el} . N_{sl} je počet uvažovaných pražců a N_v je stupňů volnosti vozu. Lze si tedy nastavit libovolnou délku trati s libovolným počtem pražců a úroveň diskretizace a představený algoritmus bez dalších změn či úprav, sestaví matice systému.

6.4 Řešení problému vlastních hodnot

Po sestavení celého modelu, je možné přejít k řešení problému vlastních hodnot. Díky diskretizaci flexibilních těles metodou konečných prvků, která využívá polynomiálních tvarových funkcí, jsou sestavené matice tuhosti i hmotnosti dobře numericky podmíněné, což umožňuje využití vestavěných nástrojů v prostředí Matlabu. Nejprve je sestavena charakteristická matice systému podle vztahu (6-32).

$$A = [M]^{-1}[K] \quad (6-32)$$

A potom standardní problém vlastních hodnot, který vychází ze soustavy algebraických rovnic $Ax = 0$ je definován jako:

$$(A - \omega^2 E) = 0 \quad (6-33)$$

kde ω jsou vlastní čísla a E je matice identity. K řešení této rovnice se v Matlabu využije vestavěná funkce „*eigs*“, která vrátí vektor vlastních čísel a matici vlastních vektorů neboli vlastních tvarů soustavy. Optimalizační parametry umožňují nastavit počet vybraných vlastních tvarů a jejich seřazení.

6.4.1 Normalizace vlastních tvarů

Nejběžněji se v dynamice využívá normalizace vlastních tvarů vůči matici hmotnosti. Jedná se o normalizaci pomocí zobecněné jednotkové hmotnosti [51]. V prvním kroku se určí zobecněná hmotnost jako:

$$\tilde{m}_i = \hat{\phi}_i^T M \hat{\phi}_i \quad (6-34)$$

kde $\hat{\phi}_i$ je konkrétní vlastní vektor a M je matice hmotnosti. Normalizační předpis je ve tvaru [51]:

$$\hat{\phi}_i^T \tilde{m}_i^{-1/2} M \tilde{m}_i^{-1/2} \hat{\phi}_i = 1 \quad (6-35)$$

odkud normalizovaný vlastní tvar se vypočítá jako:

$$\phi_i = \tilde{m}_i^{-1/2} \hat{\phi}_i \quad (6-36)$$

Tímto způsobem se získají vlastní tvary celé soustavy.

6.5 Výpočet zobecněné souřadnice a modální superpozice

Pro velké systémy přináší využití modální superpozice výpočetní úsporu, protože je možné určit, kolik vlastních tvarů se má do výpočtu zahrnout. Zároveň pomocí zobecněné souřadnice není nutné počítat odezvy ve všech uzlech. Při využití tohoto přístupu se obecná pohybová diferenciální rovnice systému:

$$M\ddot{\mathbf{w}}(t) + C\dot{\mathbf{w}}(t) + K\mathbf{w}(t) = \mathbf{p}(t) \quad (6-37)$$

převeďte do zobecněných souřadnic y , pomocí vztahů (6-38).

$$\dot{\mathbf{w}}(t) = \Phi\dot{\mathbf{y}}(t), \quad \dot{\mathbf{w}}(t) = \Phi\dot{\mathbf{y}}(t), \quad \mathbf{w}(t) = \Phi\mathbf{y}(t). \quad (6-38)$$

kde vlastní tvary Φ jsou časově nezávislé. V případě flexibilních těles, které mají v každém uzlu definovaný posuv i natočení, je nutné rozlišovat mezi vlastním tvarem vertikálních posuvů a vlastním tvarem natočení. Struktura matice flexibilního tělesa se uvažuje jako:

$$M_{flex} = [w_1, \varphi_1, w_2, \varphi_2, \dots, w_n, \varphi_n] \quad (6-39)$$

kde na lichých pozicích jsou koeficienty posuvů a na sudých pozicích koeficienty natočení. Vlastní tvar pro výchylku tělesa Φ_{fw} je pak složen ze všech lichých prvků vlastního vektoru flexibilního tělesa Φ_f a vlastní tvar pro natočení tělesa $\Phi_{f\varphi}$ je složen ze všech sudých prvků vlastního vektoru. Po zavedení zobecněné souřadnice (6-38) do pohybové rovnice (6-37) lze napsat pohybovou diferenciální rovnici v zobecněných souřadnicích ve tvaru:

$$M\Phi\ddot{\mathbf{y}}(t) + C\Phi\dot{\mathbf{y}}(t) + K\Phi\mathbf{y}(t) = \mathbf{p}(t) \quad (6-40)$$

Rovnice (6-40) se následně vynásobí transponovaným vlastním tvarem Φ^T , a to z důvodu zavedení zobecněné hmotnosti, tuhosti a tlumení, jak bude ukázáno níže.

$$\Phi^T M \Phi \ddot{\mathbf{y}}(t) + \Phi^T C \Phi \dot{\mathbf{y}}(t) + \Phi^T K \Phi \mathbf{y}(t) = \Phi^T \mathbf{p}(t) \quad (6-41)$$

Obecně se předpokládá ortogonalita matic tuhosti a hmotnosti. Aby matice tlumení byla rovněž ortogonální, musí se k jejímu sestavení použít technika, která tuto vlastnost zajistí. Nejčastěji se využívá Rayleighova proporcionální tlumení.

6.5.1 Sestavení matice tlumení

Proporcionální matice tlumení vychází ze vztahu:

$$\mathbf{C} = a_0 \mathbf{M} + a_1 \mathbf{K} \quad (6-42)$$

kde koeficienty a_0 a a_1 se vypočítají jako:

$$a_1 = 2\xi_n \omega_n, \quad a_0 = \frac{2\xi_n}{\omega_n} \quad (6-43)$$

kde ξ_n je poměrný utlum pro n vlastní tvar a ω_n je vlastní úhlová frekvence tohoto tvaru. Když se koeficient $a_1 = 0$, tak se jedná o systém s hmotnostně proporcionálním tlumením. Takový systém má vyšší vlastní tvary mírně tlumené. Zatímco, když se položí $a_0 = 0$, tak je tlumení proporcionální k tuhosti, a vyšší vlastní tvary jsou silně zatlumené.

Celková matice tlumení vozu i tratě je složena z hodnot viskózního tlumení vazeb mezi tělesy jako je například tlumení primárního a sekundárního vypružení, a z viskózního tlumení flexibilního materiálu jako je skříň a kolej. Postup při sestavení matice bude vysvětlen na modelu vozu.

Z minulé kapitoly jsou sestaveny matice tuhosti K a hmotnosti M systému. Při uvažování hmotnostně proporcionálního tlumení je postup následující: V prvním kroku se vezme submatice hmotnosti skříně M_{sk} a samotné koleje M_{kj} , které jsou popsány diskrétními elementy. Z materiálových tabulek se určí hodnoty poměrného útlumu ξ , který zůstane konstantní pro všechny vlastní tvary. Následně se pro každý vlastní tvar určí koeficient a_0 podle vztahu (6-43), a to zvlášť pro skříň i kolej. Získanými koeficienty se vynásobí hmotnostní submatice, čímž se získají submatice tlumení C_{sk} , C_{kj} . Koeficient a_0 se mění v závislosti na změně vlastního čísla. Jeho změna následně způsobí také změnu matice tlumení flexibilních těles. Proto musí být tyto matice vypočítány zvlášť pro každý vlastní tvar. Matice tlumení systému pak vznikne vložením obou submatic na příslušné pozice v globální matici. Struktura matice tlumení je téměř shodná s maticí tuhosti.

6.5.2 Výpočet zobecněné souřadnice a zpětný převod do normálních souřadnic

Poté co jsou sestaveny ortogonální matice systému, je možné zavést zobecněnou hmotnost \tilde{m}_i , zobecněnou tuhost \tilde{k}_i , zobecněné tlumení \tilde{c}_i a zobecněnou sílu \tilde{p}_i pomocí následujících vztahu:

$$\begin{aligned} \tilde{k}_i &= \phi_i^T \mathbf{K} \phi_i = \omega_i^2 \tilde{m}_i \\ \tilde{c}_i(t) &= \phi_i^T \mathbf{C} \phi_i = 2\xi_i \omega_i \tilde{m}_i \\ \tilde{p}_i(t) &= \phi_i^T p(t) \end{aligned} \quad (6-44)$$

Zobecněná hmotnost byla definovaná při normalizaci vztahem (6-34). Poměrný útlum ξ_i je poměrný útlum celé soustavy, nikoliv pouze flexibilních těles. Pomocí těchto vztahů a vztahů pro zobecněnou souřadnici (6-38), lze následně přepsat rovnici (6-37) do tvaru:

$$\ddot{y}_i(t) + 2\xi_i\dot{y}_i(t) + \omega_i^2 y_i(t) = \tilde{p}_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n_{eq} \quad (6-45)$$

kde n_{eq} je počet uvažovaných vlastních tvarů. Řešení diferenciální rovnice je realizováno v prostředí Matlabu pomocí řešiče diferenciálních rovnic „ode45“. Řešiče v Matlabu umí obecně pouze diferenciální rovnice prvního řádu. Z toho důvodu je nutné diferenciální rovnici druhého řádu (6-45), převést na dvě diferenciální rovnice prvního řádu. Převod se provede pomocí substituce $z(t) = \dot{y}(t)$, pomocí které se rovnice (6-45) přepíše jako:

$$\begin{aligned} z(t) &= \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) &= \tilde{p}(t) - 2\xi_i z(t) - \omega_i^2 y(t) \end{aligned} \quad (6-46)$$

kde $z(t)$ je nová zvolená souřadnice. K zpětnému získání výchylky v normálních souřadnicích se využije modální superpozice, která je vyjádřena vztahem (4-42). V algoritmu se tento vztah aplikuje ve formě:

$$w(x, t) = w_0 - \sum_{i=1}^{n_{eq}} \phi_i z_i \quad (6-47)$$

kde w_0 je počáteční nulový stav.

Tímto způsobem se získá odezva systému na zatížení v jednom místě během určeného času.

6.6 Simulace pohybujícího se zatížení

Numerické přístupy při řešení pohybujícího se zatížení přepočítávají odezvu na zatížení v každém kroku simulace. V tomto případě to znamená, že při posunutí vozu o jeden uzel na diskretní trati se musí znovu vypočítat odezvy tratě i vozu. Informace o výchylce z předešlého kroku se nastaví jako počáteční podmínka do kroku následujícího. V prvním kroku se nastaví rychlost vozu v_v , pomocí které se určí čas řešení diferenciální rovnice v jednom uzlu jako:

$$t_u = \frac{L_r}{N_{el}} \cdot \frac{1}{v_v} \quad (6-48)$$

kde L_r je celková délka tratě a N_{el} je počet elementů. Obecně doba simulace v jednom uzlu t_u je velice krátká, a to v řádech milisekund. Tato krátká simulační doba se musí

vzít v úvahu při nastavování přesnosti řešiče diferenciálních rovnic v Matlabu. Implementované řešiče „ode“ neumožňují nastavení fixního kroku, jako tomu je například v Simulinku. Potřebná přesnost řešení se nastavuje pomocí relativní a absolutní chyby řešení, která by měla být vždy nastavená řádově menší, než je doba simulace t_u .

6.6.1 Zahrnutí setrvačnosti hmoty v působícím zatížení

V teoretické části v kapitole 4.3 bylo pojednáno o zatížení hmotou vozu, kdy se k působící gravitační síle přidávají setrvační účinky hmoty. Přidání setrvačnosti vozu je z hlediska chování modelu tratě velice podstatné. Při přejezdu vlaku po koleji se vlivem hmoty vozu mění vlastní frekvence a vlastní tvary tratě, což ovlivňuje celkovou odezvu tratě. Zahrnutí zatěžující hmoty do modelu tratě vychází z rovnic (4-10) a (4-11), které byly uvedeny v teoretické části. Při zanedbání prvních dvou složek v rovnici (4-11), lze pohybující zatížení, které se přenáší skrze 4 kola psát ve tvaru:

$$p(t) = \sum_{i=1}^4 \left[m_v g - m_v \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} \right] \cdot \delta(x - x_{wi}) \quad (6-49)$$

kde x_{wi} je souřadnice jednotlivých kol. Při zavedení zobecněné souřadnice lze rovnici psát jako:

$$p(t) = \sum_{i=1}^4 [m_v g - m_v \Phi \ddot{y}(t)] \cdot \delta(x - vt) \quad (6-50)$$

A po dosazení rovnice (6-50) do rovnice (6-40) se obdrží pohybová diferenciální rovnice v zobecněných souřadnicích s pohybujícím se hmotným zatížením.

$$\mathbf{M} \Phi \ddot{y}(t) + \mathbf{C} \Phi \dot{y}(t) + \mathbf{K} \Phi y(t) = \sum_{i=1}^4 [m_v g - m_v \Phi \ddot{y}(t)] \cdot \delta(x - x_{wi}) \quad (6-51)$$

Kdy po matematických úpravách lze rovnici (6-51) napsat ve tvaru:

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{M} + \sum_{i=1}^4 m_v \delta(x - x_{wi}) \right) \Phi \ddot{y}(t) + \mathbf{C} \Phi \dot{y}(t) + \mathbf{K} \Phi y(t) \\ = \sum_{i=1}^4 v_m g \delta(x - x_{wi}) \end{aligned} \quad (6-52)$$

kde přidaná hmotnost vozidla m_v do matice hmotnosti \mathbf{M} na levé straně rovnice přesně odpovídá zahrnutí hmotnosti vozidla při sestavování globálních matic systému v kapitole 6.3. Pomocí Dirackovy delty $\delta(x - vt)$ jsou ve vztahu (6-39) matematicky vyjádřeny pozice, které odpovídají polohám kol vozu na trati. Pravá strana rovnice je gravitační zatížení vozu, působící na trať v místech, kde jsou kola ve styku s kolejnicí.

6.6.2 Zahrnutí dynamických silových účinků

V kapitole **Chyba! Nenalezen zdroj odkazů.** byl představen způsob řešení využívající k propojení vozu s tratí Hertzovu kontaktní sílu, která byla vypočítána pomocí vztahů (4-44)-(4-48). Hertzova teorie je zároveň vhodná k zahrnutí periodických i stochastických nerovností, jak bylo v teorii v dané kapitole vysvětleno. Vypočítanou kontaktní sílu lze převést na tuhost Hertzovy pružiny pomocí vztahu:

$$k_H = \sqrt[3]{\frac{3E^2 F_d \sqrt{R_w R_k}}{2(1 - \nu)}} \quad (6-53)$$

kde E je modul pružnosti, F_d je síla vypočítaná podle vztahu (4-44), R_{kolo} je poloměr kola, R_{kj} je poloměr hlavy kolejnice a ν je Poissonův součinitel. Tato tuhost je v každém časovém okamžiku přepočítávána zvlášť pro každé kolo.

6.7 Algoritmus simulace

K ucelení celého popisu modelu bude nyní ukázáno schéma algoritmu, sestaveného v Matlabu.

Algoritmus 6-2 Celkové schéma algoritmu

```
eM = loadMatrix(p)
for i = 1 : Nel
    [tM, index] = buildVehicle(p, index)
    [gM, index] = buildSystem(tM, eM, index)
    [eig] = eigProblem(tM, index)
    for k = 1 : Nmod
        [gM] = rayilDamp(gM, eig, index)
        [y, t] = ode45(eig, genParam)
        %Aktualizace poč. podmínek
    end
    w = modalSup(y, index)
    kh = hertzContact(w)
end
```

V prvním kroku se načte knihovna elementárních matic a všechny potřebné parametry. Následně celý algoritmus běží ve *for* nebo *while* smyčce, která iteruje postupně přes všechny uzly tratě N_{el} . V každém uzlu se musí znovu sestavit matice vozu, protože se v každé iteraci mění tuhost Hertzovy pružiny v závislosti na nerovnostech tratě. Poté se sestaví matice celého systému, kterou je rovněž nutné skládat v každém kroku, a to z důvodu postupného posouvání se vlaku. Je možné si všimnout, že struktura *index* je vstupem téměř do všech funkcí, neboť nese informaci o polohách všech částí vozu. Následně je vyřešen problém vlastních hodnot a přejde se do druhé iterační smyčky, ve které se iteruje přes všechny zahrnuté módy N_{mod} . Jak bylo zmíněno výše, pro každý mód je nutné přepočíst matici tlumení. Následně se

pomocí řešiče *ode45* vyřeší diferenciální rovnice zobecněné souřadnice a aktualizují se počáteční podmínky pro další krok. Dále se zobecněné výchylky převedou pomocí modální superpozice do reálných souřadnic a na základě výsledků se stanoví tuhost Hertzovy pružiny mezi vozem a tratí.

7 Simulace chování systému

V následující kapitole budou prezentovány výsledky z provedených simulací. Nejprve budou představeny parametry, kterých je při simulacích využito. Následně bude pojednáno o komplikacích spojených s problémem vlastních hodnot a jeho řešení. Poté budou představeny výsledky chování systému v bezporuchovém stavu. Poslední část kapitoly bude zaměřena na odezvy systému při poruše.

7.1 Přehled použitých parametrů

Numerické simulace se v oblasti modelování tratě opírají o experimentálně určené parametry tuhosti a tlumení. Experiment, která byl proveden za účelem identifikace tratě je popsán například v článku [52]. V Tab. 7-1 jsou uvedeny parametry, které byly pro zvolený model podloží použity v pracích [10], [22], [23], a ze kterých se vychází i v této práci při simulování stavu bez poruchy. U modelu koleje je jen jedna sada parametrů pro konkrétní typ koleje.

Parametr		[22]	[23]	[10]	Jednotky
<i>Kolej UIC60</i>					
Hmotnost	m_k		60		kg/m
Hustota	ρ_k		7850		kg/m^3
Modul pružnosti v ohybu	E_k		$2,1 \times 10^{11}$		Pa
Modul pružnosti ve smyku	G_k		$0,84 \times 10^{11}$		Pa
Plocha průřezu	S_k		$7,69 \times 10^{-3}$		m^2
Kvadratický moment průřezu	I_{yk}		$30,55 \times 10^{-6}$		m^4
Poloměr hlavy koleje	R_k		0,3		m
<i>Pražec</i>					
Hmotnost půlky pražce	m_p	125	162	170	kg
Tuhost pražce	k_p	60×10^6	350×10^6	60×10^6	N/m
Tlumení pražce	c_p	45×10^3	50×10^3	50×10^3	Ns/m
Vzdálenost mez pražci	l_p		0,6		m
<i>Balast</i>					
Tuhost balastu	k_b	15×10^6	50×10^6	78×10^6	N/m
Tlumení balastu	c_b	9×10^3	100×10^3	60×10^3	Ns/m

Tab. 7-1 Parametry modelu tratě

Parametry pro model vozu, jak již bylo zmíněno výše, vycházejí z usnesení o volbě parametrů vozidla v dynamických modelech z konference v Manchesteru [47]. Zpráva z konference obsahuje parametry pro více druhů vozů, přičemž je zvolen ten, který odpovídá osobnímu vozu. Aby bylo možné simulovat skříň vozu jako flexibilní, je nutné blíže definovat její geometrii. Za tímto účelem jsou využity výstupy z článku [49], ve kterém autoři definují základní geometrické vlastnosti pomocí 3D modelu. V tabulce Tab. 7-2 jsou uvedeny všechny parametry charakterizující vozidlo.

Parametr		Hodnota	Jednotky
<i>Skříň vozu</i>			
Hmotnost	m_t	32 000	kg
Délka vozu	l_t	20	m
Vzdálenost podvozku od kraje	l_{b1}	2,5	m
Vzdálenost mezi podvozky	l_{b2}	15	m
Modul pružnosti v ohybu	E_t	69×10^9	Pa
Hustota	ρ_t	2700	kg/m ³
Kvadratický moment průřezu	I_{yt}	0,0202	m ⁴
<i>Podvozek</i>			
Hmotnost	m_b	2615	kg
Moment setrvačnosti	J_b	1476	kgm ²
Vzdálenost mezi koly podvozku	l_t	2,4	m
<i>Kola</i>			
Hmotnost	m_w	1350	kg
Poloměr	R_w	0.5	m
<i>Parametry vypružení</i>			
Tuhost primárního vypružení	k_1	$4,8 \times 10^6$	N/m
Tlumení primárního vypružení	c_1	14×10^3	Ns/m
Tuhost sekundárního vypružení	k_2	$0,8 \times 10^6$	N/m
Tlumení sekundárního vypružení	c_2	40×10^3	Ns/m

Tab. 7-2 Použité parametry modelu vozu

Následně je potřeba ještě stanovit parametry spojené s algoritmem a typem simulace. Tyto parametry jsou uvedeny v Tab. 7-3.

Parametr		Hodnota	Jednotky
Délka koleje	l_r	100-200	m
Diskretizace koleje	N_R	10-35	m ⁻¹
Diskretizace skříňe vozu	N_V	1-3	m ⁻¹
Rychlost vlaku	v_t	60-150	km/h
Uvažovaný počet vlastních tvarů	N_M	50-150	-

Tab. 7-3 Parametry algoritmu závislé na typu simulace

U modelů s konečnou délkou koleje je důležitá volba její délky. Kolej musí být dostatečně dlouhá, aby jevy vznikající na okrajích neovlivňovaly výsledek. Na druhou stranu, čím delší kolej, tím větší výpočetní náročnost. Při simulacích, které jsou následně zkoumány ve frekvenčním spektru je navíc nutné provést diskretizaci koleje pomocí menších elementů. Frekvence, které je možné v simulaci zachytit, jsou ovlivněny počtem vzorků, ze kterých je signál složen. Aby tedy bylo možné získat PSD skříňe vozu, ve které je snahou zachytit frekvence do 150 Hz, musí být převrácená hodnota doby simulace v jednom uzlu (6-48), minimálně dvojnásobná. Čím delší je trať, tím roste počet pražců, a tím zároveň roste počet vlastních tvarů, které je třeba při výpočtu k zachycení vyšších frekvencí v odezvě zahrnout.

7.2 Korekce vlastních tvarů

Při řešení problému vlastních hodnot v kapitole 6.4 byla použita vestavěna funkce Matlabu „eigs“. Společně s vlastními čísly funkce vrací i vlastní vektory. Obě hodnoty následně hrají klíčovou roli při výpočtu odezev. S vlastními vektory je však problém v tom, že funkce „eigs“ je vrací s náhodnou orientací, což znamená, že jsou náhodně vynásobené číslem -1 . Tento obrácený tvar se následně projeví při výpočtu zobecněné statické síly v rovnici (6-44). V případě obráceného vlastního tvaru se získá také obrácena odezva systému v zobecněných souřadnicích. V rámci modální superpozice se zobecněná výchylka násobí s vlastním tvarem, dle rovnice (6-47), a díky tomu má odezva v normálních souřadnicích správnou orientaci. Jádrem problému je v tom, že v rámci simulace pohybujícího zatížení se přenáší odezva zobecněné souřadnice v kroku k pro n tvar do následujícího $k + 1$ kroku. V případě, že v kroku k je orientace vlastního tvaru kladná, je kladná i zobecněná výchylka a počáteční podmínka pro krok $k + 1$ bude rovněž kladná. V momentě, kdy je vlastní tvar v kroku $k + 1$ záporný, tak zobecněná souřadnice, která má kladnou počáteční podmínku, začíná v kladném směru, ale kvůli záporné zobecněné síle začne přecházet do záporného směru. Výpočet zobecněné souřadnice se v každém kroku počítá na velmi krátkém časovém intervalu, proto se odezva zobecněné souřadnice nestihne ustálit a výsledná odezva v normálních souřadnicích je zcela nepoužitelná. Proto je nutné zajistit, aby všechny vlastní tvary měly stejnou orientaci.

K zajištění stejné orientace je zavedena korekce vlastního tvaru podle vlastního tvaru kolejnice. Tento vektor vlastních tvarů lze v každém kroku dobře vizualizovat a usoudit, zda je orientace v pořádku či nikoliv. Nezáleží na samotné orientaci, ale na tom, aby všechny vlastní tvary byly orientovány stejně. Napříč zvoleným počtem uvažovaných vlastních hodnot se vlastní tvary koleje mění, a to v závislosti na části soustavy, se kterým je daný vlastní tvar spojen.

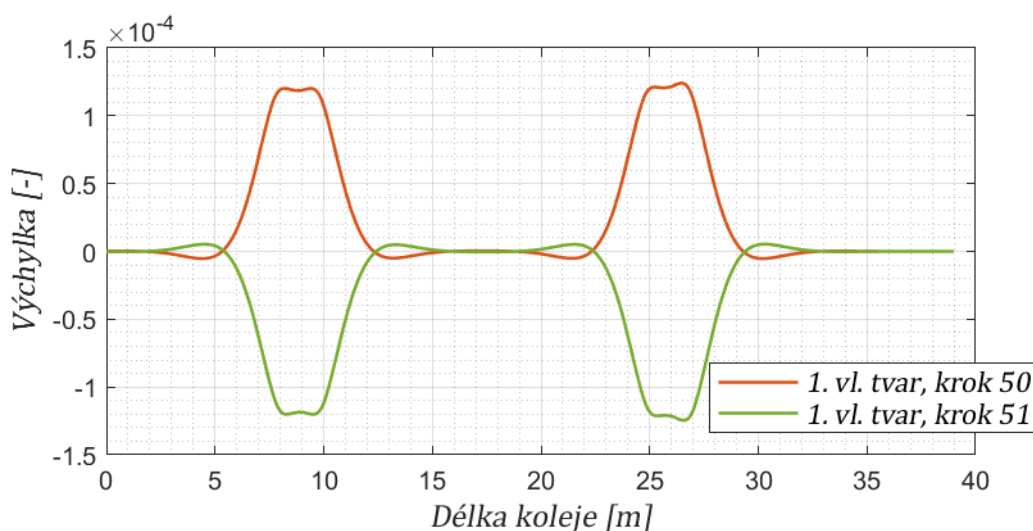
Na Obr. 6.1 jsou první tvary koleje v 50 a 51 kroku simulace, které mají opačnou orientaci. Algoritmus, který provádí kontrolu správného směru nejprve v prvním kroku zkontroluje znaménko maximální hodnoty vlastního tvaru. V případě, že je znaménko kladné, změní orientaci celého vlastního vektoru. Následně v dalších krocích jsou vždy porovnávány vlastní tvary mezi sebou. V kroku k se n vlastní tvar koleje kontroluje s tvarem v kroku $k - 1$. Kritérium, na základě kterého se rozhodne, zda je vlastní tvar správně orientován, vychází ze vzájemného porovnání znaménka v každém bodě vlastního tvaru. Funkce algoritmu bude přiblížena na následujícím schématu.

Algoritmus 7-1 Oprava orientace vlastního tvaru

```
s1 = sign(shape(k))  
s2 = sign(shape(k + 1))  
er = s1 · s2  
if sum(er) < 0  
    eigVec = -eigVec  
end
```

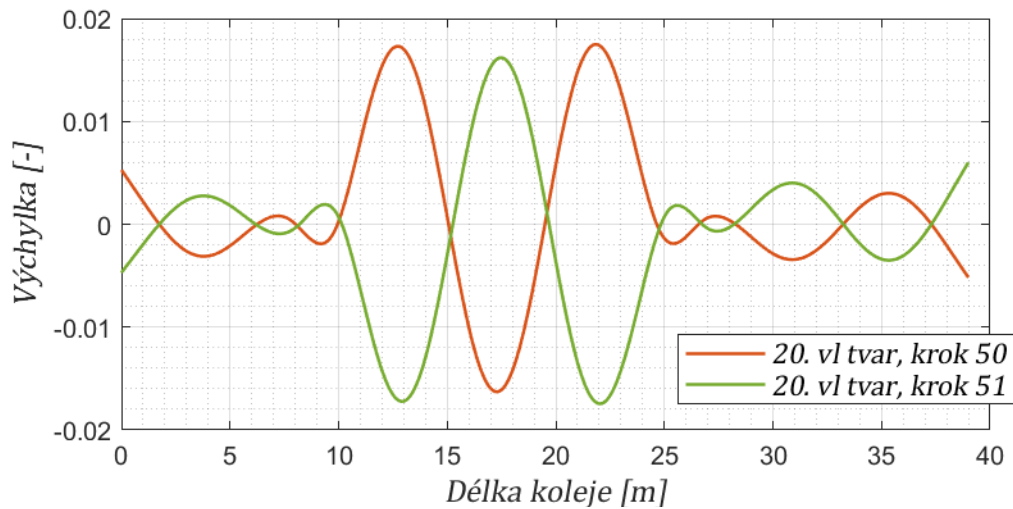
Pomocí Matlabovské funkce „*sign*“ se získá informace o znaménku všech prvků vlastního tvaru koleje. Vektory se znaménky s_1 a s_2 se následně mezi sebou vynásobí. Když je orientace vektorů shodná, jsou jednotlivé prvky vektoru er kladné. Když se sečtou všechny prvky vektoru er a výsledek je kladný, jsou orientace shodné, když je naopak výsledek záporný, vlastní vektor se otočí.

Toto kritérium však není dostatečně silné, aby pokrylo všechny vlastní tvary. Pro vlastní tvary, které mají více vrcholů, jako je například 1. vlastní tvar na Obr. 6.1 nebo vyšší vlastní tvary jako je na Obr. 6.2 je toto kritérium dostatečně silné.

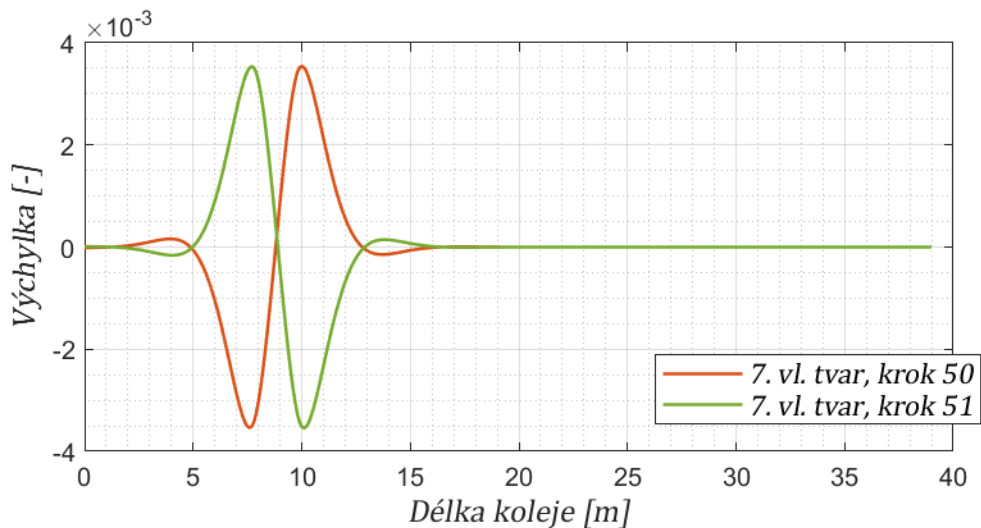


Obr. 7.1 První vlastní tvar kolej pro dva po sobě jdoucí kroky simulace

Pro vlastní tvary, které mají jen dva vrcholy jako je na Obr. 6.3, je předešlé kritérium nedostačující, a je třeba zavést jiné. V tomto případě se vychází ze vzájemné polohy vrcholů. V prvním kroku se určí indexy kladného i záporného vrcholu a jejich pořadí. Následně se v každém kroku simulace porovnává pořadí kladného a záporného vrcholu vůči výchozímu prvnímu kroku. Když ve výchozím stavu je první záporný vrchol, tak následně v každém kroku, ve kterém je první kladný vrchol, dojde k otočení celého vlastního vektoru.



Obr. 7.2 Dvacátý vlastní tvar kolej pro dva po sobě jdoucí kroky simulace



Obr. 7.3 Sedmý vlastní tvar kolej pro dva po sobě jdoucí kroky simulace

Při změně konfigurace modelu může dojít ke změně vlastních tvarů a jejich pořadí. Proto je nutné vždy ověřit, že aplikovaná kritéria fungují. K lepší orientaci je vhodné využít vlastní čísla. Jelikož je model vozu nejprve samostatně sestaven mimo model koleje, lze vypočítat vlastní čísla pouze pro vlak, a tím si udělat představu o tom, které vlastní čísla odpovídají jednotlivým částem modelu. Dále lze využít základní vztah pro výpočet vlastní frekvence, který je daný rovnicí (7-1).

$$f_i = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_i}{m_i}} \quad (7-1)$$

Na základě těchto poznatků, lze prvních 10 vlastních tvarů považovat za vlastní tvary, ve kterých se projevují účinky vozu. Tyto tvary je vhodné při větších změnách parametrů kontrolovat, aby jejich korekce byla prováděna dle správného kritéria. Vlastní frekvence v pásmu 40 – 80 Hz lze považovat za vlastní frekvence pražců. Vlastní tvary koleje v tomto pásmu mají vždy několik vrcholů, jako na Obr. 6.2. Pro jejich správnou orientaci je vždy použito znaménkové kritérium.

7.3 Odezvy systému za normálních podmínek

Za normální jsou zde považovány takové podmínky, při kterých nejsou do simulace zahrnuty žádné defekty. Nejprve budou vyhodnoceny výsledky modální analýzy. Jak již bylo zmíněno výše, je vhodné začít modální analýzou samotného vozu. Při použití parametrů z Tab. 7-2 a diskretizaci skříně pomocí dvou elementů na metr, jsou získány vlastní frekvence zobrazené v tabulce Tab. 7-4.

Pořadí	Hodnota vlastní frekvence [Hz]	Odpovídající pohyb
1)	1,06	Posuv skříně
2)	1,50	Natočení skříně
3)	7,770	1. Ohyb skříně
4)	10,03	Posuv 1. podvozku
5)	10,04	Posuv 2. podvozku
6)	13,94	Natočení 1. podvozku
7)	13,92	Natočení 2. podvozku
8)	21,20	2. Ohyb skříně
9)	41,54	3. Ohyb skříně
10)	68,67	4. Ohyb skříně
13)	170,19	Posuv kola
14)	170,58	Posuv kola
15)	170,58	Posuv kola
16)	170,58	Posuv kola

Tab. 7-4 Vlastní frekvence modelu vozu

Přiřazení jednotlivých frekvencí k odpovídajícím pohybům tuhých těles je na základě vztahu (7-1). Zvýrazněné vlastní čísla pohybů skříně jsou velice důležité z hlediska analýzy vibrací ve voze. Na ohybových frekvencích se dle publikací [30], [53] projevují vibrace v interiéru nejintenzivněji. V jejich zahrnutí do výpočtu spočívá největší rozdíl mezi flexibilním a tuhým modelem skříně. V souladu s uvedenými publikacemi jsou i výsledné hodnoty vlastních frekvencí skříně. Je vhodné si také všimnout, že samotný pohyb kol se odehrává na vyšších frekvencích okolo 170 Hz. Z toho je patrné, že je-li snahou zahrnout do celkové odezvy také vlastní tvary kol, je nutné použít větší množství vlastních čísel. Samotná vlastní frekvence kola je zásadně ovlivněna tuhostí Hertzovy pružiny, která je vypočítaná ve vztahu (6-53).

Pro celý systém tratě s vozem jsou vlastní frekvence v tabulce Tab. 7-5. Vlastní frekvence pohybu skříně se nezměnily, protože nejsou v přímém spojení s podvozkem. Zatímco na vlastních frekvencích podvozků i kol se projeví vzájemné propojení s tratí, jak o něm bylo pojednáno na začátku kapitoly 6.3. Zatímco v případě samotného vozidlo byly s podvozkem svázány dvě vlastní frekvence, tak po propojení se objeví čtyři frekvence, jejichž hodnoty jsou v relativní blízkosti. Tuto situaci lze opět pochopit pomocí využití základního vztahu (7-1). K modelu vozu je přidána tuhost tratě, a protože platí, že s rostoucí tuhostí roste vlastní frekvence, všechny vlastní frekvence vozu, které jsou v přímém propojení s tratí se zvýšily, jak je patrné z tabulky. U koleje je tomu přesně naopak. Přidáním vozu stoupla její hmotnost, a jelikož se

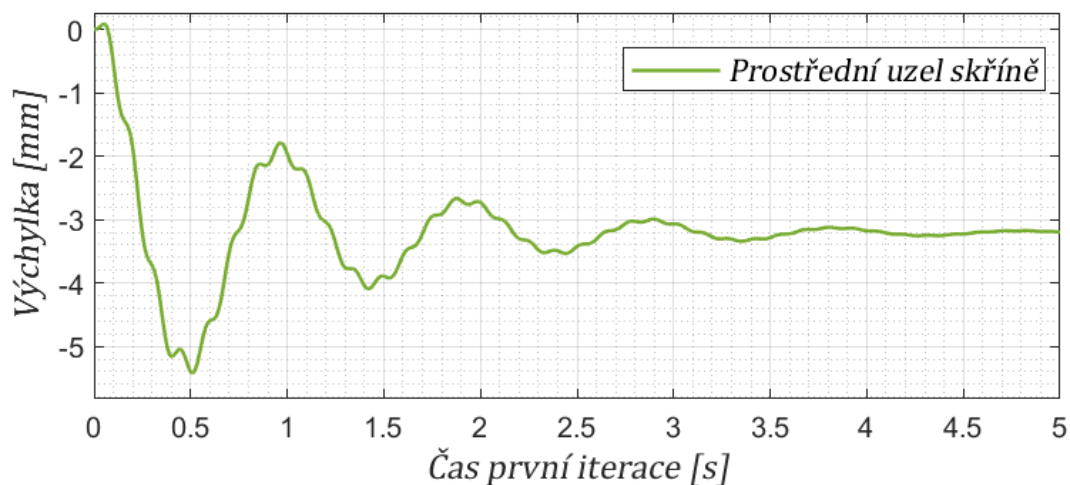
zvýšenou hmotností klesají vlastní frekvence, došlo k ponížení vlastních frekvencí koleje.

Pořadí	Hodnoty vlastních frekvencí [Hz]	Odpovídající pohyb
1-2)	1,06; 1,50;	Posuv a natočení skříně
3, 8, 9, 10)	7,78; 21,20; 41,54; 68,67;	Ohyb skříně
4-7)	9,30; 9,32; 12,72; 12,73;	Posuvy podvozku
9-12)	22,48; 22,70; 24,23; 24,35;	Natočení podvozku
12-90)	38,94 – 89,19	Posuv pražců
91-94)	184,92; 184,98; 185,58; 185,78;	Posuv kol
95-N)	189,07 – XY	Vyšší vlastní tvary flexibilních těles

Tab. 7-5 Spektrum vlastních frekvencí celé soustavy

Vlastní frekvence nezátížená koleje začínají nad 100 Hz. Následně v rozmezí 38,49 – 89,19 Hz se pohybují vlastní frekvence jednotlivých pražců, v závislosti na tom, kolik jich v simulaci je zahrnuto. Po pražcích pak obvykle následují vlastní frekvence pohybu kol, které jsou oproti samotnému modelu vlaku rovněž vyšší.

Následně je tedy možné přejít k analýzám odezev systému. V případě, že se při simulaci bez defektního stavu v odezvě vyskytují skokové změny, bývá nejčastěji problém s vlastními tvary, zejména s těmi, které jsou spojeny s pohyby vozu na trati. Na základě uvedené analýzy vlastních čísel a algoritmu pro korekci vlastních tvarů je možné tento problém odstranit. Dalším problémem může být nedostatečně dlouhá trať. V takovém případě může být odezva ovlivněna vzruchy, které vznikají v blízkosti okrajů modelu tratě. Proto je vhodné zvolit délku tratě minimálně 4 × větší, než je délka samotného vozu. Dále je v rámci ošetření okrajových vzruchů vhodné spouštět simulaci s vozem, který je umístěn v určité vzdálenosti od kraje. První výpočetní krok simulace má nastavenou delší dobu výpočtu, a to z toho důvodu, aby se soustava začala pohybovat z ustálené polohy. Příklad ustálení skříně vozu je na Obr. 6.4



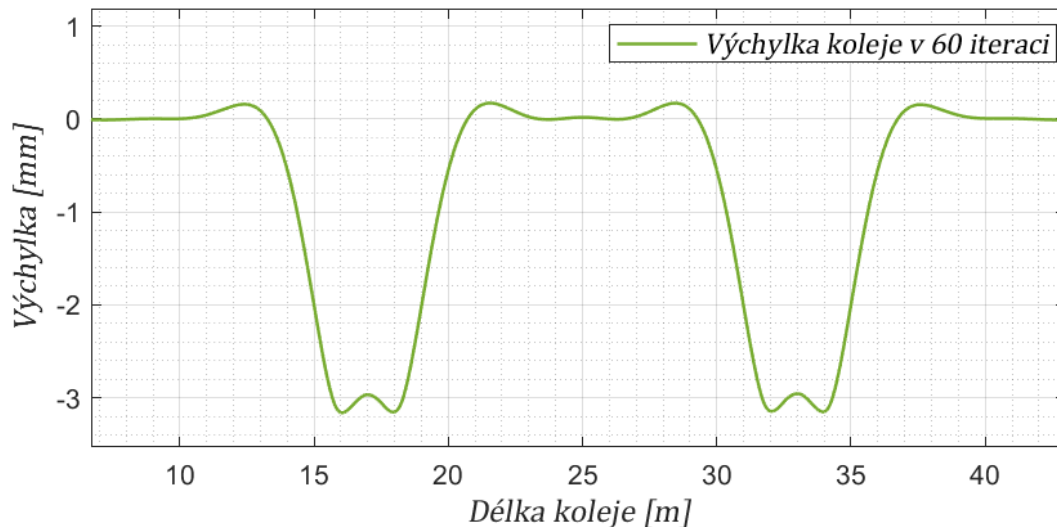
Obr. 7.4 Ustálení výchyly skříně v první iteraci simulace

Jak bylo pojednáno v kapitole 6.6.2, dynamické účinky se projevují ve změně tuhosti Hertzovy pružiny. Při normálním stavu jsou hodnoty dynamické složky zatížení a kontaktní tuhost uvedeny v tabulce Tab. 7-6.

Parametr	Hodnota	Jednotky
Statická síla nápravy	$106,4 \times 10^3$	N
Dynamická síla nápravy	$30,4 \times 10^3$	N
Tuhost Hertzovy pružiny	$1,79 \times 10^3$	N/m

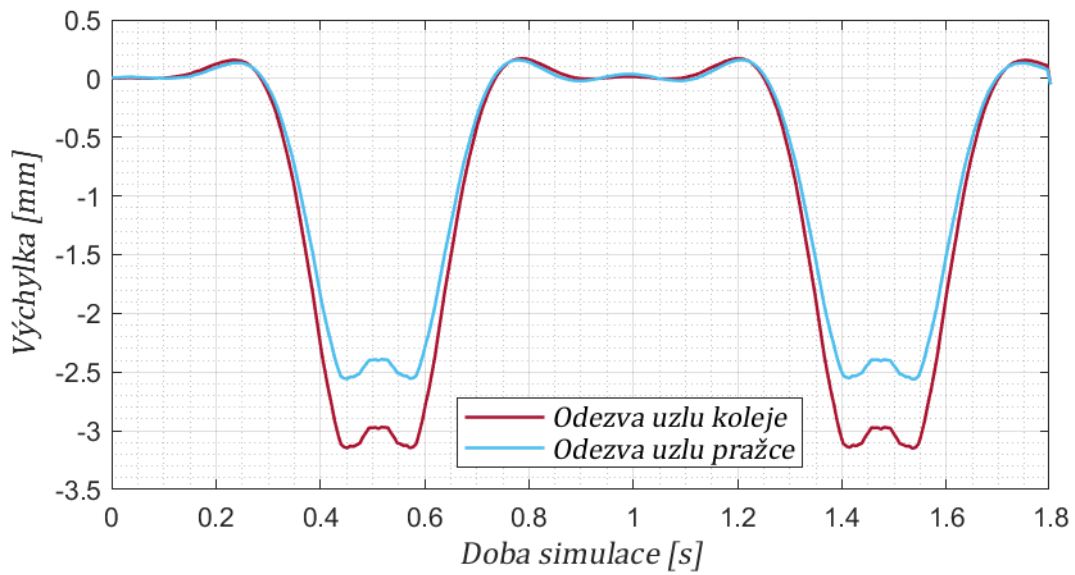
Tab. 7-6 Střední hodnoty zatížení a tuhost kontaktu

Kde statická síla je daná hmotou vozu a dynamická složka je dána vztahem (4-44). Při daných parametrech je výchylka koleje v závislosti na své délce na Obr. 6.5.

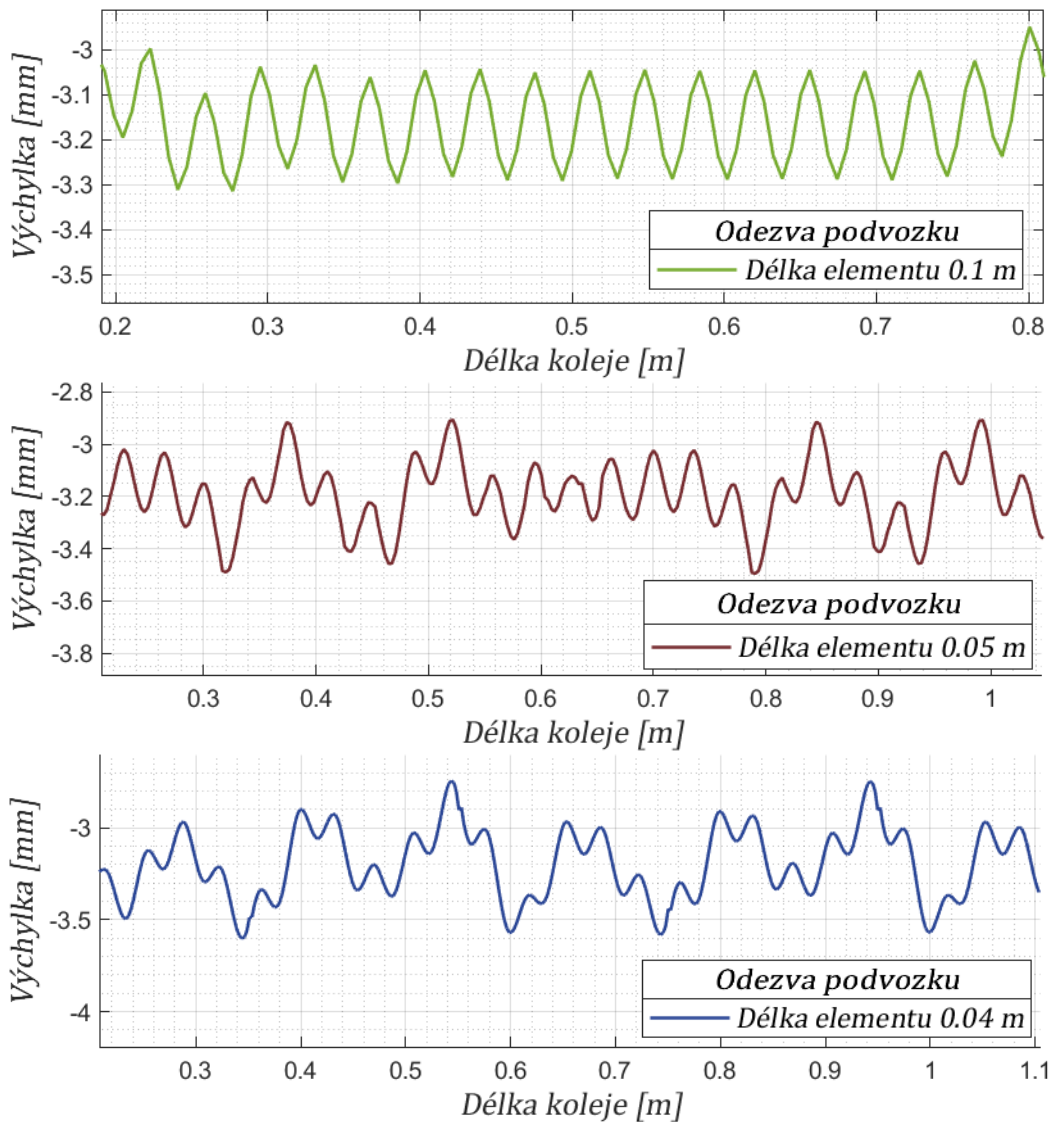


Obr. 7.5 Výchylka koleje při jízdě vlaku

Výchylka koleje pod tíhou vozu je $3,14 \text{ mm}$, což je hodnota, kolem které se běžně výchylky kolejí v literatuře vyskytují. Rovněž tvarově se odezva koleje prezentovaného modelu shoduje s ostatními publikovanými modely. Při experimentálním měření na trati pomocí akcelerometrů se získává časová odezva v místě měření. Takové odezvy koleje i pražce jsou simulovány na Obr. 6.7. Kvalita výsledků v časové oblasti je silně ovlivněna diskretizací koleje. Diskretizaci je nutné nastavovat v závislosti na simulované rychlosti vozu, kdy se zvyšující se rychlostí by měl růst také počet elementů, které jsou při diskretizaci koleje použity. Na grafech odezvy je také vidět rozdíl mezi výchylkou koleje a pražce, která je dána nastavenou tuhostí pražce k_p . S menším časovým krokem lze zachytit detailněji zachytit pohyb, což lze demonstrovat na odezvě podvozku. Na Obr. 6.6 jsou odezvy podvozku v časové oblasti. Je možné si všimnout, že při délce jednoho elementu koleje $0,1 \text{ m}$ je v odezvě po ustálení zachycena pouze jedna frekvence, zatímco při zmenšení kroku se v rámci jedné periody začíná objevovat více frekvencí, ze kterých je celkový pohyb složen.



Obr. 7.7 Časová odezva koleje a pražce v jednom místě.
Diskretizace koleje: 10 elementů na metr, Rychlost vozu: 60 km/h



Obr. 7.6 Odezva podvozku pro různé úrovně diskretizace při rychlosti 60 km/h

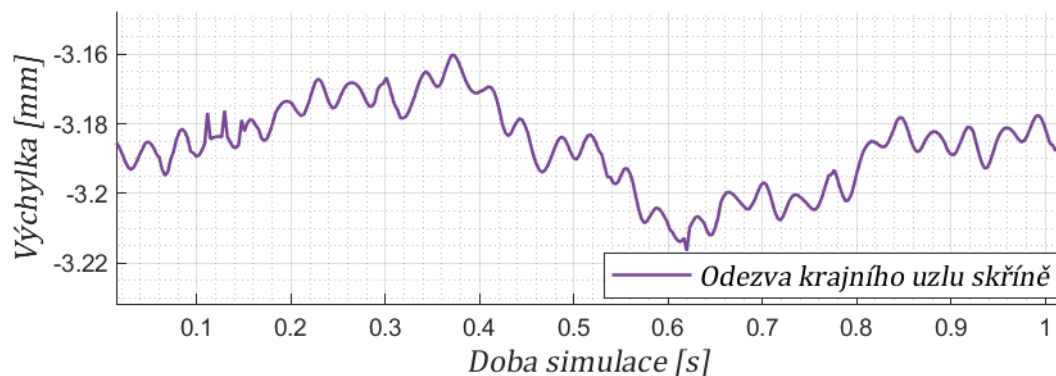
Jemnější diskretizace koleje sebou však přináší navýšení celkového počtu stupňů volnosti systému a tím i vyšší výpočetní čas. Změny jednotlivých parametrů v závislosti na diskretizaci jsou shrnuty v následující tabulce.

Délka 1 elementu	Celková délka koleje	Stupně volnosti systému	Doba výpočtu 1 iterace	Iterace k ujetí 40 m
0.100 m	90 m	2046	3,64 s	400
0.050 m		3846	13,67 s	800
0.033 m		5646	31,05 s	1200

Tab. 7-7 Výpočetní náročnost při změně diskretizace

Z tabulky je patrný vysoký nárůst výpočetní doby se zvětšujícím se systémem. Má-li simulace zachytit pohyb vozu po určité délce koleje, musí být při menší diskretizaci zároveň zvětšen počet výpočetních iterací.

Při simulaci jízdy vozu po nepoškozené trati je možné na Obr. 6.8 vidět odezvu skříně vozu v místě, kde je skříň uchycena do podvozku. V grafu lze rozeznat složku pohybu spojenou s natočením skříně, která má periodu přibližně 0,8 s, a poté složky s vyšší frekvencí, které jsou do skříně přenášeny z podvozku. Amplituda skříně je přibližně 0,025 mm, což je podstatně méně, než amplituda podvozku (přibližně 0,52 mm). Podvozek je tedy vždy navržen tak, aby absorboval co největší množství vibrací, které vzniká při jízdě vlaku a zajistil tak žádaný cestovní komfort.



Obr. 7.8 Odezva krajního uzlu skříně v časové oblasti.

Diskretizace skříně: 2 elementy na metr, Rychlost vozu: 60 km/h

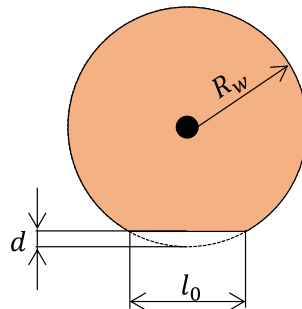
Pomocí sestaveného algoritmu je tedy možné simulovat chování celého železničního systému při zvolených podmínkách a nastavených parametrech. Je možné kontrolovat vzájemné chování jednotlivých částí, včetně změn odezev při změně vstupních parametrů. Kromě Hertzova kontaktu mezi vozem a kolejí je model lineární, jak je možné dobře vidět na odezvě koleje a pražce na Obr. 6.7. Další nelinearity budou do modelu postupně vkládány ve formě defektů v následující kapitole.

7.4 Odezvy systému s defektem

V této podkapitole budou postupně představeny 4 excitační mechanismy, které se nejčastěji v souvislosti s defekty vyskytují. Jde o ploché kola, podemleté pražce, poškozený pražec a opotřebenou kolej.

7.4.1 Simulace plochého kola

Buzení vozu a tratě plochým kolem je téma, na které bylo napsáno poměrně velké množství vědeckých publikací, jako například [25], [54], [55] a mnoho dalších. Projev plochého kola při jízdě je charakteristický náhlou změnou relativní výchylky mezi kolem a kolejnicí. V první fázi, kdy dojde ke kontaktu hrany plošky kola s kolejnicí, ztratí na krátký čas kolo kontakt s kolejnicí. V druhé fázi dopadne kolo na kolejnici, což je charakteristické silovým impulzem, který se přenáší jak do koleje, tak do vozu. Na Obr. 6.9 je schéma plochého kola, které je charakterizováno svým průměrem R_w , hloubkou plošky d a délkou plošky l_0 . V běžném provozu je v normálních zemích stav kol vozidla pečlivě monitorován a například na švédských železnicích je maximální



Obr. 7.9 Schéma plochého kola

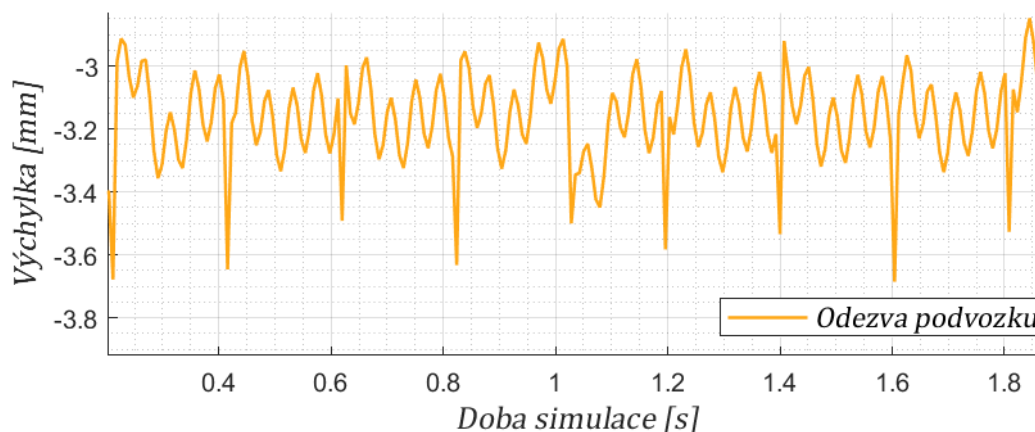
přípustná hloubka plošky kola vozidla v provozu $0,35 \text{ mm}$. Některé publikace [55], počítají s hloubkou plošky až 2 mm . V literatuře se při modelování plochého kola rozlišuje, zda je ploška nová a má ostré hrany, nebo je již starší a má hrany zakulacené. Dále se řeší kritická rychlost, při které se kolo točí tak rychle, že nedojde k dopadu plošky kola na kolejnici, ale pouze k přechodné ztrátě kontaktu. Do modelu uvedeného v této práci bude implementován pouze zjednodušující model plochého kola, který je popsán rovnicí (7-2). Do celé soustavy je následně ploché kolo zavedeno v rámci Hertzova kontaktu daného rovnicí (4-47). Relativní vzdálenost mezi kolem a kolejnicí bude doplněna funkcí popisující plošku kola.

$$\zeta = \begin{cases} d & \text{if } \frac{2\pi R_w}{vt} = \mathbf{Z} \\ 0 & \end{cases} \quad (7-2)$$

kde v je rychlost vozu, t je čas a \mathbf{Z} je libovolné celé číslo. Vztah pro kontaktní sílu je poté ve tvaru:

$$\delta Z(t) = \delta Z_0 + \delta Z_{wr}(t) - \zeta(t) \quad (7-3)$$

Na Obr. 6.10 je odezva podvozku při jízdě s plochým kolem, kdy jsou jasně zřejmé píky ve výchylce při kontaktu plošky s kolejnicí. V tomto místě prudce narůstá



Obr. 7.10 Odezva podvozku s plochým kolem

Hloubka plošky 2 mm, Rychlost vozu: 60 km/h

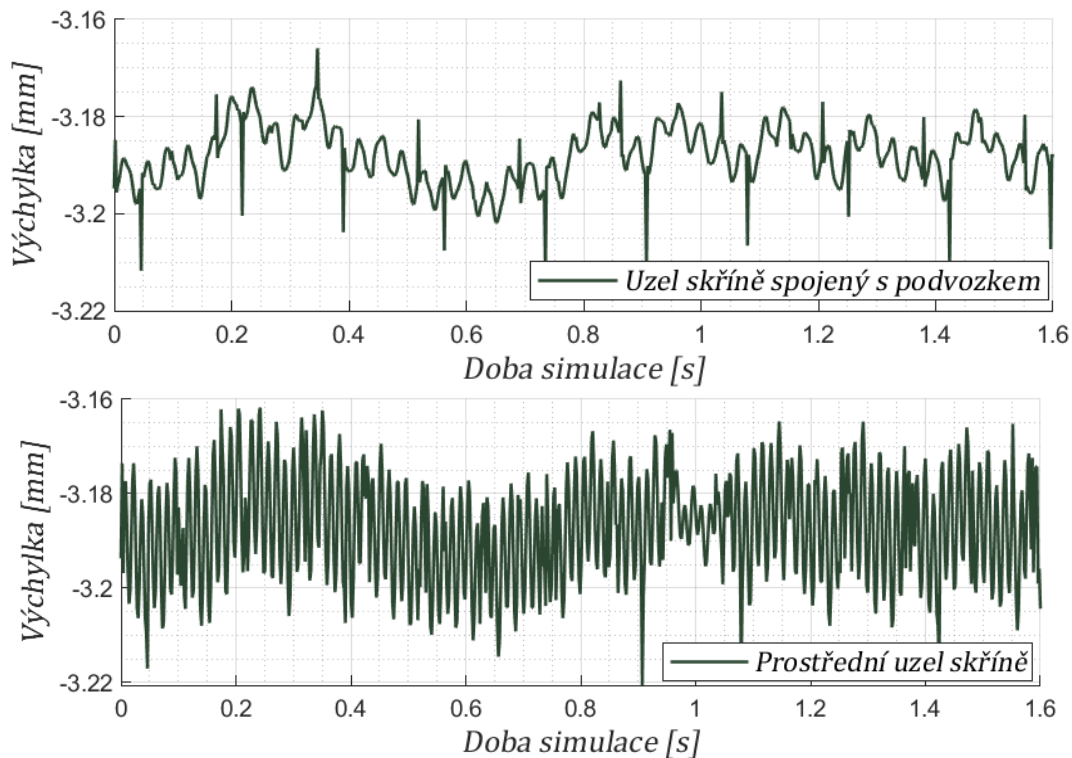
dynamická síla, a tím i tuhost Hertzovy pružiny. Pro rychlost 60 km/h a statickou sílu 106 kN je v Tab. 7-8 uvedena dynamická síla a tuhost kontaktu pro některé hloubky hloubky defektu.

Hloubka plošky	Tuhost kontaktu	Dynamická síla
1,0 mm	$5,28 \times 10^9 N/m$	3385 kN
0,5 mm	$3,85 \times 10^9 N/m$	1280 kN
0.3 mm	$2,93 \times 10^9 N/m$	0,647 kN

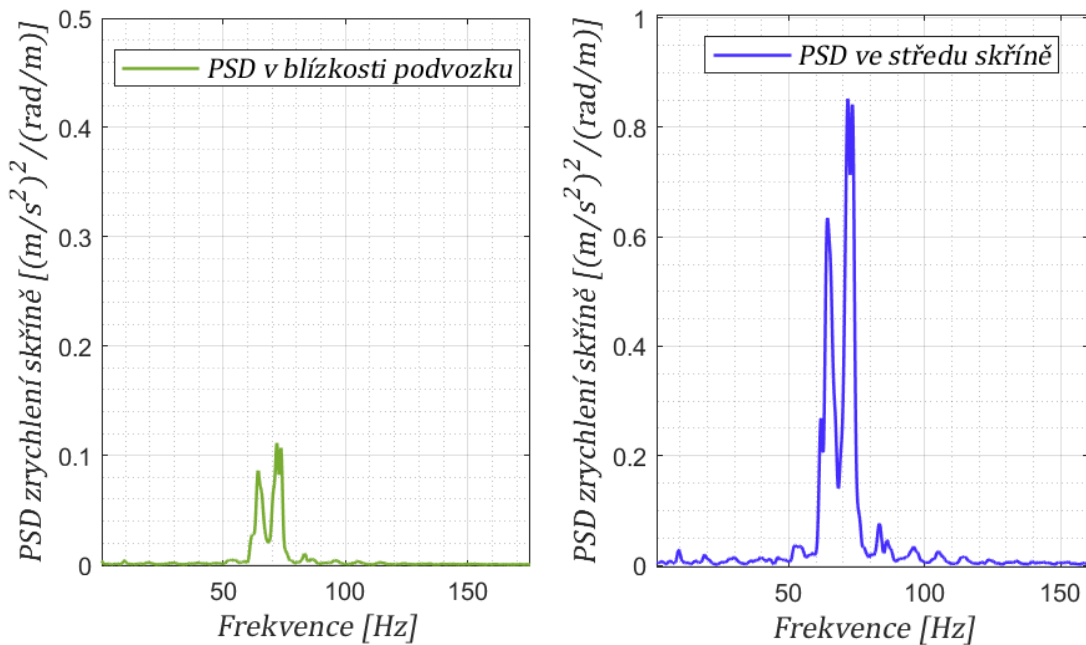
Tab. 7-8 Dynamická síla a tuhost kontaktu v závislosti na hloubce plošky kola

Jak tedy z Tab. 7-8 vyplývá, už při hloubce plošky 0,3 mm je účinek dynamické síly 6 × větší, než je účinek síly statické. V případě, že má vůz na kole více plošek, může docházet i při menších rychlostech k akumulaci dynamických účinků a vzniku nežádoucích jevů ve voze. Při simulování těchto stavů je vhodné použít jemnější diskretizaci. Případ, kdy má vůz na každém kole jednu i více plošek je na Obr. 6.12, kde je odezva skříně ve dvou místech. Horní graf odpovídá místu, ve kterém je skříň uchycena k podvozku. V průběhu jsou zřejmé píky, které odpovídají kontaktům plošky kol s kolejnicí. Jejich velikost je však díky tlumení podvozku opět řádově menší. Čím je uzel skříně vzdálenější od spojení s podvozkem, tím se více projevují vibrace skříně spojené se silovým impulzem plochého kola, což je patrné na spodním grafu.

Na Obr. 6.11 je odezva zrychlení skříně ve zmíněných uzlech převedena do frekvenčního spektra. Poškozené kola se při rychlosti 60 km/h nejvíce projevují na frekvencích 64 – 71 Hz. Toto frekvenční pásmo odpovídá 4. ohybové frekvenci skříně, která je dle tabulky s vlastními čísly 68 Hz. Zároveň je možné se všimnout, že energie daných frekvencí je ve středu skříně 8 × větší než v okolí podvozku. Je pravděpodobné, že k tomuto velkému rozdílu přispívá zjednodušený model vozu, a to zejména v oblasti konstrukce matice tlumení skříně. Nicméně rozdílný projev vibrací po délce vozu lze předpokládat také ve skutečnosti.



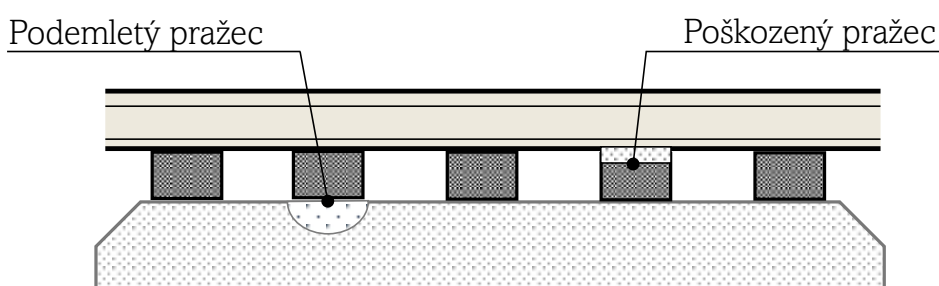
Obr. 7.12 Výchyly prostředního a krajního uzlu skříně při jízdě s plochými koly
 Diskretizace skříně: 2 elementy na metr, Délka kroku simulace: 0,002 s
 Hloubka plošek kol: 1 mm; 0,5 mm; 0,3 mm



Obr. 7.11 PSD zrychlení skříně vozu s plochými koly. Vlevo PSD v blízkosti uchycení k podvozku, vpravo PSD ve středu skříně vozu
 Vzorkovací frekvence: 500 Hz, Počet vzorků 7800

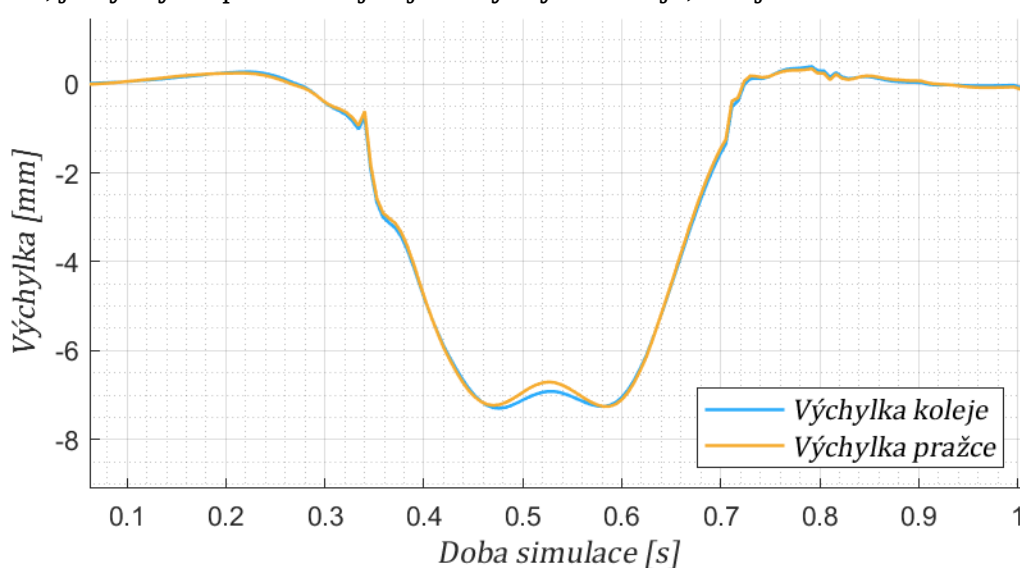
7.4.2 Odezva systému při přejezdu přes podemletý nebo poškozený pražec

Trať s lokálními defekty, jako je poškozený nebo podemletý pražec, je ve skutečnosti běžně se vyskytující věc. V případě podemletého pražce je část balastu pod pražcem vymletá. Takový pražec v nezatíženém stavu není v kontaktu s podložím, a v případě zatížení dochází v jeho místě k větším deformacím koleje. Tuto větší deformaci je možné simulovat změnou parametru tuhosti pod daným pražcem. V případě poškozeného pražce, se jedná o situaci, kdy povrch pražce je buď ztrouchnivělý (dřevěný pražec), nebo vydrolený (betonový pražec). V nezatíženém stavu není kolejnice v kontaktu s pražcem. V momentě, kdy je kolej zatěžována vlakem, dochází k větší deformaci koleje. Zjednodušeně lze poškozený pražec opět modelovat pomocí změny parametru tuhosti pražce.



Obr. 7.13 Trať s poškozeným a podemletým pražcem

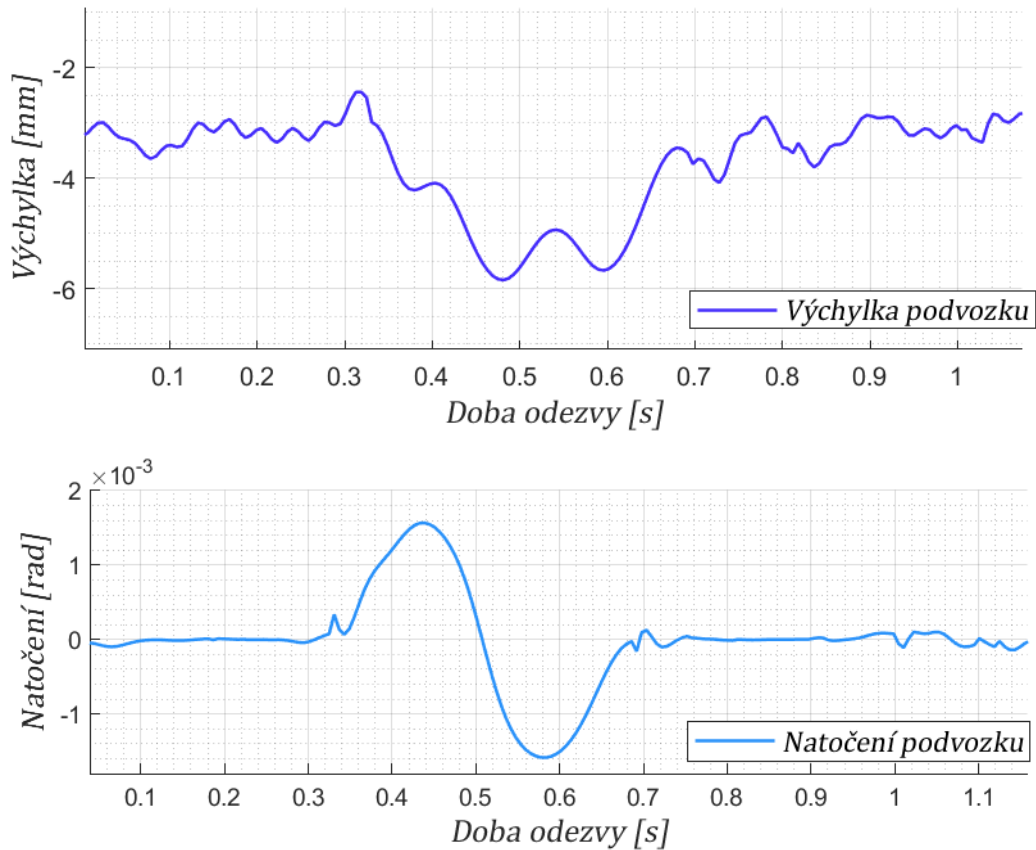
Na Obr. 6.14 je odezva trati a podemletého pražce. V této simulaci byla nastavena hodnota tuhosti balastu jako desetina původní hodnoty, která byla použita při simulaci na Obr. 6.7). Zároveň je tento defekt nastaven pro tři po sobě jdoucí pražce, kdy vyobrazená výchylka na Obr. 6.14 je odezvou v místě druhého poškozeného pražce. Zatímco v normálním stavu byla výchylka koleje přibližně 3 mm, nyní je přibližně 7 mm. Dále je patrné, že v případě, kdy je tuhost mezi balastem a pražcem řádově menší, je výchylka pražce stejná jako výchylka koleje, což je v souladu s očekáváním,



Obr. 7.14 Výchylka koleje a podemletého pražce
Diskretizace koleje: 10 elementů na metr, Tuhost balastu $k'_b = 0,1k_b$

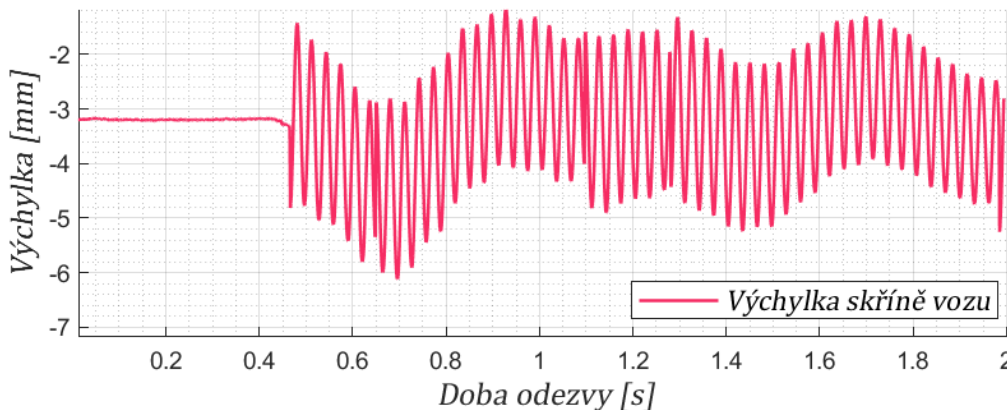
neboť pohybu pražce nebrání tuhost balastu. Na Obr. 6.15 je výchylka a natočení podvozku při přejezdu přes podemletý úsek. Je zřejmý nárůst výchylky podvozku v místě defektu koleje. Kladný průběh natočení přechází do záporného v momentě, kdy první kolo opouští poškozenou oblast a výchylka druhého kola stále narůstá.

Prudký nárůst ve výchylce podvozku následně vede k silnějším vibracím samotné



Obr. 7.15 Odezva podvozku při přejezdu přes podemleté pražce
Diskretizace koleje: 10 elementů na metr, Rychlost vozu: 60 km/h,

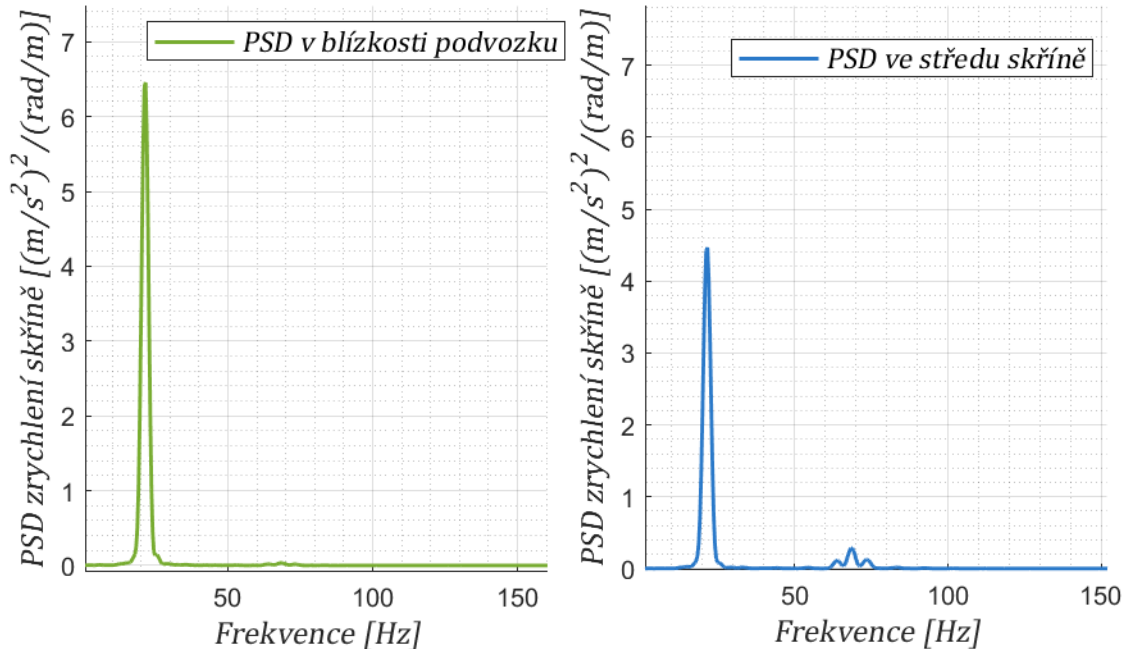
skříně, což lze vidět na Obr. 6.16. V grafu je vidět nárůst amplitudy výchylky skříně, a to na dvou frekvencích. Zvětšila se amplituda nízko frekvenční složky, která se v odezvě vozu vyskytovala i v normálním stavu. Zároveň se však v odezvě vyskytuje



Obr. 7.16 Odezva středu skříně vozu při přejezdu přes podemleté pražce

další složka, která nemá tak vysokou frekvenci jako v případě plochého kola, ale za to

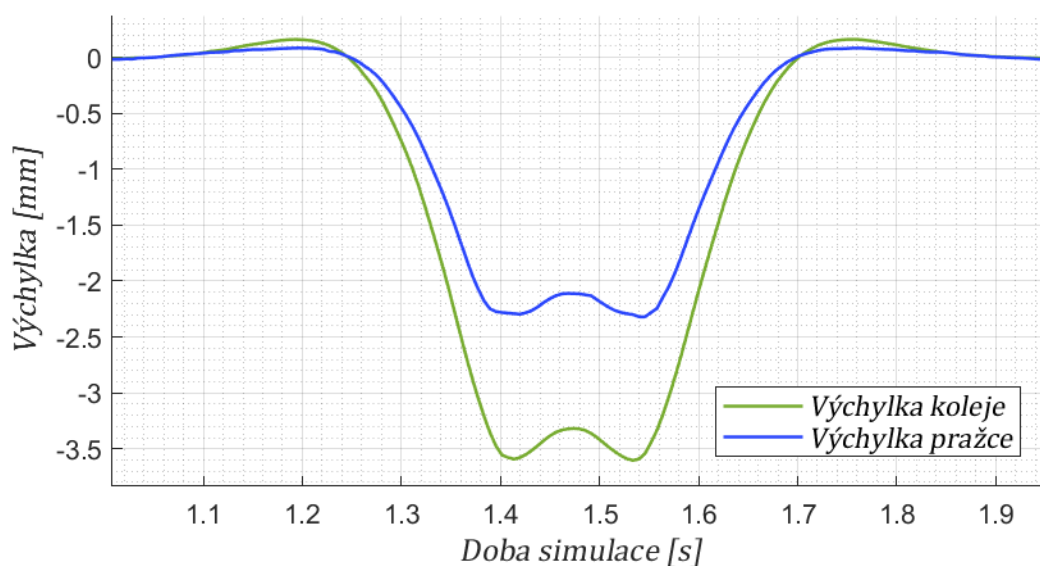
má větší amplitudu. Do frekvenční oblasti je signál v prostředí Matlabu převeden pomocí vestavěné funkce „*pwelch*“. Ve frekvenční oblasti je možné na Obr. 6.17 vidět velký pík při frekvenci 21,5 Hz, což odpovídá druhé vlastní ohybové frekvenci skříně vozu. Zároveň je z grafů patrné, že silnější projev vibrací při přejezdu přes poškozenou trať je v blízkosti podvozku, zatímco v jeho středu je amplituda menší. Ve středu skříně



Obr. 7.17 PSD zrychlení skříně vozu při přejezdu přes 3 podemleté pražce.
Vlevo PSD v blízkosti uchycení do podvozku, vpravo PSD ve středu skříně vozu
Vzorkovací frekvence: 500 Hz, Počet vzorků 2000

Lze také vidět malý pík při frekvenci 68,1 Hz, což je obdobné s projevem plochých kol. V uvedené simulaci je tedy projev poškozených pražců až $8 \times$ silnější než projev plochých kol, což je způsobeno velkou redukcí tuhosti balastu ($k'_b = 0.1k_b$) a větším počtu po sobě jdoucích poškozených pražců. Vzhledem ke spojitosti silných vibrací s podvozkem vozu by v rámci optimalizace parametrů mělo dojít k úpravě parametrů vypružení. Lze ale konstatovat, že projevy obou defektů jsou zcela odlišné, a to jak v časové, tak ve frekvenční oblasti. V případě plochého kola dokázal podvozek poměrně dobře izolovat vibrace jdoucí do skříně, zatímco v případě podemleté tratě vedla výchylka podvozku k silnějším vibracím s nižší frekvencí.

I když je modelování poškozeného pražce postaveno na stejném principu, jako modelování podemletého pražce, odezva tratě je mírně odlišná. V předešlém případě byly výchylky pražce i koleje téměř shodné. Když je však poškozený pražec, zvětší se pouze deformace koleje, zatímco posuv pražce zůstává téměř stejný. Větší deformace koleje je ve realitě dána zatlačením koleje do poškozeného povrchu pražce a v simulaci menší hodnotou parametru tuhosti. Na Obr. 6.18 je odezva koleje na poškozeném pražci. Hodnota tuhosti poškozeného pražce je poloviční, oproti původnímu stavu, který je na Obr. 6.7. Je možné si všimnout, že výchylka koleje se proti normálnímu stavu zvětšila o přibližně 0,5 mm, zatímco výchylka pražce je dokonce o 0,2 mm menší než v než v simulaci s normálními vlastnostmi.

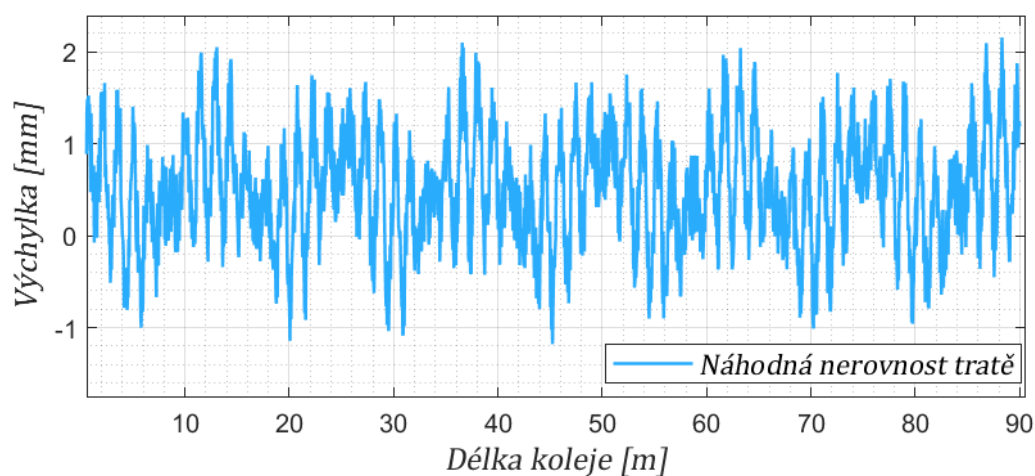


Obr. 7.18 Odezva koleje a poškozeného pražce
Diskretizace koleje: 10 elementů na metr, Tuhost pražce $k'_p = 0.5k_p$

Poškozený pražec se směrem do vozu projevuje velice podobně jako pražec podemletý.

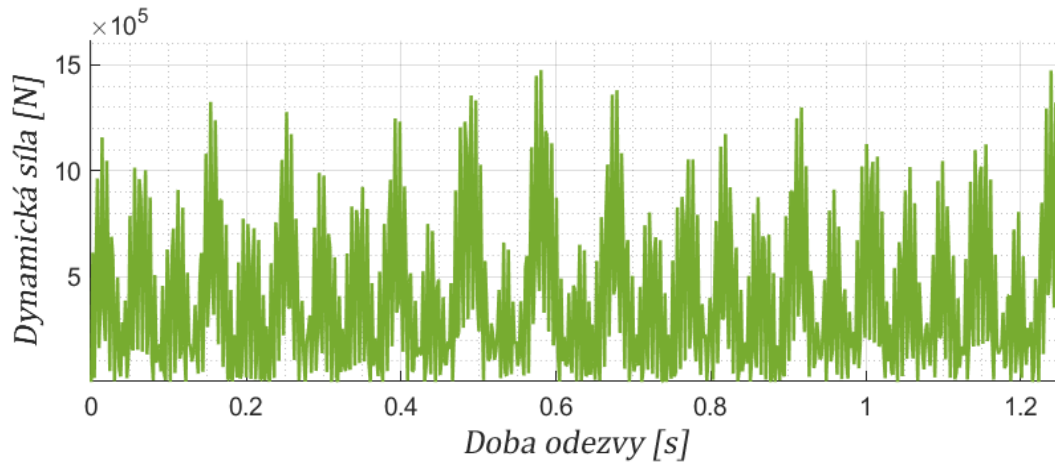
7.4.3 Simulace jízdy po opotřebené koleji

Jak již bylo výše v práci uvedeno, opotřebení samotné koleje se v modelu zavádí ve formě náhodných vibrací, které jsou definované výkonovou spektrální hustotou PSD. Díky měření, provedených v některých zemích, byly sestaveny analytické předpisy PSD pro tratě různé kvality. PSD signál lze zpětně převést do časové oblasti pomocí metod založených na inverzní Fourierově transformaci. Detailněji je tento problém rozepsán v knize [10]. Převod signálu je poměrně komplikovaný a velice náchylný na přesnost. Proto k účelům simulace opotřebené kolejnice je vytvořen náhodný tvar povrchu koleje pomocí harmonických funkcí. Amplituda nerovností je zvolena podle představených náhodných tvarů koleje v knize [10]. Kontaktní dynamická síla se pak určí dle vztahu (4-47).



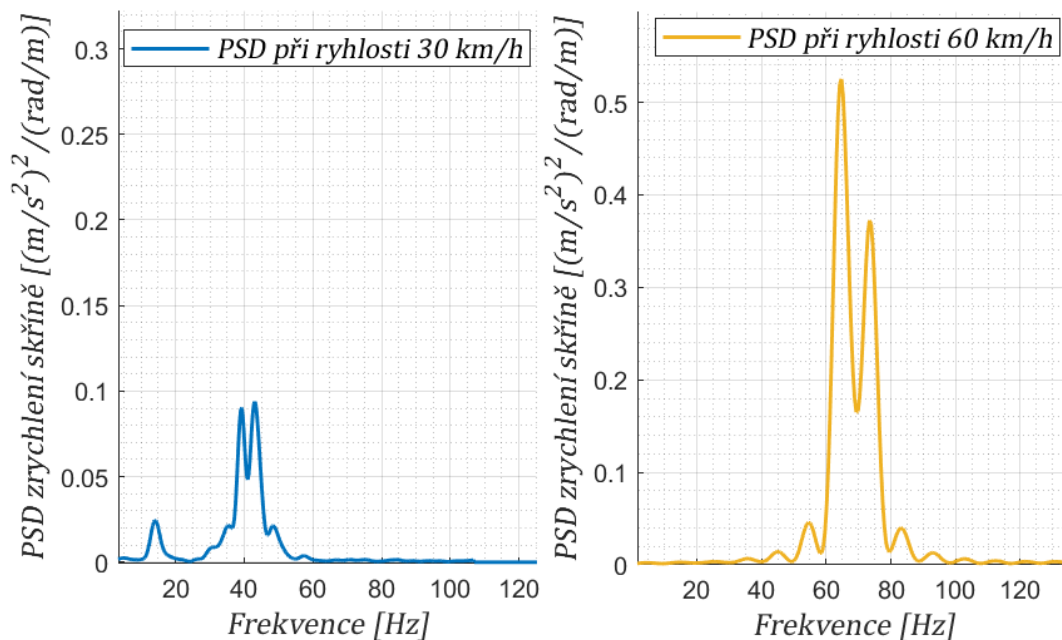
Obr. 7.19 Tvar nerovnosti koleje

Jízda po nerovné trati se projevuje nepravidelným nárustem dynamické síly. Průběh síly je na Obr. 6.20. Je možné si všimnout, že hodnoty síly jsou podobné jako v případě plochého kola. Rozdíl je v tom, že projevem plochého kola byly periodické silové impulzy, zatímco v případě poškozené koleje je zvýšené silové působení rozloženo hustěji.



Obr. 7.20 Dynamická síla při přejezdu po koleji při simulaci náhodného poškození
Rychlost vlaku: 60 km/h

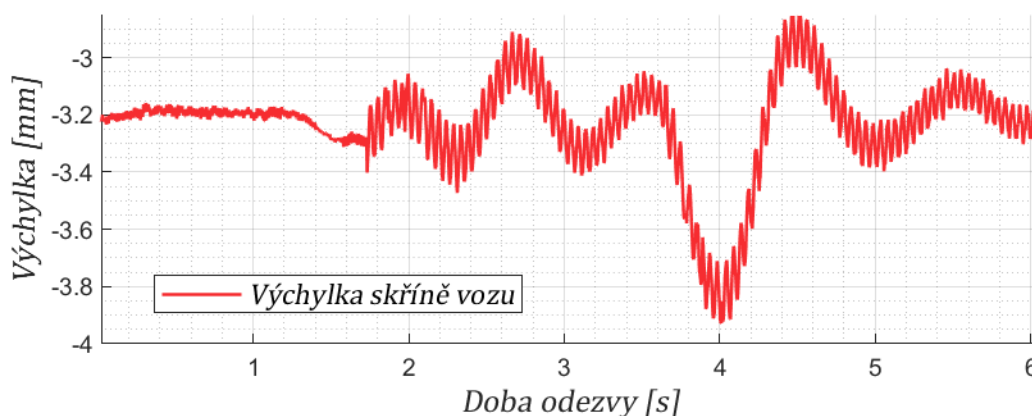
Ve frekvenčním spektru lze následně pozorovat rozdíly při různých rychlostech vozu. Při menší rychlosti 30 km/h jsou nejvýraznější vibrace s frekvencí 39,54 a 43,01 Hz. Dle provedené modální analýzy jsou frekvence v tomto pásmu spojeny s 3. ohybovým tvarem skříně. Při rychlosti vozu 60 km/h jsou nejsilnější frekvence 64,01 Hz a 73,15 Hz, což jsou stejně jako v případě plochých kol frekvence spojené se 4. ohybovým tvarem skříně vozu.



Obr. 7.21 PSD zrychlení skříně vozu při jízdě přes nerovnou trať.
Vzorkovací frekvence: 500 Hz, Počet vzorků 2000

7.5 Frekvenční zátěžové spektrum pro analýzu vibrací v interiéru

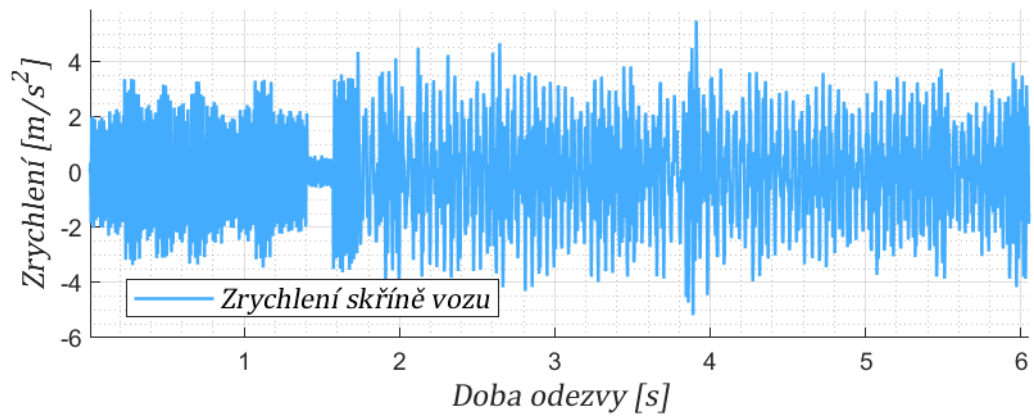
Na základě kombinace představených mechanismů defektů bude nyní sestavena odezva pro analýzu vibrací v interiéru vozu. V odezvě budou zahrnuty defekty kol, které budou mít plošky o maximální hloubce 1 mm. Během jízdy vůz přejezdí přes jeden poškozený pražec, který bude definovaný poloviční tuhostí $k'_p = 0.5k_p$. Dále vlak přejezdí přes podemletý úsek tratě. Na základě výsledků v předešlé podkapitole bude tuhost balastu navýšena. Z desetin normální hodnoty, která byla prezentována na Obr. 6.14, bude hodnota tuhosti zvýšená na polovinu $k'_b = 0.5k_b$. Dále místo tří po sobě jdoucích podemletých pražců budou do finální odezvy zahrnuty pouze dva. Dále bude v odezvě zahrnutá také náhodná nerovnost koleje, která bude definována stejně, jako v předešlé podkapitole. Odezva skříně bude vypočtena v 10 uzlu skříně vozu. Dle definovaných poruch je výsledná výchylka skříně na Obr. 6.22. V odezvě jsou patrné vlivy náhodně porušené tratě, které splývají s odezvami plochých kol. Následně v čase 2 s je zřetelný mírnější záchvěv, když přední podvozek přejezdí před poškozený úsek. V čase 4 s přejíždí zadní podvozek přes poškozený úsek, což je charakterizováno nárustem výchylky.



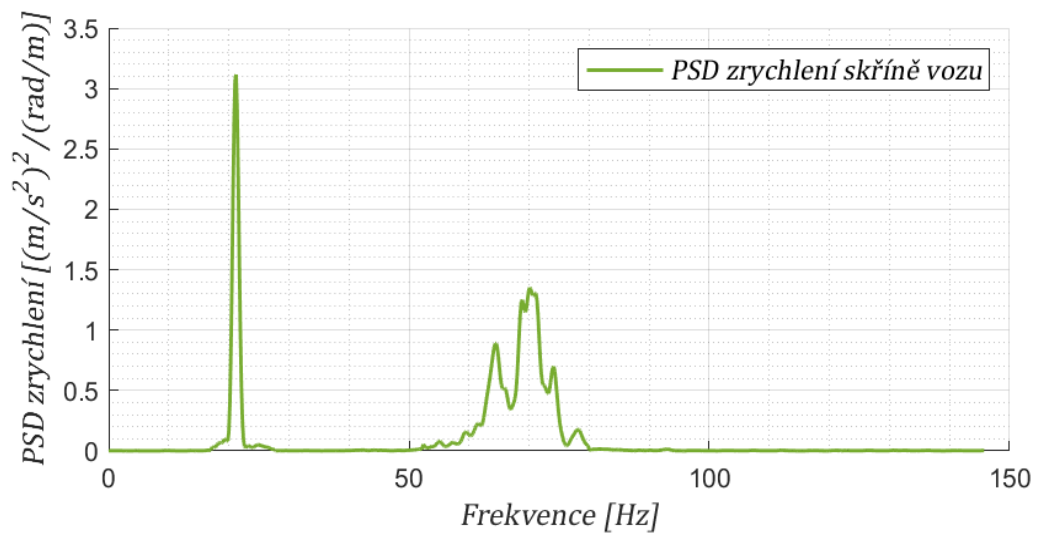
Obr. 7.22 Výchylka skříně vozu při kombinaci poruch

Na Obr. 6.24 je vykresleno zrychlení signálu, které je následně převáděno do frekvenční oblasti. Na průběhu zrychlení je rovněž patrná změna vibrací poté, co vlak přejezdí podemletý úsek tratě.

Zrychlení převedené do frekvenční oblasti je potom na Obr. 6.23. V grafu lze vidět pík okolo 20 Hz, který jak bylo výše ukázáno, je spjatý s přejezdem přes podemletý úsek. Druhá výrazná oblast je při frekvencích 50 – 75 Hz, na kterých se projevují plochá kola a nerovnosti kolejniče.



Obr. 7.24 Zrychlení skříně vozu při kombinaci poruch



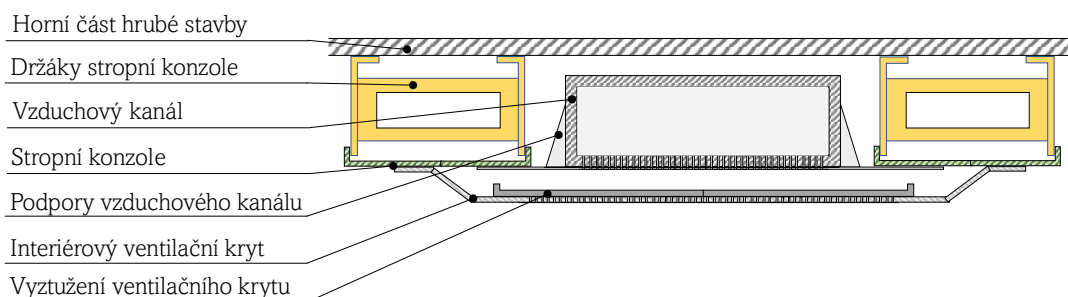
Obr. 7.23 PSD zrychlení skříně vozu při kombinaci poruch

8 Dynamická analýza interiérového prvku

Jak již bylo v úvodu řečeno, s dynamikou se běžně při řešení pevnosti interiérových částí nepočítá. Vychází se z předpokladu, že navržená součást splňující bezpečnost při statickém zatížení, splňuje zároveň bezpečnost při zatížení dynamickém. Interiérové prvky připevněné přímo do hrubé stavby, bývají navrhovány na bezpečnost při zatížení dle normy DIN EN 12663-1. Tato norma udává zatížení dle typu vozidla v násobcích gravitačního zrychlení, včetně požadovaného koeficientu bezpečnosti. Předmětem této kapitoly bude kontrola, zda dynamické účinky při jízdě po poškozeném úseku trati, nebudou větší než účinky statického zatížení, definovaného normami. K ověření bude využita odezva skříně ve frekvenčním spektru z kapitoly 7.5 a 3D model sestavy stropního obložení.

8.1 Vyšetřovaná část interiéru

Stropní obložení je složeno z držáků, pomocí kterých je celá sestava přichycena do hrubé stavby, stropních konzol, ke kterým jsou ostatní prvky přichyceny, vzduchového kanálu, který je napojený na klimatizační jednotku umístěnou na střeše vozu, a ventilačního krytu, který je jedinou součástí z této sestavy, která je viditelná pro pasažéra uvnitř vozu. Schéma sestavy je na Obr. 7.1. Podobné provedení stropního obložení lze nalézt ve většině vlaků, které disponují klimatizací.



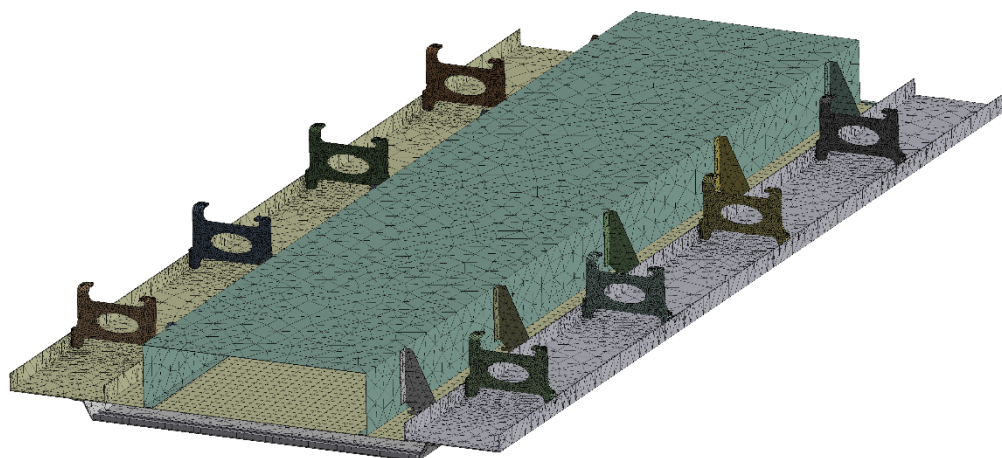
Obr. 8.1 Sestava stropního obložení vozu

K provedení dynamické analýzy byl v prostředí Creo Parametric sestaven 3D model sestavy, který je na Obr. 7.2. Model je poměrně rozsáhlý, proto s ohledem na výpočetní náročnost v prostředí Ansysu, byla geometrie modelu co nejvíce zjednodušena. Až na modely samotných držáků, které podléhají největšímu zatížení, byly odstraněny všechny rádiusy. Dále byly odstraněny ventilační otvory na spodní desce vzduchového kanálu a interiérovém krytu. Výrobní materiál všech součástí je hliník. Celková hmotnost zavěšená na držácích je $m_o = 160 \text{ kg}$.

V prostředí Ansysu jsou mezi díly sestavy nastaveny pevné kontakty. Při vytváření sítě bylo zvlášť zaměřeno na držáky a stropní konzole, které přenášejí největší část zatížení. V případě držáků byla velikost trojúhelníkových elementů sítě nastavena na 5 mm. Tato hodnota byla nastavená také v okolí kontaktních ploch držáků a stropní

konzole. Celkový počet elementů je potom 101 756 . Z hlediska dostupného výpočetního výkonu nebylo možné dosáhnout větší kvality sítě. Výsledná síť je na Obr. 7.2

Po vytvoření sítě je možné přejít do statické strukturální analýzy a provést normou předepsaný zátěžový test.



Obr. 8.2 FEM síť stropního obložení

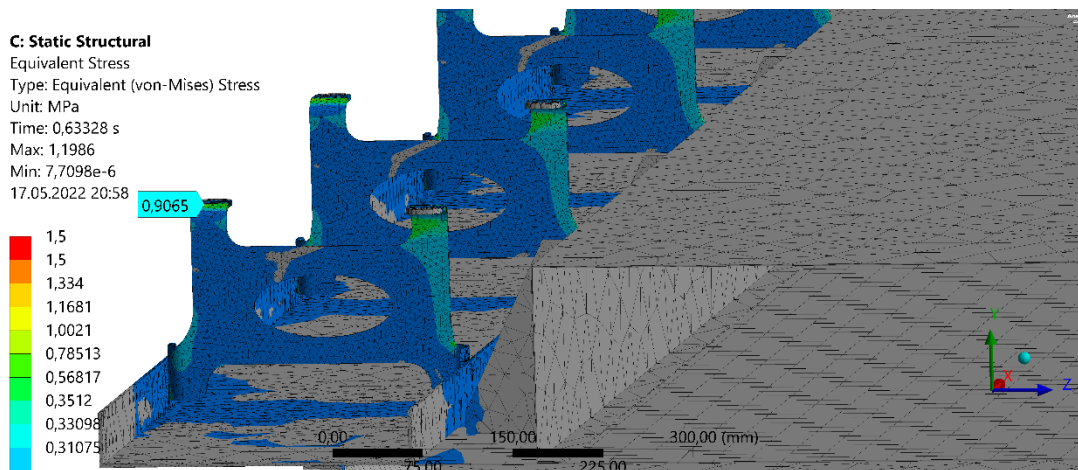
8.2 Statická analýza

V rámci „*Static Structural Analysis*“ je nejprve nutné nastavit okrajové podmínky. Jak z uvedeného schématu vyplývá, držáky jsou ukotveny přímo do hrubé stavby. Proto na ohnutých horních plochách držáků jsou zamezeny všechny posuvy i rotace. Síla působící na jeden držák vychází z následujícího vztahu.

$$F_Z = m_o \cdot 3g \cdot \frac{1}{N_d} \quad (8-1)$$

kde m_o je hmotnost panelu, $3g$ je tíhové zrychlení předepsané normou a N_d je počet držáků. Pro uvedenou hodnotu hmotnosti a 8 použitých držáků je působící síla $F_Z = 589 \text{ N}$. Držák je uchycen do stropní konzoly na dvou místech. Na obě kontaktní plochy držku s konzolí je tedy nastaveno zatížení $F_Z/2$.

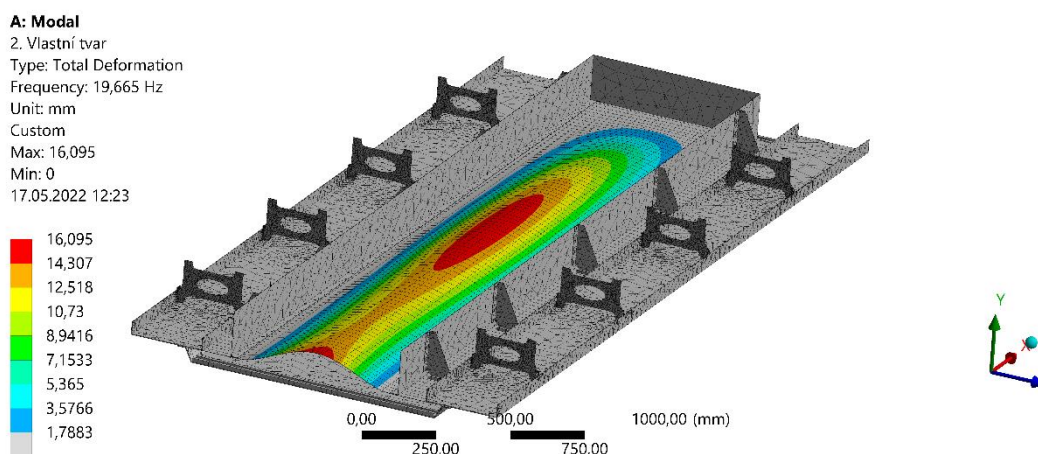
Aplikováním normou stanoveného zatížení je možné získat pouze informaci o pevnosti držáku, nikoli celé sestavy, proto by bylo možné stejný test provést pouze na samotných držácích. Kvůli zachování shodného nastavení pro obě analýzy je i při statickém výpočtu zahrnut celý model. Na Obr. 7.3 je výsledné napětí, které dle očekávání, je největší v horním ohybu držáku. Hodnota napětí v tomto místě dosahuje téměř 1 MPa .



Obr. 8.3 Výsledné napětí statické strukturální analýzy

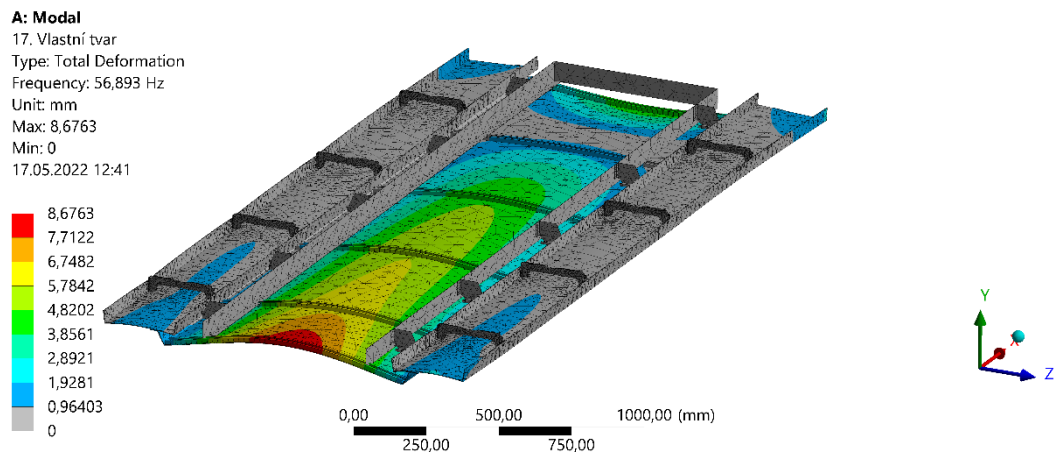
8.3 Dynamická analýza náhodných vibrací

Vstupem do „*Random Vibration Analysis*“ je frekvenční spektrum vibrací, získané v předešlé kapitole. Nejprve je však nutné provést modální analýzu. V modální analýze jsou aplikovány stejné okrajové podmínky jako v případě statické struktury. Dále je nutné nastavit počet požadovaných vlastních tvarů. Platí, že počet vlastních hodnot musí být takový, aby největší získaná vlastní frekvence v modální analýze, byla $2 \times$ větší, než je maximální frekvence zátěžového spektra. První vlastní frekvence stropního panelu je $17,62 \text{ Hz}$. Tato frekvence je spojená s posuvem celého stropního panelu. Druhý vlastní tvar, který je na Obr. 7.4, je spojen s deformací spodní desky vzduchového kanálu. Deformace spodní desky je spjatá s téměř všemi vlastními tvary ve spektru do 100 Hz .



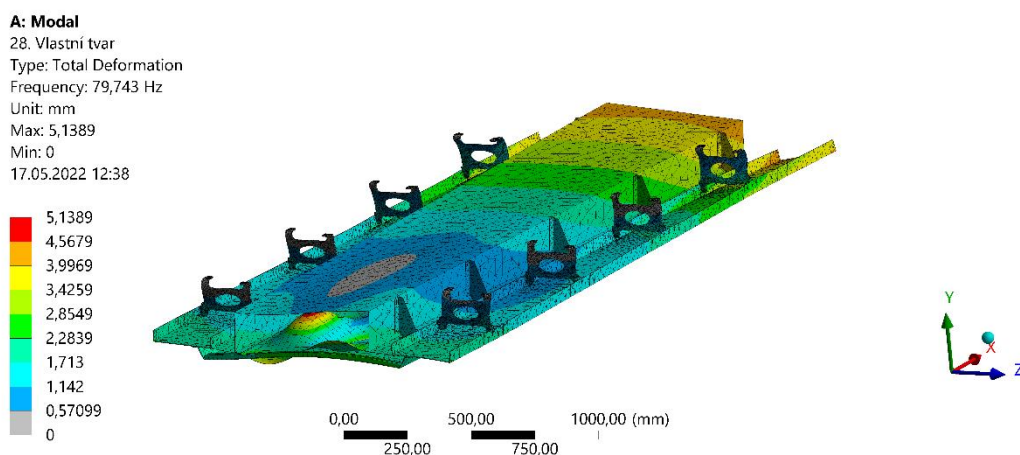
Obr. 8.4 Deformace spodní desky vzduchového kanálu spojená s 2. vlastním tvarem
 Vlastní frekvence: $19,67 \text{ Hz}$

Interiérový ventilační kryt má díky podélnému vyztužení vyšší tuhost, což má za následek vyšší vlastní frekvence, než je tomu u vzduchového kanálu. Na Obr. 7.4 je pohled v řezu na obložení při deformaci spojené se 17. vlastním tvarem při vlastní frekvenci 56,8 Hz. Ve spektru vlastních frekvencí do 100 Hz má interiér kryt pouze dva další vlastní tvary, spojené s jeho deformací, a to 24. vlastní tvar s 66,3 Hz a 31. vlastní tvar s vlastní frekvencí 82,0 Hz.



Obr. 8.5 Deformace krytu vzduchového kanálu spojená s 17. vlastním tvarem
 Vlastní frekvence: 56,89 Hz

Celková deformace stropního panelu je na intervalu do 100 Hz spojená, kromě zmíněného prvního tvaru, ještě s 28. a 32. vlastním tvarem, které mají vlastní frekvence 79,7 Hz a 92,32 Hz. Deformace při frekvenci 79,7 Hz je na Obr. 7.6.



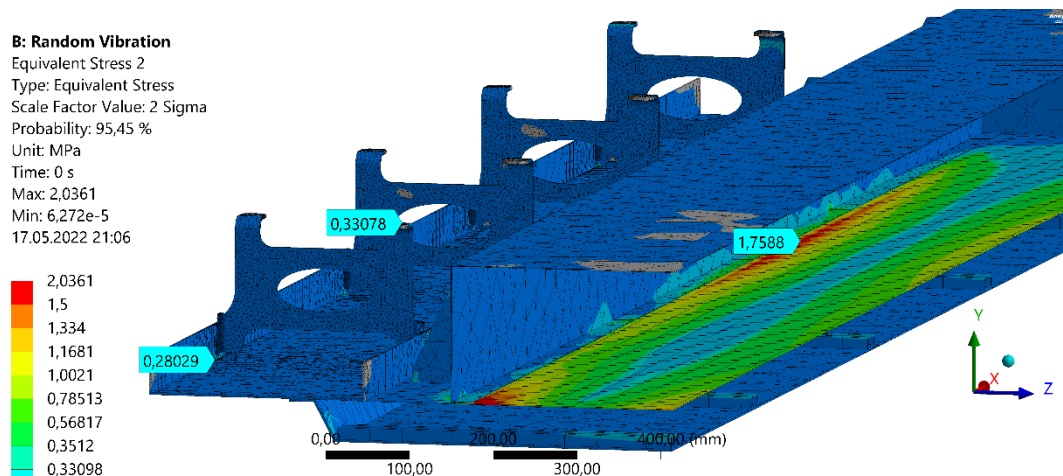
Obr. 8.6 Deformace stropního panelu spojená s 28. vlastním tvarem
 Vlastní frekvence: 79,7 Hz

Z uvedených výsledků modální analýzy je zřejmé, že největší deformace lze očekávat u spodní desky vzduchového kanálu, a to již v pásmu nízkých frekvencí.

Poté co je hotová modální analýza je možné přejít do „*Random Vibration Analysis*“. V prvním kroku se vloží vstupní zátěžové data a vyberou se výsledky, které mají být v rámci analýzy spočteny. V rámci analýzy náhodných vibrací je nutné zvolit pravděpodobnostní pásmo, ve kterém se budou výsledky nacházet. Předpokládá se,

že odezva má normální rozložení definované střední hodnotou a směrodatnou odchylkou. V prostředí Ansys je tedy na výběr ze tří pravděpodobnostních pásem σ_1 , σ_2 a σ_3 , kdy v prvním pásmu je zahrnuto 68,27 % odezvy, ve druhém 95,951 % a v třetím 99,737 % odezvy. V rámci této analýzy budou všechny výsledky prezentovány v pravděpodobnostním pásmu σ_2 .

Díky analýze náhodných vibrací se získá komplexnější přehled o chování dané sestavy. Právě náhodné vibrace, vznikající během jízdy, mohou postupem času vést k poškození součástí, které nebyly při pevnostních výpočtech zohledněny. Na Obr. 7.7 jsou v řezu zobrazeny výsledky napětí při analýze vibrací. Výsledky ukazují, že napětí, díky kterému jsou držáky vystavěny, je v kritických místech přibližně třetinové, oproti napětí při statické analýze. Největší napětí se pak vyskytuje na spodní desce vzduchového kanálu v místech, kde je deska spojená s kanálem.



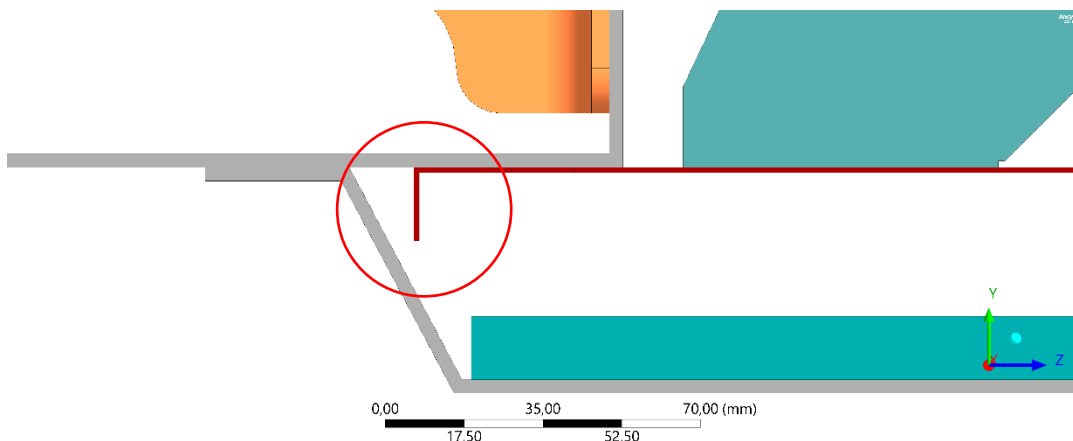
Obr. 8.7 Výsledky napětí při analýze náhodných vibrací

Výsledné napětí při analýze vibrací nedosahuje v oblasti uchycení stropních panelů takových hodnot napětí, jako tomu bylo v případě statické analýzy. Avšak v oblastech spodní desky vzduchového kanálu se objevuje větší napětí, které by mohlo v průběhu provozu vést k poruše klimatizačního kanálu. Z toho důvodu bude další podkapitola zaměřena na úpravu sestavy v této oblasti.

8.4 Analýza modifikovaného stropního panelu

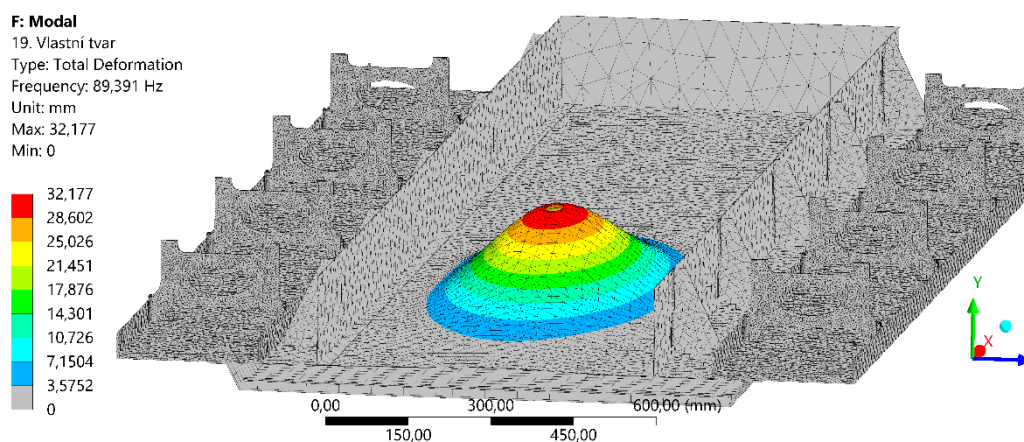
V situaci, kdy vlivem vysokého napětí není splněná požadovaná bezpečnost, je nutné dané řešení vhodným způsobem upravit. V praxi hraje důležitou roli finanční stránka, proto je snahou konstruktérů přijít s jednoduchým, efektivním a zároveň levným řešením problému. V konkrétním případě spodní desky vzduchového kanálu je z předešlých výsledků patrné, že je nutné zvýšit tuhost dílu. Zvedne-li se tuhost dílu, zvednou se také jeho vlastní frekvence, a tím i provozní frekvenční pásmo, ve kterém je díl vysoce zatěžován. Vyšší tuhosti lze dosáhnout úpravou průřezu nebo přidáním vyztužení. V této simulaci bude zvoleno jednoduché řešení, při kterém se po obou

stranách desky vytvoří ohyb. Upravený model je na Obr. 7.9. Všechny ostatní díly a jejich vlastnosti zůstaly nezměněny.



Obr. 8.9 Modifikace spodní desky vzduchového kanálu. Provedení ohybu po obou stranách desky

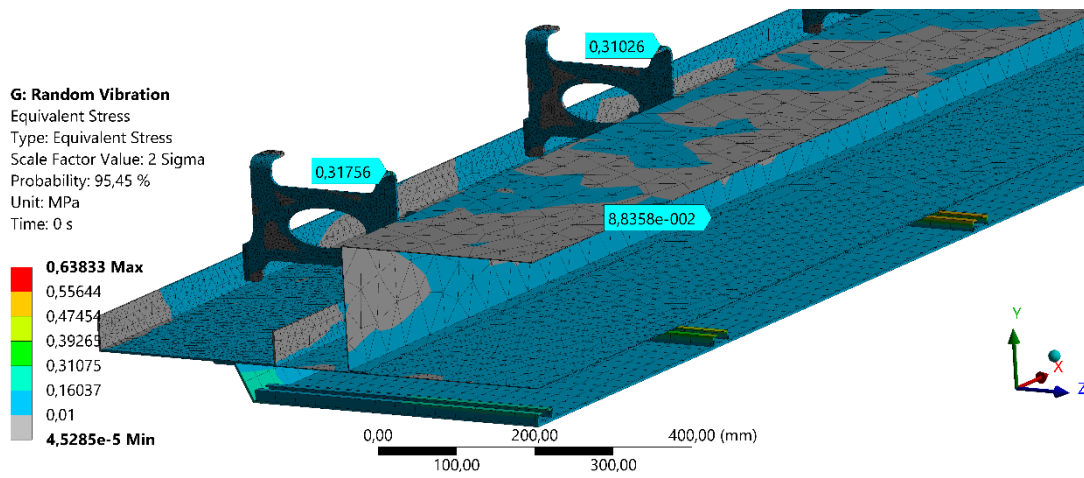
Z modální analýzy vyplývá, že první vlastní frekvence stropního panelu zůstala stejná jako v původním případě, a to 17,58 Hz. Ovšem první vlastní tvar, který je spojen čistě s deformací spodní desky vzduchového kanálu je až 19. vlastní tvar, při frekvenci 89,39 Hz. Deformace tohoto vlastního tvaru je na Obr. 7.8. Další vlastní frekvence spojené s deformací desky mají hodnoty 125,97 Hz a 129,38 Hz.



Obr. 8.8 Deformace spodní desky vzduchového kanálu spojená s 19. vlastním tvarem
Vlastní frekvence: 89,39 Hz

Díky přidaného ohybu se tedy posunulo pásmo vlastních frekvencí, ve kterém docházelo k velkým deformacím. Vzhledem k tomu, že v použitém zatěžovacím spektru jsou energeticky významné složky pouze do frekvence 80 Hz, lze předpokládat výrazně menší napětí na spodní desce. K analýze náhodných vibrací je použito stejné spektrum jako v předešlé analýze, a prezentované výsledky jsou opět z pravděpodobnostního pásma σ_2 . Výsledky analýzy jsou na Obr. 7.10. Na držácích se objevuje stejné napětí jako v předchozí simulaci. V případě spodní desky vzduchového kanálu lze ale vidět výrazně menší napětí. Konkrétně z původních

1,76 MPa na 0,08 MPa. Díky velice jednoduché úpravě, bylo tedy docíleno výrazně lepších vlastností daného dílu.



Obr. 8.10 Výsledky napětí při analýze náhodných vibrací na upraveném stropním panelu

9 Závěr

V rámci práce byl sestaven multibody systém popisující dynamiku jedoucího vlaku po železniční trati. Na základě zvolených parametrů je sestavení modelu zajištěno napsaným algoritmem v prostředí Matlabu. V modelu jsou zahrnuty 4 druhy excitačních mechanismů, simulující poruchy tratě a vozidla. Díky zahrnutí komplexního modelu tratě i vlaku je možné analyzovat, jaký je vliv poruchy jedné části systému na zbytek soustavy. Hlavním účelem sestavení modelu byla analýza vibrací v interiéru vozidla. Jak z rešerše vyplynulo, nejsignifikantnější projev vibrací je ve spektru ohybových vlastních frekvencí skříně vozu. Aby bylo možné toto spektrum do modelu zahrnout, byla skřín modelována jako flexibilní těleso. Podobně je tomu také v případě koleje. V obou případech byla využita Euler-Bernoulliho prutové teorie. Při volbě všech parametrů tratě i vozidla se v prezentovaných výsledcích vycházelo z experimentálně určených parametrů, které byly převzaty z odborných publikací.

Ze simulací defektních stavů vyplynulo, že projev plochých kol se při rychlosti 60 km/h nejsilněji projevuje v pásmu frekvencí $65 - 75 \text{ Hz}$. V tomto pásmu se dle výsledků provedené modální analýzy vyskytuje vlastní frekvence spojená se čtvrtým ohybovým tvarem skříně. Bylo ukázáno, že projev poškozené tratě ve formě poškozeného pražce a poškozeného balastu se nejsilněji projevuje ve frekvenčním pásmu $20 - 22 \text{ Hz}$. V tomto pásmu se nachází vlastní frekvence spojená s druhým ohybovým tvarem skříně vozu. Dále byl simulován vliv opotřebené kolejnice na dynamiku vlaku. Z výsledků vyplynulo, že při rychlosti 60 km/h se opotřebení koleje projevuje na čtvrté ohybové frekvenci skříně, zatímco při rychlosti 30 km/h se pásmo signifikantních frekvencí posune na $39 - 44 \text{ Hz}$, což je pásmo, ve kterém se nachází vlastní frekvence spojená s třetím ohybovým tvarem skříně. Pomocí simulace stavu, ve kterém byly skombinovány všechny excitační mechanismy, byla vytvořena odezva pro analýzu vibrací v prostředí Ansys.

V poslední části byla díky odezvě ze sestaveného modelu provedena analýza náhodných vibrací. Výsledky z analýzy vibrací byly porovnány s výsledky statické strukturální analýzy. Vstupem do statické analýzy bylo normou předepsané statické zatížení. Analýzy byly prováděny na sestavě, prezentující stropního obložení vlaku. Ukázalo se, že napětí na staticky zatížené součásti je přibližně $3 \times$ větší než při analýze náhodných vibrací. Norma, která byla použita při stanovení statického zatížení, předepisuje jeho velikost jen pro součásti, které jsou upevněny přímo do hrubé stavby. Proto pomocí statické analýzy bylo možné ověřit pouze pevnost jednoho druhu částí celé sestavy. Na druhou stranu, analýza vibrací poskytla komplexnější pohled na celou konstrukci stropního panelu a odhalila slabé místo konstrukčního řešení. Pomocí výsledku modální analýzy byla realizována jednoduchá úprava dané součásti a znovu provedená analýza vibrací ukázala funkčnost zvoleného řešení. Z analýz v prostředí Ansys vyplynulo, že pomocí analýzy vibrací lze odhalit konstrukční problémy, které nemusí být na první pohled zřejmé. Problém ovšem je, že k provedení analýzy vibrací je nutné mít relevantní vstup ve formě zátěžového frekvenčního spektra, které je specifické nejen pro konkrétní vůz, ale také pro trať, po které vlak bude jezdit. Za

účelem získání těchto dat vznikl v práci představený matematický model, ve kterém lze nastavit pomocí parametrů různé provozní podmínky.

Dynamika soustavy vlak/kolej je nesmírně komplexní problém a v rámci jedné diplomové práce není možné detailně zahrnout všechny související jevy a odladit jejich chování v simulaci. Proto byly v práci zavedeny různé zjednodušení, které by bylo vhodné při navazování na tuto práci odstranit.

V první řadě by bylo vhodné se zaměřit na matematickou stránku daného problému. V této práci byl při výpočtu odezvy použit přístup využívající zobecněnou souřadnici a modální superpozici. Problém v tomto přístupu je ten, že v případě, kdy je podloží tratě modelováno pomocí diskrétních hmotných podpor, tak délka trati se projeví v počtu potřebných vlastních tvarů, které se při výpočtu mají zahrnout. Například v sestaveném modelu se vlastní frekvence pražců pohybovaly v rozmezí 40 – 80 Hz. Vlastní frekvence kol vozu byla ale vyšší, a to konkrétně okolo 160 Hz. Aby se ve výsledcích neprojevovaly jevy spojené s okrají modelu koleje, musela být trať dostatečně dlouhá. V simulacích byla použita trať o 150 pražcích. To znamená, že v případě zahrnutí vlastních tvarů kol do odezvy, by bylo potřeba zahrnout více než 150 vlastních tvarů. To ovšem vede k velkému nárůstu výpočetního času, neboť pro každý vlastní tvar se musí zvlášť v každém kroku simulace numericky spočítat pohybová diferenciální rovnice. To znamená, že by bylo vhodné z modální superpozice přejít na řešení pomocí přímé integrace.

S matematikou rovněž souvisí využívání vestavěných funkcí v Matlabu. Konkrétně jde o řešič problému vlastních hodnot „*eigs*“ a řešič diferenciálních rovnic „*ode45*“. Z hlediska výpočetní rychlosti by bylo vhodné sestavit si vlastní výpočetní řešiče, jak je tomu v mnoha publikovaných pracích.

Lepší rychlost a efektivita výpočtu umožní simulace s menším časovým krokem, díky čemuž bude možné implementovat pokročilejší přístupy při řešení problému plochých kol a jiných defektů. V případě náhodného porušení kolejnice by bylo vhodné sestavit algoritmus s dobrou přesností, který by umožňoval převádět odezvy náhodných vibrací ve formě PSD do časové oblasti.

Dále by bylo dobré připravit uživatelsky přívětivé rozhraní, ve kterém by uživatel mohl přehledně nastavovat jednotlivé parametry systému, přidávat a upravovat excitační mechanismy a snadno vykreslovat potřebné odezvy.

Tato práce by měla poskytnout čtenáři přehled o možných způsobech modelování dynamiky jedoucího vlaku. Model je sestaven tak, aby mohl být dle potřeb postupně vylepšován. Jeho podrobný popis a přiložené okomentované skripty poskytují nástroj k provádění analýz v oblasti tratě i vozu. Analýza v interiéru vozu ukázala, že výstupy modelu mohou pomoci při řešení konstrukčních problémů komplexnějších sestav.

10 Zdroje

- [1] K. Knothe and S. L. Grassie, "Modelling of Railway Track and Vehicle/Track Interaction at High Frequencies," *Vehicle System Dynamics*, vol. 22, no. 3–4, pp. 209–262, Jan. 1993, doi: 10.1080/00423119308969027.
- [2] L. Frýba, *Vibration of solids and structures under moving loads*. Dordrecht: Springer Netherlands, 1972. doi: 10.1007/978-94-011-9685-7.
- [3] Y. SATO, "STUDY ON HIGH-FREQUENCY VIBRATIONS IN TRACK OPERATED WITH HIGH-SPEED TRAINS," *Railway Technical Research Institute, Quarterly Reports*, vol. 18, no. 3, pp. 109–114, 1977.
- [4] L. Jezequel, "Response of Periodic Systems to a Moving Load," *Journal of Applied Mechanics*, vol. 48, no. 3, pp. 613–618, Sep. 1981, doi: 10.1115/1.3157683.
- [5] R. Bogacz, "Dynamics of Continuous Systems Subjected to Traveling Loads," *Applied Mechanics and Materials*, vol. 9, pp. 31–40, Oct. 2007, doi: 10.4028/www.scientific.net/AMM.9.31.
- [6] K. Popp, H. Kruse, and I. Kaiser, "Vehicle-Track Dynamics in the Mid-Frequency Range," *Vehicle System Dynamics*, vol. 31, no. 5–6, pp. 423–464, Jun. 1999, doi: 10.1076/vesd.31.5.423.8363.
- [7] R. G. Dong, S. Sankar, and R. v Dukkupati, "A Finite Element Model of Railway Track and its Application to the Wheel Flat Problem," *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part F: Journal of Rail and Rapid Transit*, vol. 208, no. 1, pp. 61–72, Jan. 1994, doi: 10.1243/PIME_PROC_1994_208_234_02.
- [8] D. P. Connolly, G. Kouroussis, O. Laghrouche, C. L. Ho, and M. C. Forde, "Benchmarking railway vibrations - Track, vehicle, ground and building effects," *Construction and Building Materials*, vol. 92, pp. 64–81, Jun. 2015, doi: 10.1016/j.conbuildmat.2014.07.042.
- [9] A. C. Lamprea-Pineda, D. P. Connolly, and M. F. M. Hussein, "Beams on elastic foundations – A review of railway applications and solutions," *Transportation Geotechnics*, vol. 33, p. 100696, Mar. 2022, doi: 10.1016/j.trgeo.2021.100696.
- [10] W. Zhai, *Vehicle–Track Coupled Dynamics*. Singapore: Springer Singapore, 2020. doi: 10.1007/978-981-32-9283-3.
- [11] A. Gaur and P. Dhurvey, "Comparative Study of Beam Theories on the Effect of Span-Depth Ratio for Symmetric and Un-symmetric Loadings," in *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, Oct. 2020, vol. 936, no. 1. doi: 10.1088/1757-899X/936/1/012047.
- [12] A. Hayir, "Scholars' Mine Scholars' Mine Dynamic Behavior of an Elastic Beam on a Winkler Foundation Dynamic Behavior of an Elastic Beam on a Winkler Foundation under a Moving Load under a Moving Load DYNAMIC BEHAVIOR OF

AN ELASTIC BEAM ON A WINKLER FOUNDATION UNDER A MOVING LOAD,” 2010. [Online]. Available: <https://scholarsmine.mst.edu/icrageesd/05icrageesd/session02/4>

[13] S. L. Grassie, R. W. Gregory, D. Harrison, and K. L. Johnson, “The Dynamic Response of Railway Track to High Frequency Vertical Excitation,” *Journal of Mechanical Engineering Science*, vol. 24, no. 2, pp. 77–90, Jun. 1982, doi: 10.1243/JMES_JOUR_1982_024_016_02.

[14] H. D. Phadke and O. R. Jaiswal, “Dynamic analysis of railway track on variable foundation under harmonic moving load,” *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part F: Journal of Rail and Rapid Transit*, vol. 236, no. 3, pp. 302–316, Mar. 2022, doi: 10.1177/09544097211020838.

[15] P. Kulich, “Dynamická analýza koleje: Dynamic Analysis of Track,” Brno, 2018. Accessed: Apr. 03, 2022. [Online]. Available: <http://hdl.handle.net/11012/64328>

[16] R. U. A. Uzzal, R. B. Bhat, and W. Ahmed, “Dynamic response of a beam subjected to moving load and moving mass supported by Pasternak foundation,” *Shock and Vibration*, vol. 19, no. 2, pp. 201–216, 2012, doi: 10.3233/SAV-2011-0624.

[17] M. Zehsaz, M. H. Sadeghi, and A. Z. Asl, “Dynamics Response of Railway Under a Moving Load,” *Journal of Applied Sciences*, vol. 9, no. 8, pp. 1474–1481, Apr. 2009, doi: 10.3923/jas.2009.1474.1481.

[18] S. L. Grassie, “DYNAMIC MODELS OF THE TRACK AND THEIR USES,” 1993.

[19] G. A. Hunt, “DYNAMIC ANALYSIS OF RAILWAY VEHICLE/TRACK INTERACTION FORCES by,” 1986. [Online]. Available: <https://dspace.lboro.ac.uk/>

[20] F. Zhaohua and R. D. Cook, “Beam Elements on Two-Parameter Elastic Foundations,” *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 109, no. 6, pp. 1390–1402, Dec. 1983, doi: 10.1061/(ASCE)0733-9399(1983)109:6(1390).

[21] D. Younesian, A. Hosseinkhani, H. Askari, and E. Esmailzadeh, “Elastic and viscoelastic foundations: a review on linear and nonlinear vibration modeling and applications,” *Nonlinear Dynamics*, vol. 97, no. 1. Springer Netherlands, pp. 853–895, Jul. 01, 2019. doi: 10.1007/s11071-019-04977-9.

[22] X. Lei and N.-A. Noda, “ANALYSES OF DYNAMIC RESPONSE OF VEHICLE AND TRACK COUPLING SYSTEM WITH RANDOM IRREGULARITY OF TRACK VERTICAL PROFILE,” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 258, no. 1, pp. 147–165, 2002, doi: 10.1006/jsvi.5107.

[23] G. Xie and S. D. Iwnicki, “Simulation of wear on a rough rail using a time-domain wheel-track interaction model,” *Wear*, vol. 265, no. 11–12, pp. 1572–1583, Nov. 2008, doi: 10.1016/j.wear.2008.03.016.

- [24] D. R. Ahlbeck, H. C. Meacham, and R. H. Prause, "THE DEVELOPMENT OF ANALYTICAL MODELS FOR RAILROAD TRACK DYNAMICS," in *Railroad Track Mechanics and Technology*, Elsevier, 1978, pp. 239–263. doi: 10.1016/B978-0-08-021923-3.50017-6.
- [25] Y. Q. Sun and M. Dhanasekar, "A dynamic model for the vertical interaction of the rail track and wagon system," *International Journal of Solids and Structures*, vol. 39, no. 5, pp. 1337–1359, Mar. 2002, doi: 10.1016/S0020-7683(01)00224-4.
- [26] W. ZHAI and X. SUN, "A Detailed Model for Investigating Vertical Interaction between Railway Vehicle and Track," *Vehicle System Dynamics*, vol. 23, no. sup1, pp. 603–615, Jan. 1994, doi: 10.1080/00423119308969544.
- [27] M. Esmaeili and H. R. Heydari-Noghabi, "Closure to 'Investigating Seismic Behavior of Ballasted Railway Track in Earthquake Excitation Using Finite-Element Model in Three-Dimensional Space' by Morteza Esmaeili and Hamidreza Heydari Noghabi," *Journal of Transportation Engineering*, vol. 140, no. 9, p. 07014002, Sep. 2014, doi: 10.1061/(asce)te.1943-5436.0000702.
- [28] W. Zhai, K. Wang, and C. Cai, "Fundamentals of vehicle–track coupled dynamics," *Vehicle System Dynamics*, vol. 47, no. 11, pp. 1349–1376, Nov. 2009, doi: 10.1080/00423110802621561.
- [29] C. I. Bajer and B. Dyniewicz, "Numerical modelling of structure vibrations under inertial moving load," *Archive of Applied Mechanics*, vol. 79, no. 6–7, pp. 499–508, Jul. 2009, doi: 10.1007/s00419-008-0284-8.
- [30] F. Cheli and R. Corradi, "On rail vehicle vibrations induced by track unevenness: Analysis of the excitation mechanism," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 330, no. 15, pp. 3744–3765, Jul. 2011, doi: 10.1016/j.jsv.2011.02.025.
- [31] V. Goga and M. Kl'Účik, "Optimization of vehicle suspension parameters with use of evolutionary computation," in *Procedia Engineering*, 2012, vol. 48, pp. 174–179. doi: 10.1016/j.proeng.2012.09.502.
- [32] M. Metin and R. Guclu, "Rail Vehicle Vibrations Control Using Parameters Adaptive PID Controller," *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2014, pp. 1–10, 2014, doi: 10.1155/2014/728946.
- [33] Plášek Otto, *Železniční stavby: železniční spodek a svršek*. Brno: CERM, 2004.
- [34] X. Lei, *High Speed Railway Track Dynamics*. Singapore: Springer Singapore, 2017. doi: 10.1007/978-981-10-2039-1.
- [35] H. Ilias and S. Müller, "A discrete-continuous track-model for wheelsets rolling over short wavelength sinusoidal rail irregularities," *Vehicle System Dynamics*, vol. 23, no. sup1, pp. 221–233, Jan. 1994, doi: 10.1080/00423119308969517.

- [36] G. Floquet, “Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques,” *Annales scientifiques de l’École normale supérieure*, vol. 12, pp. 47–88, 1883, doi: 10.24033/asens.220.
- [37] S. MÜLLER, T. KRZYŻYŃSKI, and H. ILIAS, “Comparison of Semi-Analytical Methods of Analysing Periodic Structures under a Moving Load,” *Vehicle System Dynamics*, vol. 24, no. sup1, pp. 325–339, Jan. 1995, doi: 10.1080/00423119508969634.
- [38] T. Mazilu, “Green’s functions for analysis of dynamic response of wheel/rail to vertical excitation,” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 306, no. 1–2, pp. 31–58, Sep. 2007, doi: 10.1016/j.jsv.2007.05.037.
- [39] X. Sheng, X. Xiao, and S. Zhang, “The time domain moving Green function of a railway track and its application to wheel–rail interactions,” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 377, pp. 133–154, Sep. 2016, doi: 10.1016/j.jsv.2016.05.011.
- [40] B. Mehri, A. Davar, and O. Rahmani, “Dynamic Green Function Solution of Beams Under a Moving Load with Dierent Boundary Conditions,” 2009.
- [41] X. Sheng, C. J. C. Jones, and D. J. Thompson, “Responses of infinite periodic structures to moving or stationary harmonic loads,” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 282, no. 1–2, pp. 125–149, Apr. 2005, doi: 10.1016/j.jsv.2004.02.050.
- [42] T. Mazilu, M. Dumitriu, C. Tudorache, and M. Sebeşan, “Using the Green’s functions method to study wheelset/ballasted track vertical interaction,” *Mathematical and Computer Modelling*, vol. 54, no. 1–2, pp. 261–279, Jul. 2011, doi: 10.1016/j.mcm.2011.02.009.
- [43] A. Nordborg, “Wheel/rail noise generation due to nonlinear effects and parametric excitation,” *J Acoust Soc Am*, vol. 111, no. 4, pp. 1772–1781, Apr. 2002, doi: 10.1121/1.1459463.
- [44] W. M. Zhai, C. B. Cai, and S. Z. Guo, “Coupling model of vertical and lateral vehicle/track interactions,” *Vehicle System Dynamics*, vol. 26, no. 1, pp. 61–79, 1996, doi: 10.1080/00423119608969302.
- [45] S. C. Yang, “Enhancement of the finite-element method for the analysis of vertical train—track interactions,” *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part F: Journal of Rail and Rapid Transit*, vol. 223, no. 6, pp. 609–620, Nov. 2009, doi: 10.1243/09544097JRRT285.
- [46] N. Štefková, “Numerické řešení diferenciálních rovnic Diplomová práce,” Brno, 2018. Accessed: Apr. 01, 2022. [Online]. Available: <https://is.muni.cz/th/c89qg/>
- [47] S. Iwnick, “Manchester Benchmarks for Rail Vehicle Simulation,” *Vehicle System Dynamics*, vol. 30, no. 3–4, pp. 295–313, Sep. 1998, doi: 10.1080/00423119808969454.

[48] G. Kouroussis, O. Verlinden, and C. Conti, “On the interest of integrating vehicle dynamics for the ground propagation of vibrations: the case of urban railway traffic,” *Vehicle System Dynamics*, vol. 48, no. 12, pp. 1553–1571, Dec. 2010, doi: 10.1080/00423111003602392.

[49] D. L. LOGAN, *A First Course in the Finite Element Method*, 6th ed. 2016.

[50] G. Yang, C. Wang, F. Xiang, and S. Xiao, “Effect of train carbody’s parameters on vertical bending stiffness performance,” *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, vol. 29, no. 6, pp. 1120–1127, Nov. 2016, doi: 10.3901/CJME.2016.0809.090.

SEZNÁM OBRÁZKŮ

Obr. 2.1 Schéma základních částí vozu a tratě	14
Obr. 3.1 Modely tratě se spojitým podložím.....	18
Obr. 3.2 Modely tratě s diskrétním podložím.....	20
Obr. 3.3 Čtvrtinový model vozu.....	21
Obr. 3.4 Modely vozu	23
Obr. 3.5 Prut uložený na elastických podporách	29
Obr. 4.1 Navržený dynamický model koleje a tratě	33
Obr. 5.1 Diskrétní model prutu	35
Obr. 5.2 Uvolněný model vozu	38
Obr. 5.3 Elementy připojené k dalším částem modelu	42
Obr. 5.4 Schéma rovnováhy mezi uzlem a kolem vozu	44
Obr. 6.1 První vlastní tvar kolej pro dva po sobě jdoucí kroky simulace	56
Obr. 6.2 Dvacátý vlastní tvar kolej pro dva po sobě jdoucí kroky simulace.....	57
Obr. 6.3 Sedmý vlastní tvar koleje pro dva po sobě jdoucí kroky simulace	57
Obr. 6.4 Ustálení výchylky skříně v první iteraci simulace.....	59
Obr. 6.5 Výchylka koleje při jízdě vlaku	60
Obr. 6.6 Odezva podvozku pro různé úrovně diskretizace při rychlosti 60 km/h	61
Obr. 6.7 Časová odezva koleje a pražce v jednom místě	61
Obr. 6.8 Odezva krajního uzlu skříně v časové oblasti.....	62
Obr. 6.9 Schéma plochého kola	63
Obr. 6.10 Odezva podvozku s plochým kolem.....	64
Obr. 6.11 PSD zrychlení skříně vozu s plochými koly	65
Obr. 6.12 Výchylky prostředního a krajního uzlu skříně při jízdě s plochými koly ...	65
Obr. 6.13 Trať s poškozeným a podemletým pražcem	66
Obr. 6.14 Výchylka koleje a podemletého pražce	66
Obr. 6.15 Odezva podvozku při přejezdu přes podemleté pražce	67
Obr. 6.16 Odezva středu skříně vozu při přejezdu přes podemleté pražce	67
Obr. 6.17 PSD zrychlení skříně vozu při přejezdu pře podemleté pražce.....	68
Obr. 6.18 Odezva koleje a poškozeného pražce	69
Obr. 6.19 Tvar nerovnosti koleje	69

Obr. 6.20 Dynamická síla při přejezdu po koleji při simulaci náhodného poškození	70
Obr. 6.21 PSD zrychlení skříně vozu při jízdě přes nerovnou trať.....	70
Obr. 6.22 Výchylka skříně vozu při kombinaci poruch	71
Obr. 6.23 PSD zrychlení skříně vozu při kombinaci poruch.....	72
Obr. 6.24 Zrychlení skříně vozu při kombinaci poruch.....	72
Obr. 7.1 Sestava stropního obložení vozu	73
Obr. 7.2 FEM síť stropního obložení	74
Obr. 7.3 Výsledné napětí statické strukturální analýzy	75
Obr. 7.4 Deformace spodní desky vzduchového kanálu	75
Obr. 7.5 Deformace krytu vzduchového kanálu	76
Obr. 7.6 Deformace stropního panelu	76
Obr. 7.7 Výsledky napětí při analýze náhodných vibrací.....	77
Obr. 7.8 Deformace spodní desky vzduchového kanálu	78
Obr. 7.9 Modifikace spodní desky vzduchového kanálu.	78
Obr. 7.10 Výsledky napětí při analýze náhodných vibrací na upraveném panelu.....	79

SEZNAM TABULEK

Tab. 6-1 Parametry modelu tratě.....	53
Tab. 6-2 Použité parametry modelu vozu	54
Tab. 6-3 Parametry algoritmu, závislé na typu simulace	54
Tab. 6-4 Vlastní frekvence modelu vozu	58
Tab. 6-5 Spektrum vlastních frekvencí celé soustavy	59
Tab. 6-6 Střední hodnoty zatížení a tuhost kontaktu.....	60
Tab. 6-7 Výpočetní náročnost při změně diskretizace	62
Tab. 6-8 Dynamická síla a tuhost kontaktu v závislosti na hloubce plošky kola.....	64

SEZNAM PŘÍLOH

Matlab skripty

1. Skript řídicí algoritmus multi-body systému
2. Skript pro načtení parametrů tratě
3. Skript pro načtení parametrů vlaku
4. Funkce pro sestavení submatic tratě
5. Funkce pro sestavení matic vozidla
6. Funkce pro sestavení matic celého systému
7. Funkce pro řešení problému vlastních hodnot
8. Funkce pro řešení pohybové diferenciální rovnice
9. Funkce pro řešení Hertzova kontaktu