



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV MATEMATIKY

INSTITUTE OF MATHEMATICS

LIEOVY GRUPY Z HLEDISKA KINEMATIKY A APLIKACÍ V ROBOTICE

LIE GROUPS FROM THE POINT OF VIEW OF KINEMATICS AND APPLICATIONS IN ROBOTICS

DIPLOMOVÁ PRÁCE

MASTER'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Bc. Jan Kalenský

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

doc. RNDr. Jiří Tomáš, Dr.

BRNO 2022

Zadání diplomové práce

Ústav:	Ústav matematiky
Student:	Bc. Jan Kalenský
Studijní program:	Aplikované vědy v inženýrství
Studijní obor:	Matematické inženýrství
Vedoucí práce:	doc. RNDr. Jiří Tomáš, Dr.
Akademický rok:	2021/22

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma diplomové práce:

Lieovy grupy z hlediska kinematiky a aplikací v robotice

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Student vypracuje přehled základních pojmů a vět z teorie Lieových grup a souvisejících geometrických struktur a interpretuje tyto pojmy v kinematice s důrazem na kinematiku tuhého tělesa. Kromě aplikací Lieových grup, hlavních bandlů a dalších geometrických struktur v mechanice samotné se zaměří na základy robotiky a demonstuje využití teorie na vybraných typech robotů.

Cíle diplomové práce:

Podat ucelený přehled základů teorie Lieových grup a souvisejících geometrických struktur a interpretovat studované pojmy v kinematice, zejména tuhého tělesa.

Dalším cílem je ukázat význam studovaných pojmů v robotice se zaměřením na některé konkrétní typy robotů.

Seznam doporučené literatury:

HALL, B. Lie Groups, Lie Algebras and their Representations. San Francisco: 2015.

KOLÁŘ, I., MICHOR, P. W., SLOVÁK, J. Natural Operations in Differential Geometry, Springer-Verlag: 1983.

KOLÁŘ, I. Úvod do globální analýzy. Brno: 2003.

KARGER, A., KARGEROVÁ, M. Základy robotiky a prostorové kinematiky. ČVUT. 2008.

VACHÁLEK, J., TAKÁCS, G. Robotika. STU. 2014

KELEMEN, M., PRADA, E., LIPTÁK, T. et al. Embedded Systems via Using Microcontroller. In Applied Mechanics and Materials, vol. 816(2015), 248-254.

LIPTÁK, T., GMITERKO, A., PRADA, E. et al. Theoretical Basics of Geometric Mechanics and Differential Geometry. In: American Journal of Mechanical Engineering, Vol. 2014, no. 2(7)(2014), p. 178-183, 2013 /2328-4110.

EPSTEIN, M. ELZANOWSKI, M. Material Inhomogenities and their Evolution, a Geometrical Approach. Berlin: 2007.

Termín odevzdání diplomové práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2021/22

V Brně, dne

L. S.

doc. Mgr. Petr Vašík, Ph.D.
ředitel ústavu

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.
děkan fakulty

Abstrakt

Práce se zabývá Lieovou teorií z hlediska kinematiky a robotiky. V úvodní části je vybudován pojem variety jako základní pojem konfiguračního prostoru. Na konfiguračním prostoru je potom zavedena struktura, tj. Lieova grupa. K reprezentaci rychlostí je dále zaveden tečný prostor s vektorovým polem a na něm struktura Lieovy algebry. Tyto dvě struktury jsou propojeny exponenciálním zobrazením. Závěr práce se věnuje fibrovanému prostoru, zejména hlavnímu bandlu a hlavní konexi. V celé práci se objevují mnohé příklady, které dané pojmy ilustrují.

Summary

This diploma thesis deals with the kinematic and robotic implications of Lie theory. In the introductory section, a manifold is defined as a basic element of configuration space. The main body of the thesis deals with the definition of a structure in the configuration space - Lie group. Tangent space with vector field including a structure of Lie algebra is defined to represent velocity. These two structures are connected using exponential mapping. The conclusion of the thesis focuses on fibre space, especially considering principal bundle and principal connection. Throughout the thesis, numerous examples are presented to illustrate the terms used.

Klíčová slova

Varieta, konfigurační prostor, tuhé těleso, Lieova grupa, tečný prostor, vektorové pole, Lieova algebra, exponenciální zobrazení, fibrovaný prostor, hlavní bandl, hlavní konexe.

Keywords

Manifold, configuration space, rigid body, Lie group, tangent space, vector field, Lie algebra, exponential mapping, fibre bundle, principal bundle, principal connection.

KALENSKÝ, J. *Lieovy grupy z hlediska kinematiky a aplikací v robotice*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2022. 58 s. Vedoucí: doc. RNDr. Jiří Tomáš, Dr.

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci *Lieovy grupy z hlediska kinematiky a aplikací v robotice* vypracoval samostatně pod vedením doc. RNDr. Jiřího Tomáše, Dr. s použitím materiálů uvedených v seznamu literatury.

Bc. Jan Kalenský

Děkuji svému vedoucímu doc. RNDr. Jiřímu Tomášovi, Dr. za vedení práce a trpělivost.
A zejména děkuji své rodině za podporu v celém průběhu studia.

Bc. Jan Kalenský

Obsah

Úvod	12
1 Konfigurace	13
1.1 Konfigurační prostor	13
1.2 Topologický prostor	13
1.3 Varieta	16
1.4 Příklady konfiguračních prostorů	17
2 Lieovy grupy	21
2.1 Příklady Lieových grup	22
2.2 Konfigurace tuhého tělesa	23
3 Vektorové pole	28
3.1 Tečný prostor	28
3.2 Kotečný prostor	29
3.3 Lieova derivace	30
4 Jednokolka	31
5 Exponenciální zobrazení a liftované akce	39
5.1 Lieova algebra Lieovy grupy	39
5.2 Exponenciální zobrazení	40
5.3 Liftované akce	40
5.4 Rychlosti tuhého tělesa	41
5.5 Adjungované operátory	44
5.6 Geodetiky	44
6 Holonomní omezení	46
7 Konfigurační prostor jako hlavní bandl	49
7.1 Fibrovaný prostor	49
7.2 Hlavní bandl	50
7.3 Hlavní konexe	52
7.4 Hadovitý robot	55
Závěr	56
Seznam obrázků	56

Úvod

Teorie Lieových grup v sobě je mocným nástrojem v mnoha oblastech moderní matematiky a fyziky. Spojují v sobě různé matematické koncepty, konkrétně pojem grupy a hladké variety. Ve fyzice nachází uplatnění například v mechanice, teorii pole nebo částicové fyzice. Není proto překvapením, že je skutečně mnoho monografií, které se jimi zabývají. V oblasti matematiky se často jedná o formálně korektní výklad, který ovšem není moc přístupný a v oblasti fyziky se zase vytrácí korektnost. Nehledě na to, že problematika není jen široká, ale také velmi hluboká a pokud je součástí vysokoškolského studia, tak postgraduálního. Tato práce se zabývá aplikací Lieovy teorie v kinematice a robotice. Cílem je předkládat teorii korektně, ale přístupně a vše ilustrovat na příkladech.

V první kapitole začneme motivací v mechanice, čímž si zavedeme konfigurační prostor. Poté si ukážeme, že vhodný způsob, jak ho reprezentovat, je hladká varieta. Poté se vrátíme opět ke konfiguračním prostorům, ukážeme si základní typy a také, jakým způsobem je můžeme skládat.

Ve druhé kapitole si ukážeme, jak vhodným způsobem popisovat tuhé těleso. Z předchozí kapitoly budeme vědět, že ho máme „umístit“ na varietu, ale abychom mohli pracovat s jeho pozicí, musíme na ní zavést nějakou strukturu – Lieovu grupu. Ukážeme si také nějaké konkrétní příklady Lieových grup a jejich fyzikální význam.

Ve třetí kapitole se zaměříme na reprezentaci rychlostí tuhého tělesa. K tomu nám poslouží tečný prostor variety a vektorové pole.

Čtvrtá kapitola celá rozebírá jeden modelový příklad – jednokolku. Jedná se vlastně o zjednodušený model auta. Poslouží nám k zavedení nových pojmů, zejména pak Lieovy algebry a Lieovy závorky. Rozebereme na něm také význam neholonomních omezení a vysvětlíme si, jak tato omezení můžeme „obejít“.

Pátá kapitola propojuje dosud zavedené pojmy a ukazuje, jaký má význam tečný prostor v neutrálním prvku Lieovy grupy, totiž že indukuje strukturu Lieovy algebry, kterou danou grupu můžeme reprezentovat. Reprezentace umožňuje exponenciální zobrazení, které má funkci jakéhosi generátoru. V další části kapitoly si konkrétně ukážeme, jak pracovat s rychlostmi tuhého tělesa – k tomu nám poslouží liftované akce. V závěru kapitoly si ukážeme souvislost s geodetikami.

Šestá kapitola se věnuje modelům jednoduchých robotů, resp. jejich kinematickému popisu. Zatímco ve čtvrté kapitole se rozebírala neholonomní vazba, zde se zaměříme na vazbu holonomní. Ukážeme si také, jakým způsobem je možné skládat složitější systémy.

V závěrečné kapitole se opět vrátíme ke konfiguračnímu prostoru a představíme si komplexnější přístup, jak ho můžeme popsat. K tomu nám poslouží pojem hlavního bandlu. Podobně jako jsme si v páté kapitole ukázali, jak reprezentovat Lieovu grupu, ukážeme si jak reprezentovat hlavní (triviální) bandl. Poté si zavedeme pojem hlavní konexe a její význam. Na konci kapitoly si motivujeme význam teorie fibrovaného prostoru.

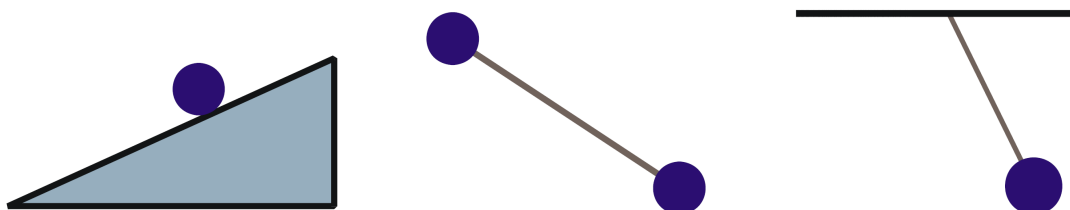
1 Konfigurace

V této kapitole si ukážeme, jak matematicky popsat mechanický systém. Poslouží nám k tomu pojem variety. Čerpáno je zejména ze zdrojů [5], [6] [7], [9], [12] a [18].

1.1 Konfigurační prostor

Mechanický systém je jakákoli soustava částic nebo těles, které se rozhodneme popisovat. Pohyb takového systému, např. vzdálenosti, úhly nebo plochy, popisujeme parametry, kterým říkáme *zobecněné souřadnice*. Označujeme je $q = (q_1, q_2, \dots)$. Časové změny zobecněných souřadnic, $v = \dot{q}$, nazýváme *zobecněné rychlosti*. Jedná se například o radiální rychlost, úhlovou rychlost, plošnou rychlost či x -ovou složku rychlosti. Těleso nebo některé jeho části se nemusí pohybovat zcela libovolně. Pak říkáme, že v systému jsou *vazby*. Příkladem je těleso na nakloněné rovině, dvě tělesa spojená tyčí nebo kyvadlo. Počet nezávislých parametrů, kterými lze zcela popsat pohyb systému nazýváme *stupeň volnosti* a značíme jej f . Například v třírozměrném prostoru pro volný hmotný bod platí $f = 3$, pro N volných bodů $f = 3N$. Hmotný bod na nakloněné rovině má stupeň volnosti $f = 2$, dva hmotné body spojené tyčí $f = 5$, rovinné kyvadlo $f = 1$ a prostorové kyvadlo $f = 2$, viz Obr. 1.1. Pro systém N hmotných bodů s R vazbami v třírozměrném prostoru platí $f = 3N - R$. Zobecněné souřadnice volíme vždy jako množinu nezávislých parametrů, které zcela popisují systém – je jich právě f , a tak $q = (q_1, \dots, q_f)$.

(a) Těleso na nakloněné rovině. (b) Dvě tělesa spojená tyčí. (c) Kyvadlo.



Obrázek 1.1: Různé vazby mechanického systému. [11]

Prostor o dimenzi f , do kterého zobrazujeme hodnoty zobecněných souřadnic, nazýváme *konfiguračním prostorem*, značíme \mathcal{Q} . Bodu konfiguračního prostoru $q = (q_1, \dots, q_f)$ říkáme *konfigurace*. Časový vývoj konfigurace systému $q(t)$ nazýváme *trajektorie*. Stav systému je v daném čase t_0 zcela určen konfigurací $q = (q_1, \dots, q_f)$ a zobecněnými rychlostmi (neboli *tendencí*) $v = (v_1, \dots, v_f)$.

Konfigurační prostory mnoha systémů jsou tzv. *variety*. Zhruba řečeno varieta je topologický prostor, který lokálně vypadá jako euklidovský prostor \mathbb{R}^n , přičemž přerovy mezi těmito lokálními obrazy jsou dostatečně hladké. Uvedme nejprve definici topologického prostoru a několika základních pojmů.

1.2 Topologický prostor

Definice 1.1. Nechť X je neprázdná množina a τ je systém podmnožin potenční množiny $\mathcal{P}(X)$ splňující vlastnosti

1.2. TOPOLOGICKÝ PROSTOR

- (i) prázdná množina i množina X leží v τ ,
- (ii) průnik konečně mnoha podmnožin z τ leží opět v τ ,
- (iii) sjednocení libovolně mnoha (i nekonečně mnoha) podmnožin z τ leží opět v τ .

Potom se τ nazývá *topologie* na X , dvojici (X, τ) říkáme *topologický prostor* a prvek z τ nazýváme *otevřenou množinou*.

Definice 1.2. Nechť (X, τ) je topologický prostor a $x \in X$. Libovolnou otevřenou množinou, tedy podmnožinou z τ , která obsahuje x , nazveme *okolím* bodu x . Značíme H_x .

Poznámka 1.3. Všimněme si, že jsme definovali okolí bodu, aniž bychom na našem prostoru měli pojem vzdálenosti (metriky). Okolí nám umožní pracovat se zobrazeními mezi prostory.

Definice 1.4. Nechť (X, τ) je topologický prostor. Systém $\beta \subset \tau$ splňující vlastnost

$$(\forall A \in \tau)(\exists \gamma \in \beta)(A = \cup \gamma)$$

nazveme *bází* topologického prostoru (X, τ) .

Poznámka 1.5. Báze určuje topologický prostor jednoznačně, ale topologický prostor může mít více bází.

Definice 1.6. Řekneme, že topologický prostor (X, τ) je *Hausdorffův*, jestliže k libovolné dvojici různých bodů $x, y \in X$ existují okolí H_x a H_y , která jsou disjunktní.

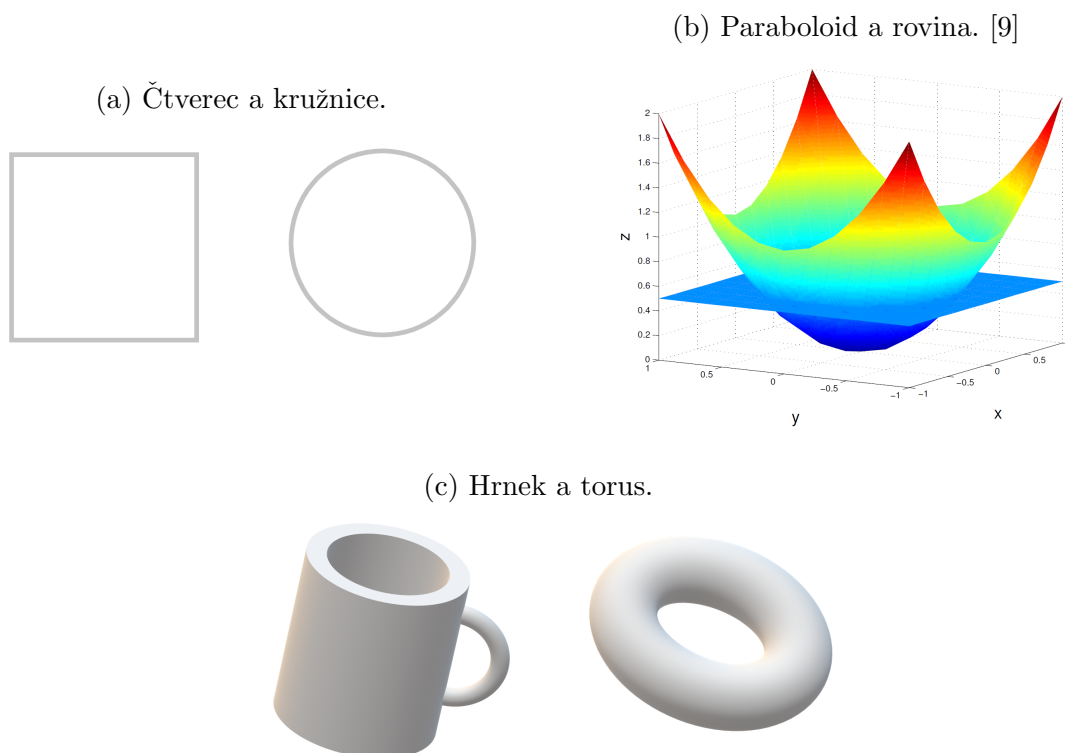
Poznámka 1.7. V definici Hausdorffova prostoru figuruje jeden z tzv. axiomů oddělitelnosti. Existují topologické prostory, které nejsou Hausdorffovy. Příkladem je topologický prostor (X, τ) , který obsahuje alespoň dva prvky, tedy $|X| \geq 2$, přičemž $\tau = \{\emptyset, X\}$. Pro každé $x \in X$ totiž platí, že $H_x = X$, tudíž neexistují okolí různá, natož disjunktní.

Definice 1.8. Nechť (X, τ_x) a (Y, τ_y) jsou topologické prostory, f je zobrazení z X do Y a nechť $x \in X$. Řekneme, že zobrazení f je *spojité v bodě* x , jestliže ke každému okolí $H_{f(x)}$ existuje okolí H_x takové, že $f(H_x)$ je podmnožinou $H_{f(x)}$. Řekneme, že zobrazení f je *spojité*, jestliže je spojité v každém bodu $x \in X$.

Poznámka 1.9. Spojitost není vlastnost jen zobrazení samotného, ale závisí i na příslušných topologiích, protože obě okolí jsou otevřenými množinami ve své příslušné topologii.

Definice 1.10. Zobrazení f z (X, τ_x) do (Y, τ_y) nazýváme *homeomorfismus*, jestliže f je bijekce X na Y a zobrazení f i f^{-1} jsou spojitá. Množiny X, Y , mezi kterými je homeomorfismus nazýváme *homeomorfní* (nebo též *topologicky ekvivalentní*).

Příklady homeomorfních množin ukazuje Obr. 1.2. Kružnice je homeomorfní se čtvercem. Povrch paraboloidu je homeomorfní s rovinou. Další příkladem je torus, který je topologicky ekvivalentní s hrnkem. Ve všech případech se totiž jedná o spojitě transformace jako je „natahování“ a „ohýbání“.



Obrázek 1.2: Příklady topologicky ekvivalentních objektů.

Na druhou stranu množiny jsou topologicky různé, jestliže transformace spojitě nejsou, jako je „řezání“ či „lepení“. Například torus není topologicky ekvivalentní s rovinou, jelikož ať budeme torus jakkoli natahovat a deformovat, vždy bude mít v sobě díru. Podobně ani v rovině otvor povolenými transformacemi nezískáme. Kruh zase není homeomorfní s přímkou, protože kruh je kompaktní množina (uzavřená a ohraničená), zatímco přímka kompaktní není. Oba příklady jsou na Obr. 1.3.



Obrázek 1.3: Příklady objektů, které nejsou topologicky ekvivalentní.

Definice 1.11. Nechtě $U, V \subset \mathbb{R}^n$ jsou otevřené množiny. Bijektivní zobrazení $f : U \rightarrow V$ nazýváme *difeomorfismus třídy C^r* , jestliže f i inverzní zobrazení $f^{-1} : V \rightarrow U$ jsou třídy C^r , $r \geq 1$.

Poznámka 1.12. Funkce třídy C^r (nebo též r -krát diferencovatelné) mají spojitě parciální derivace až do řádu r včetně ve všech bodech, ve kterých jsou definované. Funkce třídy C^0 jsou funkce spojitě a funkce třídy C^∞ , které mají spojitě parciální derivace všech řádů, nazýváme hladké.

Poznámka 1.13. Homeomorfismus je v podstatě difeomorfismus třídy C^0 . Tento případ jsme však z definice vyloučili. Difeomorfismus je přísnější než homeomorfismus.

1.3. VARIETA



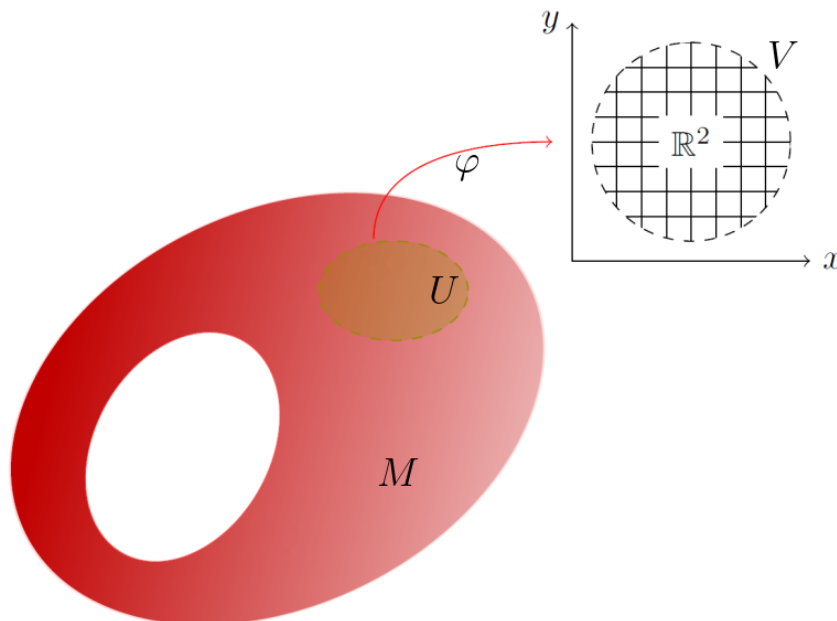
Obrázek 1.4: Čtverec není difeomorfní s kružnicí, ale čtverec se zaoblenými rohy již ano.

Nyní již můžeme přistoupit k definici variety. Nejprve definujeme varietu topologickou a potom varietu diferencovatelnou.

1.3 Varieta

Definice 1.14. *Topologická varieta* dimenze n je Hausdorffův prostor (M, τ) se spočetnou bází, který je lokálně homeomorfní s \mathbb{R}^n , tedy ke každému $x \in M$ existuje jeho okolí U , $V \subset \mathbb{R}^n$ a homeomorfismus $\varphi : U \rightarrow V$. Zobrazení φ nazýváme *souřadnicové* a dvojici (U, φ) říkáme *lokální mapa* (stručně jen *mapa*). Souřadnice bodu $\varphi(a)$, $a \in U$, nazýváme *souřadnicemi* bodu a v mapě φ .

Poznámka 1.15. Topologická varieta vypadá lokálně jako Euklidovský prostor, jak ilustruje Obr. 1.5. Plocha M vypadá velmi zblízka jako rovina \mathbb{R}^2 .



Obrázek 1.5: Dvourozměrná topologická varieta M .

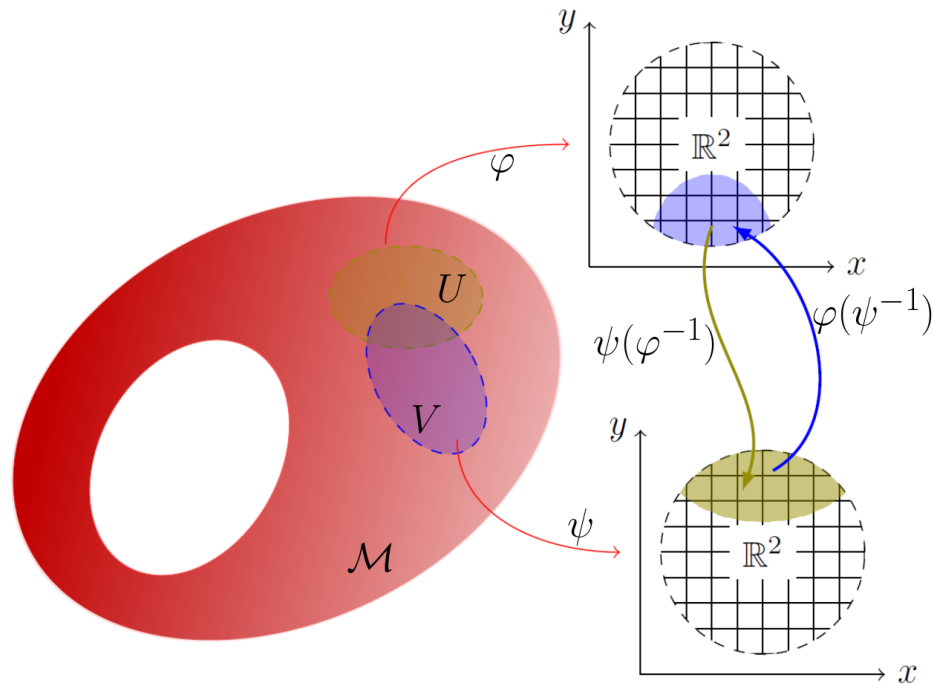
Definice 1.16. Uvažujme dvě různé mapy (U, φ) a (V, ψ) a bod $x \in U \cap V$. Složené zobrazení $\psi(\varphi^{-1}) : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ nazýváme *přechodové*. Jedná se zřejmě o homeomorfismus.

Definice 1.17. *Diferencovatelná varieta třídy C^r* je topologická varieta M splňující

- (i) existují soubory map souřadnic, které pokrývají celé M . Takový soubor nazýváme *atlasem*,

(ii) každé přechodové zobrazení v daném atlase je funkcí třídy C^r .

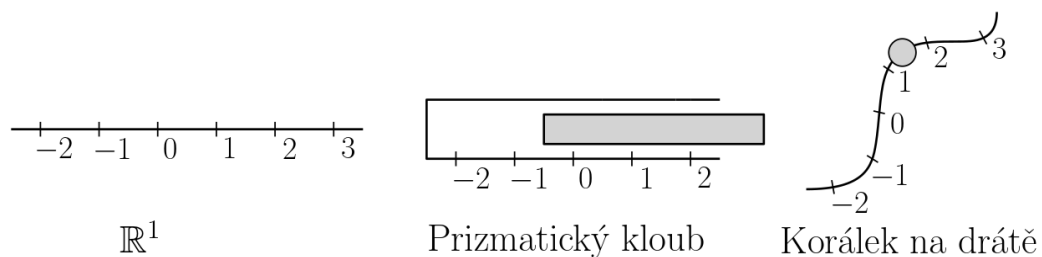
Poznámka 1.18. Podmínka (ii) vyjadřuje, že přechodové zobrazení pro všechny mapy atlasu a všechny jejich přeryvy musí být dostatečně hladké. Situaci znázorňuje Obr. 1.6 Diferencovatelnou varietu třídy C^∞ nazýváme *hladkou*.



Obrázek 1.6: Dvourozměrná diferencovatelná varieta \mathcal{M} .

1.4 Příklady konfiguračních prostorů

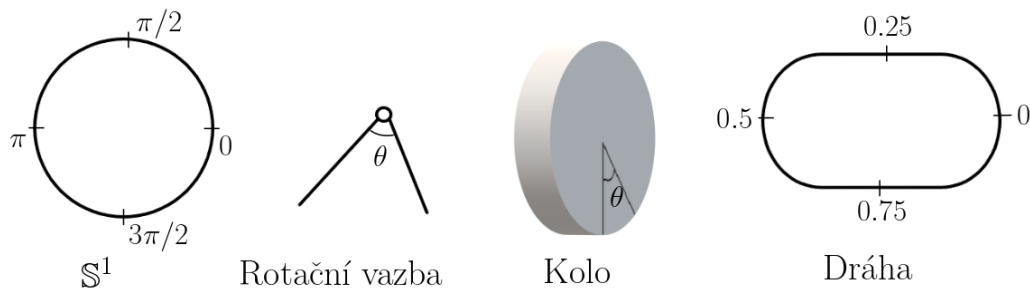
Vraťme se zpět ke konfiguračním prostorům. Ne všechny konfigurační prostory jsou variety. My se však budeme zabývat pouze těmi, které varietami jsou, a to hladkými. Konfigurační prostory mnoha systémů lze sestavit ze tří základních objektů: přímky, kruhu a sféry. Samotná přímka, značíme \mathbb{R}^1 , protože je geometrickou interpretací množiny reálných čísel, slouží jako konfigurační prostor jednoduchých jednorozměrných systémů, viz Obr. 1.7. Může se jednat o systémy z fyzikální podstaty lineární, jako je prizmatický kloub (neumožňuje otáčivý pohyb, ale posun ve směru jedné z os), nebo o nelineární – např. pohyb korálku navlečeného na ohnutém drátu. Stejně je, že konfiguraci systému plně popisuje jedno reálné číslo. V případě prizmatického kloubu se jedná o jeho výchylku, v případě korálku o jeho vzdálenost podél drátu od referenčního bodu.



Obrázek 1.7: Přímka \mathbb{R}^1 a příklady systémů, které reprezentuje.

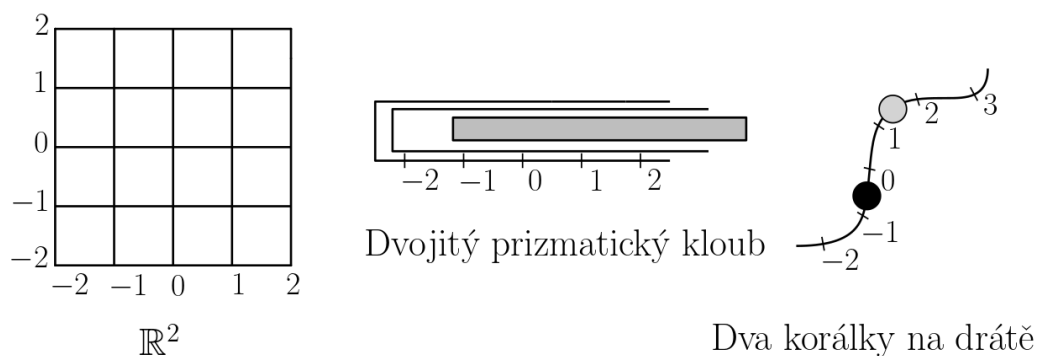
1.4. PŘÍKLADY KONFIGURAČNÍCH PROSTORŮ

Druhým základním konfiguračním objektem je kružnice \mathbb{S}^1 , viz Obr. 1.8. Kružnice reprezentuje cyklické pohyby rotačních systémů, jejichž hodnoty, které se liší o periodu 2π jsou ekvivalentní. Příkladem takové konfigurace je kolo, nebo rotační kloub bez omezení. Stěžejním společným prvkem těchto systémů je cykličnost, ne rotační povaha pohybu. Pokud by kloub nebyl schopen plné rotace, jeho konfiguračním prostorem by bylo \mathbb{R}^1 , ne \mathbb{S}^1 . Ve stejném duchu pohyb po uzavřené dráze reprezentuje \mathbb{S}^1 i v případě, že dráha není kruhová.



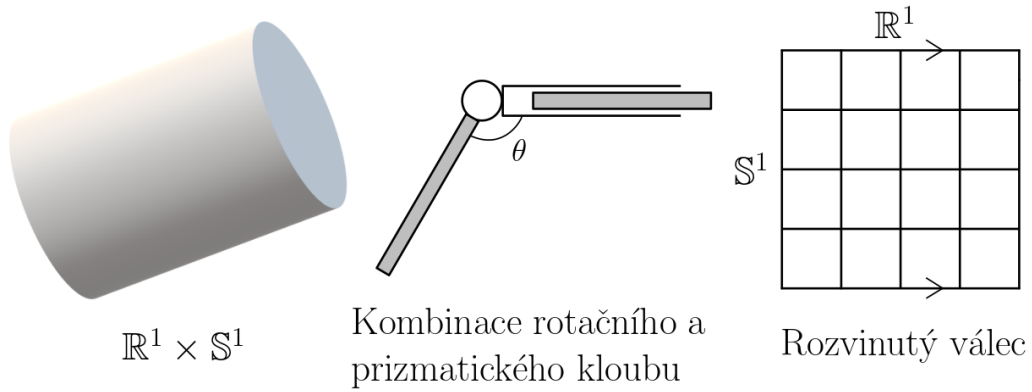
Obrázek 1.8: Kružnice \mathbb{S}^1 a příklady systémů, které reprezentuje. Parametrizace bývá obvykle 0 až 2π radiánů, nebo 0 až 1 oběhů.

Kombinací přímky a kružnice získáváme konfigurační prostory složitějších systémů. Nejjednodušším z nich je rovina \mathbb{R}^2 , kterou získáme kartézským (přímým) součinem dvou přímek: $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1$, viz Obr. 1.9. Vidíme, že reprezentuje systémy, které jsme schopni plně popsat dvěma reálnými parametry. Jedná se např. o robota pohybujícího se v rovině nebo na jiném dvourozměrném povrchu, o dva korálky na zahnutém drátu, nebo o sérii dvou prizmatických kloubů.



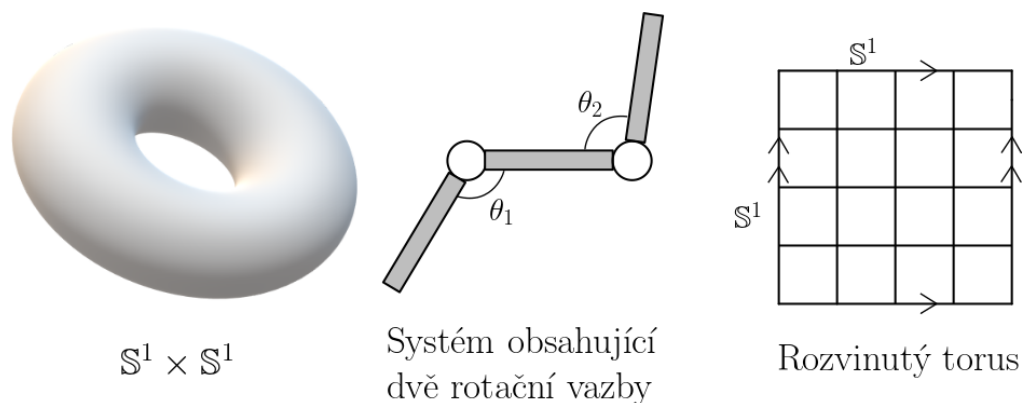
Obrázek 1.9: Rovina \mathbb{R}^2 a příklady systémů, které reprezentuje.

Kartézským součinem přímky a kružnice dostaneme válec $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{S}^1$. Tento prostor může reprezentovat pohyb po povrchu doslovného válce, nebo třeba kombinaci prizmatického kloubu s rotačním. Pro zjednodušení se válec často zobrazuje „rozvinutý“ do roviny, jak se to znázorněno Obr. 1.10, kde symbol „>“ ukazuje, které hrany jsou spojené dohromady.



Obrázek 1.10: Válec $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{S}^1$, příklad systému, který reprezentuje, a jeho rovinná reprezentace.

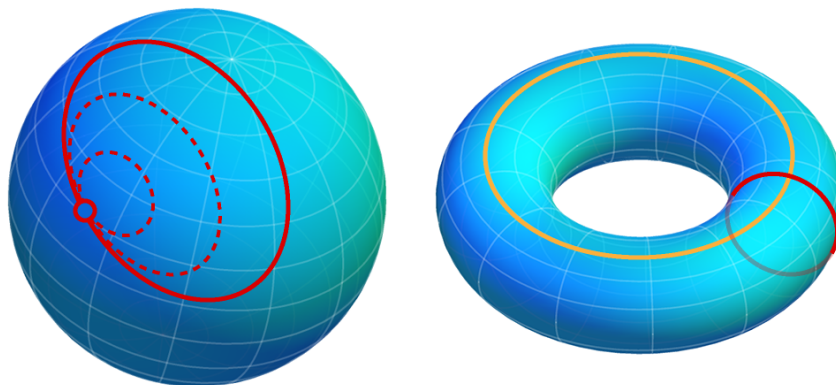
Součinem dvou kružnic získáme torus (neboli anuloid) $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. Torus reprezentuje systémy se dvěma nezávislými cyklickými parametry, jako je např. dvojice rotačních kloubů (bez omezení). Podobně jako v případě válce i zde je zvykem torus „rozvinout“ do roviny, jak je vidět na Obr. 1.11. Hrany, které jsou ve skutečnosti spojené jsou označeny stejným symbolem „>“, resp. „>>“.



Obrázek 1.11: Torus $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, příklad systému, který reprezentuje, a jeho rovinná reprezentace.

Tím se dostáváme ke třetí základní konfiguraci – sféře \mathbb{S}^2 . Podobně jako u anuloidu se jedná o rozšíření kružnice do vyšší dimenze, nicméně namísto množiny kružnic okolo jiné kružnice, sféra je množina bodů, která je od společného bodu (středu) stejně vzdálená. Odtud pak plynou zásadní rozdíly mezi oběma prostory. Jedná se zejména o fakt, že jakoukoli smyčku na sféře jsme schopni hladce zdeformovat v jinou smyčku nebo ji zúžit do bodu. Naproti tomu v případě anuloidu existují dvě různé smyčky, které nejde zdeformovat do sebe navzájem, přičemž ne všechny smyčky lze zužovat do bodu, viz Obr. 1.12. Druhým velkým rozdílem je, že torus je možné obecně hladce parametrizovat, zatímco sféra má singulární body, kterým odpovídají póly na Obr. 1.12. Existuje totiž více párů hodnot (zeměpisné) délky a šířky, které jednotlivé póly určují.

1.4. PŘÍKLADY KONFIGURAČNÍCH PROSTORŮ



Obrázek 1.12: Torus \mathbb{T}^2 má dvě nezávislé, „nepřechodné“ smyčky, což je rozdíl oproti sféře \mathbb{S}^2 , kde jsme schopni smyčku zdeformovat v jinou, nebo ji zúžit do bodu. [27]

Konfigurační prostory systémů s více než dvěma stupni volnosti můžeme konstruovat analogicky. Většinou jsou postačující tři základní objekty, které jsme uvedli. Někdy je třeba uvažovat i jiné struktury (např. hypersféry).

2 Lieovy grupy

V mnoha případech je na konfiguračních prostorech užitečné provádět algebraické operace jako se sčítání a odčítání. Chceme například znát absolutní konfiguraci objektu, jehož pozice je určena pouze relativně vzhledem k objektu jinému, tedy potřebujeme jejich „součet“. Nebo je naším cílem určit relativní konfiguraci dvou objektů, jejichž pozici známe absolutně, a chceme určit jejich „rozdíl“. Nutnost provedení takovýchto operací vyžaduje interpretaci konfigurací nejen jako bodů v konfiguračním prostoru, ale také jako transformací, které můžeme použít v ostatních konfiguracích. Této duální interpretaci odpovídá matematický aparát *Lieových grup*. Nejprve uvedeme základní definice a pak vše budeme ilustrovat na příkladech. Čerpáno je především ze zdrojů [2], [3], [4], [18] a [19].

Definice 2.1. *Lieova grupa* je hladká varieta G , která tvoří grupu s operací násobení $\mu : G \times G \rightarrow G$, které je hladké.

Poznámka 2.2. Budeme užívat následujícího značení:

$$\begin{aligned} \text{násobení } \mu : G \times G &\rightarrow G, \mu(x, y) = x \cdot y, \\ \text{levá translace } \lambda_a : G &\rightarrow G, \lambda_a(x) = a \cdot x, \\ \text{pravá translace } \rho_a : G &\rightarrow G, \rho_a(x) = x \cdot a, \\ \text{inverze } \nu : G &\rightarrow G, \nu(x) = x^{-1}, \\ \text{neutrální prvek } e &\in G. \end{aligned}$$

Poznámka 2.3. V literatuře se někdy v definici požaduje i hladkost inverzního zobrazení ν . Tato vlastnost ale plyne již z hladkosti násobení.

Definice 2.4. Nechť G je Lieova grupa na varietě \mathcal{M} . Nechť dále $g, h \in G$ a $x \in \mathcal{M}$ jsou libovolná. *Levá akce* grupy G na \mathcal{M} je hladké zobrazení $\ell : G \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$, kde $\ell(g, x) = \ell_g(x)$, platí-li

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \ell_g \circ \ell_h &= \ell_{gh}, \\ \text{(ii)} \quad \ell_e(x) &= x. \end{aligned}$$

Hladké zobrazení $r : \mathcal{M} \times G \rightarrow \mathcal{M}$, kde $r(x, g) = r^g(x)$, nazveme *pravá akce* G na \mathcal{M} , platí-li

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad r^g \circ r^h &= r^{hg}, \\ \text{(ii)} \quad r^e(x) &= x. \end{aligned}$$

Také říkáme, že grupa G *působí* na \mathcal{M} zleva (resp. zprava).

Poznámka 2.5. Levou a pravou akci má význam uvažovat v případě, že příslušná operace není komutativní. Obecně můžeme levou akci $\ell_g(x)$ chápat jako posunutí prvku x o g , zatímco v případě pravé akce $r^g(x)$ se jedná o nalezení prvku g relativně vzhledem k x .

Definice 2.6. Nechť H, K jsou Lieovy grupy a nechť zobrazení $\ell : H \times K \rightarrow K$ je levá akce H na K taková, že $\ell_h : K \rightarrow K$ je grupový homomorfismus. Na $K \times H$ zavedeme násobení

$$(k, h)(k', h') := (k\ell_h(k'), hh').$$

2.1. PŘÍKLADY LIEOVÝCH GRUP

Tato operace definuje Lieovu grupu $G = K \rtimes_{\ell} H$, kterou nazýváme *polopřímým součinem* H a K vzhledem k ℓ , (stručně jen $G = K \rtimes H$). Podobně i pravá akce H na K , kde $r : K \times H \rightarrow K$ taková, že $r^h : K \rightarrow K$ je grupový homomorfismus, určuje polopřímý součin $G = K \rtimes_r H$ vzhledem k r , (stručně $G = K \rtimes H$). Násobení na $H \times K$ je dáno vztahem

$$(h, k)(\bar{h}, \bar{k}) := (h\bar{h}, r^{\bar{h}}(k)\bar{k}).$$

Poznámka 2.7. Všimněme si rozdílu mezi přímým (kartézským) součinem a polopřímým součinem. U kartézského součinu působí prvky jednotlivých grup jen mezi sebou navzájem, tj. pro $G = K \times H$ platí $(k, h)(k^*, h^*) := (kk^*, hh^*)$. U polopřímého součinu naproti tomu působí prvky jedné grupy i na prvky té druhé.

2.1 Příklady Lieových grup

V případě našich základních objektů jsou nejběžnějšími grupovými operacemi sčítání na přímce, které tvoří Lieovu grupu $(\mathbb{R}^1, +)$, a modulární sčítání na kružnici formující grupu $(\mathbb{S}^1, + \bmod k)$, kde k je délka cyklu v parametrizaci kružnice. Vlastnosti grupy korespondují s intuitivním chápáním toho, jak by sčítání na těchto prostorech mělo fungovat. Konfigurace reprezentuje translaci podél daného prostoru a je přirozené, že kombinací dvou takových konfigurací dostaneme sumu jejich posunutí. Kartézským součinem přímky a kružnice vytvoříme strukturu, s klasickým a modulárním sčítáním, které jsou operují nezávisle na sobě podél „svého“ stupně volnosti. Důležitým příkladem jsou maticové grupy.

Definice 2.8. *Obecná lineární grupa* nad tělesem reálných čísel, značíme $\mathbf{GL}(n; \mathbb{R})$, je grupa tvořená všemi regulárními maticemi n -tého řádu s reálnými prvky. Operací je násobení matic.

Definice 2.9. Uzavřenou podgrupu G z $\mathbf{GL}(n; \mathbb{C})$ nazveme *maticovou Lieovou grupou*.

V této práci se zaměříme zejména na dvě maticové Lieovy grupy – ortogonální a euklidovskou. Uveďme nejprve první jmenovanou.

Definice 2.10. *Ortogonální grupa* je podgrupou obecné lineární grupy $\mathbf{GL}(n; \mathbb{R})$, a to takovou, jejíž prvky jsou *ortogonální*. Značíme ji $\mathbf{O}(n)$.

Poznámka 2.11. Reálná matice A , n -tého řádu, je ortogonální, jestliže její sloupcové (resp. řádkové) vektory jsou ortonormální, tj. platí

$$\sum_{l=1}^n A_{lj}A_{lk} = \delta_{jk},$$

neboli

$$A^T A = I,$$

kde I jednotková matice.

Definice 2.12. *Speciální ortogonální grupa* $\mathbf{SO}(n)$ je podgrupou $\mathbf{O}(n)$, která se skládá z matic o hodnotě determinantu jedna.

Poznámka 2.13. Prvky $\mathbf{SO}(n)$ jsou z geometrického hlediska rotace – jedná se o tzv. *přímé* shodnosti, zatímco prvky $\mathbf{O}(n)$ představují kombinaci rotace a zrcadlení. Pokud je determinant matice roven mínus jedna, hovoříme o *nepřímých* shodnostech. Takové shodnosti netvoří grupu, protože složením dvou nepřímých shodností získáme přímou shodnost.

V některých případech je možnost vybírat z více grupových struktur. Například kružnice $(\mathbb{S}^1, + \text{ mod } k)$ je úzce spojena s Lieovou grupou $\mathbf{SO}(2)$. Ve dvourozměrném případě má matice tvar

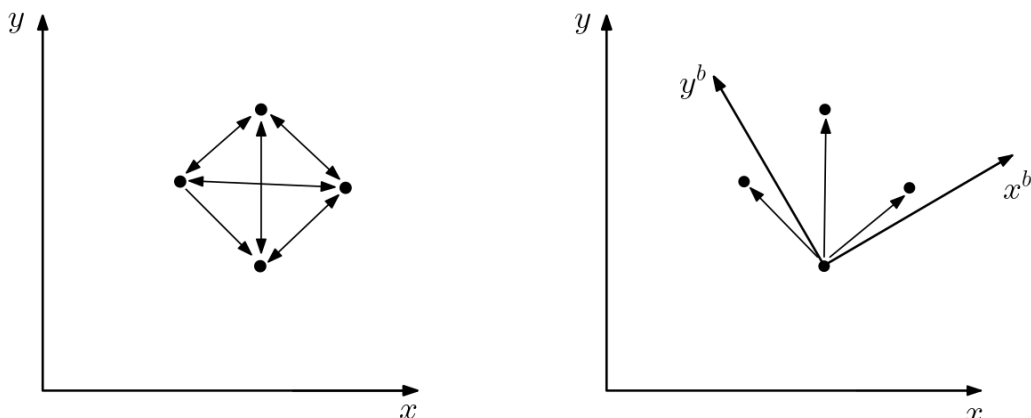
$$R = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \in \mathbf{SO}(2),$$

kde θ je úhel otočení. Tyto matice jsou hladké, cyklické, jedinečné vzhledem k θ , a tedy z podstaty odpovídají bodům na kružnici \mathbb{S}^1 , (tyto prostory jsou difeomorfní). Akce těchto Lieových grup jsou také kompatibilní: součin dvou prvků z $\mathbf{SO}(2)$ je ekvivalentní modulárnímu součtu odpovídajících prvků \mathbb{S}^1 . To znamená, že \mathbb{S}^1 a $\mathbf{SO}(2)$ jsou izomorfní, což obecně pro grupy, které mají stejnou strukturu variety, neplatí.

Podobně jako můžeme kružnici pomocí kartézského součinu zobecňovat do vyšších dimenzí jako torus nebo sféru, lze dělat kartézský součin grup typu $(\mathbb{S}^1, + \text{ mod } k)$. Výsledkem pak jsou toroidní Lieovy grupy. Rozšířením $\mathbf{SO}(2)$ získáme rotace napříč vyššími dimenzemi. Nicméně přímá spojitost mezi \mathbb{S}^{n-1} a $\mathbf{SO}(n)$ není. Například \mathbb{S}^2 neumožňuje strukturu Lieovy grupy vůbec a $\mathbf{SO}(3)$ odpovídá množině orientovaných poloh na sféře.

2.2 Konfigurace tuhého tělesa

Tuhé těleso je idealizovaný objekt, který se působením vnějších sil nedeformuje. Matematicky lze popsat jako množinu bodů, které mezi sebou mají fixní vzdálenost a která je relativně orientovaná. Vhodnějším popisem je, když určíme pohyblivou vztažný repér, tuhým tělesem chápeme množinu bodů, jejichž pozice je fixní vzhledem k danému tělesovému repéru, viz Obr. 2.1. Výhoda druhého přístupu je zřejmá. Konfigurace tělesové soustavy (pozice a orientace) plně určuje umístění všech bodů tělesa a oba konfigurační prostory jsou tedy ekvivalentní (tělesa a jeho tělesové soustavy).



Obrázek 2.1: Tuhé těleso můžeme definovat jako množinu bodů, jejichž vzájemná vzdálenost je pevná (vlevo) nebo vhodněji jako množinu bodů, které mají pevnou vzdálenost vzhledem k pohyblivé tělesové soustavě (vpravo).

2.2. KONFIGURACE TUHÉHO TĚLESA

Při modelování tuhého tělesa můžeme zvolit různou tělesovou soustavu, podle toho, jakým způsobem systém parametrizujeme. Tělesovou soustavu můžeme například umístit do středu tělesa, na jeho kraj, či mimo samotné těleso. Jakmile zvolíme tělesovou soustavu, nastává volba vhodného konfiguračního prostoru a Lieovy grupy, která by konfiguraci nejvhodněji popsala.

Uvažujme těleso pohybující se v rovině. Tělesový repér je určený dvěma souřadnicemi a jedinou orientační složkou. Bylo by přirozené vzít tyto parametry naprosto nezávisle a uvažovat konfigurační grupu $(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1, +)$. Ukážeme si ale, že je mnohem výhodnější v takovém případě volit dvourozměrnou speciální Euklidovskou grupu $\mathbf{SE}(2)$. $\mathbf{SE}(2)$ totiž lépe vystihuje relativní pohyb tuhého tělesa, protože využívá symetrií. Grupa $\mathbf{SE}(n)$ také lépe zobecňuje pohyb ve vyšších dimenzích. Pojďme si ji zavést.

Definice 2.14. *Euklidovská grupa $\mathbf{E}(n)$* je grupa všech transformací v \mathbb{R}^n , které se dají vyjádřit jako složení posunutí a ortogonální lineární transformace (kombinace rotace a zrcadlení). Prvky $\mathbf{E}(n)$ můžeme zapsat jako dvojici $\{x, R\}$, kde $x \in \mathbb{R}^n$ a $R \in \mathbf{O}(n)$ a definujeme operaci

$$\{x, R\}y = Ry + x.$$

Jelikož platí

$$\{x_1, R_1\}\{x_2, R_2\}y = R_1(R_2y + x_2) + x_1 = R_1R_2y + (x_1 + R_1x_2),$$

operace násobení pro $\mathbf{E}(n)$ je následující:

$$\{x_1, R_1\}\{x_2, R_2\} = \{x_1 + R_1x_2, R_1R_2\}. \quad (2.1)$$

Inverzním prvkem $\mathbf{E}(n)$ je $\{x, R\}^{-1} = \{-R^{-1}x, R^{-1}\}$ a prvkem neutrálním $\{0, I\}$, kde I je jednotková matice řádu n .

Poznámka 2.15. Grupa $\mathbf{E}(n)$ není podgrupou $\mathbf{GL}(n; \mathbb{R})$, jelikož posunutí není lineární zobrazení. Nicméně je $\mathbf{E}(n)$ izomorfní s uzavřenou podgrupou $\mathbf{GL}(n+1; \mathbb{R})$, která se skládá z matic typu

$$\begin{pmatrix} R & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

kde $p = (p_1, \dots, p_n)^T \in \mathbb{R}^n$, 0 je nulový vektor a $R \in \mathbf{O}(n)$.

Definice 2.16. *Speciální euklidovská grupa $\mathbf{SE}(n)$* je podgrupou $\mathbf{E}(n)$, která se skládá z „tuhých“ transformací v \mathbb{R}^n , tzn. sem patří posunutí a otočení, ale ne zrcadlení.

Prvek grupy $g \in \mathbf{SE}(2)$ má parametry (x, y, θ) je obvykle reprezentován maticí typu

$$g = (x, y, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & x \\ \sin \theta & \cos \theta & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matice obsahuje prvek grupy $\mathbf{SO}(2)$, který reprezentuje orientaci a dále prvek \mathbb{R}^2 , který udává pozici. Speciální euklidovská grupa lze zavést jako polopřímý součin $\mathbf{SE}(n) = (\mathbb{R}^n, +) \times_{\ell} \mathbf{SO}(n)$, kde prvky rotace působí na sebe navzájem, včetně translačních, zatímco translační členy působí jen na sebe. Ukažme si to:

$$\mathbf{E}(n) = (\mathbb{R}^n, +) \times_{\ell} \mathbf{SO}(n).$$

Pro $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ a $R_1, R_2 \in \mathbf{SO}(n)$ platí

$$(x_1, R_1)(x_2, R_2) = (x_1 + \ell_{R_1}(x_2), R_1 R_2) = (x_1 + R_1 x_2, R_1 R_2), \quad (2.2)$$

protože levá akce $\ell_{\mathbf{SO}(n)} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ je definovaná jako $\ell_R(x) = Rx$ pro libovolné $x \in \mathbb{R}^n$ a $R \in \mathbf{SO}(n)$. Vidíme, že vztahy (2.1) a (2.2) si odpovídají.

Prvky $\mathbf{SE}(2)$ mají v rovinných systémech čtyři nejběžnější interpretace:

- pozice a orientace tuhých těles,
- pozice a orientace soustav souřadnic,
- akce, při kterých tuhé těleso nebo soustava souřadnic změni polohu relativně vůči pevně dané soustavě souřadnic,
- akce, při kterých najdeme vyjádření bodu z jedné soustavy souřadnic v jiné soustavě souřadnic.

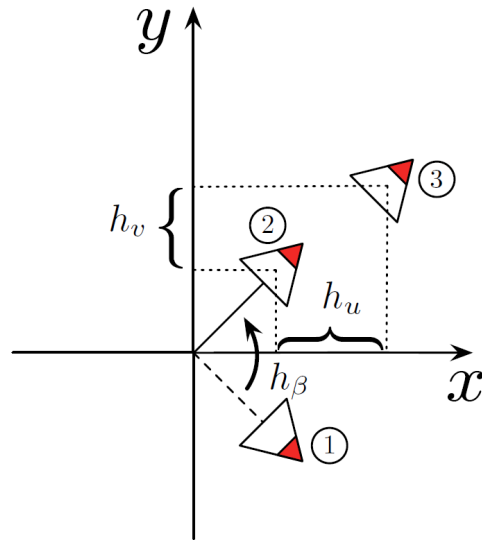
První s druhým případem jsou spolu úzce spojené. Třetí a čtvrtá interpretace souvisí s tím, že $\mathbf{SE}(2)$ není jen prostor, ale Lieova grupa, čímž z každé konfigurace dělá současně akci. Také zdůrazňují rys, který aditivní grupy nemají – jelikož grupa není abelovská, máme zde dvě různé akce. Ukažme si to konkrétně.

Nechť $g, h \in \mathbf{SE}(2)$, kde $g = (x, y, \theta)$, $h = (u, v, \beta)$. Spočítáme levou akci prvku h na prvek g :

$$\begin{aligned} l_h(g) = hg &= (u, v, \beta) \circ (x, y, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta & u \\ \sin \beta & \cos \beta & v \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & x \\ \sin \theta & \cos \theta & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta + \beta) & -\sin(\theta + \beta) & x + u \cos \theta - v \sin \theta \\ \sin(\theta + \beta) & \cos(\theta + \beta) & y + u \sin \theta + v \cos \theta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= (x \cos \beta - y \sin \beta + u, x \sin \beta + y \cos \beta + v, \theta + \beta). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Při úpravě jsme užili součtových vzorců geometrických funkcí. Fyzikálně tato akce odpovídá tomu, že vezmeme tuhé těleso o souřadnicích $g = (x, y, \theta)$ a h jako akci, která působí na g . Nejprve akce otočí těleso okolo počátku o úhel β a poté ho posune o (u, v) . Situaci ilustruje Obr. 2.2. V případě, že poloha g je určena relativně k h , zjistíme tak navíc jeho absolutní polohu vzhledem k počátku.

2.2. KONFIGURACE TUHÉHO TĚLESA

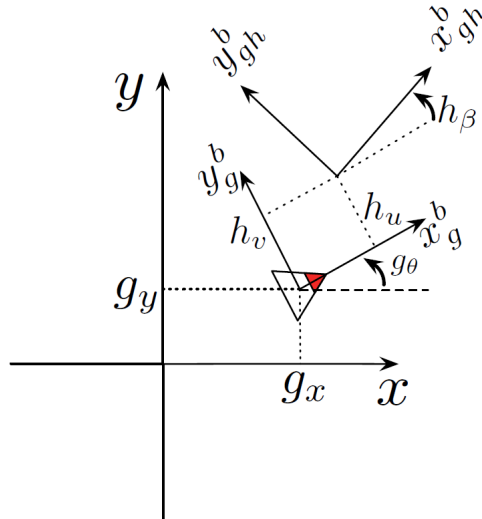


Obrázek 2.2: Interpretace levé akce $l_h(g)$ grupy $\mathbf{SE}(2)$ jako změna pozice, která se skládá z otočení a posunutí. [18]

Nyní určíme pravou akci. Výpočet je analogický:

$$r^h(g) = gh = (x, y, \theta) \circ (u, v, \beta) = (x + u \cos \theta - v \sin \theta, y + u \sin \theta + v \cos \theta, \theta + \beta).$$

Pravá akce odpovídá relativnímu pohybu tělesa z pozice g o hodnoty h , nebo ekvivalentně nalezení světové pozice tělesa v bodě h relativně ke g , jak ukazuje Obr. 2.3.

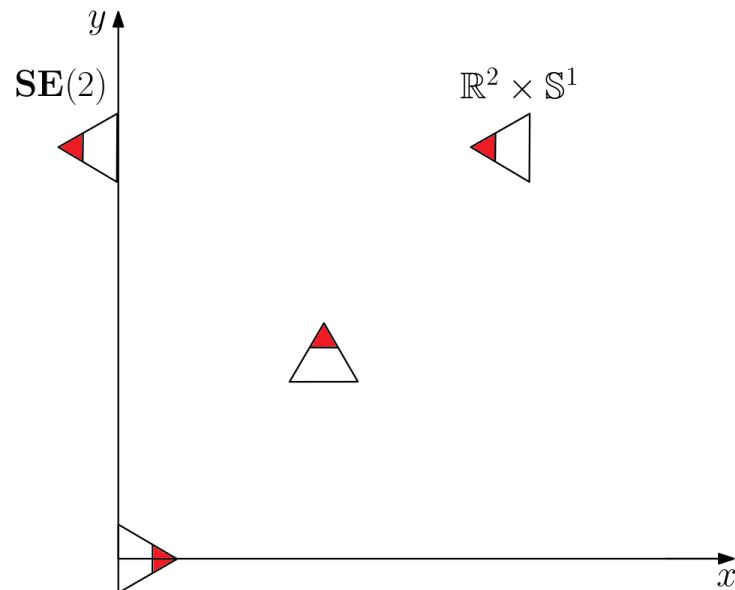


Obrázek 2.3: Pravé akce $r^h(g)$ grupy $\mathbf{SE}(2)$ najde souřadnice tělesového repéru v pozici h relativně ke g . [18]

Pokud $h = g^{-1}$, výsledkem levé i pravé akce je $I = (0, 0, 0)$, což je neutrální prvek grupy $\mathbf{SE}(2)$, který popisuje počátek konfiguračního prostoru.

Vraťme se nyní k porovnání grup $(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1, +)$ a $\mathbf{SE}(2)$. Na první pohled se zdá užitečnější a jednodušší použít grupu $(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1, +)$, kde jednoduše přičítáme posunutí a zvláště měníme orientaci, než dělat obojí dohromady pomocí maticového násobení. Výhoda $\mathbf{SE}(2)$ nicméně tkví v tom, jakým způsobem akce grupy odpovídají relativní pozici. Ukažme si to na příkladu, který ilustruje Obr. 2.4. Tuhé těleso je zobrazeno nejprve v počátku souřadnic, což popisuje neutrální prvek obou grup $e = (0, 0, 0)$, a poté

posunuto o $g = (1, 1, \frac{\pi}{2})$ do $e + g = e \circ g = g$. U obou grup dostaneme stejný výsledek. To však neplatí o dalším posunutí o g . V případě grupy $(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1, +)$ platí $h = g + g = (2, 2, \pi)$, zatímco u grupy $\mathbf{SE}(2)$ vyjde $h = g \circ g = (0, 2, \pi)$.



Obrázek 2.4: Porovnání grupy $(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1, +)$ a $\mathbf{SE}(2)$.

V případě grupy $(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1, +)$ dochází ze světového hlediska ke stejnému pohybu z e do g jako z g do h . Lokálně se však jedná o diametrálně odlišné situace. Z e do g jdeme dopředu a doleva, zatímco z g do h jdeme dopředu a doprava. Grupa $\mathbf{SE}(2)$ bere v potaz relativní pozici tělesa a posune jej stejným způsobem jako v prvním případě, tedy i z g do h jdeme opět dopředu a doleva. Tento lokální způsob pojetí pohybu je hlavní výhodou grupy $\mathbf{SE}(2)$.

3 Vektorové pole

V minulé kapitole jsme definovali na varietách grupy, které reprezentují konfiguraci robota v prostoru, resp. jeho zobecněné souřadnice. V dalších kapitolách si ukážeme, jak reprezentovat rychlost robota, resp. jeho zobecněnou rychlost. Poslouží nám k tomu tečný prostor variety a vektorové pole, která nyní zavedeme. Vycházíme ze zdrojů [3], [5], [9], [12] a [17].

3.1 Tečný prostor

Definice 3.1. *Dráha* na varietě \mathcal{M} je hladké zobrazení $f : I \rightarrow \mathcal{M}$, přičemž $I \subset \mathbb{R}^n$ je otevřený interval.

Poznámka 3.2. Všimněme si, že dráha je samotné zobrazení a ne jeho obor hodnot. V literatuře se také můžeme setkat s označením *křivka* nebo *hladký pohyb*.

Definice 3.3. Nechť \mathcal{M} je hladká varieta dimenze m a $I \subset \mathbb{R}$ je otevřený interval. Uvažujme nějaké lokální souřadnice x^i na \mathcal{M} a souřadná vyjádření $(\gamma^i(t))$ resp. $(\delta^i(t))$ drah γ resp. δ . Řekneme, že dráhy $\gamma, \delta : I \rightarrow \mathcal{M}$ mají *styk řádu r* v bodě $t_0 \in I$, jestliže

$$\frac{d^s(\gamma^i)(t_0)}{dt^s} = \frac{d^s(\delta^i)(t_0)}{dt^s} \quad \text{pro } i = 0, \dots, m, s = 0, 1, \dots, r.$$

Píšeme potom $\gamma \sim_r \delta$.

Poznámka 3.4. Relace \sim_r je zřejmě ekvivalence. Speciálně pro $r = 0$ platí $\gamma(t_0) = \delta(t_0)$, a jedná se o dráhy procházející daným bodem. V případě $r = 1$ se dráhy v daném bodě dotýkají.

Definice 3.5. Nechť \mathcal{M}, \mathcal{N} jsou hladké variety, $I \subset \mathbb{R}$ a $0 \in I$ je otevřený interval. Řekneme, že dvě zobrazení $f, g : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ určují *týž r -jet* v bodě $x \in \mathcal{M}$, jestliže pro každou dráhu $\gamma : I \rightarrow \mathcal{M}$, kde $\gamma(0) = x$, mají dráhy $f \circ \gamma, g \circ \gamma : I \rightarrow \mathcal{N}$ styk r -tého řádu v bodě nula. Potom píšeme $j_x^r f = j_x^r g$ nebo $j^r f(x) = j^r g(x)$. Bod x nazýváme *zdroj* (nebo *počátek*) jetu a hodnotu $f(x)$ *cílem* (nebo *koncem*) jetu.

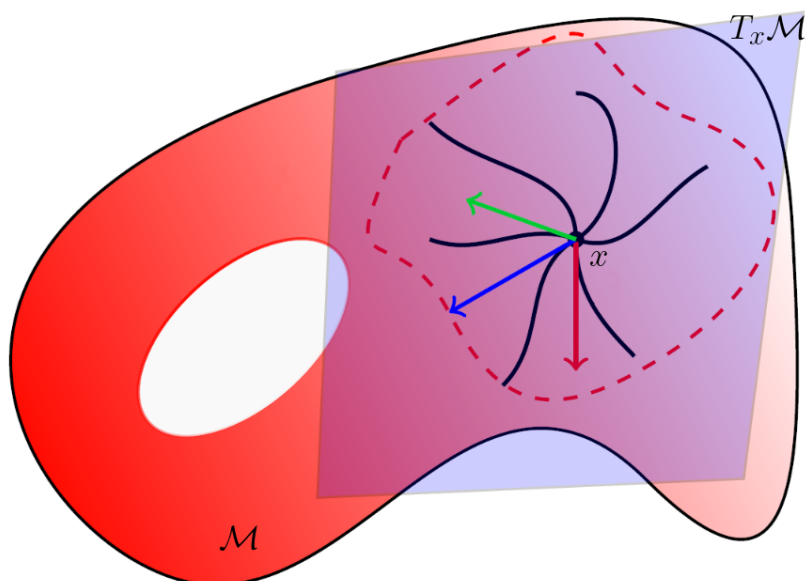
Poznámka 3.6. Opět se jedná o relaci ekvivalence. Množinu všech r -jetů zobrazení $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ značíme $J^r(\mathcal{M}, \mathcal{N})$, případně $J_x^r(\mathcal{M}, \mathcal{N}), J^r(\mathcal{M}, \mathcal{N})_y, J_x^r(\mathcal{M}, \mathcal{N})_y$ chceme-li zdůraznit jejich zdroj, cíl, nebo obojí. Konkrétně 1-jety v bodě x , tj.

Definice 3.7. Nechť \mathcal{M} je hladká varieta. Množinu tečných vektorů všech drah procházejících bodem $x \in \mathcal{M}$ nazveme *tečným prostorem* $T_x\mathcal{M}$ k varietě \mathcal{M} v bodě x , přičemž platí

$$T_x\mathcal{M} := J_0^1(\mathbb{R}, \mathcal{M})_x,$$

tj. jedná se o třídu 1-jetů se zdrojem v nule a cílem $x \in \mathcal{M}$.

Poznámka 3.8. Tečný prostor $T_x\mathcal{M}$ tvoří vektorový prostor, který má stejnou dimenzi jako varieta \mathcal{M} . Situaci ilustruje Obr. 3.1.

Obrázek 3.1: Tečný prostor v bodě x variety \mathcal{M} .

Definice 3.9. *Tečný bandl* $T\mathcal{M}$ je sjednocení tečných prostorů $T_x\mathcal{M}$ v každém bodě x variety \mathcal{M} , tj.

$$T\mathcal{M} := \bigcup_{x \in \mathcal{M}} T_x\mathcal{M}.$$

Jedná se o varietu dimenze $2n$.

Definice 3.10. Hladké zobrazení $f : \mathcal{M} \rightarrow T_x\mathcal{M}$, které každému bodu hladké variety $x \in \mathcal{M}$ přiřazuje tečný vektor v daném bodě $f(x) \in T_x\mathcal{M}$, nazveme *vektorovým polem*. Množinu všech (hladkých) vektorových polí definovaných na varietě \mathcal{M} budeme značit $V(\mathcal{M})$.

3.2 Kotečný prostor

Definice 3.11. Každému vektorovému prostoru V můžeme přiřadit *duální prostor* V^* , tedy prostor lineárních funkcionalů $L : V \rightarrow \mathbb{R}$. Tento prostor je také prostorem vektorovým, přičemž má stejnou dimenzi n jako prostor V . Má-li vektorový prostor bázi $\{e_1, \dots, e_n\}$, můžeme prvky $v \in V$ reprezentovat jako lineární kombinaci $v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n = (x_1 \ \dots \ x_n)^T (e_1 \ \dots \ e_n)$, respektive jako sloupcový vektor $v = (x_1 \ \dots \ x_n)^T$. Bázi má i duální prostor V^* , a to $\{E_1[v], \dots, E_n[v]\}$, přičemž $E_1[v] = x_1, \dots, E_n[v] = x_n$. Každý lineární funkcional poté můžeme zapsat jako lineární kombinaci

$$\begin{aligned} L[v] &= L[(x_1 \ \dots \ x_n)^T (e_1 \ \dots \ e_n)] \\ &= (x_1 \ \dots \ x_n)^T L[(e_1 \ \dots \ e_n)] \\ &= (E_1[v] \ \dots \ E_n[v])^T (L[e_1] \ \dots \ L[e_n]), \end{aligned}$$

a vidíme, že jej můžeme reprezentovat jako řádkový vektor $L[v] = (\alpha_1 \ \dots \ \alpha_n)$, kde $\alpha_1 = L[e_1], \dots, \alpha_n = L[e_n]$. Prvky duálního prostoru V^* nazýváme *kovektory*.

Definice 3.12. Nechť $T_x\mathcal{M}$ je tečný prostor k hladké varietě \mathcal{M} v bodě x . Duální prostor k tomuto vektorovému prostoru nazveme *kotečným prostorem*. Budeme jej značit $T_x^*\mathcal{M}$.

3.3. LIEOVA DERIVACE

Definice 3.13. Kotečný bandl $T^*\mathcal{M}$ je sjednocení kotečných prostorů $T_x^*\mathcal{M}$ v každém bodě x variety \mathcal{M} , tj.

$$T^*\mathcal{M} := \bigcup_{x \in \mathcal{M}} T_x^*\mathcal{M}.$$

Opět se jedná o varietu dimenze $2n$. Každý bod této variety $T^*\mathcal{M}$ představuje konkrétní funkcionál $L \in T_x^*\mathcal{M}$ v konkrétním bodě $x \in \mathcal{M}$.

Definice 3.14. Nechť \mathcal{M} je hladká varieta a $T_x^*\mathcal{M}$ je její kotečný prostor v bodě $x \in \mathcal{M}$. Zobrazení $\omega : \mathcal{M} \rightarrow T_x^*\mathcal{M}$, které bodu $x \in \mathcal{M}$ přiřazuje kovektor $\omega(x)$, což je funkcionál nad tečným prostorem $T_x\mathcal{M}$, nazveme *kovektorovým polem*. Množinu všech kovektorových polí na \mathcal{M} označíme $V^*(\mathcal{M})$.

3.3 Lieova derivace

Definice 3.15. Nechť \mathcal{M} je hladká varieta. Hladké zobrazení $a : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ nazveme *skalárové pole*. Množinu všech skalárových polí na varietě \mathcal{M} označíme $S(\mathcal{M})$.

Poznámka 3.16. Příkladem může být teplota v každém bodě místnosti v jednom konkrétním čase.

Definice 3.17. Nechť $h(x) \in S(X)$ a $f(x) \in V(X)$. Lieovu derivaci (směrovou derivaci) skalárního pole $h(x)$ podél vektorového pole $f(x)$ definujeme jako skalární součin

$$\begin{aligned} L_f h(x) &= (\nabla^T h(x), f(x)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial x_1} & \frac{\partial h}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial h}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix} \\ &= \frac{\partial h}{\partial x_1} f_1(x) + \frac{\partial h}{\partial x_2} f_2(x) + \cdots + \frac{\partial h}{\partial x_n} f_n(x). \end{aligned}$$

Poznámka 3.18. Všimněme si, že $L_f h(x) \in S(X)$, tedy $L_f h(x) : X \rightarrow \mathbb{R}$. Tímto způsobem potom lze definovat kovektorové pole

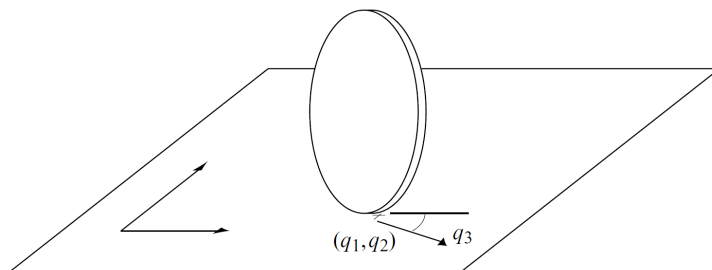
$$dh(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial h}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial h}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}.$$

Lieovu derivaci skalárního pole ve směru vektorového pole pak můžeme interpretovat jako aplikaci lineárního funkcionálu na všechny tečné vektory z vektorového pole:

$$dh[f](x) = (\nabla^T h(x), f(x)) \in S(X).$$

4 Jednokolka

V této kapitole si na jednoduchém příkladu zavedeme mnohé důležité pojmy. Stěžejní pro nás do dalších kapitol bude Lieova závorka a s ní spojená Lieova algebra. Čerpáno je ze zdrojů [2], [9], [20], [24]

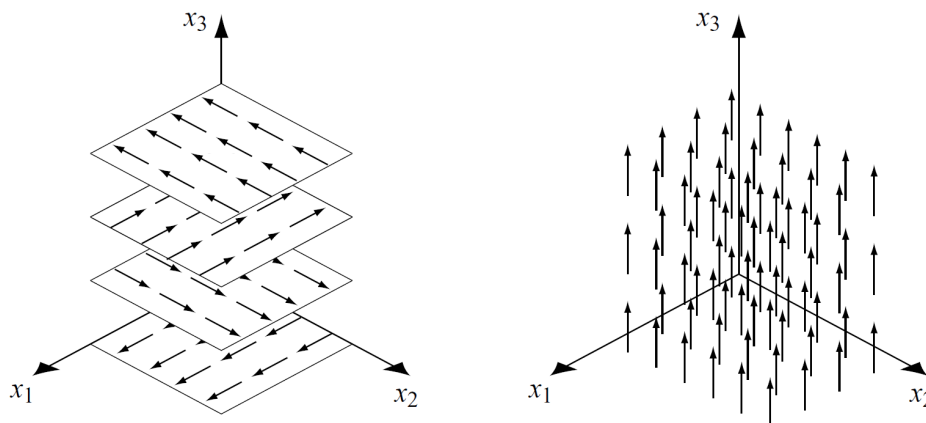


Obrázek 4.1: Jednokolka. [20]

Jednokolka je kolo, které se pohybuje dopředu v horizontálně položené rovině a je schopno se na místě otáčet (viz Obr. 4.1). Konfigurace jednokolky je $q = [q_1, q_2, q_3]^T$, která popisuje bodu dotyku kola s rovinou (q_1, q_2) a úhel natočení kola vzhledem k vodorovné ose této roviny.

Systém je kinematický a danou varietu tedy tvoří přímo konfigurační prostor $\mathcal{M} = \mathcal{Q} = \mathbb{R}^3$ s dimenzí $n = 3$, přičemž $x = [x_1, x_2, x_3]^T = q$. Problém uvažujeme lokálně a můžeme tak zanedbat globální strukturu prostoru $\mathbb{R}^2 \times S^1$. (Ale budeme muset v posledním členu uvažovat aritmetiku mod 2π .) Také platí $T_{x_0}\mathcal{M} = T_{x_0}\mathcal{Q}$, což označuje prostor všech možných rychlostí v bodě $x_0 = q_0$.

Tečný vektor jednokolky je dán předpisem $\dot{x} = [\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3]^T = [\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3]^T$. Jak jsme již uvedli, jednokolka může provádět dva pohyby, každému odpovídá jedno vektorové pole. Pro pohyb dopředu jednotkovou rychlostí ho můžeme zapsat jako $g_1(x) = [\cos x_3, \sin x_3, 0]^T$ a pro otáčení v kladném směru jednotkovou rychlostí jako $g_2(x) = [0, 0, 1]^T$. Ortonormální báze tečného prostoru je $\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, 0, 0 \right), \left(0, \frac{\partial}{\partial x_2}, 0 \right), \left(0, 0, \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \right\}$. Pole pak můžeme zapsat ve tvaru $g_1(x) = (\cos x_3) \frac{\partial}{\partial x_1} + (\sin x_3) \frac{\partial}{\partial x_2}$, respektive $g_2(x) = \frac{\partial}{\partial x_3}$.



Obrázek 4.2: Vektorové pole $g_1(x) = [\cos x_3, \sin x_3, 0]^T$ (pro konstantní hodnotu x_3), a $g_2(x) = [0, 0, 1]^T$. [20]

Definice 4.1. Nechť je \mathcal{G} množina vektorových polí a nechť $\text{span}(\mathcal{G})$ je lineární obal vektorových polí z \mathcal{G} . V každém bodě $x \in \mathcal{M}$ tato vektorová pole tvoří lineární podprostor tečného prostoru $T_x\mathcal{M}$. Říkáme, že množina vektorových polí \mathcal{G} vytváří *distribuci* $\mathcal{D} \subseteq T\mathcal{M}$, která je hladkým přiřazením lineárního podprostoru $T_x\mathcal{M}$ pro každé $x \in \mathcal{M}$. Distribuci nazýváme *regulární*, jestliže dimenze lineárního podprostoru je stejná v každém bodě x . Pokud je dimenze m , řekneme, že se jedná o m -rozměrnou distribuci.

Uvažujme dvourozměrnou regulární distribuci pro jednokolku $\mathcal{D} = \text{span}(\{g_1, g_2\}) = u_1g_1(x) + u_2g_2(x)$; $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$. To je jedna z možných forem distribuce – skutečnitelné pohyby jsou tvořeny lineární kombinací vektorových polí. Jiná forma distribuce spočívá v tom, že ze všech skutečnitelných pohybů eliminujeme ty, které kvůli vazebným podmínkám, nejsou možné. Tvar takové distribuce je

$$\mathcal{D}(x) = \{\dot{x} \in T_x\mathcal{M}; \omega(x)\dot{x} = 0\}, \quad \omega(x) = [-\sin x_3, \cos x_3, 0],$$

kde $\mathcal{D}(x)$ je lineární podprostor tečného prostoru $T_x\mathcal{M}$, který je určený distribucí \mathcal{D} . Řádkový vektor $\omega(x)$ je kovektor, který leží v kotečném prostoru $T_x^*\mathcal{M} = \mathbb{R}^n$. Ortonormální bázi kovektorového pole je $\{(dx_1, 0, 0, \dots, 0), (0, dx_2, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 0, dx_n)\}$. Vazby pak můžeme psát ve tvaru $\omega(x) = -\sin x_3 dx_1 + \cos x_3 dx_2$.

Definice 4.2. Říkáme, že množina kovektorových polí $\{\omega_1(x), \dots, \omega_k(x)\}$ definuje *kodistribuci* $\Omega \subseteq T^*\mathcal{M}$, kde $T^*\mathcal{M}$ je kotečný bandl. Jestliže kovektorová pole $\omega_i(x)$, $i = 1, \dots, k$ odpovídají vazebným podmínkám $\omega_i(x)\dot{x} = 0$, nazýváme Ω *vazebná kodistribuce*. Řekneme, že taková kodistribuce Ω *anihuluje* distribuci \mathcal{D} skutečnitelných pohybů a obráceně.

Speciálním případem jsou vazebné podmínky pro rychlost tvaru

$$f(q, \dot{q}) = 0,$$

které není možné integrovat takovým způsobem, abychom dostali jiné ekvivalentní konfigurační vazby. Takové vazby nazýváme *neholonomní*.

Nechť je \mathcal{G} množina vektorových polí a nechť je \mathcal{D} distribuce určená jejich lineárním obalem $\text{span}(\mathcal{G})$. Chtěli bychom určit dosažitelnou množinu variety \mathcal{M} pomocí vektorových polí z \mathcal{D} . To je globálně obecně složité, nicméně s využitím Lieových závorek můžeme zjistit leccos lokálně. Aplikací Lieovy závorky na dvě vektorová pole z \mathcal{D} zjistíme, zda infinitesimální pohyb ve směru těchto dvou polí může lokálně tvořit pohyb v jiném směru, než které jsou v \mathcal{D} . Příkladem je podélné parkování auta, resp. v našem případě jednokolky. Příčný pohyb do boku není kvůli vazebným podmínkám možný, nicméně i tak se mu můžeme přiblížit řadou pohybů dopředu, dozadu a otočeními. Důsledkem je, že lokálně dosažitelná množina \mathcal{M} není dvourozměrná (jako distribuce \mathcal{D}), ale třírozměrná. Rychlostní vazebná podmínka zamezující pohybu do boku tedy neomezuje dosažitelné konfigurace.

Vektorová pole můžeme chápat jako pravé strany diferenciálních rovnic

$$\dot{x} = f(x). \tag{4.1}$$

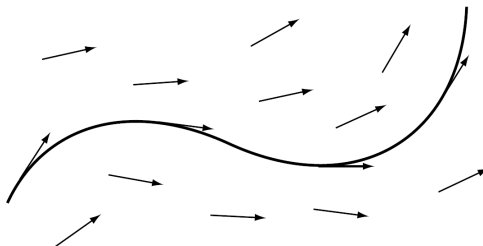
Lieovu derivaci skalárního pole $h(x)$ podél vektorového pole $f(x)$ jsme definovali jako

$$L_f h(x) = (\nabla^T h(x), f(x)) = \frac{\partial h}{\partial x} f(x).$$

V souvislosti s vektorovým polem označíme ϕ^f jako *tok* vektorového pole f , který reprezentuje řešení diferenciální rovnice (4.1). Konkrétně $\phi_t^f(x)$ je stav systému v čase t , který začínal v bodě x v čase 0. Pro tok $\phi_t^f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ tedy platí

$$\frac{d}{dt}\phi_t^f(x) = f(\phi_t^f(x)), \quad x \in \mathcal{M}.$$

Křivku $\{\phi_t^f(x); t \in \mathbb{R}\}$ nazýváme *integrální křivkou* vektorového pole g , které obsahuje bod x . Integrální křivka popisuje množinu dosažitelných bodů variety \mathcal{M} z x podél vektorového pole dopředu i dozadu v čase, viz Obr. 4.3. Tuto notaci zobecňuje pojem integrální variety množiny vektorových polí \mathcal{G} , kterou rozebereme později.



Obrázek 4.3: Integrální křivka vektorového pole. [20]

Říkáme, že vektorové pole je *úplné*, jestliže je jeho tok definovaný pro každé t . Dle Picardovy věty o existenci a jednoznačnosti počáteční úlohy je pro každé konkrétní t tok ϕ_t^f lokálně difeomorfní na varietě \mathcal{M} . Množina těchto zobrazení s operací skládání

$$\phi_t^f(x) \circ \phi_s^f(x) = \phi_t^f(\phi_s^f(x)) = \phi_{t+s}^f(x),$$

pro všechna t, s tvoří grupu. Neutrálním prvkem je $\phi_0^f(x) = x$ a prvkem inverzním je $\phi_{-t}^f(x)$.

Mějme dvě vektorová pole $g_1, g_2 \in \mathcal{G}$. Zobrazení $\phi_t^{g_1} \circ \phi_s^{g_2}$ značí složení toku g_2 po dobu s vteřin s tokem g_1 po t vteřin. Složené zobrazení v opačném pořadí $\phi_s^{g_2} \circ \phi_t^{g_1}$ je obecně jiné. Ukažme si to. Uvažujme tok, který začíná v bodě $x_0 = x(0)$ tak, že nejprve půjdeme po krátký čas ε ve směru g_1 a dále pro stejný čas ve směru g_2 , následně $-g_1$ a nakonec $-g_2$. Situaci ilustruje Obr. 4.4a. Řešení vzniklé diferenciální rovnice pro malé $\varepsilon \ll 1$ můžeme získat pomocí Taylorovy řady. Začneme tokem podél pole g_1 :

$$\begin{aligned} x(\varepsilon) &= \phi_\varepsilon^{g_1}(x(0)) \\ &= x(0) + \varepsilon \dot{x}(0) + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \ddot{x}(0) + O(\varepsilon^3), \end{aligned}$$

pro jednotlivé derivace dle rovnice (4.1) platí

$$\begin{aligned} \dot{x}(0) &= g_1(x(0)) = g_1(x_0), \\ \ddot{x}(0) &= \frac{\partial g_1}{\partial x} \dot{x}(0) = \frac{\partial g_1}{\partial x} g_1(x_0), \end{aligned}$$

dosadíme je zpět:

$$= x_0 + \varepsilon g_1(x_0) + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \frac{\partial g_1}{\partial x} g_1(x_0) + O(\varepsilon^3).$$

Člen $O(\varepsilon^k)$ značí zbytek Taylorovy řady, tedy výraz řádu ε^k . Nyní půjdeme podél pole g_2 a dostaneme se do času 2ε :

$$\begin{aligned} x(2\varepsilon) &= \phi_\varepsilon^{g_2}(x(\varepsilon)) \\ &= x(\varepsilon) + \varepsilon \dot{x}(\varepsilon) + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \ddot{x}(\varepsilon) + O(\varepsilon^3), \end{aligned}$$

člen $x(\varepsilon)$ máme z předchozího výpočtu. Vyčíslíme příslušné derivace:

$$\begin{aligned} \dot{x}(\varepsilon) &= g_2(x(\varepsilon)) = g_2[x_0 + \varepsilon g_1(x_0) + O(\varepsilon^2)] = g_2(x_0) + \varepsilon \frac{\partial g_2}{\partial x} g_1(x_0) + O(\varepsilon^2), \\ \ddot{x}(\varepsilon) &= \frac{\partial g_2}{\partial x} \dot{x}(\varepsilon) = \frac{\partial g_2}{\partial x} g_2(x(\varepsilon)) = \frac{\partial g_2}{\partial x} g_2[x_0 + O(\varepsilon)], \end{aligned}$$

a vše dosadíme do rovnice:

$$\begin{aligned} &= x_0 + \varepsilon g_1(x_0) + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \frac{\partial g_1}{\partial x} g_1(x_0) + O(\varepsilon^3) + \varepsilon \left[g_2(x_0) + \varepsilon \frac{\partial g_2}{\partial x} g_1(x_0) + O(\varepsilon^2) \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \left[\frac{\partial g_2}{\partial x} g_2(x_0 + O(\varepsilon)) \right], \end{aligned}$$

po úpravě a sjednocení členů řádu ε^3 do jednoho získáváme:

$$= x_0 + \varepsilon [g_1(x_0) + g_2(x_0)] + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \left[\frac{\partial g_1}{\partial x} g_1(x_0) + 2 \frac{\partial g_2}{\partial x} g_1(x_0) + \frac{\partial g_2}{\partial x} g_2(x_0) \right] + O(\varepsilon^3).$$

Ve stejném duchu pokračujeme dále podél pole $-g_1$, čímž se dostáváme do času 3ε :

$$\begin{aligned} x(3\varepsilon) &= \phi_\varepsilon^{-g_1}(x(2\varepsilon)) \\ &= x(2\varepsilon) + \varepsilon \dot{x}(2\varepsilon) + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \ddot{x}(2\varepsilon) + O(\varepsilon^3), \end{aligned}$$

Vypočítáme potřebné derivace

$$\begin{aligned} \dot{x}(2\varepsilon) &= -g_1(x(2\varepsilon)) = -g_1[x_0 + \varepsilon g_1(x_0) + \varepsilon g_2(x_0) + O(\varepsilon^2)] \\ &= -g_1(x_0) - \varepsilon \left[\frac{\partial g_1}{\partial x} g_1(x_0) + \frac{\partial g_1}{\partial x} g_2(x_0) \right] + O(\varepsilon^2), \\ \ddot{x}(2\varepsilon) &= -\frac{\partial g_1}{\partial x} \dot{x}(2\varepsilon) = \frac{\partial g_1}{\partial x} g_1[x_0 + O(\varepsilon)], \end{aligned}$$

a spolu s hodnotou $x(2\varepsilon)$ následně dosadíme do rovnice:

$$\begin{aligned} &= x_0 + \varepsilon [g_1(x_0) + g_2(x_0)] + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \left[\frac{\partial g_1}{\partial x} g_1(x_0) + 2 \frac{\partial g_2}{\partial x} g_1(x_0) + \frac{\partial g_2}{\partial x} g_2(x_0) \right] \\ &\quad + \varepsilon \left[-g_1(x_0) - \varepsilon \left[\frac{\partial g_1}{\partial x} g_1(x_0) + \frac{\partial g_1}{\partial x} g_2(x_0) \right] + O(\varepsilon^2) \right] + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \left[\frac{\partial g_1}{\partial x} g_1(x_0) + O(\varepsilon) \right] \\ &= x_0 + \varepsilon g_2(x_0) + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \left[2 \frac{\partial g_2}{\partial x} g_1(x_0) - 2 \frac{\partial g_1}{\partial x} g_2(x_0) + \frac{\partial g_2}{\partial x} g_2(x_0) \right] + O(\varepsilon^3). \end{aligned}$$

Nakonec podél $-g_2$:

$$x(4\varepsilon) = \phi_\varepsilon^{-g_2}(x(3\varepsilon)) = \phi_\varepsilon^{-g_2} \circ \phi_\varepsilon^{-g_1} \circ \phi_\varepsilon^{g_2} \circ \phi_\varepsilon^{g_1}(x_0),$$

odečtou se analogické členy jako v předešlém časovém kroku a získáme finální přibližné řešení:

$$= x_0 + \varepsilon^2 \left[\frac{\partial g_2}{\partial x} g_1(x_0) - \frac{\partial g_1}{\partial x} g_2(x_0) \right] + O(\varepsilon^3).$$

Všimněme si, že se zde nevyskytují členy závislé na ε . Zbytek $O(\varepsilon^3)$ je pro malá ε potlačen členy řádu ε^2 . Tento člen reprezentuje přibližný pohyb po čtverci určeném vektorovými poli g_1, g_2 . Výsledek je motivací definice Lieovy závorky dvou vektorových polí jako

$$[f, g](x) = \frac{\partial g}{\partial x} f(x) - \frac{\partial f}{\partial x} g(x).$$

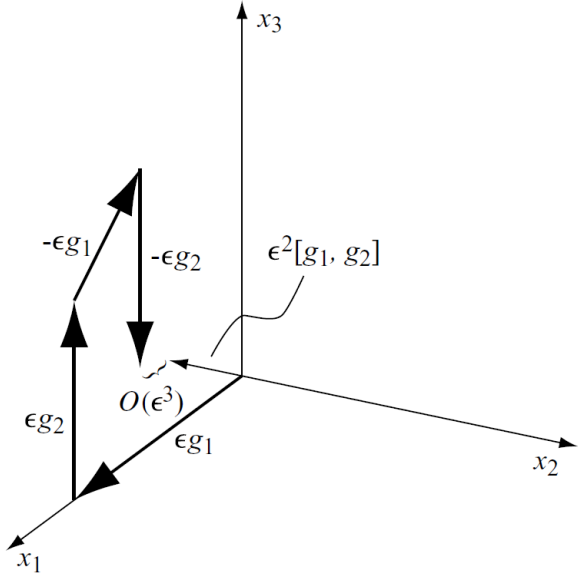
Výsledku operace budeme říkat Lieův součin. Lieova závorka $[f, g]$ určuje nové vektorové pole, které, pokud již není obsaženo v $\text{span}(\mathcal{G})$, reprezentuje nový směr pohybu, kterého je možné přibližně dosáhnout. Pohyb tímto směrem je pomalejší než přímo ve směru vektorových polí f, g , jelikož je řádu ε^2 oproti ε , přičemž $\varepsilon \ll 1$. Intuitivně je to zřejmé i z příkladu jednokolky či přímo auta, kde paralelní parkování, tedy přibližný pohyb do boku, je časově náročnější. Jelikož Lieův součin určuje nové vektorové pole, můžeme spočítat jeho Lieovu závorku s jiným vektorovým polem. *Lieův součin stupně k* je výraz, kde se původní vektorová pole vyskytují celkově k -krát. Například $[[[f, g], f], g]$ je Lieův součin čtvrtého stupně. Jestliže $[f, g] = 0$, žádný nový pohyb nevznikl, (počáteční bod pohybu je shodný s koncovým), a říkáme, že tato dvě vektorová pole jsou *komutativní*.

Vraťme se opět k jednokolce. Pro pohyb dopředu máme vektorové pole $g_1(x) = [\cos x_3, \sin x_3, 0]^T$ a pro otočení pole $g_2(x) = [0, 0, 1]^T$. Nyní spočítáme Lieovu závorku těchto polí

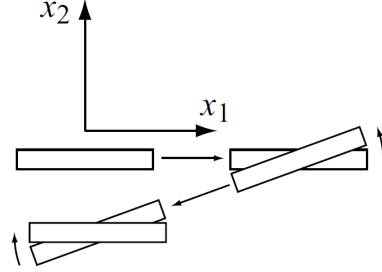
$$\begin{aligned} [g_1, g_2] &= \frac{\partial g_2}{\partial x} g_1 - \frac{\partial g_1}{\partial x} g_2 \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \frac{\partial g_2}{\partial x_3} \end{pmatrix} g_1 - \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \frac{\partial g_1}{\partial x_3} \end{pmatrix} g_2 \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos x_3 \\ \sin x_3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\sin x_3 \\ 0 & 0 & \cos x_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin x_3 \\ -\cos x_3 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Provedenou operací jsme skutečně dostali nový možný pohyb do boku, který kvůli vazebným podmínkám není uskutečnitelný přímo.

(a) Pohyb přibližně odpovídá pohybu do boku. Ne však přesně kvůli členům s vyšším řádem ε .



(b) Pohled na jednodolku shora.



Obrázek 4.4: Pohyb jednodolky určený Lieovou závorkou dvou vektorových polí začínající v počátku. [20]

Definice 4.3. Lieova algebra množiny vektorových polí \mathcal{G} , značíme \mathfrak{g} , je lineární obal všech Lieových součinů všech stupňů vektorových polí z \mathcal{G} . K určení Lieovy algebry definujeme $\mathcal{G}_1 = \mathcal{G}$, a řadu $\mathcal{G}_{i+1} = \mathcal{G}_i \cup \{[g_j, g_k]; \forall g_j \in \mathcal{G}_1, g_k \in \mathcal{G}_i\}$. Lieova algebra je pak daná distribucí $\text{span}(\mathcal{G}_\infty)$.

Poznámka 4.4. Operace Lieova závorka $[\cdot, \cdot]$ má tyto vlastnosti:

- (i) zobrazení $[\cdot, \cdot]$ je antisymetrické, tedy $[g_1, g_2] = -[g_2, g_1]$
- (ii) platí tzv. *Jacobiho indentita* $[g_1, [g_2, g_3]] + [g_2, [g_3, g_1]] + [g_3, [g_1, g_2]] = 0$

Příklad 4.5. Řada pro $\mathcal{G} = \{g_1, g_2\}$ má dle definice tvar

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_1 &= \{g_1, g_2\} \\ \mathcal{G}_2 &= \mathcal{G}_1 \cup \{g_3 = [g_1, g_2]\} \\ \mathcal{G}_3 &= \mathcal{G}_2 \cup \{g_4 = [g_1, g_3], g_5 = [g_2, g_3]\} \\ \mathcal{G}_4 &= \mathcal{G}_3 \cup \{g_6 = [g_1, g_4], g_7 = [g_1, g_5], g_8 = [g_2, g_4], g_9 = [g_2, g_5]\} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Definice 4.6. Příslušná řada $\mathcal{D}_\infty = \text{span}(\mathcal{G}_\infty)$, $\mathcal{D}_\varepsilon = \text{span}(\mathcal{G}_\varepsilon)$, \dots se nazývá *filtrace* distribuce \mathcal{D}_∞ . Filtraci říkáme *regulární*, jestliže jsou všechny distribuce filtrace regulární. Pokud je filtrace regulární, dimenze distribuce, buď každým krokem roste, nebo se konstrukce zastaví. Zřejmě platí $\dim(\mathcal{D}_i) \leq n = \dim(\mathcal{M})$ pro všechna i . Jestliže je tedy filtrace regulární, existuje konečná hodnota k taková, že $\mathcal{D}_k = \mathcal{D}_{k+1} = \dots = \mathcal{D}_\infty$. Tato distribuce je *involutivní uzávěrem*, značíme $\bar{\mathcal{D}}$, distribuce \mathcal{D} . Distribuci \mathcal{D} nazýváme *involutivní*, jestliže $\mathcal{D} = \bar{\mathcal{D}}$. Pokud filtrace není regulární, nejsme schopni obecně předem určit stupeň k , pro který $\mathcal{D}_k = \bar{\mathcal{D}}$. Jestliže takový stupeň existuje, říkáme, že Lieova algebra je *nilpotentní stupně k* .

Definice 4.7. *Integrální varieta* distribuce \mathcal{D} , která obsahuje x_0 , je množina variet \mathcal{M} , kterých je možno dosáhnout z bodu x_0 vektorovými poli z \mathcal{D} . $\mathcal{D}(x)$ je tečný prostor integrální variety v bodě x .

Poznámka 4.8. Podle Frobeniovy věty se m -rozměrná regulární distribuce \mathcal{D} integruje na m -rozměrnou integrální varietu právě tehdy, když je \mathcal{D} involutivní.

Definice 4.9. Jestliže integrální varietou distribuce \mathcal{D} není celý prostor \mathcal{M} , potom říkáme, že \mathcal{D} tvoří *foliaci* variety \mathcal{M} . Jednotlivé různé integrální variety nazýváme *listy* foliace.

Příklad 4.10. Uvažujme například otočný pohyb jednokolky, konkrétně jednorozměrnou distribuci vytvořenou vektorovým polem $g_2(x) = [0, 0, 1]^T$. Distribuce je jednorozměrná, regulární, involutivní a integrální variety jsou přímky v x_3 . Jestliže se jednokolka drží pouze tohoto vektorového pole, se vztahuje stále ke stejnému listu foliace.

Poznámka 4.11. Existence integrálních variet na menším prostoru než je celý stavový prostor \mathcal{M} indikuje, že pohybové vazby skutečně omezují dosažitelný stavový prostor.

Nyní zpět k jednokolce. Již máme tři vektorová pole $g_1 = [\cos x_3, \sin x_3, 0]^T$, $g_2 = [0, 0, 1]^T$ a $g_3 = [g_1, g_2] = [\sin x_3, -\cos x_3, 0]^T$. Dimenze distribuce určené vektorovými poli $\{g_1, g_2, g_3\}$ je rovna třem v každém bodě $x \in \mathcal{M}$. Jedná se tedy o regulární distribuci. Určitě je také involutivní, jelikož dimenze samotné variety \mathcal{M} je také tři. Lineární nezávislost vektorových polí ověříme výpočtem determinantu matice:

$$\det(g_1, g_2, g_3) = \begin{vmatrix} \cos x_3 & 0 & \sin x_3 \\ \sin x_3 & 0 & -\cos x_3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \sin^2(x_3) + \cos^2(x_3) = 1.$$

Determinant je nenulový a tedy vektorová pole jsou lineárně nezávislá. Jelikož je distribuce regulární i involutivní má třírozměrnou integrální varietu, která odpovídá celému prostoru variety \mathcal{M} . Distribuce \mathcal{D}_2 je involutivním uzávěrem distribuce \mathcal{D}_1 . Filtrace je regulární.

Příklad 4.12. Mějme vektorová pole $h_1(x) = [x_1 \cos x_3, x_2 \sin x_3, 0]^T$ a $h_2(x) = [0, 0, 1]^T$ definovaná na \mathbb{R}^3 . Vektorové pole h_2 samo o sobě určuje regulární jednorozměrnou involutivní distribuci. To však neplatí v případě vektorového pole h_1 . Distribuce tohoto pole není regulární, jelikož dimenze prostoru např. pro $x_1 = x_2 = 0$ je nulová, tedy odlišná, než pro jiné hodnoty x_1, x_2 . Lieova závorka pro tato vektorová pole je

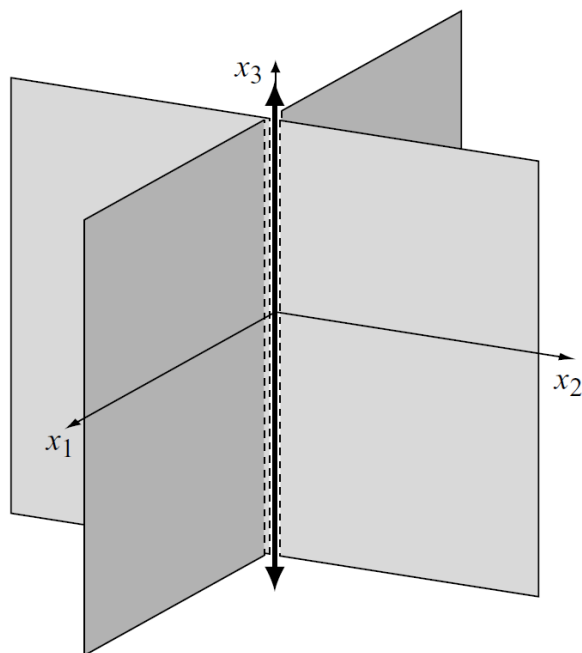
$$h_3 = [h_1, h_2] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \cos x_3 \\ x_2 \sin x_3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\cos x_3 & 0 & -x_1 \sin x_3 \\ 0 & \sin x_3 & x_2 \cos x_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \sin x_3 \\ -x_2 \cos x_3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Pro determinant platí

$$\det(h_1, h_2, h_3) = \begin{vmatrix} x_1 \cos x_3 & 0 & x_1 \sin x_3 \\ x_2 \sin x_3 & 0 & -x_2 \cos x_3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = x_1 x_2 \sin^2(x_3) + x_1 x_2 \cos^2(x_3) = x_1 x_2.$$

Vektorová pole jsou tedy nezávislá. To znamená, že pro $x_1, x_2 \neq 0$ je distribuce $\text{span}(h_1, h_2, h_3)$ třírozměrná, není však regulární, jelikož její dimenze se pro různé body liší. Konkrétně

je jednorozměrná pro body $[0, 0, x_3]^T$, dvourozměrná pro $[x_1, 0, x_3]$, kde $x_1 \neq 0$ a pro $[0, x_2, x_3]$, kde $x_2 \neq 0$, a třírozměrná ve všech ostatních bodech. Foliace je ukázaná na Obr. 4.5. Stavový prostor je rozdělený na devět listů, jedním je přímka, které odpovídá osa x_3 , dále čtyři poloroviny a konečně čtyři třírozměrné kvadranty.



Obrázek 4.5: Foliace stavového prostoru distribuce $\text{span}(h_1, h_2, h_3)$. [20]

5 Exponenciální zobrazení a liftované akce

Tečný prostor jsme definovali na varietě bez ohledu na to, zda má, či nemá strukturu Lieovy grupy. Pokud tomu tak ovšem je, má mezi tečnými prostory zvláštní zastoupení prostor T_eG , tedy prostor v neutrálním bodě grupy. Ukážeme si, že platí $\mathfrak{g} = T_eG$, tedy že prostor T_eG určuje příslušnou Lieovu algebru. K tomu nám poslouží pojem levo-invariantního pole. Budeme vycházet ze zdrojů [2], [3], [18], [19] a [23].

5.1 Lieova algebra Lieovy grupy

Definice 5.1. Necht' $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ jsou n -rozměrné variety třídy C^r . Řekneme, že zobrazení $f : \mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}_2$ je *difeomorfismus třídy C^s* , $s \leq r$, jestliže f je bijektivní třídy C^s a současně i inverzní zobrazení $f^{-1} : \mathcal{M}_2 \rightarrow \mathcal{M}_1$ je třídy C^s .

Definice 5.2. Necht' je G reálná Lieova grupa. Vektorové pole ξ na G nazýváme *levo-invariantní*, jestliže $\lambda_a^* \xi = \xi$ pro všechna $a \in G$, přičemž vektorové pole $\lambda_a^* \xi = T(\lambda_{a^{-1}}) \circ \xi \circ \lambda_a$, kde levá translace λ_a je difeomorfismus. Jelikož platí $\lambda_a^* [\xi, \eta] = [\lambda_a^* \xi, \lambda_a^* \eta]$, prostor $V_L(G)$ všech levo-invariantních polí na G je uzavřený na Lieovu závorku. Je tudíž Lieovou podalgebrou algebry $V(G)$.

Poznámka 5.3. Každé levo-invariantní vektorové pole ξ je jednoznačně určeno vztahem $\xi(e) \in T_eG$, jelikož $\xi(a) = T_e(\lambda_a)\xi(e)$, kde $e \in G$ je neutrální prvek. Lieova algebra $V_L(G)$ levo-invariantních polí je lineárně izomorfní s T_eG . Lieova závorka na $V_L(G)$ indukuje na T_eG strukturu Lieovy algebry. Budeme ji standardně značit \mathfrak{g} . Izomorfismus Lieovy algebry s prostorem levo-invariantních polí je dán zobrazením $L : \mathfrak{g} \rightarrow V_L(G)$, $X \mapsto L_X$, kde $L_X(a) = T_e\lambda_a X$. Tedy $[X, Y] = [L_X, L_Y](e)$.

Příklad 5.4. Lieova algebra ortogonální grupy $\mathbf{O}(n)$ se skládá ze všech reálných antisymetrických matic, značíme ji $\mathfrak{o}(n)$. Lieova algebra speciální ortogonální grupy $\mathbf{SO}(n)$ je stejná jako grupy $\mathbf{O}(n)$, značíme ji $\mathfrak{so}(n)$. Konkrétně například ve třetí dimenzi pro $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ dostáváme

$$\mathfrak{so}(n) = \{ \hat{\omega} \in \mathbb{R}^{3 \times 3} : \hat{\omega}^T = -\hat{\omega} \},$$

kde

$$\hat{\omega} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Příklad 5.5. Lieova algebra euklidovské grupy $\mathbf{E}(n)$, značíme $\mathfrak{e}(n)$, jsou matice typu

$$\begin{pmatrix} r & p \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

kde p je n -prvkový sloupcový vektor a r je antisymetrická matice řádu n , tj. $r \in \mathfrak{o}(n)$.

5.2. EXPONENCIÁLNÍ ZOBRAZENÍ

Lieovy algebry mají velký význam, jelikož mají strukturu vektorového pole, tedy je jednodušší je analyzovat než Lieovy grupy. Navíc mají funkci jakýchsi generátorů, kterými můžeme příslušné Lieovy grupy zrekonstruovat. Tímto generátorem je exponenciální zobrazení.

5.2 Exponenciální zobrazení

Definice 5.6. Necht' G je Lieova grupa a \mathfrak{g} je její Lieova algebra. Pak pro $\xi \in \mathfrak{g}$ a $t \in \mathbb{R}$ definujeme exponenciální zobrazení jako

$$\begin{aligned}\exp : \mathfrak{g} &\rightarrow G \\ \xi &\mapsto \exp(t\xi).\end{aligned}$$

V případě, že je jedná o maticovou Lieovu grupu, potom platí

$$\exp(t\xi) = \exp A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n.$$

Příklad 5.7. Uvažujme rotace v třírozměrném prostoru kolem osy x , potom $\omega = (1, 0, 0)$. Položme

$$A = \theta\hat{\omega} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\theta \\ 0 & \theta & 0 \end{pmatrix},$$

spočítáme příslušné mocniny a dosadíme do vztahu

$$\exp A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n = I + A + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \dots,$$

čímž dostáváme

$$\exp A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{1}{2}\theta^2 + \frac{1}{4!}\theta^4 \dots & -\theta + \frac{1}{3!}\theta^3 - \frac{1}{5!}\theta^5 \dots \\ 0 & \theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{5!}\theta^5 \dots & 1 - \frac{1}{2}\theta^2 + \frac{1}{4!}\theta^4 \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix},$$

což je přesně matice z grupy $\mathbf{SO}(3)$ pro rotace kolem osy x .

Ve druhé kapitole jsme definovali grupové akce, které působí na prvcích konfiguračního prostoru. Nyní zavedeme tzv. liftované akce, které mají podobnou funkci, ale v tečném prostoru.

5.3 Liftované akce

Jednotlivé tečné prostory, které tvoří tečný bandl, jsou na sobě nezávislé. Obecně zde tedy neexistuje vhodný nástroj pro porovnávání či sčítání vektorů, které se nacházejí v různých prostorech. V případě Lieových grup však mezi konfigurace máme definované transformace a těmto transformacím můžeme přiřadit tzv. *liftované akce*. Jedná se o zobrazení v různých

tečných prostorech mezi vzájemně si odpovídajícími vektory, který umožňuje tyto vektory porovnávat. Konkrétně k levé akci ℓ_h , kterou aplikujeme na konfiguraci g , je přiřazena levá liftovaná akce $T_g\ell_h$. Tato akce přiřazuje vektorům z tečného prostoru $T_g\mathcal{G}$ odpovídající vektory z tečného prostoru $T_{hg}\mathcal{G}$, což je prostor, který je asociovaný po provedení levé akce:

$$\begin{aligned} T_g\ell_h : T_g\mathcal{G} &\longrightarrow T_{hg}\mathcal{G} \\ \dot{g} &\longmapsto (\dot{h}g) \end{aligned}$$

Pravá liftovaná akce $T_g r^h$ je definovaná analogicky. Obecně platí, že levá liftovaná akce zachovává lokální rychlost systému. Jinými slovy, pokud jsou rychlosti ve dvou konfiguracích spojené levou liftovanou akci, potom je jejich pohyb v obou konfiguracích z jejich vlastní perspektivy ekvivalentní. Naproti tomu pravé liftované akce zachovávají vztah rychlostních transformací. Tedy dva body se pohybují odpovídajícími rychlostmi, které se liší o konstantní grupovou akci. Tyto interpretace vyplývají z povahy levých a pravých akcí, které jsme rozebírali výše – levá akce posouvá prvek grupy, zatímco pravá pracuje s prvky, jejichž poloha je definovaná vzájemně.

Liftované akce jsou definované jako derivace asociované akce:

$$\begin{aligned} T_g\ell_h &= \frac{\partial(\ell_h g)}{\partial g} \\ T_g r^h &= \frac{\partial(r^h g)}{\partial g}. \end{aligned}$$

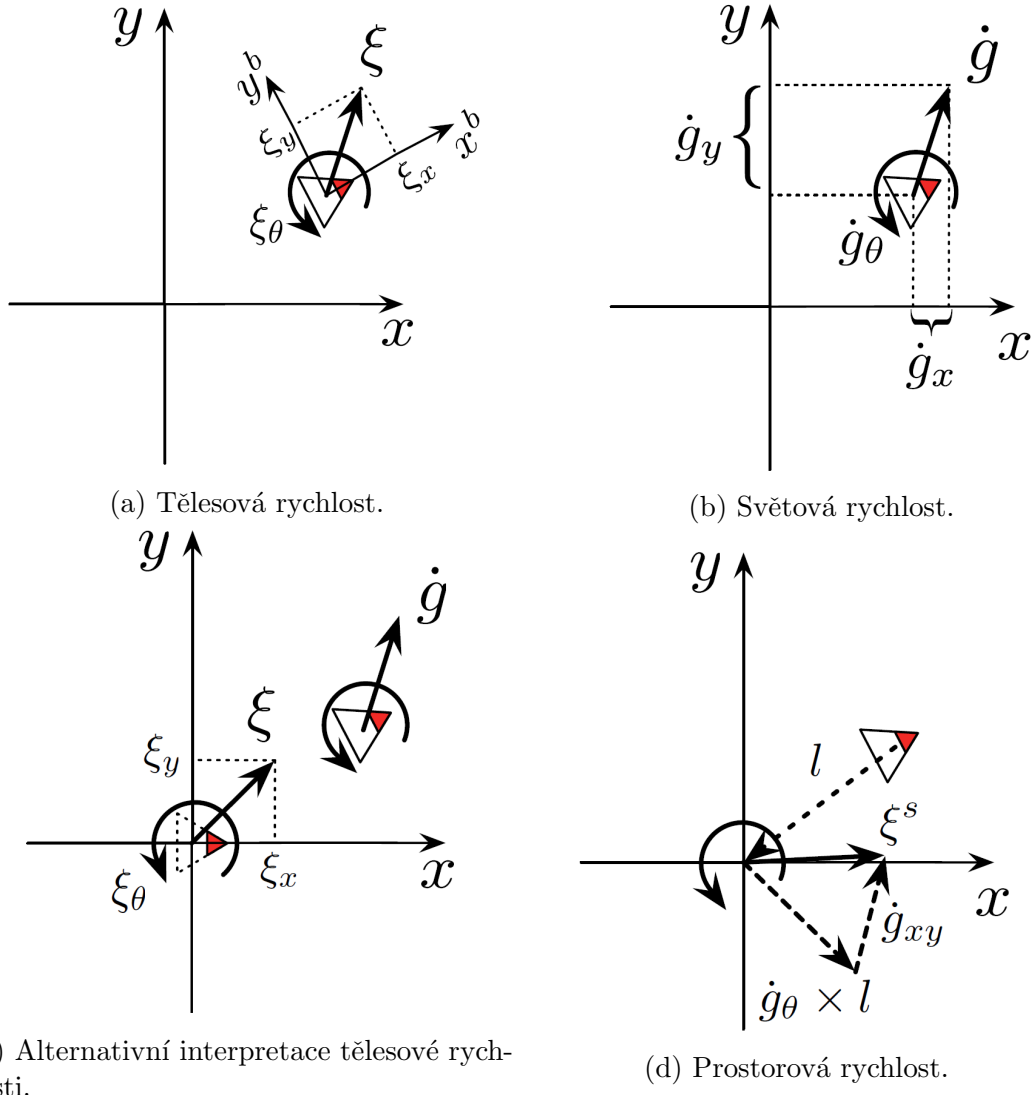
5.4 Rychlosti tuhého tělesa

Jak jsme již rozebírali, tím, že rovinné tuhé těleso popisujeme strukturou $\mathbf{SE}(2)$, dáváme konfiguračnímu prostoru lokální smysl, tedy že akce jsou definované vzhledem tělesovému repéru na začátku každé akce, a ne ke světové soustavě souřadnic. Podobně se lokalita objevuje i u tečných prostorů grupy $\mathbf{SE}(2)$.

Levá liftovaná akce zachovává *tělesovou rychlost* systému. Znamená to, že těleso, jehož rychlost ve dvou různých konfiguracích je spojena $T_g\ell_h$, se pohybuje se stejnou podélnou, laterální a rotační rychlostí v obou konfiguracích. Pravá liftovaná akce $T_g r^h$ zachovává *prostorovou rychlost*, což usnadňuje výpočty rychlostí různých bodů, které jsou pevně dané vzhledem ke společnému tuhému tělesu.

Tělesová rychlost ξ systému je jeho rychlost vyjádřená v okamžité lokální soustavě souřadnic, jak zachycuje Obr. 5.1a. Tělesová rychlost hraje významnou roli v kinematické i dynamické analýze, kde s její pomocí často popisujeme síly a vazby.

5.4. RYCHLOSTI TUHÉHO TĚLESA



Obrázek 5.1: Srovnání tělesové, světové a prostorové rychlosti robota v rovině, který je reprezentován trojúhelníkem. [18]

Tělesovou rychlost tuhého tělesa otočeného o úhel θ můžeme vypočítat ze světové rychlosti, tím že ji o stejnou hodnotu otočíme zpět, tedy o $-\theta$:

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi^x \\ \xi^y \\ \xi^\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{g}_x \\ \dot{g}_y \\ \dot{g}_\theta \end{pmatrix}. \quad (5.1)$$

Podobně můžeme světovou rychlost určit z tělesové:

$$\dot{g} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \xi = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \xi. \quad (5.2)$$

Nyní spočítáme levou liftovanou akci $T_g \ell_h$, kde $g = (x, y, \theta)$, $h = (u, v, \beta)$ a levá akce, jak jsme víme z vztahu (2.3), je $\ell_h(g) = (x \cos \beta - y \sin \beta + u, x \sin \beta + y \cos \beta + v, \theta + \beta)$:

5. EXPONENCIÁLNÍ ZOBRAZENÍ A LIFTOVANÉ AKCE

$$\begin{aligned}
 T_g \ell_h &= \frac{\partial(\ell_h g)}{\partial g} \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{\partial(x \cos \beta - y \sin \beta + u)}{\frac{\partial x}{\partial(\theta + \beta)}} & \frac{\partial(x \cos \beta - y \sin \beta + u)}{\frac{\partial y}{\partial(\theta + \beta)}} & \frac{\partial(x \cos \beta - y \sin \beta + u)}{\frac{\partial \theta}{\partial(\theta + \beta)}} \\ \frac{\partial(x \sin \beta + y \cos \beta + v)}{\frac{\partial x}{\partial(\theta + \beta)}} & \frac{\partial(x \sin \beta + y \cos \beta + v)}{\frac{\partial y}{\partial(\theta + \beta)}} & \frac{\partial(x \sin \beta + y \cos \beta + v)}{\frac{\partial \theta}{\partial(\theta + \beta)}} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta & 0 \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{5.3}
 \end{aligned}$$

Všimněme si, že velké podobnosti s maticemi ze vztahů (5.1), (5.2). Vyplývá odsud, že akce $T_g \ell_h$ zachovává tělesové rychlosti. Jinými slovy, u každé levé akce $\ell_h g$, která otočí tělesový repér o úhel β , doprovodná levá liftovaná akce $T_g \ell_h$ otočí vektor rychlosti o stejnou hodnotu, čímž zůstane vyjádření repéru nezměněno. Jestliže položíme $h = g^{-1}$ a určíme $T_g \ell_{g^{-1}}$ (tedy do (5.3) dosadíme $\beta = -\theta$), můžeme tělesovou rychlost vyjádřit jako

$$\xi = T_g \ell_{g^{-1}} \dot{g} \in T_e G,$$

což znamená, že tělesovou rychlost můžeme zaměnitelně reprezentovat jako standardně nebo jako vektor v tečném prostoru neutrálního prvku dané grupy (viz Obr. 5.1c). Potom pro světovou rychlost platí

$$\dot{g} = (T_g \ell_{g^{-1}})^{-1} \xi = T_e \ell_g \xi. \tag{5.4}$$

Již jsme zmiňovali, že pravá akce $r^h g$ na $\mathbf{SE}(2)$ najde repér v pozici h vzhledem ke g . Jeho rychlost, kterou nazýváme *prostorovou* ξ^s , je často výhodné hledat jako funkci závislou na \dot{g} . Klasický výpočet je jako vektorový součin rotační rychlosti \dot{g}^θ a změny pozice l , (viz Obr. 5.1d). Nicméně při jejím výpočtu můžeme také využít pravou liftovanou akci:

$$\begin{aligned}
 T_g r^h &= \frac{\partial(r^h g)}{\partial g} \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{\partial(x+u \cos \theta - v \sin \theta)}{\frac{\partial x}{\partial(\theta + \beta)}} & \frac{\partial(x+u \cos \theta - v \sin \theta)}{\frac{\partial y}{\partial(\theta + \beta)}} & \frac{\partial(x+u \cos \theta - v \sin \theta)}{\frac{\partial \theta}{\partial(\theta + \beta)}} \\ \frac{\partial(y+u \sin \theta + v \cos \theta)}{\frac{\partial x}{\partial(\theta + \beta)}} & \frac{\partial(y+u \sin \theta + v \cos \theta)}{\frac{\partial y}{\partial(\theta + \beta)}} & \frac{\partial(y+u \sin \theta + v \cos \theta)}{\frac{\partial \theta}{\partial(\theta + \beta)}} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -(u \sin \theta + v \cos \theta) \\ 0 & 1 & u \cos \theta - v \sin \theta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{5.5}
 \end{aligned}$$

Potom (analogicky jako u levé liftované akce) lze prostorová rychlost vyjádřit jako

$$\xi^s = T_g r^{g^{-1}} \dot{g}.$$

A podobně pro světovou rychlost dostáváme

$$\dot{g} = (T_g r^{g^{-1}})^{-1} \xi^s = T_e r^g \xi^s. \tag{5.6}$$

5.5 Adjungované operátory

V aplikacích je často třeba převádět tělesovou rychlost repéru na jeho prostorovou rychlost nebo naopak. Tato operace odpovídá páru levé a pravé liftované akce, který nazýváme *adjungovaná akce* Ad_g :

$$\xi^s = (T_g r^{g^{-1}})(T_e \ell_g)\xi = \text{Ad}_g \xi.$$

Zobrazení z prostorové rychlosti na tělesovou nazýváme *inverzní adjungovaná akce* $\text{Ad}_g^{-1} = \text{Ad}_{g^{-1}}$:

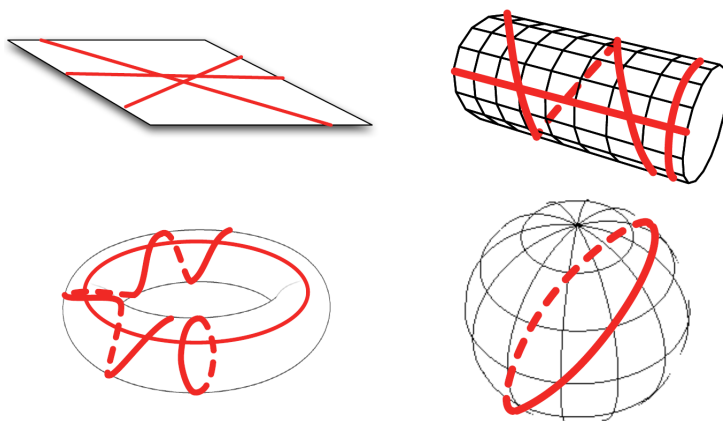
$$\xi = (T_g \ell_{g^{-1}})(T_e r^g)\xi^s = \text{Ad}_g^{-1} \xi^s.$$

Obě rovnice vycházejí ze vztahů (5.4) a (5.6).

5.6 Geodetiky

Chceme-li rozšířit naše úvahy o vzájemně si odpovídajících rychlostech mezi různými konfiguracemi, je vhodné popsat trajektorie, ve kterých se systém napříč konfiguračním prostorem pohybuje s konstantní rychlostí. Takovým trajektoriím říkáme *geodetiky*. Jedná se o zobecnění „rovňé čáry“ do neeklidovského prostoru. Na Lieových grupách rozlišujeme dvě kategorie geodetik. Jedny jsou definované vzhledem ke struktuře variety a představují na nich nejkratší spojnice. Druhým typem jsou geodetiky definované vzhledem ke grupovým akcím, tedy křivky s konstantní grupovou rychlostí.

Nejjednoduššími geodetikami na varietách jsou pohyby s konstantní rychlostí na přímce \mathbb{R}^1 nebo podél kružnice \mathbb{S}^1 . Ve dvourozměrném prostoru se jedná o přímé čáry, které respektují charakter dané variety. Jak ukazuje Obr. 5.2, v rovině se jedná o přímky, na válci o smyčky, spirály, či přímky. Na anuloidu se geodetiky vyskytují jako smyčky a spirály a konečně na sféře ve formě kružnic. Formální definice těchto křivek se opírá o metrickou strukturu variety. Intuitivně geodetiku chápeme jako křivku, která jde z počátečního bodu daným směrem „rovňé“, přičemž zůstává na varietě a spojuje tak body, kterými prochází nejkratší možnou vzdáleností.



Obrázek 5.2: Příklady geodetik na různých varietách: v rovině, na válci, anuloidu a sféře. [18]

5. EXPONENCIÁLNÍ ZOBRAZENÍ A LIFTOVANÉ AKCE

Geodetiky definované vzhledem k akci Lieovy grupy jsou trajektorie s konstantní grupovou rychlostí. Tyto trajektorie odpovídají tokům *levo-invariantních* a *pravo-invariantních* vektorových polí, které po řadě definujeme jako:

$$X_l(g) = T_e l_g \xi,$$

a

$$X_r(g) = T_e r^g \xi^s,$$

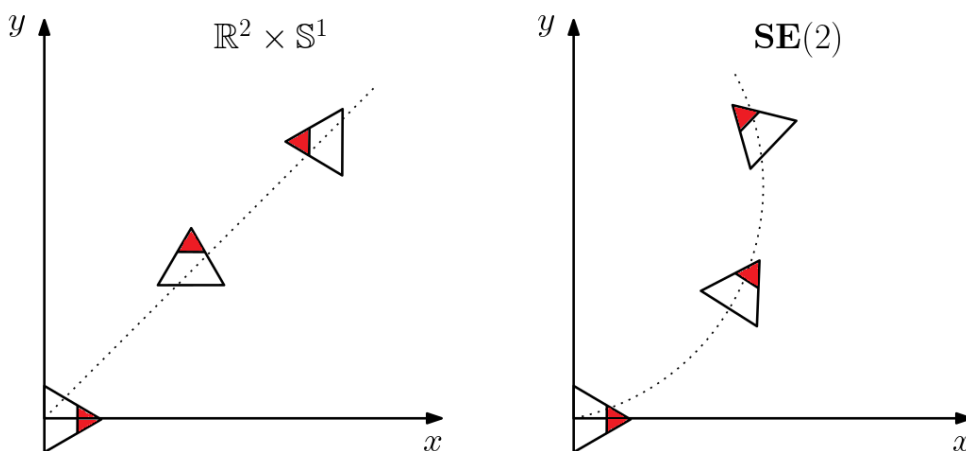
kde tělesová a prostorová rychlost zastávají funkci *generujících vektorů* daných polí. Všechny vektory v těchto polích jsou ekvivalentní vzhledem k dané liftované akci, tudíž tok podél těchto polí má konstantní grupovou rychlost.

U aditivních grup, kde liftovanými akcemi jsou identická zobrazení, jsou geodetiky toky podél konstantních vektorových polí. Následkem toho, grupové geodetiky pro sčítání v rovině $(\mathbb{R}^2, +)$, na válci $(\mathbb{R} \times \mathbb{S}, +)$ a na anuloidu $(\mathbb{T}^2, +)$ odpovídají těm z Obr. 5.2, po kterých se je pohyb konán konstantní rychlostí. Geodetiky na multiplikativních grupách mají formu jinou.

Vraťme se nyní opět k porovnání grup $\mathbf{SE}(2)$ a $(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}, +)$. Již víme, že rozdíl mezi těmito grupami tkví v tom, jakým způsobem se posloupnost grupových akcí řetězí. Na $(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}, +)$ se akce přidávají lineárně a určují tak změny ve světových souřadnicích, zatímco na $\mathbf{SE}(2)$ jsou akce určeny relativně k výsledku předchozí akce a tedy dochází ke změnám lokálně. Stejný rozdíl mezi oběma grupami je i mezi jejich geodetikami.

$(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}, +)$ je aditivní grupa a její liftované akce jsou triviální – stejné rychlosti jsou rovny ve všech konfiguracích. Geodetiky jsou potom „rovné“ čáry procházející varietou $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}$, které, pokud je varieta vtknuta ve vyšší dimenzi, mohou tvořit smyčky či spirály. Na druhou stranu levé a pravé geodetiky na $\mathbf{SE}(2)$ tvoří spirály přímo uvnitř variety $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}$.

Na Obr. 5.3 vidíme porovnání dvou konkrétních geodetik z $(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}, +)$ a $\mathbf{SE}(2)$. Pohyb začíná v počátku s rychlostí $\xi = (1, 1, 1)$. V případě $(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}, +)$ se systém pohybuje po přímce konstantní rychlostí $\dot{g} = T_e l_g \xi$, zatímco rotuje (podobně jako po ledu klouzá roztočený puk). Na druhou u $\mathbf{SE}(2)$ systém, který se pohybuje s rychlostí $\dot{g} = T_e l_g \xi$ zachovává konstantní tělesovou rychlost, a tak spolu se změnou své orientace zakřivuje svou dráhu.



Obrázek 5.3: Srovnání geodetik na $(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}, +)$ a $\mathbf{SE}(2)$.

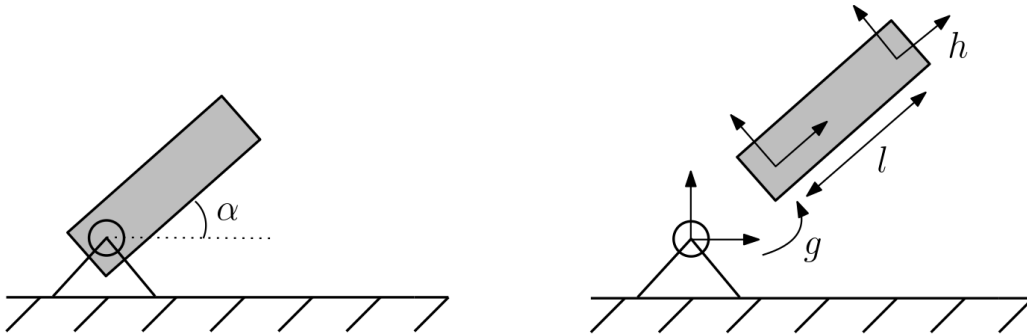
6 Holonomní omezení

Na příkladu jednokolky jsme si ukázali neholonomní vazbu. Zjistili jsme, že nutně nemusí omezit dosažitelný prostor. Nyní se budeme zabývat vazbami holonomními. Opět budeme vše ilustrovat na příkladech. Použity jsou zdroje [10], [11] a [18].

Holonomní omezení ubírají stupně volnosti systému, jinými slovy snižují dimenzi konfiguračního prostoru. Formálně je holonomní omezení definované jako vazebná funkce f na konfiguračním prostoru \mathcal{Q} . Množinu bodů $\mathcal{Q}_0 \subset \mathcal{Q}$ splňujících vazebnou podmínku, tedy pro které platí $f(q_0, t) = 0$ pro všechna $q_0 \in \mathcal{Q}_0$, kde t je proměnná v čase, nazýváme *dosažitelná varieta* omezeného systému. Tuto varietu pak můžeme použít jako nový konfigurační prostor.

Uvažujme článek na rotační vazbě jako vidíme na Obr. 6.1 vlevo. Konfiguračním prostorem je kružnice \mathbb{S}^1 s jedinou zobecněnou souřadnicí α . Systém nicméně můžeme popsat také jako tuhé těleso s danou polohou a orientací $g \in \mathbf{SE}(2)$ vzhledem k vazbě, jak je ukázáno na stejném obrázku vpravo. Vazbu můžeme popsat dvěma holonomními podmínkami: $x = 0$, $y = 0$, čímž redukuje počet parametrů na jeden:

$$\begin{aligned} g &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{SE}(2) \\ &\equiv \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \in \mathbf{SO}(2) \\ &\equiv \alpha \in \mathbb{S}^1. \end{aligned}$$



Obrázek 6.1: Různý přístup popisu jednoduchého článku na rotační vazbě.

Tento přístup je užitečný zejména kvůli své systematickosti, univerzálnosti použití a jednodušší práci se složitějšími objekty. Relativní pozice druhého konce článku h vzhledem ke g je

$$h_g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & l \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Světovou pozicí je součin

$$h = gh_g = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & l \cos \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha & l \sin \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6.1)$$

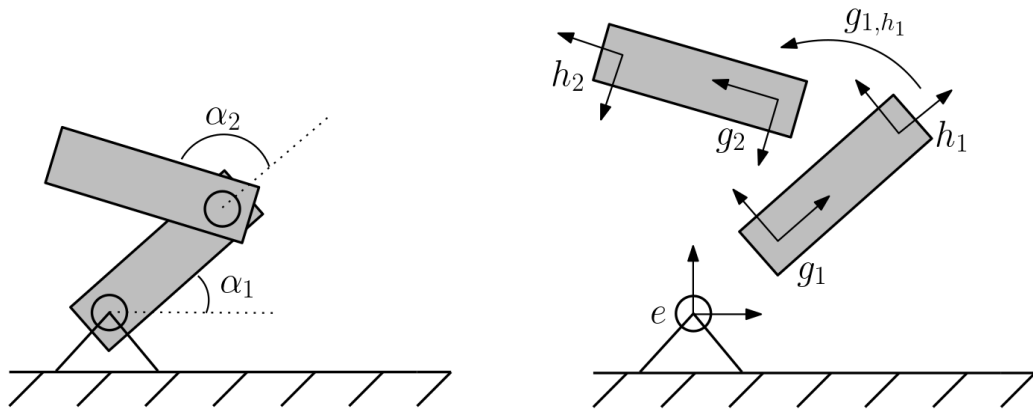
Tuto pozici můžeme interpretovat jako levou akci $l_g h_g$, která posouvá repér s pozicí h_g o g nebo jako pravou akci $r^{h_g} g$, kdy určíme umístění h_g v jiné soustavě souřadnic.

Nyní přidáme další článek, jehož konce označíme g_2, h_2 , jak ilustruje Obr. 6.2. I v tomto případě nám rotační vazba eliminuje stupně volnosti na jeden, (celkově budeme tedy mít dva ze šesti). Relativní pozice obou konců jsou

$$g_{2,h_1} = \begin{pmatrix} \cos \alpha_2 & -\sin \alpha_2 & 0 \\ \sin \alpha_2 & \cos \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

a

$$h_{2,g_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & l_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$



Obrázek 6.2: Systém dvou článků spojený rotační vazbou.

Světové pozice konců určíme jednoduše jako

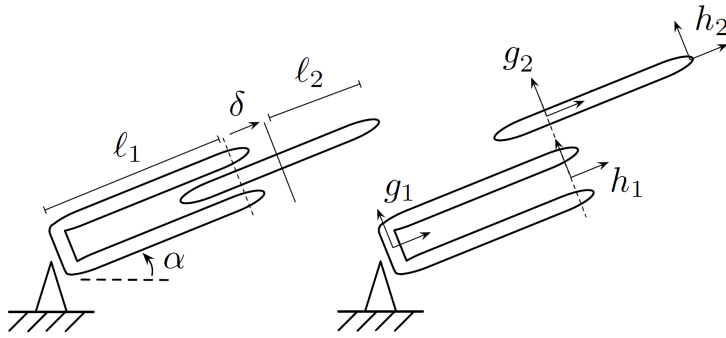
$$g_2 = (g_1 h_{1,g_1}) g_{2,h_1} = h_1 g_{2,h_1} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha_1 + \alpha_2) & -\sin(\alpha_1 + \alpha_2) & l_1 \cos \alpha_1 \\ \sin(\alpha_1 + \alpha_2) & \cos(\alpha_1 + \alpha_2) & l_1 \sin \alpha_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

a

$$h_2 = g_2 h_{2,g_2} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha_1 + \alpha_2) & -\sin(\alpha_1 + \alpha_2) & l_1 \cos \alpha_1 + l_2 \cos(\alpha_1 + \alpha_2) \\ \sin(\alpha_1 + \alpha_2) & \cos(\alpha_1 + \alpha_2) & l_1 \sin \alpha_1 + l_2 \sin(\alpha_1 + \alpha_2) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nahradíme nyní klasický kloub mezi články kloubem prizmatickým, jehož výchylku označíme δ , jak je na Obr. 6.3. Vazebné podmínky potom mají tvar $y = 0$, $\theta = 0$, což opět zredukuje počet parametrů následovně:

$$\begin{aligned} g_{2,h_1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \delta \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{SE}(2) \\ &\equiv \begin{pmatrix} \delta \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \\ &\equiv \delta \in \mathbb{R}^1. \end{aligned}$$



Obrázek 6.3: Systém dvou článků spojených prismatickým kloubem. [18]

Světové pozice pak vycházejí

$$g_2 = h_1 g_{2,h_1} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & (l_1 + \delta) \cos \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha & (l_1 + \delta) \sin \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

a

$$h_2 = g_2 h_{2,g_2} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & (l_1 + \delta + l_2) \cos \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha & (l_1 + \delta + l_2) \sin \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Stejným postupem můžeme konstruovat komplikovanější systémy. S přidáváním dalších článků sice bude vzrůstat složitost matic, nicméně s tím s snadno poradí počítač. Důležité je, že konfigurace každého článku může být reprezentována jako posloupnost relativních pozic předchozích článků.

7 Konfigurační prostor jako hlavní bandl

V předešlých kapitolách jsme mluvili o varietách jako o konfiguračních prostorech. Nyní tuto problematiku více rozvedeme. Uvažujeme-li tuhé těleso, tedy těleso s neměnným tvarem, je jeho konfigurace plně určena polohou a orientací. Nicméně v případě robotů se často jedná o složitější systémy, které se skládají z mnoha tuhých těles, které jsou spojeny vazbami. Potom jsou nutné dodatečné proměnné, které popisují tvar robota. Konfigurační prostor se pak skládá z proměnných popisujících jednak polohu o orientaci (u těch obvykle máme grupovou strukturu), ale také tvar. K tomu nám poslouží aparát fibrovaného prostoru a hlavního bandlu. Závěr kapitoly se věnuje hlavní konexi. Vycházíme ze zdrojů [3], [8], [13], [19] a [25].

7.1 Fibrovaný prostor

Definice 7.1. Nechtě \mathcal{M}, \mathcal{N} jsou variety. Zobrazení $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ nazýváme *submerzí* v bodě $x \in \mathcal{M}$, jestliže hodnost zobrazení f v bodě x (tj. hodnost Jacobiho matice tohoto zobrazení v daném bodě) je rovna dimenzi variety \mathcal{N} . Řekneme, že zobrazení f je submerze, jestliže je submerzí v každém bodě $x \in \mathcal{M}$.

Definice 7.2. *Fibrovaný prostor (bandl)* $(\mathcal{E}, p, \mathcal{M}, \mathcal{S})$ je prostor, který se skládá z variet $\mathcal{E}, \mathcal{M}, \mathcal{S}$ a z hladkého zobrazení $p : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}$. Dále musí ke každému bodu $x \in \mathcal{M}$ existovat otevřené okolí U takové, že existuje difeomorfismus $\psi : \mathcal{E}|U \rightarrow U \times \mathcal{S}$ splňující

$$pr_1 \circ \psi = p,$$

kde jsme symbolem $\mathcal{E}|U$ označili vzor okolí U , tedy $\mathcal{E}|U := p^{-1}(U)$, a kde pr_1 značí projekci na první složku kartézského součinu $U \times \mathcal{S}$.

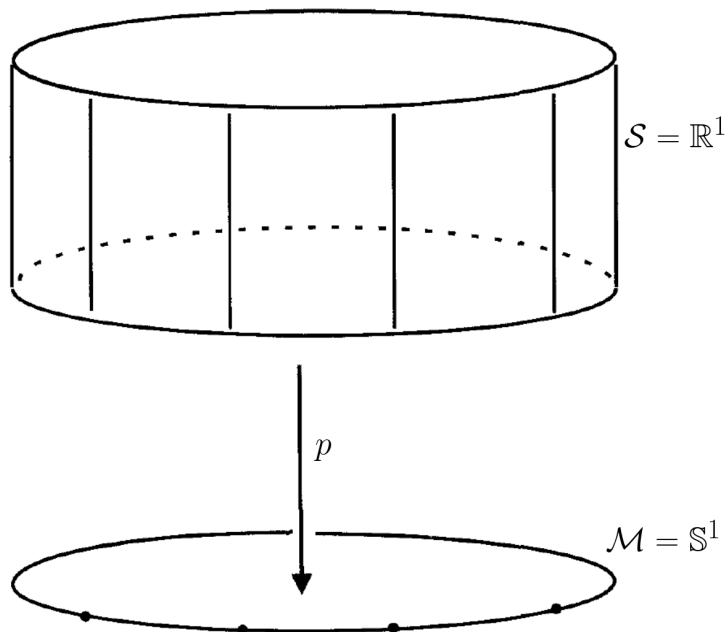
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}|U & \xrightarrow{\psi} & U \times \mathcal{S} \\ & \searrow p & \swarrow pr_1 \\ & U & \end{array}$$

Varietu \mathcal{E} nazýváme *totalním prostorem*, \mathcal{M} *bázovým prostorem*, \mathcal{S} *typickým vláknem* a p je surjektivní submerze, které říkáme *projekce*. Dvojici (U, ψ) nazýváme *fibrovaná mapa* nebo *lokální trivializace* \mathcal{E} .

Definice 7.3. Soubor fibrovaných map (U_α, ψ_α) takových, že okolí (U_α) otevřeně pokrývají varietu \mathcal{M} se nazývá *atlas fibrovaného prostoru*. Pro takový atlas platí $(\psi_\alpha \circ \psi_\beta)^{-1}(x, s) = (x, \psi_{\alpha\beta}(x, s))$, kde zobrazení $\psi_{\alpha\beta} : (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ je hladké, přičemž $\psi_{\alpha\beta}(x, \cdot)$ je difeomorfismus na \mathcal{S} pro všechna $x \in U_{\alpha\beta} := U_\alpha \cap U_\beta$. Zobrazení $\psi_{\alpha\beta}$ nazýváme *přechodovou funkcí* prostoru. Přechodové funkce splňují tzv. *podmínku kocyklu*: $\psi_{\alpha\beta}(x) \circ \psi_{\beta\gamma}(x)$ pro $x \in U_{\alpha\beta\gamma}$ a $\psi_{\alpha\alpha} = \text{Id}_{\mathcal{S}}$ pro $x \in U_\alpha$. Díky platnosti této podmínky se souboru přechodových funkcí $(\psi_{\alpha\beta})$ říká *kocycle přechodových funkcí*.

7.2. HLAVNÍ BANDL

Příklad 7.4. Nejjednodušším příkladem fibrovaného prostoru je triviální bandl. Jedná se o kartézský součin dvou variet, kde pro totální prostor platí $\mathcal{E} = \mathcal{M} \times \mathcal{S}$. Konkrétně nechť je například báze $\mathcal{M} = \mathbb{S}^1$ a vlákno $\mathcal{S} = \mathbb{R}^1$. Potom $\mathcal{E} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^1$ a projekce je $p : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$. Situaci znázorňuje Obr. 7.1.



Obrázek 7.1: Triviální fibrovaný bandl $(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^1, p, \mathbb{S}^1, \mathbb{R}^1)$.

7.2 Hlavní bandl

Definice 7.5. Nechť G je Lieova grupa a nechť $(\mathcal{E}, p, \mathcal{M}, \mathcal{S})$ je fibrovaný prostor. *Struktura G -bandlu* na fibrovaném prostoru se z skládá ze dvou částí:

- (i) z levé akce Lieovy grupy na typickém vláknu $\ell : G \times \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$,
- (ii) z atlasu fibrovaného prostoru (U_α, ψ_α) , jehož přechodové funkce $(\psi_{\alpha\beta})$ působí na \mathcal{S} přes G -akci. To znamená, že existují taková zobrazení, která splňují podmínku kocyklu $\varphi_{\alpha\beta}(x)\varphi_{\beta\gamma}(x) = \varphi_{\alpha\gamma}(x)$ pro $x \in U_{\alpha\beta\gamma}$ a $\varphi_{\alpha\alpha}(x) = e$, a pro která platí $\psi_{\alpha\beta}(x, s) = \ell(\varphi_{\alpha\beta}(x), s) = \varphi_{\alpha\beta}(x) \cdot s$.

Fibrovaný prostor se strukturou G -bandlu nazýváme G -bandl. Atlasu fibrovaného prostoru z podmínky (ii) říkáme G -atlas. Soubor zobrazení $(\varphi_{\alpha\beta})$ nazýváme ve stejném duchu kocykl přechodových funkcí, ale tentokrát pro G -bandl. Říkáme, že G je *strukturní grupa* bandlu.

Definice 7.6. *Hlavní (fibrovaný) bandl* $(\mathcal{P}, p, \mathcal{M}, G)$ je G -bandl s Lieovou grupou G jako typickým vlákem, kde levá akce na G je levá translace.

Podle definice 7.5 máme atlas $(U_\alpha, \varphi_\alpha : \mathcal{P}|U_\alpha \rightarrow G)$ takový, že pro kocykl přechodných funkcí $(\varphi_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \rightarrow G)$ platí $\varphi_\alpha \varphi_\beta^{-1}(x, a) = (x, \varphi_{\alpha\beta}(x) \cdot a)$. Tento atlas nazýváme *atlas hlavního bandlu*.

Každý hlavní bandl má jedinečnou pravou akci $r : \mathcal{P} \times G \rightarrow \mathcal{P}$, které říkáme *hlavní pravá akce*. Je daná vztahem $\varphi_\alpha(r(\varphi_\alpha^{-1}(x, a), g)) = (x, ag)$.

7. KONFIGURAČNÍ PROSTOR JAKO HLAVNÍ BANDL

Příklad 7.7. Necht' je \mathcal{M} varieta dimenze n . Lineární repér K_q v bodě $q \in \mathcal{M}$ je báze $\{k_1, \dots, k_n\}$ tečného prostoru $T_q\mathcal{M}$. Označme $L(\mathcal{M})$ jako množinu všech lineárních repérů K_q ve všech bodech q variety \mathcal{M} . Dále definujme zobrazení

$$p : L(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{M}$$

$$K_q \mapsto q,$$

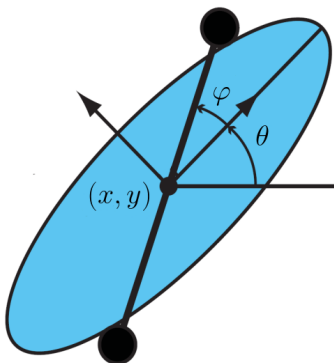
kteřé lineárnímu repéru K_q přiřazuje bod q . Dá se ukázat, že $(L(\mathcal{M}), p, \mathcal{M}, \mathbf{GL}(n; \mathbb{R}))$ tvoří hlavní fibrovaný bandl. Pravá akce obecné lineární grupy transformuje repér $K_q = \{k_1, \dots, k_n\}$ v jiný repér $L_q = K_q A = \{l_1, \dots, l_n\}$, kde $A \in \mathbf{GL}(n; \mathbb{R})$, který je definovaný opět v bodě q bázového prostoru \mathcal{M} . Jinými slovy „posunutím“ po typickém vlákne, které představuje a umožňuje $\mathbf{GL}(n; \mathbb{R})$, dostáváme pouze jiné vyjádření stejného bodu.

Jak již bylo zmíněno na začátku kapitoly, u složitějších robotů nestačí popsat jen jejich polohu a orientaci, nýbrž i jejich tvar. Konfigurační prostor potom obvykle značíme

$$\mathcal{Q} = G \times \mathcal{M},$$

kde G je jako Lieova grupa typickým vlákem, které udává polohu a orientaci, a \mathcal{M} je bázovým prostorem specifikujícím tvar robota. Jedná se tedy o strukturu hlavního bandlu, a to dokonce o triviální hlavní bandly, protože $\mathcal{Q} = G \times \mathcal{M}$ platí globálně. Uveďme si příklad.

Příklad 7.8. Mějme dvě tuhá tělesa v rovině, která jsou spojena rotační vazbou a tedy se mohou vzhledem k sobě otáčet, jak ukazuje Obr. 7.2. Pozici robota určují souřadnice (x, y, θ) a úhel mezi oběma tělesy úhel φ . Konfigurační prostor je hlavní triviální bandl $\mathcal{Q} = \mathbf{SE}(2) \times \mathbb{S}^1$.



Obrázek 7.2: Dvě tuhá tělesa v rovině spojená rotační vazbou.

Projekce asociovaná s fibrovaným prostorem indukuje *liftovanou projekci* na tečném bandlu variety

$$p : \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{M} \implies Tp : T\mathcal{Q} \rightarrow T\mathcal{M}.$$

Liftovaná projekce nám umožňuje rozložit tečný prostor na dva podprostory.

Definice 7.9. Necht' \mathcal{Q} je fibrovaný prostor s projekcí $p : \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{M}$. *Vertikální prostor* V_q v bodě $q \in \mathcal{Q}$ definujeme jako jádro liftované projekce, tedy

$$V_q = \ker(Tp).$$

Horizontální prostor H_q definujeme jako doplněk vertikálního prostoru, tedy aby platilo

$$T_q\mathcal{Q} = V_q \oplus H_q.$$

7.3. HLAVNÍ KONEXE

Již víme, že Lieova algebra prostřednictvím exponenciálního zobrazení reprezentuje celou Lieovu grupu. Nyní tuto reprezentaci rozšíříme na hlavní fibrované bandly.

Definice 7.10. Mějme triviální hlavní fibrovaný bandl $\mathcal{Q} = G \times \mathcal{M}$ a levou akci $\ell_g q : \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{Q}$. *Generátor Lieovy grupy* na \mathcal{Q} definujeme jako

$$\begin{aligned} \xi_{\mathcal{Q}} : \mathfrak{g} &\rightarrow T\mathcal{Q} \\ \xi &\mapsto \frac{d}{dt} (\ell_{\exp t\xi} q)_{t=0}. \end{aligned}$$

Tvrzení 7.11. *Generátor Lieovy grupy můžeme pro daný hlavní fibrovaný bandl $\mathcal{Q} = G \times \mathcal{M}$ zapsat jako*

$$\xi_{\mathcal{Q}} \ell_g x = (T_e r^g \xi, \dot{x}).$$

Důkaz. Větu dokážeme použitím Def. 7.10:

$$\begin{aligned} \xi_{\mathcal{Q}} \ell_g x &= \frac{d}{dt} (\ell_{\exp t\xi} (\ell_g x))_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} (\ell_{\exp t\xi} g x)_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} (\ell_{r^g \exp t\xi} x)_{t=0} \\ &= (T_e r^g \xi (\exp t\xi), \dot{x})_{t=0} \\ &= (T_e r^g \xi, \dot{x}). \end{aligned}$$

□

Příklad 7.12. Nechť $g = (x, y, \theta) \in \mathbf{SE}(2)$ a $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathfrak{se}(2)$. Využijeme vypočtené liftované zobrazení z dřívější kapitoly (5.5), a s použitím Tvr. 7.11 spočteme generátor grupy $\mathbf{SE}(2)$:

$$T_e r^g = T_h r^g \Big|_{h=e} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -x \sin \alpha - y \cos \alpha \\ 0 & 1 & x \cos \alpha - y \sin \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{u=0, v=0, \alpha=0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -y \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Odtud potom

$$\xi_{\mathbf{SE}(2)}(g) = T_e r^g \xi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -y \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 - y\xi_3 \\ \xi_2 + x\xi_3 \\ \xi_3 \end{pmatrix}.$$

Nyní můžeme přejít k definici dalšího pojmu.

7.3 Hlavní konexe

Definice 7.13. Nechť $\mathcal{Q} = G \times \mathcal{M}$ je triviální hlavní fibrovaný bandl s projekcí $p : \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{M}$, potom zobrazení $\Phi : T\mathcal{Q} \rightarrow \mathfrak{g}$ nazveme *hlavní konexe*, jestliže splňuje následující podmínky:

$$(i) \quad \Phi(\xi_{\mathcal{Q}}(q)) = \xi \quad \forall \xi \in \mathfrak{g}, q \in \mathcal{Q},$$

7. KONFIGURAČNÍ PROSTOR JAKO HLAVNÍ BANDL

$$(ii) \Phi(T_q \ell_g \dot{q}) = \text{Ad}_g \Phi(\dot{q}) \quad \forall q \in \mathcal{Q}, \dot{q} \in T_q \mathcal{Q}, g \in G.$$

Poznámka 7.14. První podmínka říká, že hlavní konexe Φ zobrazuje vektor z tečného prostoru, který vznikl generátorem Lieovy grupy, zpět na prvek Lieovy algebry, který jej vytvořil. Druhá podmínka udává, že jestliže jsou dva prvky tečného prostoru spojeny liftovanou akcí $T_q \ell_g$, pak odpovídající prvky Lieovy algebry těchto vektorů jsou spojeny adjungovaným zobrazením.

Pojem hlavní konexe nám umožňuje určit horizontální prostor jiným způsobem.

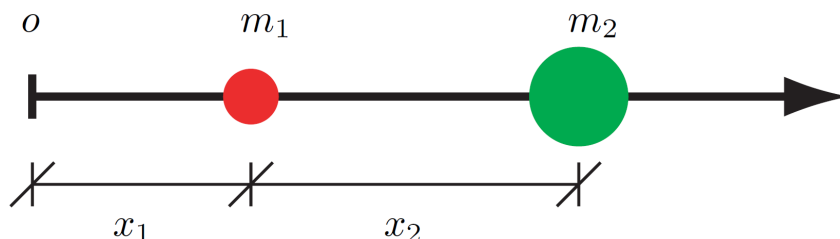
Tvrzení 7.15. *Mějme triviální hlavní fibrovaný bandl $\mathcal{Q} = G \times \mathcal{M}$, projekci $p : \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{M}$ a vertikální prostor V_q v bodě $q \in \mathcal{Q}$. Potom pro horizontální prostor platí $H_q = \ker \Phi(\dot{q})$.*

Důkaz. Budeme předpokládat, že tvrzení platí. Při daném $\dot{q} \in T_q \mathcal{Q}$ položme $\xi = \Phi(\dot{q})$. Potom dostáváme $\Phi(\dot{q} - \xi_{\mathcal{Q}}(q)) = \Phi(\dot{q}) - \Phi(\xi_{\mathcal{Q}}(q)) = \xi - \xi = 0$. Odtud plyne, že $(\dot{q} - \xi_{\mathcal{Q}}(q)) \in H_q$. Dále víme, že $T_q p(\xi_{\mathcal{Q}}(q)) = 0$, tedy $\xi_{\mathcal{Q}}(q) \in V_q \mathcal{Q}$. Označme $\text{hor}(\dot{q}) = (\dot{q} - \xi_{\mathcal{Q}}(q))$ a $\text{ver}(\dot{q}) = \xi_{\mathcal{Q}}(q)$. Odtud

$$\begin{aligned} \text{hor}(\dot{q}) &= \dot{q} - \xi_{\mathcal{Q}}(q) = \dot{q} - \text{ver}(\dot{q}) \\ \dot{q} &= \text{hor}(\dot{q}) + \text{ver}(\dot{q}). \end{aligned}$$

Každý prvek tečného prostoru jsme tedy schopni vyjádřit jako součet jeho horizontální části s vertikální. To znamená $T_q \mathcal{Q} = V_q \oplus H_q$, což odpovídá Def. 7.9. \square

Vidíme, že jádra projekčního zobrazení a hlavní konexe definují vertikální, resp. horizontální podprostor tečného prostoru.



Obrázek 7.3: Konfigurace dvou tuhých těles, která se pohybují po přímce. [19]

Příklad 7.16. Uvažujme systém dvou tuhých těles m_1, m_2 , která se pohybují podél přímky. Pozice prvního tělesa je určena vzhledem k počátku, pozice druhého tělesa naproti tomu relativně k prvnímu. Situaci znázorňuje Obr. 7.3. Konfigurační prostor je varieta $\mathcal{Q} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Jelikož $(\mathbb{R}, +)$ je Lieova grupa, \mathcal{Q} je hlavní bandl. Nyní pro konfiguraci $q = (x_1, x_2) \in \mathcal{Q}$ spočítáme projekční zobrazení. Dostáváme

$$\begin{aligned} p : \mathcal{Q} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) &\mapsto x_2, \end{aligned}$$

a pro rychlost $\dot{q} = (\dot{x}_1, \dot{x}_2)$ liftovanou projekci:

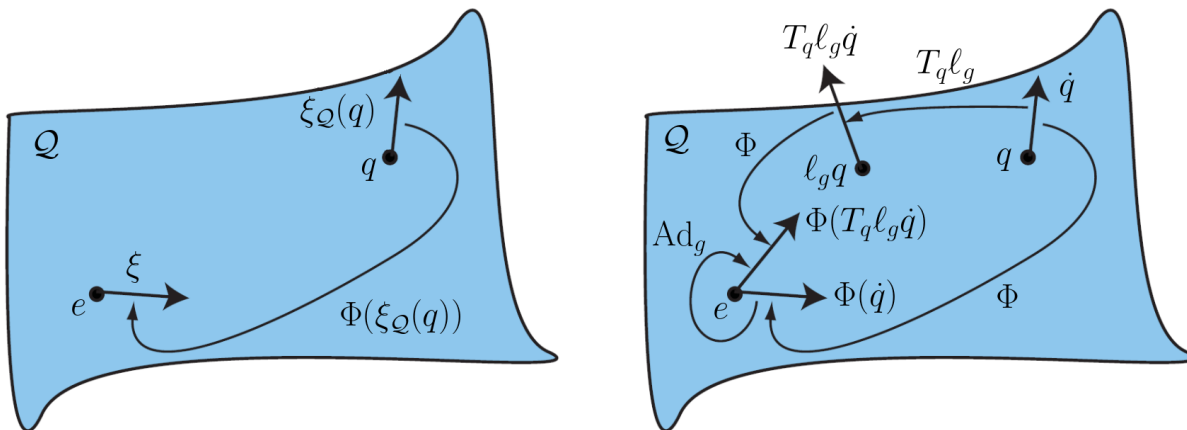
$$\begin{aligned} Tp : T\mathcal{Q} &\rightarrow T\mathbb{R} \\ (\dot{x}_1, \dot{x}_2) &\mapsto \dot{x}_2. \end{aligned}$$

7.3. HLAVNÍ KONEXE

Zvolme hlavní konexi takto:

$$\Phi((\dot{x}_1, \dot{x}_2)) = \dot{x}_1 + \phi(x_1, x_2)\dot{x}_2.$$

Toto zobrazení splňuje podmínky v Def. 7.13. Exponenciální zobrazení Lieovy grupy $(\mathbb{R}, +)$ je $\exp(t\xi) = t\xi$ a generátor je dán $\xi_{\mathcal{Q}}(q) : \xi \mapsto (\xi, 0)$. Na Obr. 7.4 je znázorněn význam hlavní konexe pro náš příklad. Vlevo je vidět, jak hlavní konexe zobrazuje vektor zpět na prvek Lieovy algebry, který daný vektor vygeneroval. Vpravo je znázorněna souvislost s adjungovaným zobrazením.

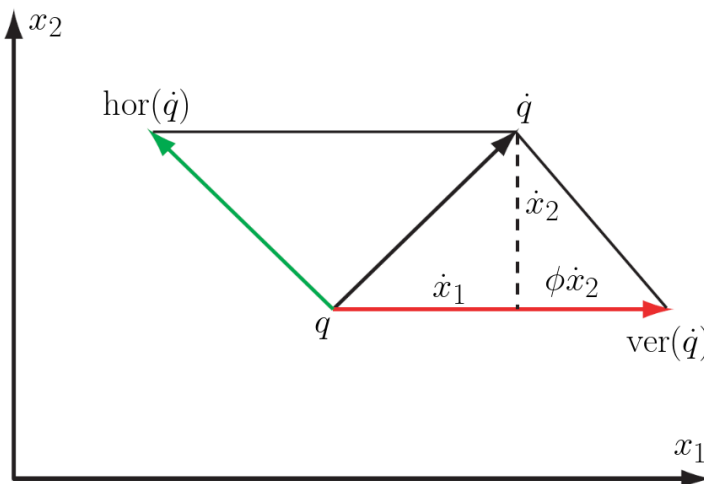


Obrázek 7.4: Znázornění a význam hlavní konexe.

Dále určíme vertikální a horizontální složku rychlosti $\dot{q} \in T_q \mathcal{Q}$:

$$\begin{aligned} \text{ver}(\dot{q}) &= \Phi(\dot{q})_{\mathcal{Q}} = \Phi((\dot{x}_1, \dot{x}_2))_{\mathcal{Q}} = (\dot{x}_1 + \phi(x_1, x_2)\dot{x}_2)_{\mathcal{Q}} = (\dot{x}_1 + \phi(x_1, x_2)\dot{x}_2, 0), \\ \text{hor}(\dot{q}) &= \dot{q} - \text{ver}(\dot{q}) = (\dot{x}_1, \dot{x}_2) - (\dot{x}_1 + \phi(x_1, x_2)\dot{x}_2, 0) = (-\phi(x_1, x_2)\dot{x}_2, \dot{x}_2). \end{aligned}$$

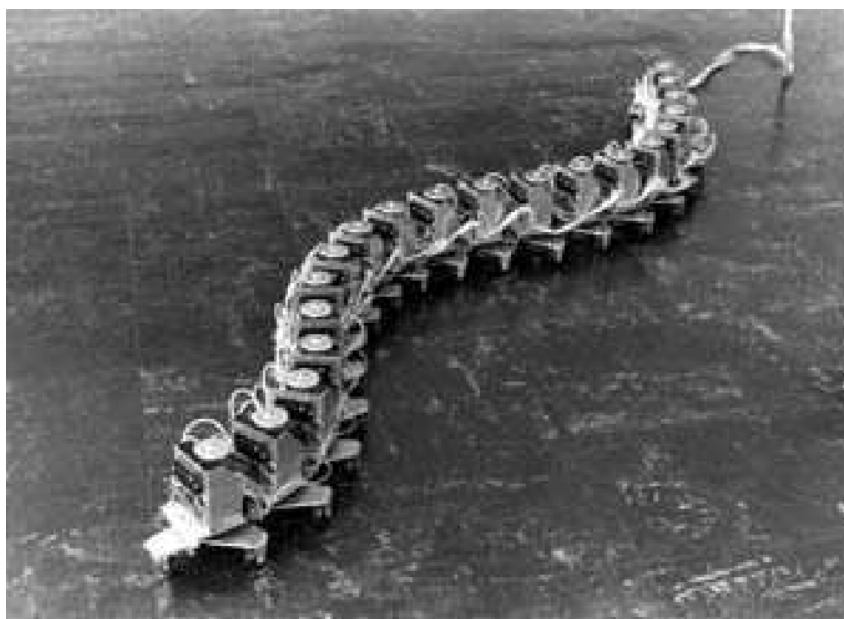
Grafické znázornění vertikální a horizontální složky rychlosti je na Obr. 7.6. Všimněme si, že pohyb v bázi, tedy čistě horizontální část rychlosti, se vyskytne pouze v případě, kdy se těleso m_2 pohybuje rychlostí \dot{x}_2 a těleso m_1 rychlostí rychlostí $-\phi(x_1, x_2)\dot{x}_2$. Jinými slovy jestliže je $\phi(x_1, x_2) \neq 0$, potom horizontální bázový pohyb vyvolává vertikální fibrovaný pohyb.



Obrázek 7.5: Vertikální a horizontální část rychlosti $\dot{q} = (\dot{x}_1, \dot{x}_2)$.

7.4 Hadovitý robot

Velkou inspirací robotiky je příroda. Jednou z prvních myšlenek bylo sestavit lidskou ruku. Později se objevili roboti imitující jiné živočichy a to, jakým způsobem se pohybují, tj. jejich lokomoci. Lokomoce je souhrn pohybů pomocí vnitřních změn tvaru systému a jeho interakce s prostředím. Důležitým příkladem je právě hadovitý robot. Obecně se jedná řetěz tuhých těles, která jsou spojena rotační vazbou. Modelovat takového robota jako celek není snadná záležitost. Zejména je obtížné optimalizovat boční (stranovou) vazebnou sílu. Můžeme sice použít klasické metody jako Newton-Eulerovu nebo metodu Lagrangianu, ale nejsou explicitní. Když se oproti tomu podíváme do přírody a pozorujeme pohyb zvířat jako je let ptáků, chůze koček, běh koňů, plazení se hadů nebo plavání ryb, pozorujeme, že pohyb je způsobený změnou tvaru v závislosti na prostředí. Tyto interní pohyby se často objevují v cyklicky a jsou známé jako tzv. gaity. Pohyb je tedy způsobem těmito gaity a prostředím. Boční vazebná síla reaguje na prostředí. Pokud tedy tuto sílu chceme optimalizovat, je nutné sestavit model, který umí popsat vztahy mezi pohybem, gaity a právě vazebnou silou. Aparátem, který to dokáže, je právě teorie fibrovaného prostoru. Více o této problematice pojednávají [1], [19], [22] a [26]. Tříčlankovým hadem v klasickém pojetí se naproti tomu zabývá [14].



Obrázek 7.6: První hadovitý robot ACM-III z roku 1972. [26]

Závěr

Předmětem práce bylo ukázat význam teorie Lieových grup a souvisejících geometrických struktur v kinematice a robotice. Jednotlivé pojmy a koncepty byly vždy ukázány na příkladech a byl také ukázán jejich praktický význam. Kinematické hledisko, které zde bylo rozebráno, je samozřejmě jen jedna část robotiky. Velkou roli hraje dále dynamika, která analyzuje vliv sil a momentů, které na robota působí a s ní spojená říditelnost a optimalizace. Důležité je také hledisko statiky, tedy vliv sil, které na robota působí v klidu a mohou způsobit jeho deformace. Neméně zásadní je také softwarová implementace. Všechny tyto odvětví by bylo vhodné důkladně rozebrat, nicméně zásadně převyšují úroveň diplomové práce, jak nastiňují i použité rozsáhlé monografie. Tato práce slouží jako úvod do celé problematiky a význam tkví ve vyzdvihnutí geometrického hlediska, čímž se práce odlišuje od jiných na podobné úrovni, a také prezentace teorie přístupnou a doufám i atraktivní formou.

Literatura

- [1] LIPTÁK, Tomáš. Geometrické metódy pre modelovanie a riadenie pohybu vlnivej lokómócie planárneho neholonómneho hadovitého robota v otvorenej slučke. Košice, 2016. Dizertační práce. Technická univerzita v Košiciach. Vedoucí práce Prof. Ing. Michal Kelemen, PhD.
- [2] HALL, Brian C. Lie groups, Lie algebras, and representations: an elementary introduction. Second edition. New York: Springer, [2015]. Graduate texts in mathematics, 222. ISBN 978-3-319-13466-6.
- [3] KOLAR, Ivan, Peter W. MICHOR a Jan SLOVAK. Natural operations in differential geometry. New York: Springer-Verlag, c1993. ISBN 0387562354.
- [4] KARGER, Adolf a Marie KARGEROVÁ. Základy robotiky a prostorové kinematiky. Praha: České vysoké učení technické, 2000. ISBN 80-01-02183-1.
- [5] KOLÁŘ, Ivan. Úvod do globální analýzy. Brno: Masarykova univerzita v Brně, 2003. ISBN 80-210-3205-7.
- [6] MUNKRES, James. Topology. Edinburgh Gate, Harlow Essex, CM20 2JE: Pearson Education Limited 2014, 2014. ISBN 978-1-292-02362-5.
- [7] SCHLICHTKRULL, Henrik. Differentiable manifolds: Lecture Notes for Geometry 2. Copenhagen: Department of Mathematics, University of Copenhagen, 2008.
- [8] ISHAM, C. J. Modern differential geometry for physicists. 2nd ed. River Edge, N.J.: World Scientific, c1999. ISBN 981-02-3555-0.
- [9] TORRES, Leonardo A. B. Introduction to Geometric Control Theory: Motivation and Fundamentals. 2016.
- [10] FLYGARE, Mattias. Holonomic versus nonholonomic constraints. Karlstad, 2012. C-level thesis. Faculty of Technology and Science, Karlstads universitet. Vedoucí práce Jürgen Fuchs.
- [11] KULHÁNEK, Petr. TF1 Teoretická mechanika [online]. In: . Praha, 2016, s. 104 [cit. 2022-05-19]. Dostupné z: <https://www.aldebaran.cz/studium/mechanika.pdf>
- [12] PODOLSKÝ, Jiří. Teoretická mechanika v jazyce diferenciální geometrie: Studijní text k prosemináři TMF069 „Proseminář teoretické fyziky 1“. Praha: Ústav teoretické fyziky, Matematicko-fyzikální fakulta, Univerzita Karlova v Praze, 2006.
- [13] BOOTHBY, William M. An introduction to differentiable manifolds and Riemannian geometry. New York: Academic Press, 1975. Pure and applied mathematics (Academic Press), 63. ISBN 0-12-116050-5.

- [14] MAREČEK, T. Řízení neholonomních mechanismů. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2018. 51 s. Vedoucí bakalářské práce doc. Mgr. Petr Vašík, Ph.D.
- [15] STILLWELL, John. Naive lie theory. London: Springer, c2008. ISBN 978-0-387-78214-0.
- [16] EPSTEIN, M. a Marek ELZANOWSKI. Material inhomogeneities and their evolution: a geometric approach. Berlin: Springer, c2007. ISBN 978-3-540-72372-1.
- [17] SLOVÁK, Jan. Geometrické struktury na varietách: Učební text k přednáškám. Brno: Masarykova univerzita v Brně, 1999.
- [18] CHOSET, Howie a Ross L. HATTON. An Introduction to Geometric Mechanics and Differential Geometry. 2011.
- [19] SHAMMAS, Elie A. Generalized Motion Planning for Underactuated Mechanical Systems. Pittsburgh, Pennsylvania, 2006. Dissertation thesis,. Carnegie Mellon University. Vedoucí práce Howie Choset.
- [20] CHOSET, Howie M. Principles of robot motion: theory, algorithms, and implementation. Cambridge, Mass.: MIT Press, c2005. ISBN 0-262-03327-5.
- [21] OSTROWSKI, J., J. BURDICK, A.D. LEWIS a R.M. MURRAY. The mechanics of undulatory locomotion: the mixed kinematic and dynamic case. Proceedings of 1995 IEEE International Conference on Robotics and Automation. IEEE, 1995, 1945-1951. ISBN 0-7803-1965-6. Dostupné z: doi:10.1109/ROBOT.1995.525549
- [22] GUO, Xian, ShuGen MA, Bin LI, MingHui WANG a YueChao WANG. Modeling and optimal torque control of a snake-like robot based on the fiber bundle theory. Science China Information Sciences [online]. 2015, 58(3), 1-13 [cit. 2022-05-19]. ISSN 1674-733X. Dostupné z: doi:10.1007/s11432-014-5253-y
- [23] BÍMOVÁ, Daniela. Kinematická geometrie n-rozměrného euklidovského prostoru. Praha, 2006. Disertační práce. Univerzita Karlova v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta, Katedra didaktiky matematiky. Vedoucí práce Prof. RNDr. Adolf KARGER, DrSc.
- [24] MURRAY, Richard M., Zexiang LI a Shankar SASTRY. A mathematical introduction to robotic manipulation. Boca Raton: CRC Press, c1994. ISBN 9780849379819.
- [25] SHOSHICHI, Kobayashi a Katsumi NOMIZU. Foundations of differential geometry: Volume 1. Interscience publishers a division of John Wiley Sons, New York – London, 1963.
- [26] ALI, Shaukat. Newton-Euler approach for bio-robotics locomotion dynamics: from discrete to continuous systems. Nantes, France, 2011. Dissertation thesis. École des Mines de Nantes. Vedoucí práce Boyer Frédéric.

[27] Dimensions and Distortions. Mathigon [online]. [cit. 2022-05-19]. Dostupné z: https://th.mathigon.org/world/Dimensions_and_Distortions

[28] VACHÁLEK, Ján a Gergely TAKÁCS. Robotika. V Bratislave: Slovenská technická univerzita v Bratislave, 2014. Edícia vysokoškolských učebníc (Slovenská technická univerzita). ISBN 978-80-227-4163-7.

Seznam obrázků

1.1	Různé vazby mechanického systému. [11]	13
1.2	Příklady topologicky ekvivalentních objektů.	15
1.3	Příklady objektů, které nejsou topologicky ekvivalentní.	15
1.4	Čtverec není difeomorfní s kružnicí, ale čtverec se zaoblenými rohy již ano.	16
1.5	Dvourozměrná topologická varieta M .	16
1.6	Dvourozměrná diferencovatelná varieta \mathcal{M} .	17
1.7	Přímka \mathbb{R}^1 a příklady systémů, které reprezentuje.	17
1.8	Kružnice \mathbb{S}^1 a příklady systémů, které reprezentuje. Parametrizace bývá obvykle 0 až 2π radiánů, nebo 0 až 1 oběhů.	18
1.9	Rovina \mathbb{R}^2 a příklady systémů, které reprezentuje.	18
1.10	Válec $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{S}^1$, příklad systému, který reprezentuje, a jeho rovinná reprezentace.	19
1.11	Torus $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, příklad systému, který reprezentuje, a jeho rovinná reprezentace.	19
1.12	Torus \mathbb{T}^2 má dvě nezávislé, „nepřechodné“ smyčky, což je rozdíl oproti sféře \mathbb{S}^2 , kde jsme schopni smyčku zdeformovat v jinou, nebo ji zúžit do bodu. [27]	20
2.1	Tuhé těleso můžeme definovat jako množinu bodů, jejichž vzájemná vzdálenost je pevná (vlevo) nebo vhodněji jako množinu bodů, které mají pevnou vzdálenost vzhledem k pohyblivé tělesové soustavě (vpravo).	23
2.2	Interpretace levé akce $l_h(g)$ grupy $\mathbf{SE}(2)$ jako změna pozice, která se skládá z otočení a posunutí. [18]	26
2.3	Pravé akce $r^h(g)$ grupy $\mathbf{SE}(2)$ najde souřadnice tělesového repéru v pozici h relativně ke g . [18]	26
2.4	Porovnání grupy $(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1, +)$ a $\mathbf{SE}(2)$.	27
3.1	Tečný prostor v bodě x variety \mathcal{M} .	29
4.1	Jednokolka. [20]	31
4.2	Vektorové pole $g_1(x) = [\cos x_3, \sin x_3, 0]^T$ (pro konstantní hodnotu x_3), a $g_2(x) = [0, 0, 1]^T$. [20]	31
4.3	Integrální křivka vektorového pole. [20]	33
4.4	Pohyb jednokolky určený Lieovou závorkou dvou vektorových polí začínající v počátku. [20]	36
4.5	Foliace stavového prostoru distribuce $\text{span}(h_1, h_2, h_3)$. [20]	38
5.1	Srovnání tělesové, světové a prostorové rychlosti robota v rovině, který je reprezentován trojúhelníkem. [18]	42
5.2	Příklady geodetik na různých varietách: v rovině, na válci, anuloidu a sféře. [18]	44
5.3	Srovnání geodetik na $(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}, +)$ a $\mathbf{SE}(2)$.	45
6.1	Různý přístup popisu jednoduchého článku na rotační vazbě.	46
6.2	Systém dvou článků spojený rotační vazbou.	47
6.3	Systém dvou článků spojených prizmatickým kloubem. [18]	48
7.1	Triviální fibrovaný bandl $(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^1, p, \mathbb{S}^1, \mathbb{R}^1)$.	50
7.2	Dvě tuhá tělesa v rovině spojená rotační vazbou.	51
7.3	Konfigurace dvou tuhých těles, která se pohybují po přímce. [19]	53
7.4	Znázornění a význam hlavní konexe.	54
7.5	Vertikální a horizontální část rychlosti $\dot{q} = (\dot{x}_1, \dot{x}_2)$.	54

7.6 První hadovitý robot ACM-III z roku 1972. [26]	55
--	----