



# VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

## FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

## ÚSTAV MATEMATIKY

INSTITUTE OF MATHEMATICS

# VLASTNOSTI SYSTÉMŮ S NECELOČÍSELNÝMI ČLENY V TEORII ŘÍZENÍ

PROPERTIES OF SYSTEMS WITH FRACTIONAL-ORDER TERMS IN CONTROL THEORY

## BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

### AUTOR PRÁCE

AUTHOR

MICHAL ANDRESÍK

### VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Ing. TOMÁŠ KISELA, Ph.D.

BRNO 2021



# Zadání bakalářské práce

Ústav: Ústav matematiky  
Student: **Michal Andresík**  
Studijní program: Aplikované vědy v inženýrství  
Studijní obor: Matematické inženýrství  
Vedoucí práce: **Ing. Tomáš Kisela, Ph.D.**  
Akademický rok: 2020/21

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.1111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

## Vlastnosti systémů s neceločíselnými členy v teorii řízení

### Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Teorie řízení patří mezi hlavní aplikace teorie zlomkového kalkulu. Zlomkové derivace poskytují přirozený způsob zobecnění tzv. PID kontrolních členů. Zařazení zlomkových členů přináší mnoho zajímavých možností jak z pohledu stability, tak i oscilací.

### Cíle bakalářské práce:

1. Najít vhodné modely pro srovnání vlastností systému s klasickým celočíselným a zlomkovým členem.
2. Vytvořit algoritmus pro vykreslování chování těchto systémů (časový průběh, fázový portrét).
3. Simulace a srovnání s teoretickými výsledky pro různé systémy a hodnoty jejich parametrů.

### Seznam doporučené literatury:

PODLUBNÝ, I. Fractional Differential Equations. Academic Press, 1998.

CAPONETTO, R., DONGOLA, G., FORTUNA, L., PETRÁŠ, I. Fractional Order Systems: Modelling and Control Applications. World Scientific Publishing, 2010.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2020/21

V Brně, dne

L. S.

---

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc.  
ředitel ústavu

---

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.  
děkan fakulty

## **Abstrakt**

Tato práce je zaměřena na nalezení algoritmu pro řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic zlomkového řádu se zpožděním z důvodu jejího využití v teorii řízení a následně srovnání chování řešení pro různé volby členů a řádů soustav.

## **Summary**

This thesis is aimed to find an algorithm that solves system of fractional linear differential delayed equations due to its use in control theory followed by comparison of the behaviour of solutions for different choices of coefficients and orders of the systems.

## **Klíčová slova**

zlomkový kalkulus, soustava lineárních diferenciálních rovnic zlomkového řádu se zpožděním, teorie řízení, zlomkový PID regulátor

## **Keywords**

fractional calculus, system of fractional linear differential delayed equations, control theory, fractional PID controller

ANDRESÍK, M. *Vlastnosti systémů s neceločíselnými členy v teorii řízení*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2021. 21 s. Vedoucí Ing. Tomáš Kisela, Ph.D.



Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci s názvem *Vlastnosti systémů s neceločíselnými členy v teorii řízení* vypracoval samostatně, a že jsem uvedl všechny použité informační zdroje.

Michal Andresík





Rád bych poděkoval vedoucímu bakalářské práce panu Ing. Tomáši Kiselovi, PhD. za ochotu a cenné rady při psaní této bakalářské práce.

Michal Andresík

# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Zlomkový kalkulus</b>	<b>3</b>
2.1	Základní stavební prvky	3
2.1.1	Cauchyho formule	3
2.1.2	Gama funkce	3
2.2	Zlomkový integrál	4
2.3	Zlomkové derivace	4
<b>3</b>	<b>Teorie řízení</b>	<b>6</b>
3.1	Jednoduchý regulovaný obvod	6
3.2	Přechodová funkce zlomkového řádu	6
3.3	Funkce Mittagova-Lefflerova typu	7
3.4	Obecný předpis	7
3.5	Jednotkový impulz a jednotkový skok	8
3.6	$PI^\lambda D^\mu$ regulátor	8
<b>4</b>	<b>Numerické řešení</b>	<b>9</b>
4.1	Zadání úlohy	9
4.2	Odvození algoritmu	10
4.2.1	Explicitní metoda	11
4.2.2	Implicitní metoda	12
<b>5</b>	<b>Aplikace</b>	<b>13</b>
5.1	Skalární rovnice $D_{t_0}^\alpha x(t) = ax(t) + bx(t - \tau)$	13
5.2	Vektorová rovnice $D_{t_0}^\alpha \mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t - \tau)$	14
5.3	Vektorová rovnice $D_{t_0}^\alpha \mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{x}(t - \tau)$	16
<b>6</b>	<b>Závěr</b>	<b>18</b>
<b>7</b>	<b>Seznam použitých zkratk a symbolů</b>	<b>20</b>
<b>8</b>	<b>Seznam příloh</b>	<b>21</b>
8.1	Program sfdde.m	21
8.2	Dokumentace programu sfdde.m	21

# 1. Úvod

Zlomkový kalkulus sahá do historie stejně daleko jako kalkulus samotný. Rozmach ovšem zažívá teprve v posledních desetiletích, a to díky široké škále aplikací. Jeho zařazení do řady problémů přináší žádoucí účinky z hlediska chování řešení, např. dynamičtější průběh. Jedním z oborů pro jeho využití je teorie řízení.

V kapitole 2 je pomocí zavedení definic vybudován zlomkový kalkulus. V kapitole 3 je ukázáno rozšíření parametrů přenosové funkce a PID regulátoru mimo celá čísla. Kapitola 4 je věnována nalezení algoritmu soustavy diferenciálních rovnic řešené v této práci pro její numerické řešení. V kapitole 5 jsou pak srovnány soustavy pro různé volby jejich členů a řádů.

## 2. Zlomkový kalkulus

### 2.1. Základní stavební prvky

#### 2.1.1. Cauchyho formule

Mějme funkci  $f(x)$  definovanou na reálném intervalu, bod  $a \in \mathbb{R}$ . Pak nevlastní integrál se středem v bodě  $a$  můžeme zapsat následujícím způsobem:

$$If(x) = \int_a^x f(\sigma_1) d\sigma_1.$$

Opakovaným procesem získáme postupně dvojný, trojný,  $\dots$ ,  $n$ -tý integrál ( $n \in \mathbb{N}$ ).

$$\begin{aligned} I^2 f(x) &= \int_a^x If(\sigma_1) d\sigma_1 = \int_a^x \int_a^{\sigma_1} f(\sigma_2) d\sigma_2 d\sigma_1 \\ I^3 f(x) &= \int_a^x I^2 f(\sigma_1) d\sigma_1 = \int_a^x \int_a^{\sigma_1} If(\sigma_2) d\sigma_2 d\sigma_1 = \int_a^x \int_a^{\sigma_1} \int_a^{\sigma_2} f(\sigma_3) d\sigma_3 d\sigma_2 d\sigma_1 \\ &\vdots \\ I^n f(x) dx &= \int_a^x \int_a^{\sigma_1} \cdots \int_a^{\sigma_{n-1}} f(\sigma_n) d\sigma_n \cdots d\sigma_2 d\sigma_1 \end{aligned}$$

Pomocí Cauchyho formule můžeme takto složitě vyjádřený  $n$ -tý integrál zapsat pomocí jediného, a sice:

$$I^n f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt. \quad (2.1)$$

Tuto rovnost lze jednoduše dokázat matematickou indukcí s využitím záměny pořadí integrace.

#### 2.1.2. Gama funkce

Základní funkci pro založení neceločíselného integrálu představuje gama funkce. Jedná se o zobecnění faktoriálu pro všechna komplexní čísla s výjimkou nuly a záporných celých čísel ( $\mathbb{C} - \{0, -1, -2, \dots\}$ ).

**Definice 2.1.1** (Gama funkce). Funkci  $\Gamma(z)$  definovanou

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1} e^{-x} dx, \quad \Re(z) > 0$$

nazýváme gama funkcí.

Integrál, pomocí kterého je funkce definována, konverguje pouze v pravé části komplexní roviny.

## 2.2. ZLOMKOVÝ INTEGRÁL

Důležitou vlastností je vyjádření pomocí rekurentního předpisu, platí:

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{\infty} x^z e^{-x} dx = \left[ -x^z e^{-x} \right]_0^{\infty} + z \int_0^{\infty} x^{z-1} e^{-x} dx = z\Gamma(z). \quad (2.2)$$

S využitím [2.2] a

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} x^{1-1} e^{-x} dx = 1$$

můžeme vyjádřit vztah mezi faktoriálem a gama funkcí:

$$\Gamma(n) = (n-1)!, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.3)$$

## 2.2. Zlomkový integrál

Jediným faktorem, který omezuje Cauchyho formuli pouze pro přirozená čísla je faktoriál. Se znalostí gama funkce přichází přirozená myšlenka nahrazení faktoriálu pomocí vlastnosti [2.3] a rozšíření přirozeného čísla  $n$  na nějaké kladné reálné číslo  $\alpha$ .

**Definice 2.2.1** (Riemannův-Liouvillov integrál). Necht  $a, T, \alpha$  jsou reálná čísla,  $a < T$ ,  $\alpha > 0$  a funkce  $f(t)$  je lebesgueovsky integrovatelná na intervalu  $\langle a, T \rangle$ . Pak Riemannův-Liouvillov integrál řádu  $\alpha$  je pro  $t \in \langle a, T \rangle$  definován vztahem:

$$I_a^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds. \quad (2.4)$$

*Poznámka.* Volbou  $\alpha = n \in \mathbb{N}$  obdržíme definici celočíselného integrálu, která odpovídá Cauchyho formuli.

## 2.3. Zlomkové derivace

V celočíselném kalkulu platí oboustranná inverze derivace a integrálu, tj:

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dt^n} [I^n f(t)] &= f(t), \\ I^n \left[ \frac{d^n}{dt^n} f(t) \right] &= f(t). \end{aligned}$$

Podobná myšlenka je použita pro založení dvou nejnámějších zlomkových derivací. Ty obdržíme celočíselnou derivací zlomkového integrálu a naopak.

**Definice 2.3.1** (Riemannova-Liouvillova derivace). Necht  $a, T, \alpha$  jsou reálná čísla,  $a < T$ ,  $\alpha > 0$ ,  $m = \lceil \alpha \rceil$  je první celé číslo nad řádem  $\alpha$  a funkce  $f(t)$  je lebesgueovsky integrovatelná na intervalu  $\langle a, T \rangle$ . Pak Riemannova-Liouvillova derivace řádu  $\alpha$  je pro  $t \in \langle a, T \rangle$  definována vztahem:

$$D_a^\alpha f(t) = \frac{d^m}{dt^m} I_a^{m-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{dt^m} \int_a^t (t-s)^{m-\alpha-1} f(s) ds.$$

Záměnou pořadí derivace s integrací obdržíme Caputovu derivaci.

**Definice 2.3.2** (Caputova derivace). Necht  $a, T, \alpha$  jsou reálná čísla,  $a < T$ ,  $\alpha > 0$ ,  $m = \lceil \alpha \rceil$  je první celé číslo nad řádem  $\alpha$  a funkce  $f(t)$  je  $m$ -krát diferencovatelná na intervalu  $\langle a, T \rangle$ . Pak Caputova derivace řádu  $\alpha$  je pro  $t \in \langle a, T \rangle$  definována vztahem:

$${}^C D_a^\alpha f(t) = I_a^{m-\alpha} \frac{d^m}{dt^m} f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{m-\alpha-1} \frac{d^m}{dt^m} f(s) ds. \quad (2.5)$$

Caputova derivace je zleva inverzní operátor k Riemannovu-Liouvillovu integrálu:

$${}^C D_a^\alpha I_a^\alpha f = f. \quad (2.6)$$

Při záměně pořadí již operace inverzní není (více v ...), platí:

$$I_a^\alpha [{}^C D_a^\alpha f(t)] = f(t) - T_{m-1}[f; a](t), \quad (2.7)$$

kde  $T_{m-1}[f; a](t)$  je Taylorův polynom stupně  $m-1$  funkce  $f(t)$  se středem v bodu  $a$ , tj:

$$T_{m-1}[f; a](t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(t-a)^k}{k!} f^{(k)}(a).$$

V některých aplikacích je žádoucí aby derivace konstant byly rovny nule. Derivace vyšetříme dosazením  $f(t) = k \in \mathbb{R}$  do definic a obdržíme:

$$\begin{aligned} D_a^\alpha k &= \frac{k}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{dt^m} \int_a^t (t-s)^{m-\alpha-1} ds = \left. \begin{array}{l} t-s=\sigma \\ ds=-d\sigma \\ -\sigma:0 \rightarrow t-a \end{array} \right| \\ &= \frac{k}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{dt^m} \int_0^{t-a} \sigma^{m-\alpha-1} d\sigma = \frac{k}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{dt^m} \left[ \frac{(t-a)^{m-\alpha}}{m-\alpha} \right] = \\ &= \left. \begin{array}{l} \text{využití [2.2] a} \\ \text{vyjádření } m\text{-té} \\ \text{derivace} \end{array} \right| = \frac{k(t-a)^{-\alpha}}{\Gamma(m-\alpha+1)} \prod_{i=0}^{m-1} (m-\alpha-i) \end{aligned}$$

$${}^C D_a^\alpha k = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{m-\alpha-1} \frac{d^m}{dt^m} k ds = 0$$

Z těchto dvou derivací tuto vlastnost splňuje pouze derivace Caputova. Její větší předností je ovšem v diferenciálních rovnicích zlomkového řádu. Při jejím použití zde narozdíl od použití Riemannovy-Liouvillovoy derivace předepisujeme počáteční podmínky v celočíselných řádech, což je z hlediska fyzikální interpretace nezbytné.

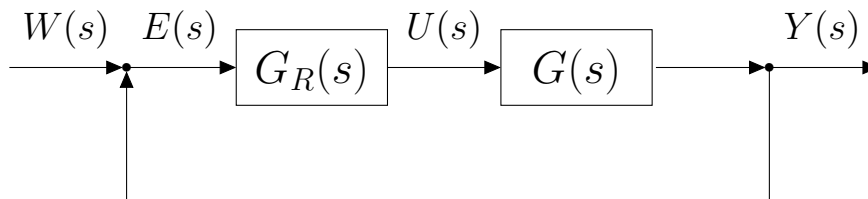
Po zbytek této práce budeme používat Caputovu derivaci a budeme ji značit  $D_a^\alpha f$ .

### 3. Teorie řízení

Mezi jednu z hlavních oblastí pro aplikaci zlomkového kalkulu patří teorie řízení. Rozšíření systémů a regulátorů do neceločíselných řádů umožňuje dosažení dynamičtějšího chování řízených systémů.

#### 3.1. Jednoduchý regulovaný obvod

Jednoduchý regulovaný obvod skládající se z regulátoru a regulované soustavy je představen na obrázku [3.1].



Obrázek 3.1: Jednoduchý regulační obvod

$G_R(s)$  je přechodová funkce regulátoru,  $G(s)$  přechodová funkce regulované soustavy,  $W(s)$  jsou vstupní hodnoty,  $E(s)$  je chyba soustavy,  $U(s)$  je výstupní funkce regulátoru a  $Y(s)$  je výstupní hodnota soustavy.

#### 3.2. Přechodová funkce zlomkového řádu

Mějme  $a_k, \beta_k$  reálná čísla, kde pro všechny  $\beta_k$  platí  $\beta_k > \beta_{k-1} > \dots > \beta_1 > \beta_0 > 0$ ,  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ . Pak přechodové funkci  $G_n(s)$  dané :

$$G_n(s) = \frac{1}{a_n s^{\beta_n} + a_{n-1} s^{\beta_{n-1}} + \dots + a_1 s^{\beta_1} + a_0 s^{\beta_0}} \tag{3.1}$$

odpovídá diferenciální rovnice zlomkového řádu

$$a_n D^{\beta_n} x(t) + a_{n-1} D^{\beta_{n-1}} x(t) + \dots + a_1 D^{\beta_1} x(t) + a_0 D^{\beta_0} x(t) = u(t).$$

Pro převod mezi diferenciální rovnicí a přechodovou funkcí je využita Laplaceova transformace. Řešení můžeme tedy získat jednak pomocí diferenciální rovnice, jednak pomocí přechodové funkce a následně inverzní Laplaceovy transformace.

Položením  $\gamma = n + \delta$ ,  $0 < \delta \leq 1$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , můžeme definici Caputovy derivace [2.5] přepsat na tvar:

$$D_0^\gamma x(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\delta)} \int_0^t (t-s)^{-\delta} \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} x(s) ds. \tag{3.2}$$

Pro  $\gamma < 0$  máme integrál řádu  $-\gamma$ :

$$I_0^{-\gamma} x(t) = \frac{1}{\Gamma(-\delta)} \int_0^t (t-s)^{-1-\delta} x(s) ds.$$

Laplaceovou transformací zlomkové derivace v rovnici [3.2] obdržíme:

$$\int_0^{\infty} e^{-st} D^{\gamma} x(t) dt = s^{\gamma} X(s) - \sum_{k=0}^n s^{\gamma-k-1} x^{(k)}(0).$$

Pro  $\gamma < 0$  je sumační zápis vypuštěn.

### 3.3. Funkce Mittagova-Lefflerova typu

Jednu z dalších funkcí důležitou pro zlomkový kalkulus představuje Mittagova-Lefflerova funkce. Je dána předpisem:

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{\Gamma(\alpha j + \beta)}, \quad (\alpha > 0, \beta > 0).$$

Její  $k$ -tá derivace je vyjádřena:

$$E_{\alpha,\beta}^{(k)}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j+k)! z^j}{j! \Gamma(\alpha j + \alpha k + \beta)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Pro vyjádření obecného předpisu řešení přechodové funkce je nadále představena funkce:

$$\mathcal{E}_k(t, x; \alpha, \beta) = t^{\alpha k + \beta - 1} E_{\alpha,\beta}^{(k)}(xt^{\alpha}), \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Její Laplaceova transformace je dána:

$$\int_0^{\infty} \mathcal{E}_k(t, \pm x; \alpha, \beta) dt = \frac{k! s^{\alpha - \beta}}{(s^{\alpha} \mp x)^{k+1}}, \quad (\Re(s) > |x|^{1/\alpha}). \quad (3.3)$$

Dále využijeme derivaci funkce  $\mathcal{E}_k(t, x; \alpha, \beta)$ , ta je vyjádřena:

$$D_0^{\lambda} \mathcal{E}_k(t, x; \alpha, \beta) = \mathcal{E}_k(t, x; \alpha, \beta - \lambda), \quad (\lambda < \beta). \quad (3.4)$$

### 3.4. Obecný předpis

Pomocí [3.3] můžeme vyjádřit inverzní Laplaceovu transformaci přechodové funkce [3.1].

Mějme  $\beta_n > \beta_{n-1} > \dots > \beta_1 > \beta_0 > 0$ . Pak inverzní Laplaceova transformace přechodové funkce  $G_n(s)$  je určena:

$$g_n(t) = \frac{1}{a_n} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \sum_{\substack{k_0+k_1+\dots+k_{n-2}=m \\ k_0 \geq 0; \dots; k_{n-2} \geq 0}} (m; k_0, k_1, \dots, k_{n-2}) \quad (3.5)$$

$$\cdot \prod_{i=0}^{n-2} \left( \frac{a_i}{a_n} \right)^{k_i} \mathcal{E}_m(t, -\frac{a_{n-1}}{a_n}; \beta_n - \beta_{n-1}, \beta_n + \sum_{j=0}^{n-2} (\beta_{n-1} - \beta_j) k_j), \quad (3.6)$$

kde  $(m; k_0, k_1, \dots, k_{n-2})$  jsou mnohočlenné koeficienty [1].



### 3.5. Jednotkový impulz a jednotkový skok

Odezva jednotkového impulzu soustavy s přechodovou funkcí [3.1] je dána obecným předpisem [3.5],  $x_{impulz} = g_n(t)$ .

Integrací obecného předpisu [3.5] s využitím [3.4] je vyjádřen jednotkový skok  $y_{skok}$ :

$$x_{skok}(t) = \frac{1}{a_n} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \sum_{\substack{k_0+k_1+\dots+k_{n-2}=m \\ k_0 \geq 0; \dots; k_{n-2} \geq 0}} (m; k_0, k_1, \dots, k_{n-2}) \cdot \prod_{i=0}^{n-2} \left( \frac{a_i}{a_n} \right)^{k_i} \mathcal{E}_m(t, -\frac{a_{n-1}}{a_n}; \beta_n - \beta_{n-1}, \beta_n + \sum_{j=0}^{n-2} (\beta_{n-1} - \beta_j) k_j + 1).$$

### 3.6. $PI^\lambda D^\mu$ regulátor

Zobecnění klasického PID regulátoru představuje zlomkový  $PI^\lambda D^\mu$  regulátor. Integrační, společně s derivačním členem jsou zde rozšířeny z kladných celých čísel do kladných reálných čísel. Přenosová funkce regulátoru je pak dána:

$$G_R(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_P + K_I s^{-\lambda} + K_D s^\mu, \quad \lambda, \mu > 0.$$

Odpovídající diferenciální rovnice je pak tvaru:

$$u(t) = K_P e(t) + K_I D^{-\lambda} e(t) + K_D D^\mu e(t).$$

*Poznámka.* Kombinováním různých řídicích členů a řídicích systému dochází zároveň s praktickým přiblížením k jejich složitějšímu zápisu. V této práci se omezíme na systémy, které můžeme popsat soustavou rovnic uvedou v následující kapitole.

## 4. Numerické řešení

### 4.1. Zadání úlohy

Mějme  $\alpha, t_0, t, \tau \in \mathbb{R}$ ,  $m = \lceil \alpha \rceil$  a časové funkce  $a_{ij}(t), b_{ij}(t), f_i(t) \subset \mathbb{R}$ ,  $i, j \in \{1, 2, \dots, N\}$ . Pak budeme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} D_{t_0}^\alpha x_1(t) &= \sum_{k=1}^N a_{1k}(t)x_k(t) + \sum_{k=1}^N b_{1k}(t)x_k(t-\tau) + f_1(t) \\ D_{t_0}^\alpha x_2(t) &= \sum_{k=1}^N a_{2k}(t)x_k(t) + \sum_{k=1}^N b_{2k}(t)x_k(t-\tau) + f_2(t) \\ &\vdots \\ D_{t_0}^\alpha x_N(t) &= \sum_{k=1}^N a_{Nk}(t)x_k(t) + \sum_{k=1}^N b_{Nk}(t)x_k(t-\tau) + f_N(t) \end{aligned}$$

určenou v čase  $t_0 - \tau \leq t \leq t_0$  počátečními funkcemi

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_{01}(t), \quad \frac{d}{dt} x_1(t) = x_{11}(t), \quad \dots, \quad \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} x_1(t) = x_{(m-1)1}(t) \\ x_2(t) &= x_{02}(t), \quad \frac{d}{dt} x_2(t) = x_{12}(t), \quad \dots, \quad \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} x_2(t) = x_{(m-1)2}(t) \\ &\vdots \\ x_N(t) &= x_{0N}(t), \quad \frac{d}{dt} x_N(t) = x_{1N}(t), \quad \dots, \quad \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} x_N(t) = x_{(m-1)N}(t) \end{aligned} \quad (4.1)$$

nazývat soustavou diferenciálních rovnic řádu  $\alpha$  s počátkem v čase  $t_0$  a zpožděním  $\tau$ . Soustavu [4.1] můžeme psát v maticovém tvaru

$$D_{t_0}^\alpha \mathbf{x}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{x}(t-\tau) + \mathbf{f}(t);$$

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0(t), \quad \frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_1(t), \quad \dots, \quad \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_{m-1}(t), \quad t_0 - \tau \leq t \leq t_0,$$

$$\mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1N}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1}(t) & \dots & a_{NN}(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}(t) = \begin{pmatrix} b_{11}(t) & \dots & b_{1N}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{N1}(t) & \dots & b_{NN}(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_N(t) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_N(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}(t-\tau) = \begin{pmatrix} x_1(t-\tau) \\ \vdots \\ x_N(t-\tau) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_0(t) = \begin{pmatrix} x_{01}(t) & \dots & x_{(m-1)1}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{0N}(t) & \dots & x_{(m-1)N}(t) \end{pmatrix}.$$

## 4.2. Odvození algoritmu

Pro nalezení algoritmu budeme pro všechny rovnice soustavy [4.1] využívat totožné úpravy. Vyjádříme tedy  $i$ -tou rovnicí pro nalezení  $i$ -té složky vektoru neznámých  $\mathbf{x}$  a jejím vyřešením získáme řešení celé soustavy.

$$D_{t_0}^\alpha x_i(t) = \sum_{k=1}^N a_{ik}(t)x_k(t) + \sum_{k=1}^N b_{ik}(t)x_k(t - \tau) + f_i(t), \quad i \in \{1, 2, \dots, N\}. \quad (4.2)$$

Pro úsporu místa budeme pravou stranu rovnice [4.2] značit  $F_i(t)$ .

$$F_i(t) = \sum_{k=1}^N a_{ik}(t)x_k(t) + \sum_{k=1}^N b_{ik}(t)x_k(t - \tau) + f_i(t)$$

Na obě strany rovnice aplikujeme RL integrál a následně využijeme vlastnost [2.7].

$$\begin{aligned} I_{t_0}^\alpha D_{t_0}^\alpha x_i(t) &= I_{t_0}^\alpha F_i(t) \\ x_i(t) - T_{m-1}[x_i; t_0](t) &= I_{t_0}^\alpha F_i(t) \end{aligned}$$

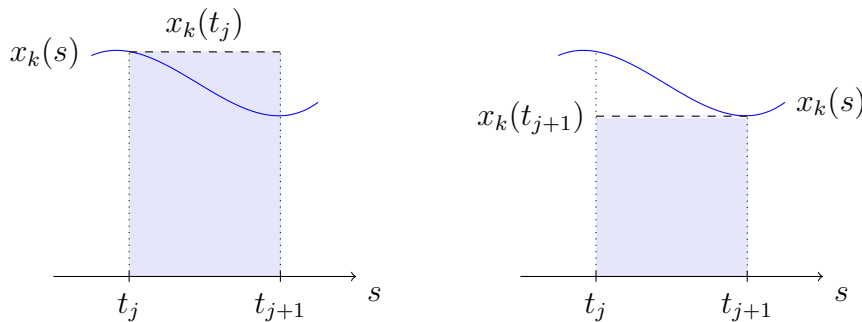
Pravou stranu vyjádříme pomocí definice [2.4].

$$x_i(t) = T_{m-1}[x_i; t_0](t) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^t (t-s)^{\alpha-1} F_i(s) ds$$

Rozdělení časového intervalu  $\langle t_0, t \rangle$  na  $n$  podintervalů o délce  $h = \text{konst.} \in \mathbb{R}$  pomocí  $t_n = t_0 + nh$  umožní vyjádření složky  $x_i$  v čase  $t_n$ . Integrál je pak zapsán po částech pro každý podinterval  $\langle t_j, t_{j+1} \rangle$ .

$$x_i(t_n) = T_{m-1}[x_i; t_0](t_n) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{j=0}^{n-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} (t_n - s)^{\alpha-1} F_i(s) ds \quad (4.3)$$

Na každém intervalu  $\langle t_j, t_{j+1} \rangle$  aproximujeme složky  $x_k(s)$  vektoru  $\mathbf{x}$  interpolačním polynomem. V této práci využijeme konstantní funkci, příslušná metoda integrace se nazývá obdelníková. Vyjádření pomocí lineární funkce (lichobežníková metoda) je popsáno v [4].



Obrázek 4.1: Explicitní a implicitní obdelníková metoda

### 4.2.1. Explicitní metoda

Složky vektoru  $\mathbf{x}$  vyjádříme pomocí jejich funkčních hodnot v počátečních bodech každého časového intervalu :

$$x_k(s) = x_k(t_j) \quad \forall s \in \langle t_j, t_{j+1} \rangle, \quad j = \{0, 1, \dots, n-1\}.$$

Nyní můžeme v rovnici [4.3] vytknout z integrálu člen  $F_i(t_j)$ , protože už se pro každé  $j$  jedná o konstantní člen.

$$x_i(t_n) = T_{m-1}[x_i; t_0](t_n) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{j=0}^{n-1} F_i(t_j) \int_{t_j}^{t_{j+1}} (t_n - s)^{\alpha-1} ds \quad (4.4)$$

Pomocí substituční metody a časového dělení  $t_n = t_0 + nh$  integrál vyjádříme.

$$\begin{aligned} \int_{t_j}^{t_{j+1}} (t_n - s)^{\alpha-1} ds &= \left| \begin{array}{l} t - s = \sigma \\ ds = -d\sigma \\ -\sigma : h(n-j-1) \rightarrow h(n-j) \end{array} \right| = \int_{h(n-j-1)}^{h(n-j)} \sigma^{\alpha-1} d\sigma = \left[ \frac{\sigma^\alpha}{\alpha} \right]_{h(n-j-1)}^{h(n-j)} \\ &= \frac{h^\alpha ((n-j)^\alpha - (n-j-1)^\alpha)}{\alpha} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Zpětným dosazením [4.5] do [4.4] a využitím [2.2] obdržíme:

$$x_i(t_n) = T_{m-1}[x_i; t_0](t_n) + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \sum_{j=0}^{n-1} b_j^\alpha F_i(t_j),$$

kde koeficienty  $b_j^\alpha$  a hodnoty  $F_i(t_j)$  jsou určeny:

$$\begin{aligned} b_j^\alpha &= ((n-j)^\alpha - (n-j-1)^\alpha), \\ F_i(t_j) &= \sum_{k=1}^N a_{ik}(t_j) x_k(t_j) + \sum_{k=1}^N b_{ik}(t_j) x_k(t_j - \tau) + f_i(t_j). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Řešení [4.6] můžeme zapsat v maticovém tvaru:

$$\mathbf{x}(t_n) = T_{m-1}[\mathbf{x}; t_0](t_n) + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \sum_{j=0}^{n-1} b_j^\alpha \left( \mathbf{A}(t_j) \mathbf{x}(t_j) + \mathbf{B}(t_j) \mathbf{x}(t_j - \tau) + \mathbf{f}(t_j) \right).$$

## 4.2. ODVOZENÍ ALGORITMU

### 4.2.2. Implicitní metoda

U této metody je pro odvození vhodnější použití maticového tvaru. Místo  $F_i(t)$  budeme tedy používat:

$$\mathbf{F}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{x}(t - \tau) + \mathbf{f}(t).$$

Složky vektoru  $\mathbf{x}$  vyjádříme pomocí jejich funkčních hodnot v koncových bodech každého časového intervalu :

$$\mathbf{x}(s) = \mathbf{x}(t_{j+1}) \quad \forall s \in \langle t_j, t_{j+1} \rangle, \quad j = \{0, 1, \dots, n-1\}.$$

Provedením analogických úprav [4.3] a [4.5] získáme:

$$\mathbf{x}(t_n) = \mathbb{T}_{m-1}[\mathbf{x}; t_0](t_n) + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \sum_{j=0}^{n-1} b_j^\alpha \mathbf{F}(t_{j+1}). \quad (4.7)$$

*Poznámka.* Značením  $b_j^\alpha$  myslíme koeficient vyjádřený v řešení explicitní metody [4.6].

Člen  $\mathbf{F}(t_{j+1})$  v rovnici [4.7] obsahuje vektor neznámých  $\mathbf{x}$  v čase  $t_n$ . Pro jeho vyjádření vyjmeme poslední prvek ze sumačního zápisu, který dále rozepíšeme.

$$\mathbf{x}(t_n) = \mathbb{T}_{m-1}[\mathbf{x}; t_0](t_n) + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \left( \sum_{j=0}^{n-2} b_j^\alpha \mathbf{F}(t_{j+1}) + \mathbf{F}(t_n) \right),$$

$$\mathbf{F}(t_n) = \mathbf{A}(t_n)\mathbf{x}(t_n) + \mathbf{B}(t_n)\mathbf{x}(t_n - \tau) + \mathbf{f}(t_n).$$

Rovnici dále upravíme.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t_n) - \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \mathbf{A}(t_n)\mathbf{x}(t_n) &= \mathbb{T}_{m-1}[\mathbf{x}; t_0](t_n) \\ &+ \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \left( \sum_{j=0}^{n-2} b_j^\alpha \mathbf{F}(t_{j+1}) + \mathbf{B}(t_n)\mathbf{x}(t_n) + \mathbf{f}(t_n) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left( \mathbf{E} - \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \mathbf{A}(t_n) \right) \mathbf{x}(t_n) &= \mathbb{T}_{m-1}[\mathbf{x}; t_0](t_n) \\ &+ \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \left( \sum_{j=0}^{n-2} b_j^\alpha \mathbf{F}(t_{j+1}) + \mathbf{B}(t_n)\mathbf{x}(t_n) + \mathbf{f}(t_n) \right), \end{aligned}$$

kde  $\mathbf{E}$  značí jednotkovou matici.

Řešení  $\mathbf{x}(t_n)$  získáme vyřešením vzniklé soustavy lineárních rovnic.

*Poznámka.* V matlabu lze soustavu lineárních rovnic  $\mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{d}$  vyřešit příkazem  $\mathbf{C} \setminus \mathbf{d}$ .

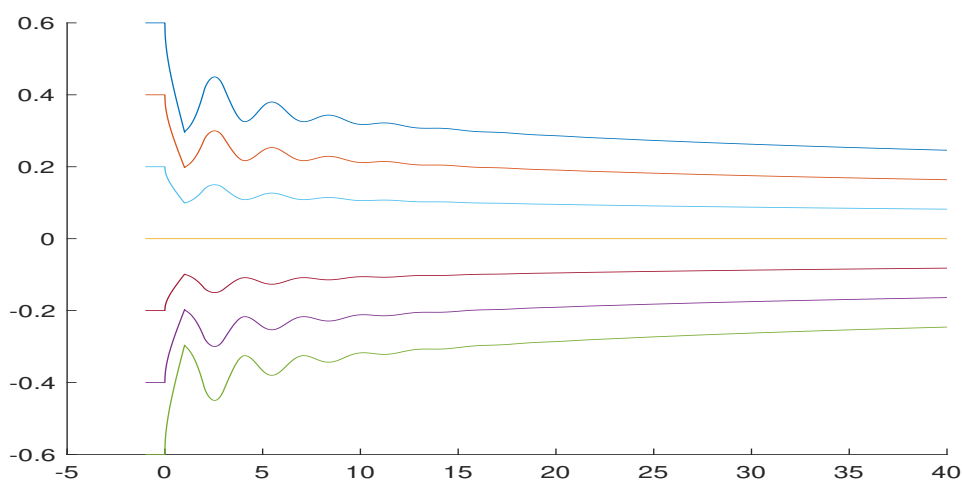
## 5. Aplikace

### 5.1. Skalární rovnice $D_{t_0}^\alpha x(t) = ax(t) + bx(t - \tau)$

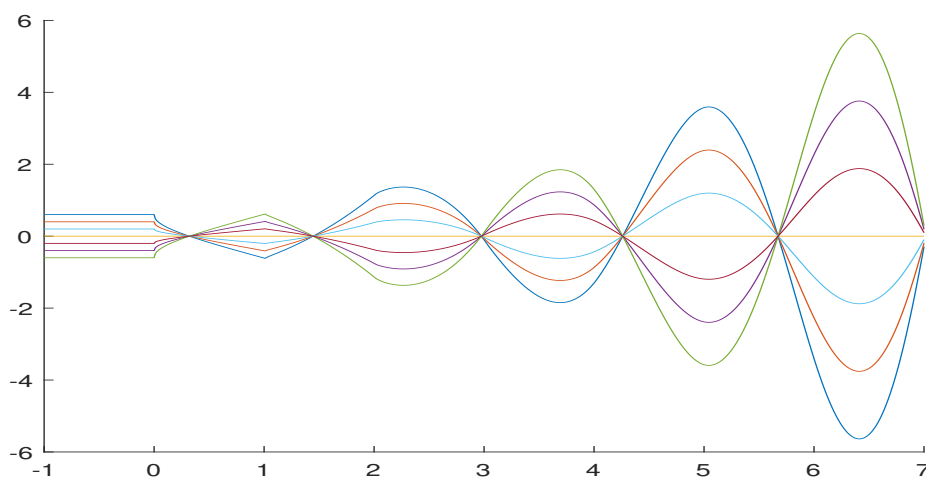
Prvním příkladem představíme chování systému popsaného skalární rovnicí:

$$D_{t_0}^\alpha x(t) = ax(t) + bx(t - \tau).$$

Řád rovnice volíme  $\alpha = 0,4$ , počáteční čas  $t_0 = 0$ , člen  $a = 0,5$  a zpoždění  $\tau = 1$ . Budeme sledovat změnu chování v závislosti na výběru koeficientu  $b$ . Na následujících grafech jsou postupně představeny volby  $b = -0,75$ ,  $b = -1,5$ ,  $b = -0,5$  s různou volbou počátečních podmínek  $x_0 = -\frac{3}{5}, -\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}, 0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}$ .

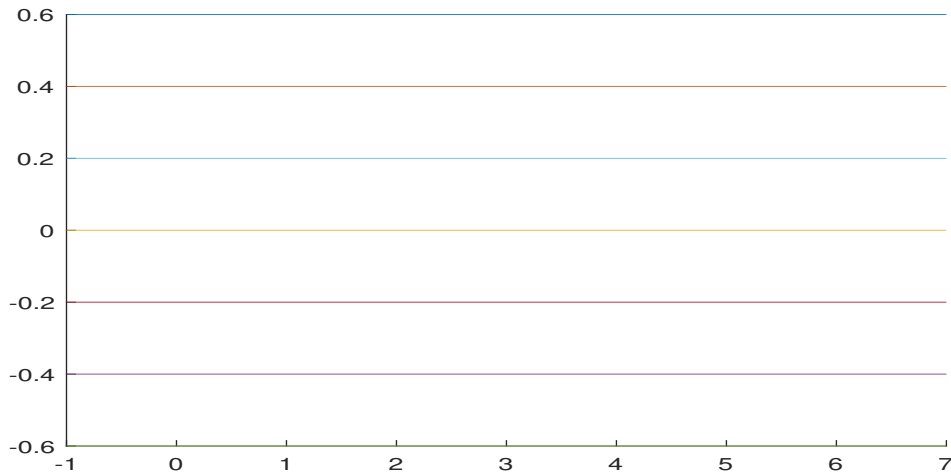


Obrázek 5.1: Řešení  $x(t)$ ;  $b = -0,75$



Obrázek 5.2: Řešení  $x(t)$ ;  $b = -1,5$

## 5.2. VEKTOROVÁ ROVNICE $D_{t_0}^\alpha \mathbf{X}(T) = \mathbf{A}\mathbf{X}(T - \tau)$



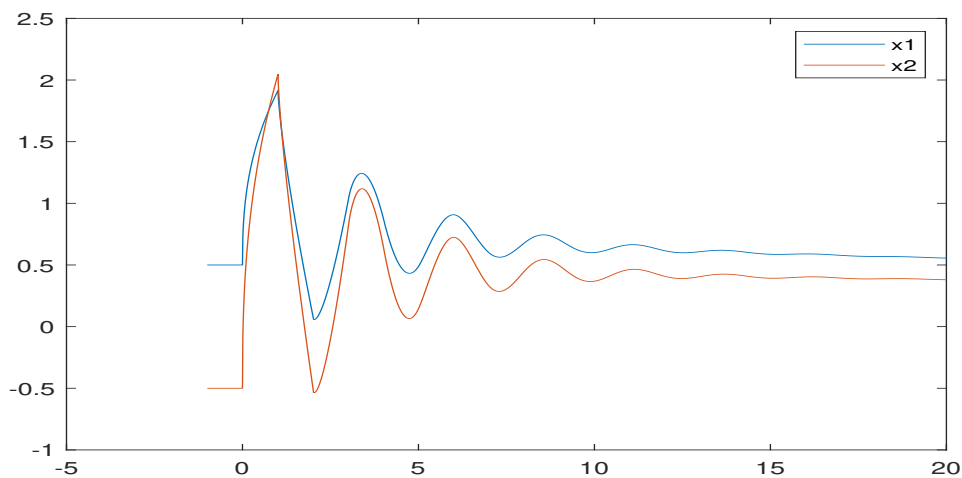
Obrázek 5.3: Řešení  $x(t)$ ;  $b = -0,5$

Zatímco volbou  $b = -0,75$  získáme asymptotickou stabilitu systému, pro  $b = -1,5$  řešení osciluje s narůstající periodou a pro  $b = -0,5$  máme  $x(t)$  konstantní funkci. Volbou počáteční podmínky  $x_0 = 0$  obdržíme ve všech případech triviální řešení.

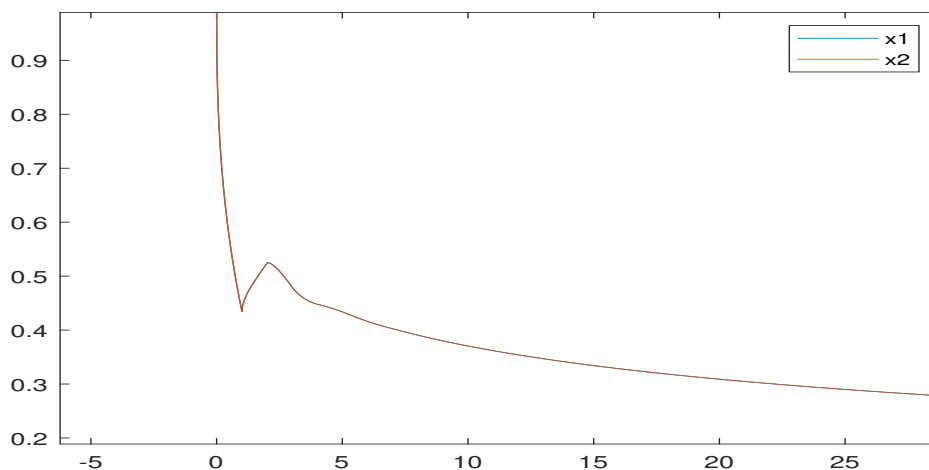
## 5.2. Vektorová rovnice $D_{t_0}^\alpha \mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t - \tau)$

Stejně jako v příkladu výše, i u této rovnice bereme řád  $\alpha = 0,4$ ,  $t_0 = 0$  a zpoždění  $\tau = 1$ . Matice  $\mathbf{A}$  je sestavena pomocí vlastních čísel. Vlastnostem řešení toho typu rovnice se věnuje práce [6], pomocí které srovnáme chování numerického výsledku. Volbu  $\lambda_1 = -1$  a  $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$  splňuje matice  $\mathbf{A}_1$ .

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ 2 & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$$



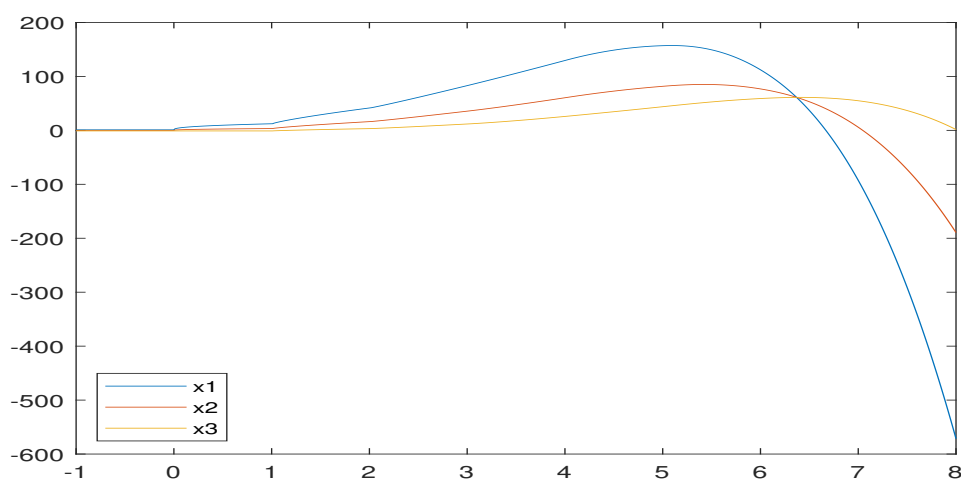
Obrázek 5.4: Složky vektoru  $\mathbf{x}(t)$ ;  $\mathbf{x}_0(t) = \left(\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2}\right)^T$  s maticí  $\mathbf{A}_1$

Obrázek 5.5: Složky vektoru  $\mathbf{x}(t)$ ;  $\mathbf{x}_0(t) = (1 \ 1)^T$ 

Chování systému s maticí  $\mathbf{A}_1$  se v obou případech s rostoucím časem, i když velmi pomalu, blíží nule, což odpovídá teoretickému tvrzení. V případě stejné počáteční podmínky (obrázek [5.5]) jsou navíc obě složky řešení totožné.

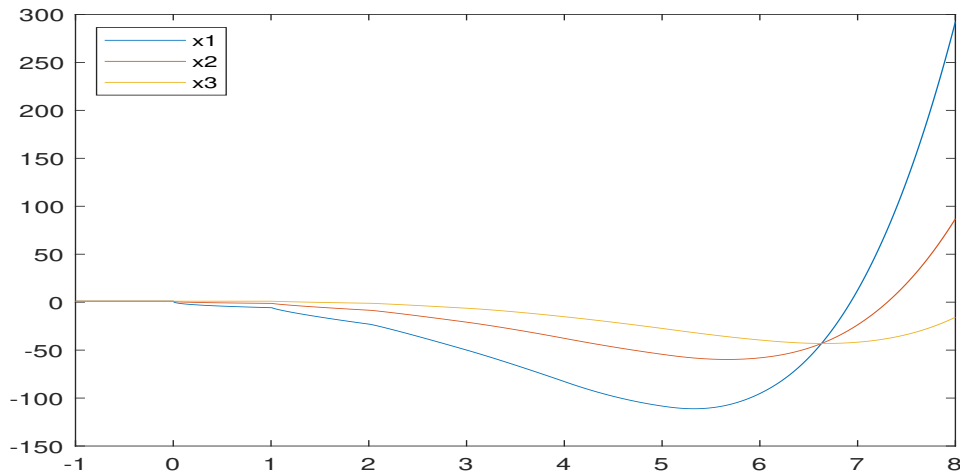
Naopak pro matici  $\mathbf{A}_2$  vezmeme vlastní čísla taková, pro která by řešení nemělo být stabilní. Například volbu  $\lambda_1 = 1 + i$ ,  $\lambda_2 = 1 - i$ ,  $\lambda_3 = -1$  splňuje matice  $\mathbf{A}_2$ .

$$\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -7 \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Obrázek 5.6: Složky vektoru  $\mathbf{x}(t)$ ;  $\mathbf{x}_0(t) = (1 \ 0 \ -1)^T$  s maticí  $\mathbf{A}_1$



### 5.3. VEKTOROVÁ ROVNICE $D_{t_0}^\alpha \mathbf{X}(T) = \mathbf{A}\mathbf{X}(T) + \mathbf{B}\mathbf{X}(T - \tau)$



Obrázek 5.7: Složky vektoru  $\mathbf{x}(t)$ ;  $\mathbf{x}_0(t) = (1 \ 1 \ 1)^T$  s maticí  $\mathbf{A}_2$

Vskutku, jak můžeme vidět na obrázcích výše, pro oba zvolené počáteční vektory řešení prudce roste, resp. klesá do  $\infty$ , resp.  $-\infty$ .

### 5.3. Vektorová rovnice $D_{t_0}^\alpha \mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{x}(t - \tau)$

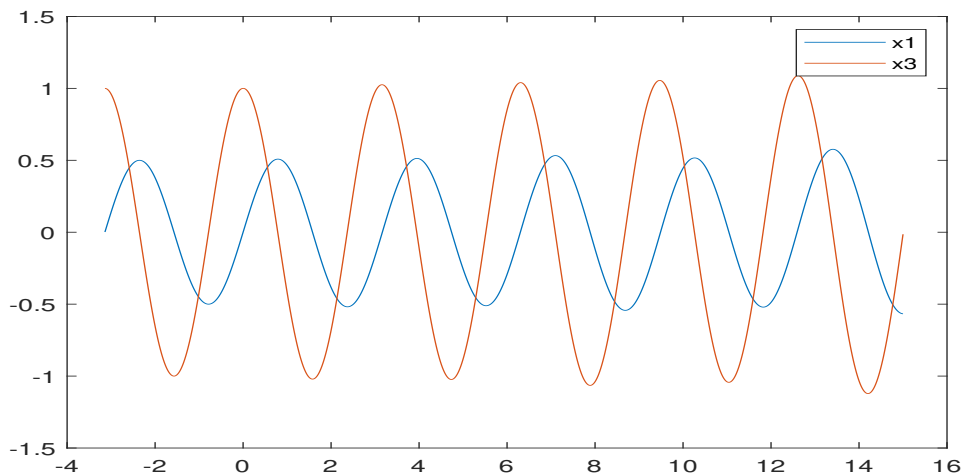
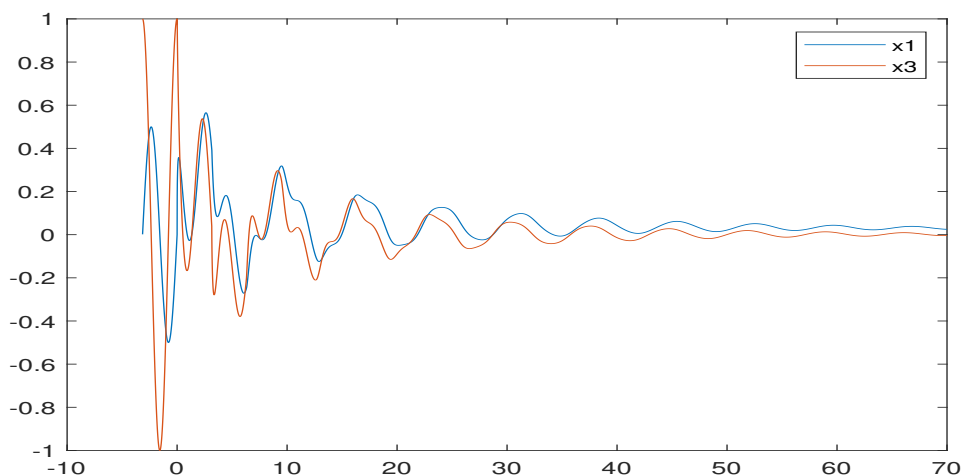
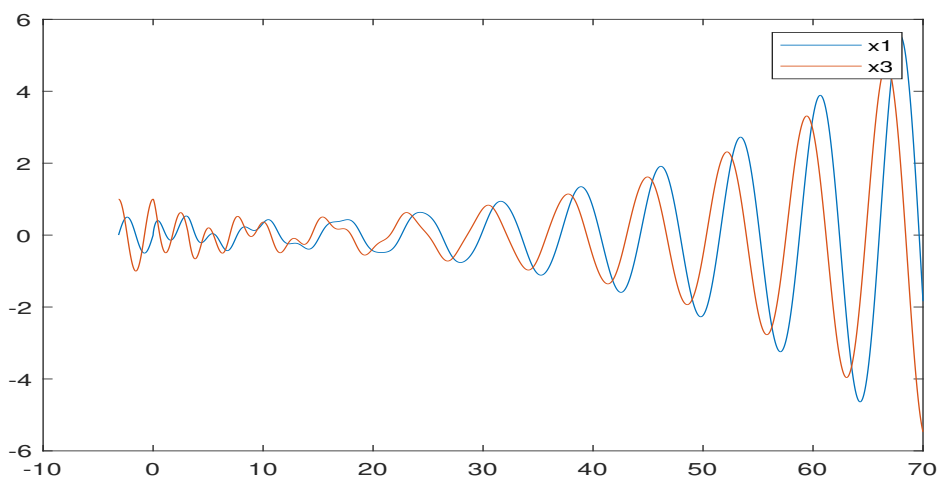
Na posledním příkladu ukážeme, jak může změna řádu diferenciálních rovnic ovlivnit chování celého systému.

Mějme systém popsany soustavou diferenciálních rovnic:

$$D_{t_0}^\alpha \mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{x}(t - \tau). \quad (5.1)$$

Dále je dáno  $t_0 = 0$ ,  $\tau = \pi$ , matice  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  a vektor  $\mathbf{x}_0(t)$ :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_0(t) = \begin{pmatrix} \sin(t)\cos(t) \\ \sin(t)\cos(t) \\ \cos^2(t) - \sin^2(t) \\ \cos^2(t) - \sin^2(t) \end{pmatrix}.$$

Obrázek 5.8: Řešení  $\mathbf{x}(t)$ ;  $\alpha = 1$ Obrázek 5.9: Řešení  $\mathbf{x}(t)$ ;  $\alpha = 0,4$ Obrázek 5.10: Řešení  $\mathbf{x}(t)$ ;  $\alpha = 0,7$ 

Pro řád soustavy  $\alpha = 1$  systém osciluje s konstantní periodou (přesné řešení je uvedeno v [7]). Volbou  $\alpha = 0,4$  dochází k postupnému vyhlazení oscilace a naopak pro  $\alpha = 0,7$  je oscilace zesílena na rosoucí periodu.

## 6. Závěr

Na začátku této práce jsme představili vzorce platné v klasickém kalkulu. S jejich pomocí jsme poté rozšířením parametrů do reálných čísel založili kalkulus zlomkový.

Následně jsme ukázali způsob pro rozšíření popisů dějů v teorii řízení. Nejprve byla zobecněna přechodová funkce a poté jsme zmínili PID regulátor zlomkového řádu.

Hlavním cílem bylo nalezení algoritmu pro řešení dané problematiky. Pomocí nástrojů z kapitoly 1 a aproximací funkce jsme odvodili explicitní a implicitní metodu.

V poslední kapitole jsme poté představili jednu skalární a dvě vektorové rovnice. Různými volbami parametrů těchto systémů jsme ukázali jejich rozdílné chování.

# Literatura

- [1] PODLUBNY, Igor. *Fractional Differential Equations*. United States: Academic Press, 1999. 340 s. ISBN 0-12-558840-2..
- [2] Cauchy formula for repeated integration. *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2021-5-20]. Dostupné z: [https://en.wikipedia.org/wiki/Cauchy\\_formula\\_for\\_repeated\\_integration](https://en.wikipedia.org/wiki/Cauchy_formula_for_repeated_integration)
- [3] GARRAPPA, Roberto. Numerical Solution of Fractional Differential Equations: A Survey and a Software Tutorial. *Mathematics* [online]. 2018, 6(2) [cit. 2021-5-20]. DOI:10.3390/math6020016. Dostupné z: <https://doi.org/10.3390/math6020016>
- [4] GARRAPPA, Roberto. Trapezoidal methods for fractional differential equations: Theoretical and computational aspects. *Mathematics and Computers in Simulation* [online]. 2015, 110(1), 96-112 [cit. 2021-5-20]. DOI:10.1016/j.matcom.2013.09.012. Dostupné z: <https://doi.org/10.1016/j.matcom.2013.09.012>
- [5] KISELA, Tomáš. *Fractional Differential Equations and Their Applications*. Brno: VUT, FSI, 2008, 50 s. Diplomová práce.
- [6] ČERMÁK, Jan a Tomáš KISELA. OSCILLATORY AND ASYMPTOTIC PROPERTIES OF FRACTIONAL DELAY DIFFERENTIAL EQUATIONS. *ELECTRONIC JOURNAL OF DIFFERENTIAL EQUATIONS* [online]. 2019, 2019(33), 1-15 [cit. 2021-5-20]. ISSN 1072-6691. Dostupné z: <http://ejde.math.txstate.edu>
- [7] SUN, Yeguo. Integration Processes of Delay Differential Equation Based on Modified Laguerre Functions. *Journal of Applied Mathematics* [online]. 2012, (2012) [cit. 2021-5-20]. DOI:10.1155/2012/978729. Dostupné z: <https://www.hindawi.com/journals/jam/2012/978729/>

## 7. Seznam použitých zkratek a symbolů

$\mathbb{N}$  množina přirozených čísel

$\mathbb{Z}$  množina celých čísel

$\mathbb{R}$  množina reálných čísel

$\mathbb{C}$  množina komplexních čísel

$\Re(z)$  reálná část komplexního proměnné  $z$

$\lceil z \rceil$  funkce horní meze proměnné  $z$

$\Gamma(z)$  Gamma funkce proměnné  $z$

$\frac{d^n}{dt^n} f(t)$   $n$ -tá derivace funkce  $f(t)$

$I_a^\alpha$  integrál řádu  $\alpha$  s počátkem v bodu  $a$

$D_a^\alpha I_a^\alpha$  Riemannova-Liouvillova derivace řádu  $\alpha$   ${}^C D_a^\alpha I_a^\alpha$  Caputova derivace řádu  $\alpha$

## 8. Seznam příloh

### 8.1. Program `sfdde.m`

Program `sfdde.m` je program pro řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic zlomkového řádu se zpožděním v maticové podobě.

### 8.2. Dokumentace programu `sfdde.m`

Společně s programem je přiložena jeho dokumentace. Je v ní popsán kód kterým se výpočet provádí, dále také vzorové zadání pro řešení.