VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA INFORMAČNÍCH TECHNOLOGIÍ
FACULTY OF INFORMATION TECHNOLOGY

ÚSTAV INTELIGENTNÍCH SYSTÉMŮ
DEPARTMENT OF INTELLIGENT SYSTEMS

FUZZY PODOBNOSTI A JEJICH APLIKACE

FUZZY SIMILARITIES AND THEIR APPLICATIONS

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE
BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE SOPHIA HALÁSOVÁ
AUTHOR

VEDOUCÍ PRÁCE doc. RNDr. DANA HLINĚNÁ, Ph.D.
SUPERVISOR

BRNO 2025

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ FAKULTA INFORMAČNÍCH TECHNOLOGIÍ

Zadání bakalářské práce

163453

Ústav: Ústav inteligentních systémů (UITS)
Studentka: **Halásová Sophia**
Program: Informační technologie
Název: **Fuzzy podobnosti a jejich aplikace**
Kategorie: Umělá inteligence
Akademický rok: 2024/25

Zadání:

1. Seznamte se s problematikou klasické relace podobnosti a možnostmi její aplikace.
2. Nastudujte si problematikou fuzzy množin a relací.
3. Seznamte se s problematikou fuzzy podobností.
4. Zkoumejte vlastnosti fuzzy podobností a nové způsoby jejich konstrukce.
5. Dle pokynů vedoucí využijte získané teoretické výsledky pro možné praktické aplikace.

Literatura:

1. E.P. Klement, R. Mesiar, E. Pap, Triangular norms, Berlin, Heidelberg, Germeny, Springer, 2000
2. Kolesárová, A., Kováčová, M., Fuzzy množiny a ich aplikácie, STU v Bratislave, 2004
3. Torra, V., Mesiar, R., De Baets, B., Aggregation Functions in Theory and in Practice, Springer, 2018

Při obhajobě semestrální části projektu je požadováno:
První tři body zadání.

Podrobné závazné pokyny pro vypracování práce viz https://www.fit.vut.cz/study/theses/

Vedoucí práce: **Hliněná Dana, doc. RNDr., Ph.D.**
Vedoucí ústavu: Kočí Radek, Ing., Ph.D.
Datum zadání: 1.11.2024
Termín pro odevzdání: 14.5.2025
Datum schválení: 31.10.2024

Abstrakt

Táto bakalárska práca sa zaoberá problematikou fuzzy podobnosti a porovnávania fuzzy grafov. Hlavným cieľom je definovať a implementovať postup na určenie miery podobnosti medzi dvojicou fuzzy grafov. Úvod práce sa venuje teoretickému základu klasických a fuzzy množín i grafov, ako aj izomorfizmu grafov. V hlavnej časti práce je popísaný návrh postupu porovnávania fuzzy grafov a výpočtu ich podobnosti vrátane zapojenia metriky fuzzy twin-width. Výsledkom je webová aplikácia, ktorá umožňuje kreslenie grafov, výpočty podobnosti a práce s fuzzy twin-width. Slúži ako vzdelávací nástroj pre predmet Matematické základy fuzzy logiky (IMF), s možnosťou ďalšieho rozšírenia.

Abstract

This bachelor thesis deals with the topic of fuzzy similarity and the comparison of fuzzy graphs. The main goal is to define and implement a method for determining the degree of similarity between pairs of fuzzy graphs. The thesis covers the theoretical background of classical and fuzzy sets and graphs, as well as graph isomorphism. It further describes the proposed method for comparing fuzzy graphs and calculating their similarity, including the use of the twin-width metric. The result is a web application that enables graph drawing, similarity computations, and work with twin-width. It serves as an educational tool for the Mathematical Foundations of Fuzzy Logic course, with potential for further development.

Kľúčové slová

fuzzy množiny, fuzzy grafy, fuzzy podobnosť, grafový izomorfizmus, fuzzy twin-width

Keywords

fuzzy sets, fuzzy graphs, fuzzy similarity, graph isomorphism, fuzzy twin-width

Citácia

HALÁSOVÁ, Sophia. *Fuzzy podobnosti a jejich aplikace.* Brno, 2025. Bakalářská práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta informačních technologií. Vedoucí práce doc. RNDr. Dana Hliněná, Ph.D.

Fuzzy podobnosti a jejich aplikace

Prehlásenie

Prehlasujem, že som túto bakalársku prácu vypracovala samostatne pod vedením pani doc. RNDr. Dany Hliněnej, Ph.D. Ďalšie informácie mi k technickej časti práce poskytol Ing. Petr Veigend, Ph.D. Uviedla som všetky literárne pramene, publikácie a iné zdroje, z ktorých som čerpala.

. . . . . .
Sophia Halásová
9. mája 2025

Poďakovanie

Chcela by som sa poďakovať pani doc. RNDr. Dane Hliněnej, Ph.D. za odborné vedenie, cenné pripomienky, trpezlivosť a ochotu vždy pomôcť počas celého riešenia bakalárskej práce. Vďaka patrí aj Ing. Petrovi Veigendovi, Ph.D. za užitočné rady k technickej časti bakalárskej práce. Ďakujem aj svojej rodine a blízkym za ich neustálu podporu a povzbudenie počas štúdia.

Obsah

1 Úvod **5**

2 Fuzzy množiny a relácie **6**
2.1 Od klasickej teórie množín k fuzzy množinám 6
2.2 Od klasických relácií k fuzzy reláciám 15

3 Fuzzy grafy **19**
3.1 Klasické grafy 19
3.2 Izomorfizmy v klasickej teórii grafov 20
3.3 Twin-width v klasickej teórii grafov 23
3.4 Fuzzy grafy 24
3.5 Fuzzifikácia twin-width 27

4 Podobnosť **31**
4.1 Klasická metrika 31
4.2 Klasická podobnosť 32
4.3 Pseudometriky 32
4.4 Fuzzy podobnosť 33

5 Fuzzifikácia podobnosti grafov **35**
5.1 Návrh výpočtu fuzzy podobnosti 35
5.2 Vylepšenie výpočtu 36
5.3 Konštrukcie fuzzy podobností 40
5.4 Fuzzy podobnosť a fuzzy twin-width 43

6 Implementácia aplikácie **45**
6.1 Architektúra aplikácie 45
6.2 Implementačné algoritmy 48
6.3 Uživateľské rozhranie 50
6.4 Testovanie 51

7 Záver **54**

Literatúra **55**

A Obsah cloudového úložiska **57**

B Návod k spusteniu aplikácie **58**
B.1 Lokálna inštalácia 58

B.2 Nasadenie na web 59

Zoznam obrázkov

2.1 Graf funkcie príslušnosti do fuzzy množiny starých áut v závislosti od ich veku. 7
2.2 Graf funkcie príslušnosti príjemneho ovlaženia vo vode v závislosti od jej teploty. 7
2.3 Grafické znázornenie príslušnosti fuzzy množín A a B. 8
2.4 Graf zjednotenia fuzzy množín A a B (modrá). 8
2.5 Graf prieniku fuzzy množín A a B (červená). 8
2.6 Graf doplnku fuzzy množiny A (ružová). 9
2.7 Najzákladnejšie t-normy 10
2.8 Základné t-konormy 14

3.1 Graf G 19
3.2 Príklad izomorfizmu medzi 2 grafmi H_1, H_2. $(f : a \to e, b \to f, c \to g, d \to h)$. 21
3.3 Grafy F_1, F_2, ktoré nie sú izomorfné. 21
3.4 Prvý izomorfizmus grafov G_1, G_2. 21
3.5 Druhý izomorfizmus grafov G_1, G_2. 22
3.6 Trigraf G. 23
3.7 Kontrakcia vrcholov c, e. 23
3.8 2-sekvencia grafu G. 24
3.9 Optimálna sekvencia kontrakcií grafu G 24
3.10 Štruktúra G 25
3.11 Fuzzy graf G (vľavo) a fuzzy graf H (vpravo) 25
3.12 Cesty P_1 (zelená), P_2 (žltá), P_3 (červená) medzi vrcholmi a,c. 26
3.13 Fuzzy graf G 26
3.14 Fuzzy graf $G = (V, \sigma, \mu)$ (vľavo) a fuzzy graf $F = (V, \tau, \nu)$ (vpravo) 27
3.15 Fuzzy trigraf G_T. 28
3.16 Optimálna kontrakčná sekvencia pre G_6. 29

5.1 Fuzzy grafy G_1, G_2, G_3. 36
5.2 Fuzzy grafy G_1, G_2. 37
5.3 Fuzzy grafy G_1, G_2. 39
5.4 Funkcia fuzzy podobnosti $S(x, y) = e^{-kd(x,y)}$ pre $k = 2$. 41
5.5 Funkcia fuzzy podobnosti $S(x, y) = \frac{1}{1+kd(x,y)}$ pre $k = 5$. 41
5.6 Funkcia fuzzy podobnosti $S(x, y) = 1 - \frac{kd(x,y)}{1+kd(x,y)}$ pre $k = 1$. 42
5.7 Funkcia fuzzy podobnosti $S(x, y) = \frac{-\arctan(kd(x,y))}{\frac{\pi}{2}} + 1$ pre $k = 3$. 42
5.8 Fuzzy grafy G_1, G_2 odlišné v 1 hrane 43
5.9 Fuzzy grafy G_2 (v strede), G_3 (vpravo) odlišné oproti fuzzy grafu G_1 (vľavo) v 2 hranách 44

6.1 Aplikácia Fuzzy Graph Similarity. 50
6.2 Test 1 51
6.3 Test 2 52
6.4 Test 3 52
6.5 Test 4 53
6.6 Test 5 53

A.1 Adresárový strom aplikácie 57

Kapitola 1

Úvod

V rôznych oblastiach informatiky, ako je spracovanie prirodzeného jazyka, analýza údajov, rozhodovanie či rozpoznávanie vzorov, zohráva dôležitú úlohu porovnávanie objektov na základe ich podobnosti. V reálnom svete však často narážame na neistotu, nepresné alebo vágne informácie. V takýchto prípadoch sa využíva fuzzy podobnosť, ktorá rozširuje klasickú podobnosť a zohľadňuje mieru neurčitosti alebo vágnosti pri porovnávaní objektov.

Táto bakalárska práca sa zameriava na fuzzy podobnosť a jej využitie v oblasti fuzzy grafov. Jej hlavným cieľom je navrhnúť metódu na výpočet podobnosti medzi fuzzy grafmi, ktorá berie do úvahy nielen rozdiely v hodnotách funkcií príslušnosti hrán, ale aj zmeny v ich štruktúre, ktoré sa prejavujú v hodnote fuzzy twin-width, čo je rozšírenie klasického pojmu twin-width na fuzzy grafy.

Práca začína teoretickým základom fuzzy množín a relácií v kapitole 2, kde je postupne predstavený prechod od klasickej teórie množín a relácií k ich monotónnemu fuzzy rozšíreniu.

V kapitole 3 sa pozornosť sústreďuje na teóriu grafov. Najprv sa rozoberajú klasické pojmy, ako sú izomorfizmus a twin-width, následne sa zavádza koncept fuzzy grafov, od základných definícií až po spôsob, akým možno koncept twin-width fuzzifikovať.

Kapitola 4 sa venuje samotnému pojmu podobnosti. Rovnako ako v predchádzajúcich častiach, aj tu začíname s klasickými prístupmi ako sú metriky a pseudometriky a neskôr vysvetľujeme, ako sa tieto pojmy dajú rozšíriť do fuzzy prostredia, teda ako možno definovať fuzzy podobnosť.

Jadro celej práce tvorí kapitola 5, ktorá sa sústreďuje na fuzzy podobnosť medzi fuzzy grafmi. V tejto časti je predstavený vlastný návrh výpočtu podobnosti, ktorý prepája klasické porovnanie grafov cez izomorfizmus s fuzzy ohodnotením hrán a následne analyzuje rozdiely medzi grafmi aj z pohľadu ich fuzzy twin-width. Súčasťou je aj návrh fuzzifikácie podobnosti a konštrukcie ďalších možných fuzzy podobností na základe vzdialenosti medzi objektmi.

Praktická časť práce je obsiahnutá v kapitole 6, ktorá popisuje implementáciu aplikácie na výpočet fuzzy podobnosti grafov. Rozoberá sa architektúra systému, použité algoritmy, užívateľské rozhranie a testovanie aplikácie.

Kapitola 2

Fuzzy množiny a relácie

Táto kapitola sa venuje základom teórie fuzzy množín a relácií. Fuzzy množiny umožňujú matematicky modelovať neistotu tým, že príslušnosť prvkov nie je binárna, ale môže nadobúdať hodnoty z intervalu $\langle 0, 1\rangle$. Kapitola zahŕňa klasickú teóriu množín a binárnych relácií ako východisko pre definovanie fuzzy množín a relácií. Taktiež sa zaoberá rôznymi funkciami, ako sú triangulárne normy, triangulárne konormy a kopuly, pričom skúma ich vlastnosti, konštrukcie a vzájomné vzťahy.

2.1 Od klasickej teórie množín k fuzzy množinám

Jedným z najzákladnejších konceptov matematiky sú množiny. Umožňujú zoskupovať podobné objekty, analyzovať ich a vyjadrovať vzťahy medzi nimi. Nestretáme sa s nimi len v matematike, ale aj v reálnom svete okolo nás.

Pod pojmom **množina** si predstavujeme súbor ľubovoľných rôznych objektov, ktoré majú spoločnú vlastnosť, na základe ktorej môžeme rozhodnúť, či do množiny patria alebo nepatria [4]. V danom kontexte pracujeme s množinami, ktoré sa uvažujú v základnej množine, v univerze $\mathbb{X}$. Jednotlivé objekty nazývame **prvky množiny**. Množiny označujeme obvykle veľkými písmenami abecedy $(A, B, \dots)$ a ich prvky malými $(a, b, \dots)$. Napríklad $A = \{a, b, c\}$ predstavuje množinu A obsahujúcu prvky a, b, c. Pomocou znaku $\in$ (prípadne $\notin$) sa vyjadruje príslušnosť prvku do množiny, čiže napríklad $a \in A$. Množiny je možné určiť vymenovaním všetkých jej prvkov, ako obor pravdivosti výrokovej formy, alebo pomocou charakteristickej funkcie [4]:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{ak } x \in \langle 0, 1\rangle, \\ 0 & \text{ak } x \in \mathbb{R} \setminus \langle 0, 1\rangle. \end{cases}$$

Množina A, ktorá je popísaná charakteristickou funkciou, je interval $\langle 0, 1\rangle$.

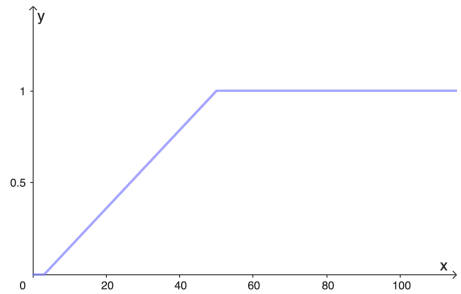
Ak pracujeme s množinami, u ktorých nie sú pochybnosti, či prvky do daných množín patria alebo nie, vystačíme si s charakteristickou funkciou. Nie vždy je však situácia taká jednoznačná. V teórii fuzzy množín je možnosť zahrnúť tieto objekty s určitým stupňom neistoty, neurčitosti. Teda pracujeme so zovšeobecnenou charakteristickou funkciou, tzv. funkciou príslušnosti. Príslušnosť daných prvkov do množín je vyjadrená číslom v intervale $\langle 0, 1\rangle$, kde 0 vyjadruje, že prvok vôbec nepatrí do množiny a 1 reprezentuje úplnú príslušnosť. Fuzzy množiny sú ideálnym prostriedkom na vyjadrenie nepresných slov ako „veľmi", „mierne", „trochu"z reálneho sveta do sveta matematického. V publikáciách o fuzzy

množinách, či logike sa zvyčajne pre zápis intervalov používa konvencia zaužívaná napr. vo Francúzsku, kde sa intervaly zapisují pomocou hranatých zátvoriek, teda napr. interval $\langle 0, 1\rangle$ sa zapisuje takto $[0, 1]$, zápis $[0, 1[$ popisuje interval $\langle 1, 0)$, atď.

Definícia 1 *[15] Fuzzy podmnožina univerza $\mathbb{X}$ (stručne fuzzy množina) je objekt A, ktorý popisuje (zovšeobecnená) charakteristická funkcia (funkcia príslušnosti) $\mu_A : X \to [0, 1]$.*

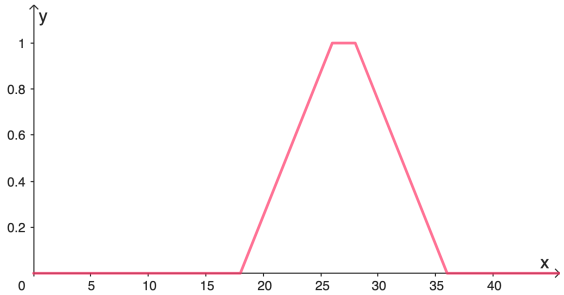
Inými slovami, **univerzum** $\mathbb{X}$ predstavuje základný priestor, množinu všetkých prvkov, s ktorými pracujeme v danom kontexte alebo úlohe. Systém všetkých fuzzy podmnožín univerza $\mathbb{X}$ sa zvyčajne označuje symbolom $\mathcal{F}(\mathbb{X})$.

Funkcia príslušnosti umožňuje definovať množiny s neurčitou charakteristickou vlastnosťou. Napríklad definujme pojem staré auto. Je to auto, ktoré má minimálne 15 rokov, 50 rokov, alebo 100 rokov? 30 rokov sa už dá považovať za solídny vek auta. Znamená to, že auto, ktoré spolunažíva s majiteľom už 29 rokov a 8 mesiacov, nie je staré? Stanovenie exaktnej hranice nie je riešením. Fuzzy množiny sa vysporiadajú s danou problematikou pomocou funkcie príslušnosti. Auto staré 10 rokov môže mať hodnotu príslušnosti 0.15, 15-ročné hodnotu 0.25, 30-ročné má 0.56 a 50-ročné má hodnotu príslušnosti do množiny starých áut 1. Funkciu príslušnosti do množiny starých áut je možné znázorniť grafom:



Obr. 2.1: Graf funkcie príslušnosti do fuzzy množiny starých áut v závislosti od ich veku.

Podobne si môžme vysvetliť problematiku na príklade s teplotou vody. Na nasledujúcom grafe sú znázornené teploty príjemné ľudskej pokožke na kúpanie v letnom počasí.



Obr. 2.2: Graf funkcie príslušnosti príjemneho ovlaženia vo vode v závislosti od jej teploty.

2.1.1 Štandardné operácie na fuzzy množinách

Pod základnými operáciami s fuzzy množinami rozumieme operácie prieniku, zjednotenia a doplnku. Štandardné operácie, ktoré sú najčastejšie používané, pôvodne zaviedol L. A. Zadeh, nazývajú sa aj Zadehove.

Definícia 2 *[12] Štandardné zjednotenie fuzzy množín A, B je fuzzy množina $A \cup B \in F(X)$ s funkciou príslušnosti*

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x)).$$

Štandardný prienik fuzzy množín A, B je fuzzy množina $A \cap B \in F(X)$ s funkciou príslušnosti

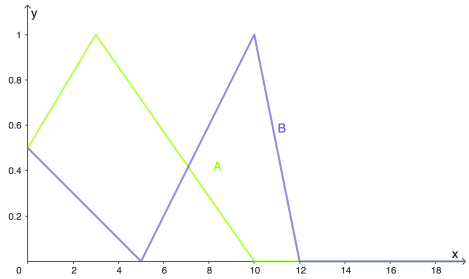
$$\mu_{A \cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x)).$$

Štandardným doplnkom fuzzy množiny A je fuzzy množina $\overline{A} \in F(\mathbb{X})$ s funkciou príslušnosti

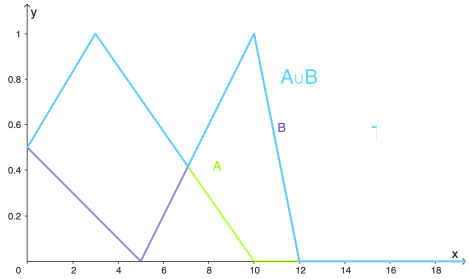
$$\mu_{\overline{A}}(x) = 1 - \mu_A(x).$$

Dané operácie si znázornime na fuzzy množinách A, B (A – zelená, B – fialová):

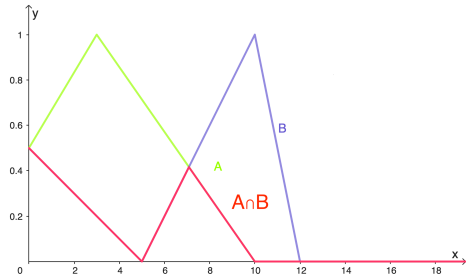
$$\mu_A(x) = \begin{cases} \frac{0.5}{3}x + 0.5 & \text{ak } x \in \langle 0, 3\rangle, \\ \frac{-x}{7} + \frac{10}{7} & \text{ak } x \in \langle 3, 10\rangle, \\ 0 & \text{inak,} \end{cases} \qquad \mu_B(x) = \begin{cases} \frac{-x}{10} + 0.5 & \text{ak } x \in \langle 0, 5\rangle, \\ \frac{x}{5} - 1 & \text{ak } x \in (5, 10\rangle, \\ \frac{-x}{2} + 6 & \text{ak } x \in (10, 12\rangle, \\ 0 & \text{inak.} \end{cases}$$



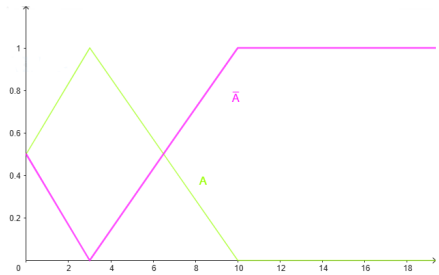
Obr. 2.3: Grafické znázornenie príslušnosti fuzzy množín A a B.



Obr. 2.4: Graf zjednotenia fuzzy množín A a B (modrá).



Obr. 2.5: Graf prieniku fuzzy množín A a B (červená).



Obr. 2.6: Graf doplnku fuzzy množiny A (ružová).

2.1.2 Triangulárne normy

Triangulárna normy, alebo skrátene t-normy, sú najznámejšie funkcie, pomocou ktorých sa modeluje operácia prieniku na fuzzy množinách.

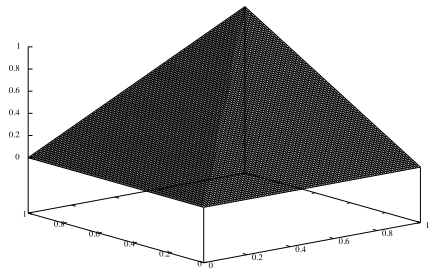
Definícia 3 *[11] Triangulárna norma (t-norma) je binárna operácia na intervale* $[0,1]$*, t.j. funkcia* $T : [0,1]^2 \to [0,1]$ *taká, že pre každé* $x, y, z \in [0,1]$ *sú splnené nasledujúce axiómy:*

- ***Komutatívnosť*** $T(x,y) = T(y,x)$,
- ***Asociatívnosť*** $T(x,T(y,z)) = T(T(x,y),z)$,
- ***Monotónnosť*** *ak* $y \leq z$*, tak* $T(x,y) \leq T(x,z)$,
- ***Okrajová podmienka*** $T(x,1) = x$.

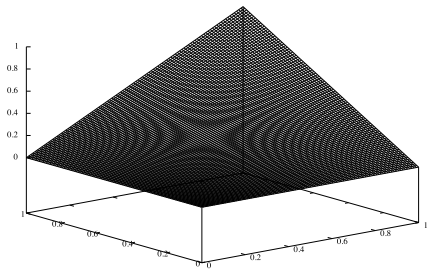
Príklad 1 *[11] Medzi najznámejšie t-normy patria minimová, súčinová, Łukasiewiczova a drastický súčin.*

- ***Minimová t-norma:*** $T_M(x,y) = \min(x,y)$,
- ***Súčinová t-norma:*** $T_P(x,y) = xy$,
- ***Łukasiewiczova t-norma:*** $T_L(x,y) = \max(x+y-1,0)$,
- ***Drastický súčin:***

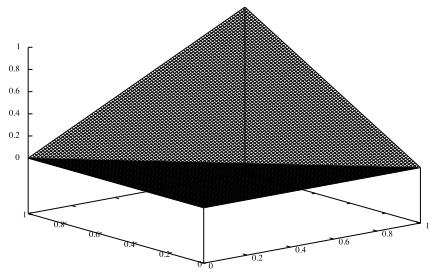
$$T_D(x,y) = \begin{cases} \min(x,y) & \textit{ak } \max(x,y) = 1, \\ 0 & \textit{inak.} \end{cases}$$



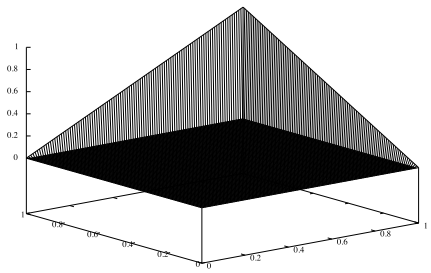
(a) Minimová t-norma



(b) Súčinová t-norma



(c) Łukasiewiczova t-norma



(d) Drastický súčin

Obr. 2.7: Najzákladnejšie t-normy

Existuje nekonečne mnoho t-noriem, rovnako aj celé triedy parametrických t-noriem. Medzi najznámejšie patria:

Frankove t-normy:

$$T_p^F(x,y) = \begin{cases} T_M(x,y), & \text{ak } p = 0, \\ T_P(x,y), & \text{ak } p = 1, \\ T_L(x,y), & \text{ak } p = +\infty, \\ \log_p\left(1 + \frac{(p^x-1)(p^y-1)}{p-1}\right), & \text{inak.} \end{cases}$$

Schwarz-Sklarove t-normy:

$$T_p^{SS}(x,y) = \begin{cases} T_M(x,y), & \text{ak } p = -\infty, \\ (x^p + y^p - 1)^{\frac{1}{p}}, & \text{ak } -\infty < p < 0, \\ T_P(x,y), & \text{ak } p = 0, \\ T_D(x,y), & \text{ak } p = +\infty, \\ (\max(0, x^p + y^p - 1))^{\frac{1}{p}}, & \text{ak } 0 < p < +\infty. \end{cases}$$

Hamacherove t-normy:

$$T_p^H(x,y) = \begin{cases} T_D(x,y), & \text{ak } p = \infty, \\ 0, & \text{ak } p = x = y = 0, \\ \frac{xy}{p+(1-p)(x+y-xy)}, & \text{inak.} \end{cases}$$

2.1.3 Vlastnosti t-noriem

Spojitosť je jednou z vlastností, ktorá sa často skúma pri t-normách.

Definícia 4 *[11] Triangulárna norma je* ***spojitá*** *práve vtedy, keď je spojitá v prvej súradnici, t.j. pre každé $y \in [0,1]$ je funkcia jednej premennej spojitá*

$$T(.,y) : [0,1]^2 \to [0,1].$$

Z vyššie spomenutých t-noriem sú spojité minimová, súčinová, Łukasiewiczova t-norma. Drastický súčin nie je, čo môžeme vidieť aj na obrázku 2.7.

Definícia 5 *[11] Ak pre t-normy T_1 a T_2 je pre každý bod $(x,y) \in [0,1]^2$ splnená nerovnosť $T_1(x,y) \leq T_2(x,y)$, hovoríme, že T_1* ***je slabšia ako*** *T_2*

V zmysle tejto definície je najslabšia t-norma drastický súčin T_D, minimová t-norma T_M je najsilnejšia, súčinová t-norma T_P je silnejšia ako Łukasiewiczova t-norma T_L:

$$T_D(x,y) \leq T_L(x,y) \leq T_P(x,y) \leq T_M(x,y).$$

Pre ľuvovolnú t-normu T platí, že

$$T_D(x,y) \leq T(x,y) \leq T_M(x,y).$$

Pre každú t-normu platí, že pre všetky $a \in [0,1]$ platí, $T(a,a) \leq a$. Špeciálne sú také prvky, pre ktoré platí práve $T(a,a) = a$. Nazývajú sa **idempotentnými prvkami t-normy** T. Hodnoty 0 a 1 sa nazývajú triviálne idempotentné prvky, pretože sú idempotentné pre ľubovoľnú t-normu.

Definícia 6 *[11] T-norma T je* ***archimedovská****, ak pre všetky body $(x,y) \in]0,1[^2$ existuje $n \in N$ také, že*

$$x_T^{(n)} < y.$$

pričom

$$x_T^{(n)} = \begin{cases} x, & ak\ n = 1, \\ T\left(x, x_T^{(n-1)}\right), & ak\ n > 1. \end{cases}$$

Definovať **archimedovskú** vlastnosť spojitých t-noriem je možné aj pomocou diagonálnej nerovnosti:

$$T(x,x) < x \text{ pre } x \in]0,1[.$$

Na základe vyššie spomenutého je zrejmé, že minimová t-norma archimedovská nie je, lebo je spojitá a pre všetky $x \in [0,1]$ platí, že sú pre danú t-normu idempotentné.

Definícia 7 *[11] T-norma T je* ***striktne monotónna****, ak je rastúca na $]0,1]^2$ ako funkcia $T : [0,1]^2 \to [0,1]$*

$$ak\ x \in]0,1]\ a\ y < z,\ tak\ T(x,y) < T(x,z).$$

T-norma T je ***združene striktne monotónna****, ak platí:*

$$ak\ x < x_0\ a\ y < y_0,\ tak\ T(x,y) < T(x_0,y_0).$$

T-norma T je ***striktná*** *ak je* ***spojitá*** *a* ***striktne monotónna.***

Prvok $x \in]0,1[$ je **deliteľ nuly** danej t-normy T, ak existuje y také, že $T(x,y) = 0$. Triangulárna norma bez deliteľov nuly sa nazýva **pozitívna**.

Prvok $x \in]0,1[$ je **nilpotentný prvok** danej t-normy T, ak existuje $n \in N$ také, že $x_T^{(n)} = 0$. Triangulárna norma T sa nazýva **nilpotentná**, ak je spojitá a každé $x \in]0,1[$ je jej nilpotentným prvkom. Triangulárne normy T_P a T_M nemajú deliteľov nuly, ani nilpotentný prvok. Každé $x \in]0,1[$ je deliteľom nuly aj nilpotentným prvkom T_D, T_L [11]. Vzhľadom k vyššie uvedenému, je T_P striktná a T_L nilpotentná t-norma.

2.1.4 Konštrukcie t-noriem

Konštruovanie nových t-noriem je užitočné pre prípady, kedy sú požadované triangulárne normy so špecifickými vlastnosťami. Vytvárať nové t-normy je možné pomocou ordinálneho súčtu, aditívneho a multiplikatívneho generovania a φ-transformácií a samozrejme je mnoho ďalších možností.

- **Ordinálne súčty, [11]:**

  Nech $(T_\alpha)_{\alpha\in A}$ je trieda t-noriem a nech $(]a_\alpha, e_\alpha[)_{\alpha\in A}$ je trieda po dvojiciach disjunktných otvorených podintervalov intervalu $[0,1]$. Potom funkcia $T : [0,1]^2 \to [0,1]$ daná predpisom

  $$T(x,y) = \begin{cases} a_\alpha + (e_\alpha - a_\alpha)T_\alpha(\dfrac{x-a_\alpha}{e_\alpha - a_\alpha}, \dfrac{y-a_\alpha}{e_\alpha - a_\alpha}), & \text{ak } (x,y) \in]a_\alpha, e_\alpha[^2, \\ min(x,y), & \text{inak,} \end{cases}$$

  je t-normou, ktorú nazývame **ordinálnym súčtom sčítancov** $< a_\alpha, e_\alpha, T_\alpha >, \alpha \in A$.

- **Aditívne a multiplikatívne generovanie, [11]:**
  Nech funkcia $f : [0,1] \to [0,\infty]$ je spojitá a neklesajúca, pričom $f(1) = 0$, potom predpisom

  $$T_{<f>}(x,y) = f^{-1}(\min(f(x) + f(y), f(0)))$$

  je daná t-norma a funkcia f sa nazýva **aditívny generátor** t-normy $T_{<f>}$.

  Nech funkcia $g : [0,1] \to [0,1]$ je spojitá a rastúca, pričom $g(1) = 1$, potom predpisom

  $$T^{<g>}(x,y) = g^{-1}(\max(g(x).g(y), g(0)))$$

  je daná t-norma a funkcia g sa nazýva **multiplikatívny generátor** t-normy $T^{<g>}$.

- **φ-transformácie, [11]:**

  Ak φ je rastúca bijekcia uzavretého jednotkového intervalu, potom predpisom

  $$T_\alpha(x,y) = \varphi^{-1}(T(\varphi(x), \varphi(y))) \text{ pre } (x,y) \in [0,1]$$

  je daná t-norma, ktorú nazývame **φ-transformáciou** t-normy T.

2.1.5 Triangulárne konormy

Duálnou funkciou k triangulárnej norme je triangulárna konorma, skrátene t-konorma alebo s-norma, modelujúca operácie zjednotenia fuzzy množín.

Definícia 8 *[2] Triangulárna konorma (t-konorma) je binárna operácia na intervale* $[0,1]$*, t.j. funkcia* $S : [0,1]^2 \to [0,1]$ *taká, že pre každé* $x, y, z \in [0,1]$ *sú splnené nasledujúce axiómy:*

- ***Komutatívnosť*** $S(x,y) = S(y,x)$,
- ***Asociatívnosť*** $S(x, S(y,z)) = S(S(x,y), z)$,
- ***Monotónnosť*** *ak* $y \leq z$*, tak* $S(x,y) \leq S(x,z)$,
- ***Okrajová podmienka*** $S(x,0) = x$.

Poznámka 1 *[2] Ak* T *je t-norma, tak jej duálna t-konorma* $S : [0,1]^2 \to [0,1]$ *je daná predpisom*

$$S(x,y) = 1 - T(1-x, 1-y).$$

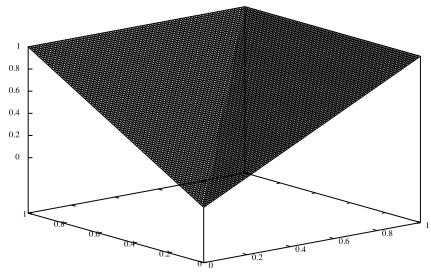
Táto dualita umožňuje mnohé vlastnosti študovať len na t-normách a potom ich zovšeobecniť aj pre t-konormy. Pekným príkladom su už spomínané konštrukcie t-noriem, ktoré po jednoduchých úpravách vieme transformovať na konštrukcie t-konoriem.

Príklad 2 *[2] Medzi najznámejšie t-konormy patria:*

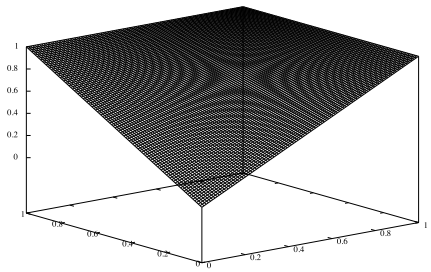
- ***Maximová s-norma*** $S_M(x,y) = \max(x,y)$,
- ***Pravdepodobnostný súčet*** $S_P(x,y) = x + y - xy$,
- ***Łukasiewiczova s-norma*** $S_L(x,y) = \min(x+y, 1)$,
- ***Drastický súčet***

$$S_D(x,y) = \begin{cases} \max(x,y) & \textit{ak } \min(x,y) = 0, \\ 1 & \textit{inak.} \end{cases}$$

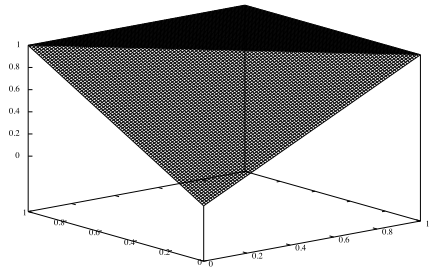
Dualitu t-noriem a t-konoriem môžeme vidieť aj na nasledujúcich grafoch štyroch známych t-konoriem, ktoré sú len otočením ich príslušných duálnych t-noriem.



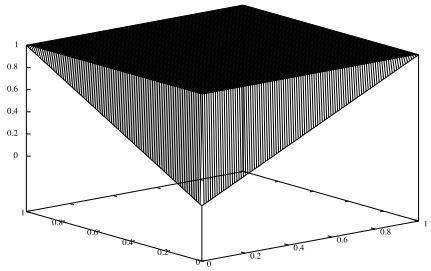
(a) Maximová s-norma



(b) Pravdepodobnostný súčet



(c) Łukasiewiczova s-norma



(d) Drastický súčet

Obr. 2.8: Základné t-konormy

2.1.6 Kopuly

Trieda binárnych operácií, ktoré súvisia s t-normami a majú veľký význam v pravdepodobnosti a štatistike, sú kopuly, ktoré zaviedol A. Sklar v roku 1959.

Definícia 9 *[1] Kopula je binárna operácia na intervale* $[0,1]$*, t.j. funkcia* $C : [0,1]^2 \to [0,1]$ *taká, že spĺňa vlastnosti t-normy 3 a podmienku monotónnosti:*

$$C(x_1, y_1) - C(x_2, y_1) - C(x_1, y_2) + C(x_2, y_2) \geq 0,$$

pre všetky $x_1 \leq x_2, y_1 \leq y_2$*.*

Vzťah medzi t-normami a kopulami je možné popísať nasledujúcou vetou:

Veta 1 *[1] T-norma je kopulou práve vtedy, ak spĺňa Lipschitzovu podmienku:*

$$T(x_2, y) - T(x_1, y) \leq x_2 - x_1$$

pre všetky $x_1 \leq x_2$*.*

Na základe tohto tvrdenia môžme nájsť príklady t-noriem, ktoré sú, resp. nie sú kopulami. Spojité triangulárne normy T_M, T_P, T_L patria medzi kopuly, naopak T_D nepatrí, nakoľko nespĺňa Lipschitzovu podmienku. Z parametrických t-noriem, napr. Hamacherove t-normy T_{10}^H s parametrom $p = 10$ a $T_{0.005}^H$ s parametrom $p = 0.005$ nespĺňajú Lipschitzovu podmienku, preto nie sú kopuly.

2.1.7 Operácie na fuzzy množinách

Pomocou triangulárnych noriem a konoriem je možné modelovať operácie prieniku a zjednotenia dvoch fuzzy množín.

Definícia 10 *[12] Prienikom fuzzy množín $A, B \in \mathcal{F}(\mathbb{X})$ založenom na t-norme T je fuzzy množina $A \cap_T B \in \mathcal{F}(\mathbb{X})$ s funkciou príslušnosti*

$$\mu_{A \cap_T B}(x) = T(\mu_A(x), \mu_B(x)).$$

Zjednotením fuzzy množín $A, B \in \mathcal{F}(\mathbb{X})$ založenom na t-konorme S je fuzzy množina $A \cup_S B \in \mathcal{F}(\mathbb{X})$ s funkciou príslušnosti

$$\mu_{A \cup_S B}(x) = S(\mu_A(x), \mu_B(x)).$$

Štandardné operácie prieniku a zjednotenia fuzzy množín sú teda špeciálnym prípadom a platí

$$A \cap B = A \cap_{T_M} B$$

$$a$$

$$A \cup B = A \cup_{S_M} B.$$

2.2 Od klasických relácií k fuzzy reláciám

Usporiadaná dvojica (a, b) je dvojica, ktorá má prvú zložku prvok a a druhá zložka je prvok b. Na poradí zložiek záleží, čiže $(a, b) \neq (b, a)$, pokiaľ $a \neq b$.

Každá takáto množina, ktorá obsahuje usporiadané dvojice (alebo n-tice), je **relácia**. Prvky jednotlivých usporiadaných dvojíc (alebo n-tíc) zvyčajne v relácii predstavujú istú súvislosť.

Definícia 11 *[12] Binárna relácia R z množiny A do množiny B je ľubovoľná podmnožina kartézskeho súčinu $A \times B$. Binárna relácia na množine A je podmnožina kartézskeho súčinu $A \times A$.*

Definícia 12 *[12] Nech R je binárna relácia. Definičný obor je množina $D(R)$ všetkých prvých zložiek usporiadaných dvojíc relácie R:*

$$a \in D(R) \Leftrightarrow \exists b; (a, b) \in R.$$

Nech R je binárna relácia. Obor hodnôt $H(R)$ je množina všetkých druhých zložiek usporiadaných dvojíc relácie R:

$$b \in H(R) \Leftrightarrow \exists a; (a, b) \in R.$$

Definícia 13 *[12] Nech R je binárna relácia. Relácia $R^{-1} = \{(a, b); (b, a) \in R\}$ sa nazýva inverzná.*

Inverzná relácia spočíva v zamenení poradia prvej a druhej zložky. Na základe toho vieme jednoducho vyvodiť, že $(R^{-1})^{-1} = R$.

Definícia 14 *[12] Zloženou reláciou z relácii R a S rozumieme binárnu reláciu*

$$R \circ S = \{(a, c); (a, b) \in S \wedge (b, c) \in R\}.$$

Niektoré relácie majú špeciálne vlastnosti, ako napr.:

Definícia 15 *[12] Nech R je binárna relácia na A. Relácia R je*

- ***reflexívna*** *na množine A, ak $\forall a; (a, a) \in R$,*
- ***symetrická*** *na množine A, ak $\forall a, b \in A; (a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R$,*
- ***tranzitívna*** *na množine A, ak $\forall a, b, c \in A; (a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$,*
- ***antisymetrická*** *na množine A, ak $\forall a, b \in A; (a, b) \in R \wedge (b, a) \in R \Rightarrow a = b$,*
- ***ireflexívna*** *na množine A, ak $\forall a \in A; (a, a) \notin R$.*

Poznámka 2 *Relácia, ktorá je reflexívna, symetrická a tranzitívna je reláciou ekvivalencie a relácia, ktorá je reflexívna, antisymetrická a tranzitívna je reláciou usporiadania.*

Podobne, ako sa rozšírili klasické množiny na fuzzy množiny, vieme rozšíriť (zovšeobecniť) aj klasické relácie na fuzzy relácie.

Definícia 16 *[6] Binárna fuzzy relácia z množiny A do množiny B je akákoľvek fuzzy podmnožina R kartézského súčinu $A \times B$, t.j. $R \subseteq (A \times B)$. Funkcia príslušnosti fuzzy relácie R je funkcia $\mu_R : A \times B \to [0, 1]$. Hodnota $\mu_R(x, y)$ je stupeň príslušnosti dvojice (x, y) do relácie R, kde $x \in A$ a $y \in B$.*

Jednou zo základných operácií s reláciami je skladanie. Uvažujme relácie P a R. Pri štandardnej fuzzifikácii skladania klasických relácií dostaneme pre funkciu príslušnosti zloženej fuzzy relácie $Q = P \circ R$ vzťah

$$\mu_{P \circ R}(x, z) = \sup_{y \in Y} \min(\mu_P(x, y), \mu_R(y, z)).$$

Toto skladanie sa nazýva štandardné alebo sup-min-skladanie. V prípade nahradenia minimovej t-normy ľubovolnou t-normou T, dostaneme nasledujúcu definíciu:

Definícia 17 *Nech X, Y, Z sú klasické množiny, P a R sú binárne fuzzy relácie, T je t-norma. Potom sup-T-zložením fuzzy relácií P a R nazývame fuzzy reláciu $P \circ_T R$ s funkciou príslušnosti*

$$\mu_{P \circ R}(x, z) = \sup_{y \in Y} T(\mu_P(x, y), \mu_R(y, z)).$$

Poznámka 3 *Pri práci s konečnými množinami sa nahrádza supremum maximom.*

Podobne, ako pri klasických reláciách, aj pri fuzzy reláciách môžeme sledovať ich špeciálne vlastnosti.

Definícia 18 *Relácia R na množine A je:*

- ***reflexívna****, ak $\forall x \in A; \mu_R(x, x) = 1$,*

- ***ireflexívna***, *ak* $\forall x \in A; \mu_R(x,x) = 0$,
- ***symetrická***, *ak* $\forall x, y \in A; \mu_R(x,y) = \mu_R(y,x)$,
- $T-$***antisymetrická***, *ak* $\forall x, y \in A; x \neq y \Rightarrow T(\mu_R(x,y), \mu_R(y,x)) = 0$,
- $T-$***tranzitívna***, *ak* $\forall x, y, z \in A; T(\mu_R(x,y), \mu_R(y,z)) \leq \mu_R(x,z)$.

Definícia 19 *Fuzzy relácia R je reláciou $T-$ekvivalencie, ak je relácia reflexívna, symetrická a $T-$tranzitívna.*

Definícia 20 *Fuzzy relácia R je reláciou T-usporiadania, ak je relácia reflexívna, $T-$antisymetrická a $T-$tranzitívna.*

Príklad 3 *Fuzzy relácie je možné si priblížiť na príklade. Je daná množina súrodencov $S = \{Anička, Betka, Cyril\}$. Relácia R z množiny S do množiny S je definovaná nasledovne: Prvok $x \in S$ je v relácii s prvkom $y \in S$ práve vtedy, ak sa dané prvky, teda súrodenci, výzorom na seba podobajú.*

Riešenie.

Danú problematiku si znázornime tabuľkou:

R	Anička	Betka	Cyril
Anička	1	0.5	0.8
Betka	0.5	1	0.6
Cyril	0.8	0.6	1

Prvá vec, ktorú si môžme všimnúť, je, že na hlavnej diagonále sú samé jednotky, pretože keď porovnávame súrodenca so sebou samým, musí sa na seba 100% podobať. Preto je relácia reflexívna. Takisto je aj symetrická, pretože nemôže sa Betka podobať viac na Aničku ako Anička na Betku, sú to rovnaké hodnoty. Môžme teraz zistiť, či je relácia T_M-tranzitívna. Pre overenie tranzitivity využijeme skladanie relácií, pretože podobne ako pri klasických reláciách, platí $R \circ R \subseteq R \iff R$ je tranzitívna. (Pre zjednodušený zápis budeme používať skrátené názvy prvkov: a – Anička, b – Betka, c – Cyril). Pri skladaní sa riadime nasledujúcim vzťahom:

$$\mu_{R \circ_{T_M} R}(x,z) = \max_{y \in S} T_M(\mu_R(x,y), \mu_R(y,z)).$$

Začneme s prvou bunkou v tabuľke, ktorá je v 1. riadku a 1. stĺpci. Na zistenie danej hodnoty použijeme minimovú t-normu, kde porovnávame dvojice prvkov, teda prvky z prvého riadku s prvkami z prvého stĺpca. Z výsledných 3 minimálnych hodnôt vyberieme maximálnu a tá bude našou hodnotou v prvej bunke tabuľky.

$$\begin{aligned} T_M(\mu_R(a,a), \mu_R(a,a)) &= \min(1,1) = 1, \\ T_M(\mu_R(a,b), \mu_R(b,a)) &= \min(0.5, 0.5) = 0.5, \\ T_M(\mu_R(a,c), \mu_R(c,a)) &= \min(0.8, 0.8) = 0.8. \end{aligned}$$

Výsledná hodnota je 1. Môžme si to ukázať na ešte jednom prvku – v prvom riadku a druhom stĺpci.

$$T_M(\mu_R(a,a),\mu_R(a,b)) = \min(1,0.5) = 0.5,$$
$$T_M(\mu_R(a,b),\mu_R(b,b)) = \min(0.5,1) = 0.5,$$
$$T_M(\mu_R(a,c),\mu_R(c,b)) = \min(0.8,0.6) = 0.6.$$

Maximum z daných 3 hodnôt je 0.6. Zatiaľ sme vyplnili 2 bunky tabuľky. Rovnakým spôsobom doplníme zvyšné.

R_2	a	b	c
a	1	0.6	
b			
c			

Výsledná tabuľka je:

R_2	a	b	c
a	1	0.6	0.8
b	0.6	1	0.6
c	0.8	0.6	1

Po zložení relácie $R \circ_{T_M} R$ nám vznikla relácia R_2, o ktorej ale neplatí, že by bola podmnožinou pôvodnej relácie R. Preto relácia R nie je reláciou T_M-ekvivalencie, nakoľko je reflexívna, symetrická, ale nie je T_M-tranzitívna. Skúsme teda overiť, či relácia R_2 je T_M-tranzitívna.

R_2	a	b	c
a	1	0.6	0.8
b	0.6	1	0.6
c	0.8	0.6	1

$\circ_{T_M}$

R_2	a	b	c
a	1	0.6	0.8
b	0.6	1	0.6
c	0.8	0.6	1

$=$

$R_2 \circ_{T_M} R_2$	a	b	c
a	1	0.6	0.8
b	0.6	1	0.6
c	0.8	0.6	1

Relácia R_2 T_M-tranzitívna je, nakoľko platí, že $R_2 \circ_{T_M} R_2 \subseteq R_2$. Z tabuľky vidíme, že R_2 je aj reflexívna a symetrická, teda R_2 je T_M-ekvivalenciou.

Pôvodná relácia R nebola T_M-tranzitívna, skúsme si teda overiť, či pre ňu platí aspoň T_P-tranzitívnosť.

R	a	b	c
a	1	0.5	0.8
b	0.5	1	0.6
c	0.8	0.6	1

$\circ_{T_P}$

R	a	b	c
a	1	0.5	0.8
b	0.5	1	0.6
c	0.8	0.6	1

$=$

$R \circ_{T_P} R$	a	b	c
a	1	0.5	0.8
b	0.5	1	0.6
c	0.8	0.6	1

Na základe skladania relácie R sme zistili, že je to relácia T_P-ekvivalencie.

Pre tranzitívnosť relácií platí, že ak je relácia T_1-tranzitívna a T_1 je silnejšia ako T_2, tak je relácia aj T_2-tranzitívna. Tým pádom ak pre R reláciu T_P-tranzitívnosť platí, znamená, že bude tranzitívna aj podľa t-noriem T_L a T_D:

R	a	b	c
a	1	0.5	0.8
b	0.5	1	0.6
c	0.8	0.6	1

$\circ_{T_L}$

R	a	b	c
a	1	0.5	0.8
b	0.5	1	0.6
c	0.8	0.6	1

$=$

$R \circ_{T_L} R$	a	b	c
a	1	0.5	0.8
b	0.5	1	0.6
c	0.8	0.6	1

R	a	b	c
a	1	0.5	0.8
b	0.5	1	0.6
c	0.8	0.6	1

$\circ_{T_D}$

R	a	b	c
a	1	0.5	0.8
b	0.5	1	0.6
c	0.8	0.6	1

$=$

$R \circ_{T_D} R$	a	b	c
a	1	0.5	0.8
b	0.5	1	0.6
c	0.8	0.6	1

Kapitola 3

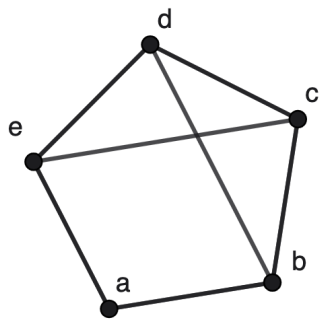
Fuzzy grafy

Grafy sú jednou z mnoho štruktúr v matematike, ktorá predstavuje špeciálny prípad binárnej relácie. Majú mnoho aplikácií v rôznych oblastiach, vrátane sieťovej analýzy, algoritmov a spoločenských vied. V oblasti umelej inteligencie sa využívajú v rozhodovacích stromoch alebo neurónových sieťach.

3.1 Klasické grafy

V tejto časti si predstavíme základné pojmy teórie grafov.

Definícia 21 *[9] Graf (jednoduchý, neorientovaný) je usporiadaná dvojica $G = (V, E)$, kde V je množina vrcholov a E je množina hrán (množina vybraných dvojprvkových podmnožín množiny vrcholov).*



Obr. 3.1: Graf G

Množinu vrcholov známeho grafu G budeme označovať ako $V(G)$ a množinu hrán ako $E(G)$. Hranu medzi vrcholmi u a v píšeme ako $\{u, v\}$, alebo skrátene uv. Na grafy je možné sa pozerať ako na symetrickú ireflexívnu reláciu, kde hrany sú tvorené prvkami dvojíc z danej relácie.

Definícia 22 *[9] Graf na $n \geq 1$ vrcholoch nazývame úplný, ak má n rôznych vrcholov spojených po všetkých dvojiciach, teda má $\binom{n}{2}$ hrán.*

V teórii grafov sa vyskytuje aj pojem podgraf, ktorý je definovaný nasledovne:

Definícia 23 *[9] Podgrafom grafu G rozumieme ľubovoľný graf H na podmnožine vrcholov $V(H) \subseteq V(G)$, ktorý má za hrany ľubovoľnú podmnožinu hrán grafu G majúce oba vrcholy vo $V(H)$. Zapisujeme $H \subseteq G$.*

Medzi bežné typy grafov patria kružnica a cesta.

Definícia 24 *[9] Kružnica dĺžky n má $n \geq 3$ vrcholov spojených do jedného cyklu n hranami. Cesta dĺžky $n \geq 0$ má $n+1$ rôznych vrcholov spojených za sebou n hranami.*

Pomocou cesty vieme definovať súvislosť grafov a podgrafov:

Definícia 25 *[9] Graf G je súvislý, ak sú každé dva vrcholy $u, v \in V(G)$ spojené cestou. Podgraf H je súvislý, ak sú každé dva vrcholy $u, v \in V(H)$ spojené cestou.*

Medzi významné grafy patria grafy bez kružníc, známe ako stromy.

Definícia 26 *[9] Strom je jednoduchý súvislý graf T bez kružníc. Jednoduchý graf bez kružníc, ktorý nemusí byť súvislý, sa nazýva les.*

Komponenty súvislosti lesa sú stromy. Jeden vrchol bez hrán a prázdny graf sú taktiež stromy. Grafy bez kružníc všeobecne nazývame acyklické.

Ďalšími dôležitými pojmami sú vážený a orientovaný graf.

Definícia 27 *[9] Vážený (resp. ohodnotený) graf je dvojica grafu G a ohodnotenia w hrán reálnymi číslami.*

$$w : E(G) \to \mathbb{R}.$$

Orientovaný graf je usporiadaná dvojica $D = (V, E)$, kde $E \subseteq V \times V$.

Rozdiel medzi orientovaným a neorientovaným grafom je možné popísať aj tak, že hrany v orientovanom grafe sú usporiadané dvojice a v neorientovanom grafe to sú dvojprvkové množiny.

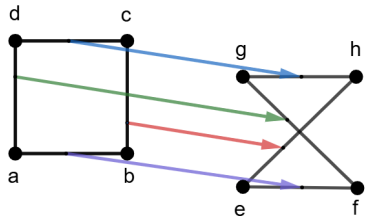
3.2 Izomorfizmy v klasickej teórii grafov

Pre grafy môže platiť, že majú rovnakú štuktúru, a teda sú v istom slova zmysle rovnaké. V tejto kapitole sa budeme venovať formálnej definícii tejto rovnosti. Uvedieme ilustračné príklady a preskúmame základné grafové algoritmy týkajúce sa tejto problematiky.

3.2.1 Izomorfizmus, základné pojmy

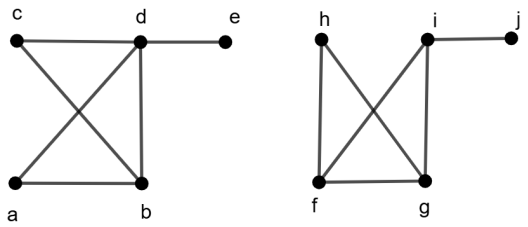
Definícia 28 *[9] Hovoríme, že grafy G a H sú izomorfné (zapisujeme $G \simeq H$) ak existuje bijektívne zobrazenie $f : V(G) \to V(H)$, pre ktoré každá dvojica $u, v \in V(G)$ je spojená hranou v G práve vtedy, keď je dvojica $f(u), f(v)$ spojená hranou v H.*

Pre izomorfné grafy G, H musí platiť, že majú rovnaký počet hrán a funkcia f zobrazuje na seba vrcholy rovnakých stupňov, teda $d_G(v) = d_H(f(v))$. Ide teda o prosté zobrazenie z vrcholov jedného grafu na vrcholy druhého grafu, ktoré zachováva incidenciu.



Obr. 3.2: Príklad izomorfizmu medzi 2 grafmi H_1, H_2.
$(f : a \to e, b \to f, c \to g, d \to h)$.

Izomorfizmus medzi dvoma grafmi s nižším počtom vrcholov je často možné rozpoznať na prvý pohľad. Na obrázku 3.2 je znázornený jeden z ôsmich možných izomorfizmov medzi grafmi H_1, H_2. Naopak, na obrázku 3.3 vidíme grafy F_1, F_2, ktoré nie sú izomorfné, nakoľko graf F_1 obsahuje vrchol 4.stupňa (vrchol d), ale takýto vrchol sa v grafe F_2 nenachádza.

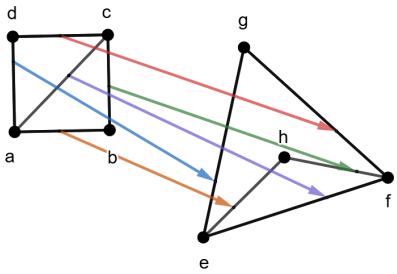


Obr. 3.3: Grafy F_1, F_2, ktoré nie sú izomorfné.

Ako už bolo spomenuté v predchádzajúcom príklade, medzi grafmi nemusí existovať iba jeden izomorfizmus, ale takých zobrazení môže byť aj viac.

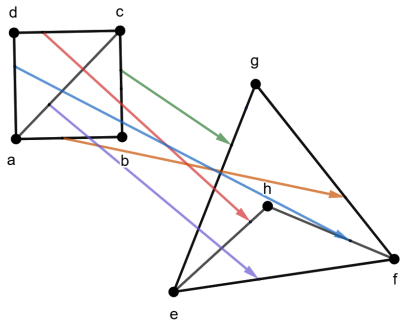
Príklad 4 *Na nasledujúcich obrázkoch vidíme 2 rôzne izomorfizmy medzi grafmi G_1, G_2.*

1. $f_1 : a \to e, b \to h, c \to f, d \to g$.



Obr. 3.4: Prvý izomorfizmus grafov G_1, G_2.

2. $f_2 : a \to f, b \to g, c \to e, d \to h$.



Obr. 3.5: Druhý izomorfizmus grafov G_1, G_2.

3.2.2 Grafové algoritmy a izomorfizmus

Zistiť, či sú 2 grafy izomorfné, je výpočtovo náročná úloha, pretože v najhoršom prípade je nutné skúšať všetky možné priradenia vrcholov. V tejto časti predstavíme základné prístupy riešenia daného problému.

Brute-force prístup

Najjednoduchším (ale aj nazdĺhavejším) spôsobom ako skontrolovať izomorfizmus dvoch grafov, je vyskúšať všetky možné spôsoby priradenia vrcholov a overiť, či zachovávajú hrany medzi danými vrcholmi. Tento prístup má však exponenciálnu zložitosť $O(n!)$, čo je prakticky nepoužiteľné pre grafy s vyšším počtom vrcholov.

Graph hashing

Ďalším prístupom je reprezentácia grafov pomocou unikátnych hašov, tzv. kanonických označení. Cieľom metódy je vytvoriť binárny reťazec, ktorý zodpovedá štruktúre grafu. Tento reťazec vyjadruje prítomnosť alebo neprítomnosť hrán medzi jednotlivými vrcholmi. Generujú sa všetky možné permutácie označenia vrcholov, čím vzniká viac binárnych reťazcov. Z nich vyberieme lexikograficky najväčší, ktorý označujeme ako kanonický haš. Dva grafy sú izomorfné, ak majú rovnaký kanonický haš [16].

Tento algoritmus je síce jednoduchý, ale výpočet všetkých permutácií vedie k faktoriálnemu času výpočtu $O(n!)$. Preto sa pre grafy s vyšším počtom uzlov používa nasledujúci, známy ako, McKayov algoritmus:

McKayov algoritmus

Tento algoritmus je efektívnou metódou zisťovania izomorfizmov grafov, pričom nie je potrebné explicitne vygenerovať všetky permutácie vrcholov. Prvým krokom je usporiadanie vrcholov podľa ich stupňa, čo výrazne znižuje počet permutácií. Ak dva vrcholy majú rovnaký stupeň, ostávajú v rovnakej ekvivalenčnej triede. Každá ekvivalenčná trieda sa postupne delí na menšie podtriedy, až kým sa nedosiahne úplné usporiadanie vrcholov. Výsledkom je strom možných usporiadaní, ktorý je však výrazne menší ako úplný priestor permutácií. Následne, ak sa zistí, že dve vetvy vedú k tým istým výsledkom, tento algoritmus prerezáva vyhľadávací priestor, čím sa opäť vyhneme zbytočným výpočtom. Výstupom algoritmu je kanonické označenie grafu, ktoré je lexograficky najväčšie zo všetkých vygene-

rovaných. A tieto kanonické označenia sú identické pre izomorfné grafy, metóda je podrobne popísaná v [14].

3.3 Twin-width v klasickej teórii grafov

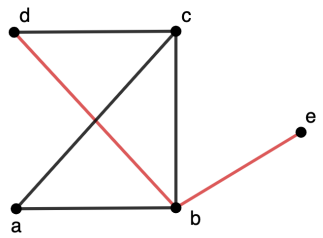
Twin-width je jedným z najnovších ukazateľov zložitosti grafov, ktorý predstavil Bonnet a kol. v roku 2020 [3]. Táto metrika si získala svoju pozornosť pre mnohé štrukturálne a kombinatorické vlastnosti. Twin-width ukazuje spôsob, akým môžeme redukovať graf prostredníctvom kontrakcií vrcholov, pričom sledujeme najvyšší počet tzv. červených hrán v ktoromkoľvek kroku redukcie.

3.3.1 Trigrafy a kontrakcie

Na pochopenie twin-width je potrebné zaviesť, čo sú to trigrafy. Trigaf G je špeciálny druh grafu, ktorého množina hrán $E(G)$ je tvorená 2 disjunktnými množinami hrán $R(G)$ a $B(G)$. $R(G)$ predstavuje množinu červených hrán a $B(G)$ predstavuje množinu čiernych hrán. Formálne hrany grafu môžeme definovať nasledovne:

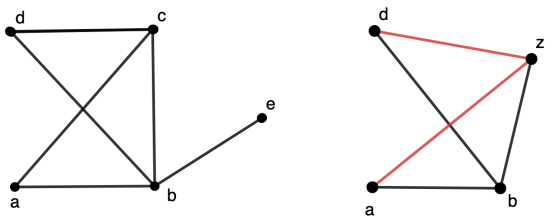
$$E(G)^* \subseteq \{\{\{x, y\}|x, y \in V \wedge x \neq y\} \times \{0, 1, \frac{1}{2}\}\},$$

kde 0 predstavuje neprítomnosť hrany, 1 označuje čiernu hranu a $\frac{1}{2}$ červenú hranu. Na ilustráciu uvádzame jeden taký trigraf na nasledujúcom obrázku:



Obr. 3.6: Trigraf G.

Kontrakcia vrcholov v trigrafe znamená zlúčenie dvoch, nie nutne susedných, vrcholov do jedného, pričom nové hrany určujeme na základe pôvodných spojení s vrcholmi. Ak boli pôvodné vrcholy pred kontrakciou spojené s rovnakým susedným vrcholom čiernymi hranami, novovzniknutá hrana s týmto vrcholom bude opäť čierna. V inom prípade bude hrana s daným susedným vrcholom červená. Zvyšné hrany, teda tie, ktoré nespájali kontrahované vrcholy s inými, ostávajú nezmenené.



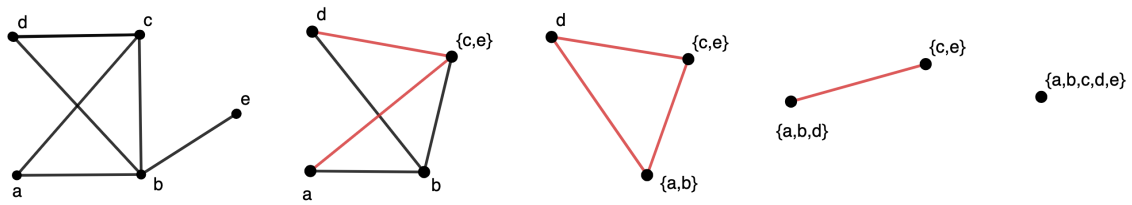
Obr. 3.7: Kontrakcia vrcholov c, e.

Keďže červené hrany vznikajú ako dôsledok nejednoznačných spojení pri kontrakcii vrcholov, ich počet reprezentuje mieru zložitosti danej kontrakčnej sekvencie. Čím viac červených hrán vznikne, tým náročnejšie je ďalej pracovať s grafom a analyzovať jeho vlastnosti. Preto je cieľom nájsť optimálnu sekvenciu kontrakcií s najnižším počtom červených hrán.

3.3.2 Sekvencia kontrakcií

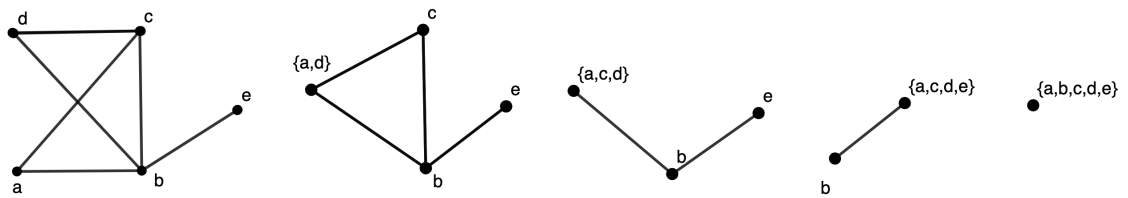
Sekvencia kontrakcií je postupnosť trigrafov $C = G_n, G_{n-1}, ..., G_1$, kde n je počet vrcholov v pôvodnom trigrafe G. Každý nový trigraf vzniká kontrakciou 2 vrcholov v predchádzajúcom trigrafe. Sekvencia sa končí v momente, keď graf je tvorený jediným vrcholom.

Šírka kontrakčnej sekvencie, tzv. d-sekvencia, je určená parametrom d, ktorý korešponduje s najvyšším počtom incidentných červených hrán ktoréhokoľvek vrchola v akomkoľvek kroku sekvencie kontrakcií.



Obr. 3.8: 2-sekvencia grafu G.

Twin-width grafu je následne minimálna hodnota parametru d naprieč všetkými možnými sekvenciami kontrakcií.



Obr. 3.9: Optimálna sekvencia kontrakcií grafu G

Medzi obrázkom 3.8 a 3.9 vidíme rozdiel v šírke konktrakčných sekvencií toho istého trigrafu. Šírka kontrakčnej sekvencie v 3.8 je 2, nakoľko pre vrcholy v trigrafoch danej sekvencie platí, že sú susedné s maximálne dvomi červenými hranami. V 3.9 sa inou postupnosťou kontrakcií dosiahla šírka kontrakčnej sekvencie 0, nakoľko neobsahuje žiadne červené hrany ani jeden z trigrafov. Preto hodnota 0 reprezentuje twin-width pôvodneho trigrafu.

3.4 Fuzzy grafy

Fuzzy grafy sú rozšírením klasických grafov, kde uzly a hrany majú priradené hodnoty z intervalu [0,1]. Ide o vážené grafy, ktoré môžu byť orientované alebo neorientované.

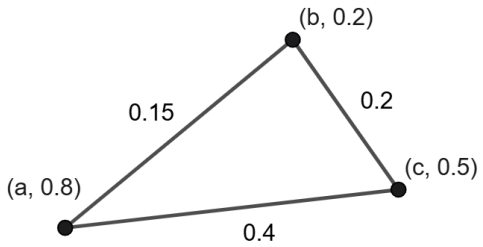
Definícia 29 *[13] Fuzzy graf je usporiadaná trojica $G = (V, \sigma, \mu)$ pozostávajúca z neprázdnej množiny vrcholov V a dvoch funkcií $\sigma : V \to [0, 1]$ a $\mu : E \to [0, 1]$, pre ktoré platí $\mu(xy) \leq T(\sigma(x), \sigma(y)), \forall x, y \in V$. Funkcia $\mu(xy)$ označuje funkciu príslušnosti hrany xy, $\sigma(x)$ a $\sigma(y)$ označujú funkcie príslušnosti vrcholov x a y, a T je $t-$norma.*

Na nasledujúcom príklade si priblížime, kedy štruktúra predstavuje graf a kedy nie.

Príklad 5 *Nech $G = (V, \sigma, \mu)$ je štruktúra s množinou vrcholov $V = (a, b, c)$ a funkcie σ, μ sú zadané nasledovne:*

$$\sigma(a) = 0.9, \sigma(b) = 0.6, \sigma(c) = 0.3,$$

$$\mu(ab) = 0.4, \mu(bc) = 0.1, \mu(ca) = 0.2.$$

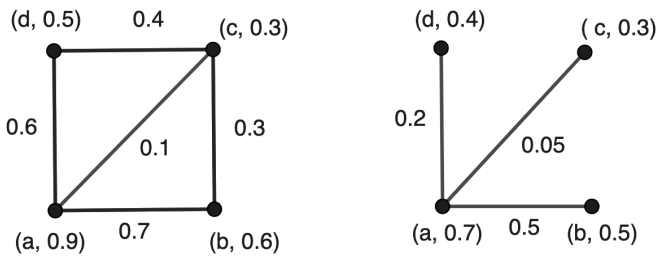


Obr. 3.10: Štruktúra G

Vzhľadom k minimovej t-norme T_M je daná štruktúra G grafom v prípade, ak hrany nadobúdajú hodnoty menšie, nanajvýš rovné minimu vrcholov daných hrán, čiže $\mu(ab) \leq 0.2, \mu(bc) \leq 0.2, \mu(ca) \leq 0.5$. Nakoľko platia dané nerovnosti, daná štruktúra G je fuzzy grafom vzhľadom k minimovej t-norme T_M. Pre súčinovú t-normu musia pre hodnoty hrán platiť tieto nerovnosti: $\mu(ab) \leq 0.16, \mu(bc) \leq 0.1, \mu(ca) \leq 0.4$. V tomto prípade sa nejedná o fuzzy graf vzhľadom k súčinovej t-norme T_P, nakoľko $\mu(bc)$ je rovné 0.2. Pre Łukasiewiczovu t-normu T_L sú maximálne možné hodnoty hrán nasledujúce: $\mu(ab) \leq 0, \mu(bc) \leq 0, \mu(ca) \leq 0.3$. O štruktúre G teda nemôžme povedať, že ide o graf vzhľadom k Łukasiewiczovej t-norme T_L, nakoľko ani jedna z hrán nespĺňa podmienky z Definície 29.

Ako aj pri klasických grafoch, tak aj tu si predstavíme pojem fuzzy podgraf.

Definícia 30 *[13] Hovoríme, že fuzzy graf $H = (V, \tau, \nu)$ je fuzzy podgrafom fuzzy grafu $G = (V, \sigma, \mu)$, ak platí $\tau(x) \subseteq \sigma(x)$ pre $\forall x \in V$ a $\nu(xy) \subseteq \mu(xy)$ pre $\forall x, y \in V$.*

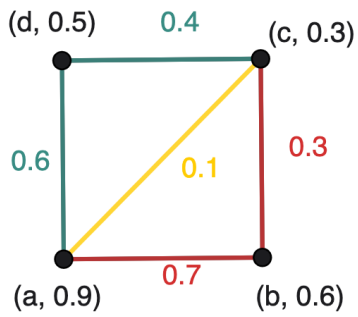


Obr. 3.11: Fuzzy graf G (vľavo) a fuzzy graf H (vpravo)

O fuzzy grafe H z obrázku 3.11 vieme povedať, že všetky funkcie príslušnosti jeho vrcholov sú menšie alebo rovné funkciám príslušnosti vrcholov fuzzy grafu G. Rovnako aj hodnoty funkcií príslušností hrán fuzzy grafu H sú menšie, nanajvýš rovné hodnotám funkciám príslušnosti hrán fuzzy grafu G. Fuzzy graf H je teda fuzzy podgrafom fuzzy grafu G.

Definícia 31 *[13] Cesta P vo fuzzy grafe je postupnosť rôznych vrcholov $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$ taká, že $\mu(x_{i-1}x_i) > 0, i \in \{1, ...n\}$.*

Vo fuzzy grafe G z obrázku 3.11 sú 3 cesty medzi vrcholmi a, c, znázornené na obrázku nižšie:



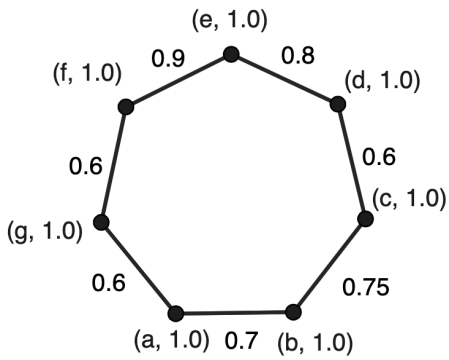
Obr. 3.12: Cesty P_1 (zelená), P_2 (žltá), P_3 (červená) medzi vrcholmi a,c.

Definícia 32 *[13] Sila cesty P je minimum z hodnôt funkcie príslušnosti jej hrán, zapisujeme ju $s(P)$. Silu spojitosti medzi dvomi vrcholmi x a y definujeme ako maximum zo síl na všetkých cestách medzi x a y. Silu spojitosti fuzzy grafu G zapisujeme $CONN_G(x, y)$.*

Poznámka 4 *Pre cesty z obrázku 3.12 platí, že sila cesty P_1 je $s(P_1) = 0.4$, sila cesty P_2 je $s(P_2) = 0.1$ a sila cesty P_3 je rovná 0.3. Sila spojitosti medzi vrcholmi a, c je $CONN_G(a, c) = 0.4$.*

Vo fuzzy téorii grafov sa vyskytujú aj špeciálne druhy grafov ako sú kružnice, stromy, les.

Definícia 33 *[13] Cestu P nazývame kružnicou vo fuzzy grafe, ak platí $x_0 = x_n$ a $n \geq 3$. Cestu P nazývame fuzzy kružnicou práve vtedy, keď P je kružnica a obsahuje viac ako jednu najslabšiu hranu.*



Obr. 3.13: Fuzzy graf G

Na obrázku 3.13 je možné si všimnúť, že fuzzy graf G je kružnica, nakoľko každá nenulová cesta P, ktorá začína aj končí v tom istom vrchole tvorí cyklus. Obsahuje 3 najslabšie hrany s hodnotou funkcie príslušnosti 0.6.

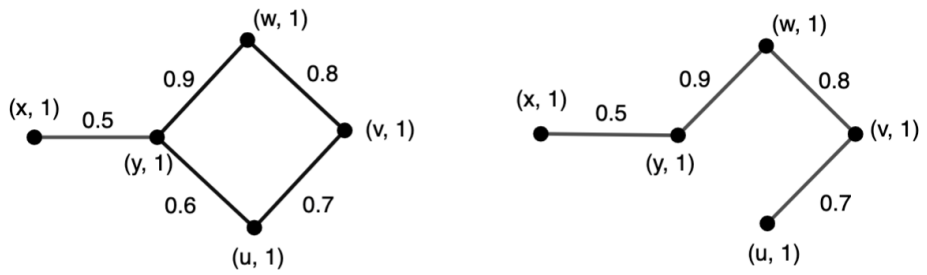
Definícia 34 *[13] Fuzzy graf G sa nazýva súvislým práve vtedy, keď ľubovoľné dva vrcholy $u, v \in V(G)$ sú spojené cestou. Maximálna kostra súvislého fuzzy grafu $G = (V, \sigma, \mu)$ je fuzzy podgraf $T = (V, \sigma, \nu)$ grafu G, pre ktorý platí, že $CONN_G(u, v)$ je sila najsilnejšej cesty medzi vrcholmi u a v v T pre $\forall u, v \in V$.*

Po zadefinovaní súvislého fuzzy grafu a jeho maximálnej kostry je možné uviesť definíciu stromu a lesa.

Definícia 35 *[13] Fuzzy graf $G = (V, \sigma, \mu)$ sa nazýva strom, ak neobsahuje kružnice a je súvislý. Fuzzy graf G sa nazýva fuzzy strom práve vtedy, keď G má kostru $F = (V, \sigma, \nu)$, ktorá je takým stromom, že pre všetky hrany $uv \notin F$ platí $\mu(uv) \leq CONN_F(u, v)$.*

Definícia 36 *[13] Fuzzy graf $G = (V, \sigma, \mu)$ nazývame lesom, ak neobsahuje kružnice. Fuzzy graf G sa nazýva fuzzy lesom práve vtedy, keď G má kostru $F = (V, \tau, \nu)$, ktorá je takým lesom, že pre všetky hrany $uv \notin F$ platí $\mu(uv) \leq CONN_F(u, v)$. To znamená, že existuje cesta v grafe F medzi vrcholmi u a v, kde sila spojitosti cesty je väčšia než $\mu(uv)$.*

Definície stromu a lesu si vieme priblížiť na obrázku 3.14.



Obr. 3.14: Fuzzy graf $G = (V, \sigma, \mu)$ (vľavo) a fuzzy graf $F = (V, \tau, \nu)$ (vpravo)

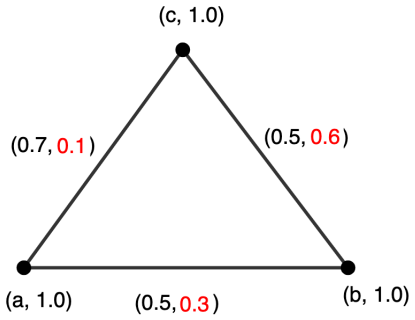
Pre graf F platí, že je maximálnou kostrou fuzzy grafu G, pretože fuzzy graf F obsahuje iba najsilnejšiu cestu medzi vrcholmi y a u, ktorá je $y \to w \to v \to u$, ktorej sila spojitosti je $CONN_F(y, u) = 0.7$. Fuzzy graf F je súvislý a neobsahuje kružnice – je stromom aj lesom. Nakoľko v kostre fuzzy grafu G existuje cesta medzi vrcholmi y, u, ktorej sila spojitosti je väčšia než je váha hrany yu, môžme o fuzzy grafe G povedať, že je fuzzy stromom a fuzzy lesom.

3.5 Fuzzifikácia twin-width

V nasledujúcej časti si predstavíme spôsob, ako aplikovať twin-width na fuzzy grafy. Poukážeme na nový spôsob kontrakcie vrcholov a výpočtu fuzzy twin-width, ktorý zaviedol Marek Effenberger v rámci svojej bakalárskej práce, [7].

3.5.1 Fuzzy trigrafy

Pri kontrakciách klasických trigrafov sme sa stretli aj s výskytom červených hrán, ktoré predstavovali istú odlišnosť. Nakoľko vo fuzzy grafoch by bolo náročné určiť, ktoré hrany sú odlišné, je potrebné zaviesť novú reláciu nad fuzzy trigrafmi $G_T = (V_T, \sigma_T, \mu_T)$, ktorú označíme ako stupeň odlišnosti μ_R, pričom $\mu_R \leq \mu_T$. Zároveň definujeme $\mu_B \leq \mu_T$, čo predstavuje ekvivalent μ v G v ľubovoľnom fuzzy trigrafe a označuje mieru spojitosti vrcholov. Platí, že $\mu_T = \mu_B + \mu_R$.



Obr. 3.15: Fuzzy trigraf G_T.

Na príklade fuzzy trigrafu môžeme opísať príslušnosť hrany medzi vrcholmi a a b ako $\mu_B(a, b) = 0.5$, pričom stupeň odlišnosti tejto hrany $\mu_R(a, b)$ dosahuje hodnotu 0.3. Pri kontrakcii vrcholov vo fuzzy trigrafe nadobúdajú novovzniknuté hrany odlišné hodnoty príslušnosti a stupňa odlišnosti, čo môžeme vidieť aj na obrázku 3.15. Ich výpočet je podrobne vysvetlený v nasledujúcej kapitole.

3.5.2 Kontrakcia vrcholov

Kontrakciou vrcholov $u, v \in V_T$ vo fuzzy trigrafe $G_T = (V_T, \sigma_T, \mu_T)$ vzniká nový fuzzy trigraf $G^* = (V_T^*, \sigma_T^*, \mu_T^*)$, kde:

- $V_T^* = V_T \setminus \{u, v\} \cup \{w\}$, pričom w je novovzniknutý uzol,
- $\sigma_T^*(u) = \sigma_T^*(v) = 0$,
- $\sigma_T^*(w) = S(\sigma_T(u), \sigma_T(v))$,
- $\mu_T^* = \mu_T$ pre hrany, ktoré neboli susedné s u alebo v,
- $\mu_T^*(xw) = S(\mu_T(x, u), \mu_T(x, v))$,
- $\mu_B^*(x, w) = T(\mu_B(x, u), \mu_B(x, v))$,
- $\mu_R^*(x, w) = S(\mu_T(x, u), \mu_T(x, v)) - T(\mu_B(x, u), \mu_B(x, v))$.

Opakovaním tohto postupu postupne redukujeme fuzzy trigraf, až kým z neho neostane iba jeden vrchol. Na základe toho vieme definovať fuzzy twin-width.

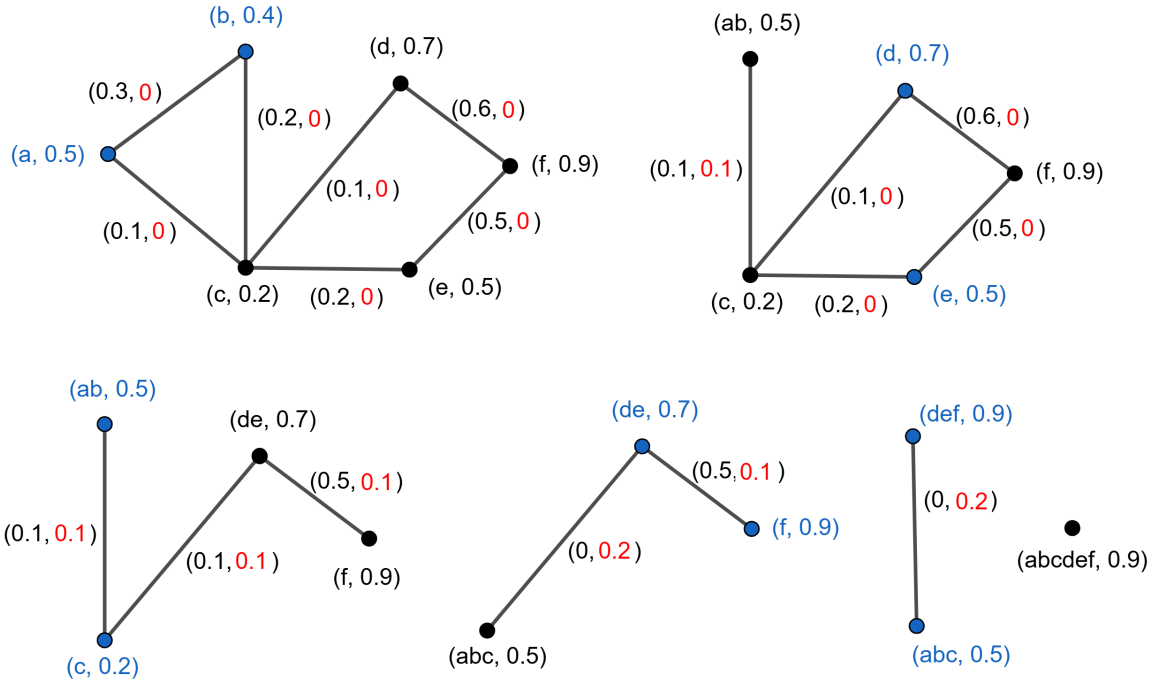
3.5.3 Fuzzy twin-width

Podobne, ako v klasickom prípade, aj pri fuzzifikácii twin-width, sa v rámci každej kontrakcie určuje stupeň odlišnosti vrchola, ktorý je definovaný ako súčet všetkých hodnôt μ_R jeho incidentných hrán:

$$\forall y \in V_T | \mu_T(x, y) > 0 \rightarrow rdeg_x = \sum_y \mu_R(x, y).$$

Fuzzy šírka kontrakčnej sekvencie $C = G_n, G_{n-1}, ..., G_1$ sa definuje ako najvyššia odlišnosť medzi všetkými vrcholmi naprieč grafmi v sekvencii. Fuzzy twin-width grafu je minimálna šírka naprieč všetkými možnými kontrakčnými sekvenciami.

Vzhľadom k tomu, že hodnoty $\mu_R \in [0, 1]$, fuzzy twin-width predstavuje reálne číslo na rozdiel od twin-width pri klasických grafoch, ktoré je prirodzené číslo.



Obr. 3.16: Optimálna kontrakčná sekvencia pre G_6.

Na obrázku 3.16 je znázornená kontrakčná sekvencia fuzzy trigrafu G_6. Každej hrane prislúcha dvojica hodnôt (μ_B, μ_R). Modrou sú zvýraznené kontrahované vrcholy. Hodnoty funkcií príslušnosti sú v tomto príklade určené podľa minimovej t-normy T_M a jej duálnej s-normy S_M.

V prvom kroku boli kontrahované vrcholy $a, b \in V_{G_6}$, ktoré vytvoria vrchol $ab \in V_{G_5}$. Jeho hodnota funkcie príslušnosti je maximum hodnôt funkcie príslušnosti pôvodných kontrahovaných vrcholov, a teda

$$\sigma_{G_5}(ab) = S_M(\sigma_{G_6}(a), \sigma_{G_6}(b)) = S_M(0.5, 0.4) = 0.5.$$

Vznikla nová hrana medzi vrcholmi ab a c, jej μ_B je definované ako

$$\mu_B(ab, c) = T_M(\mu_B(a, c), \mu_B(b, c)) = T_M(0.1, 0.2) = 0.1.$$

Stupeň odlišnosti tejto hrany je

$$\mu_R(ab,c) = S_M(\mu_T(a,c),\mu_T(b,c)) - T_M(\mu_B(a,c),\mu_B(b,c)) = S_M(0.1,0.2) - T_M(0.1,0.2) = 0.1.$$

Nakoľko ostatné hrany neboli incidentné s vrcholmi a, b, tak ich hodnoty funkcií príslušnosti ostávajú nezmenené.

V druhom kroku kontrakcie sme spojili vrcholy $d, e \in V_{G_5}$, čím vznikol $de \in V_{G_4}$. Hodnota $\mu_B(de,c)$ je rovná 0.1, pretože je to minimum hodnôt

$$\mu_B(d,c) = 0.1 \text{ a } \mu_B(e,c) = 0.2.$$

Hodnota $\mu_R(de,c) = 0.1$, nakoľko

$$\mu_T(d,c) = \mu_R(d,c) + \mu_B(d,c) = 0.1 + 0 = 0.1 a \mu_T(e,c) = \mu_R(e,c) + \mu_B(e,c) = 0.2 + 0 = 0.2,$$

a teda

$$\mu_R(de,c) = S_M(\mu_T(d,c),\mu_T(e,c)) - T_M(\mu_B(d,c),\mu_B(e,c)) = 0.2 - 0.1 = 0.1.$$

Podobne sme určili hodnoty $\mu_B(de,f)$ a $\mu_R(de,f)$. Hodnota

$$\mu_B(de,f) = T_M(\mu_B(d,f),\mu_B(e,f)) = T_M(0.6,0.5) = 0.5$$

a

$$\begin{aligned}\mu_R(de,f) &= S_M(\mu_T(d,f),\mu_T(e,f)) - T_M(\mu_B(d,f),\mu_B(e,f)) = \\ &= S_M(0.6,0.5) - T_M(0.6,0.5) = 0.1.\end{aligned}$$

Rovnakým spôsobom pokračujeme v redukovaní, až kým nedosiahneme trigraf G_1 s jediným vrcholom $abcdef$. Pre trigraf G_6 existuje až 2700 rôznych kontrakčných sekvencií, pričom sekvencia znázornená v 3.16 patrí medzi 8 optimálnych kontrakčných sekvencií pre daný trigraf G_6. Fuzzy šírka tejto sekvencie je 0.3 vzhľadom na to, že najvyššia odlišnosť spomedzi všetkých vrcholov je $rdeg_{de} = 0.3$ v G_3, čo je najnižšia hodnota spomedzi všetkých kontrakčných sekvencií. Z toho vyplýva, že twin-width daného grafu je rovný 0.3.

Kapitola 4

Podobnosť

Pri porovnávaní objektov alebo dát je často potrebné určiť, do akej miery sú si navzájom podobné. Z tohto dôvodu sa využívajú rôzne prístupy, pričom jedným z najbežnejších je použitie metrík, ktoré umožňujú kvantifikovať vzdialenosť medzi objektmi v priestore.

4.1 Klasická metrika

Definícia metriky určuje pravidlá, ktoré zabezpečujú platnosť istých požiadaviek pri meraní vzdialeností medzi jednotlivými objektmi.

Definícia 37 *[10] Nech $M \neq \emptyset$ je ľubovoľná množina a $d : M \times M \to \langle 0, \infty \rangle$ je zobrazenie, ktoré pre všetky $x, y, z \in M$ spĺňa*

- ***Axióma totožnosti**: $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,*
- ***Axióma symetrie**: $d(x, y) = d(y, x)$,*
- ***Trojuholníková nerovnosť**: $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.*

Potom zobrazenie d nazývame metrika na M, prvky množiny M nazývame body metrického priestoru (M, d), číslo $d(x, y)$ nazývame vzdialenosť bodov x, y.

Príklad 6 *[10] V tomto príklade si uvedieme niekoľko typov známych metrík. Tieto prípady zahŕňajú diskrétnu metriku, ktorá je definovaná na ľubovoľnej množine, štandardnú metriku na množine reálnych čísel a niekoľko ďalších metrík používaných na množine $\mathbb{R}^n$, ako sú manhattanská, euklidovská a šachovnicová metrika.*

1. *Nech M je ľubovoľná množina a*

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{ak } x \neq y, \\ 0 & \text{ak } x = y, \end{cases}$$

   potom $d : M \to \{0, 1\}$ je známa ako diskrétna metrika a (M, d) je metrický priestor nazývaný diskrétny.

2. *Na reálnej číselnej osi zvyčajne vzdialenosť počítame takto:*

$$d(x, y) = |x - y|,$$

   aj táto funkcia $d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$ je metrika.

3. *Pre* $M = \mathbb{R}^n$, *kde* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *a* $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ *uvedieme aspoň tri najznámešie metriky:*

   - $d_1(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \cdots + |x_n - y_n|$ *sa nazýva súčtová (manhattanská) metrika,*
   - $d_2(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$ *sa nazýva euklidovská metrika,*
   - $d_\infty(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, \ldots, |x_n - y_n|\}$ *sa nazýva šachovnicová metrika.*

Už bolo spomenuté, že metriky môžu byť využité pri určovaní podobnosti objektov. Základ pre určovanie podobnosti (respektíve rozdielnosti) objektov je vzdialenosť medzi nimi. Ak je vzdialenosť medzi objektmi veľká, podobnosť je nízka, objekty sa od seba odlišujú. Naopak, menšia vzdialenosť naznačuje vyššiu mieru podobnosti, čo znamená, že objekty majú viac spoločných vlastností alebo sú si bližšie v rámci daného priestoru.

4.2 Klasická podobnosť

Priblížiť podobnosť je možné na nasledujúcom príklade.

Príklad 7 *Majme množinu kníh* K, *pričom každá kniha* $k \in K$ *je charakterizovaná tromi atribútmi: počet strán, rok vydania a počet ocenení. Každú knihu teda môžeme reprezentovať ako trojicu hodnôt* $k = (k_1, k_2, k_3)$, *kde* k_1 *je počet strán,* k_2 *je rok vydania a* k_3 *je počet získaných ocenení.*

Chceme zistiť, aký je medzi knihami vzťah podobnosti, načo použijeme relácie. Reláciu S *môžeme určiť nasledovne:*

$$(k, l) \in S \Leftrightarrow |\{i; k_i = l_i\}| \geq 2.$$

Podľa relácie S *sú si dve knihy podobné, ak sa odlišujú maximálne v jednom údaji. Táto relácia je reflexívna a symetrická, čo je v súlade s prirodzeným vnímaním podobnosti.*

Otázka je, či je táto relácia vhodná na hodnotenie podobnosti kníh. Napríklad, ak majú dve knihy rovnaký počet strán a rovnaký rok vydania, ale jeden z nich má oveľa viac ocenení, relácia ich považuje za podobné, hoci môžu byť veľmi odlišné v kvalite. Na druhej strane, knihy s rôznym počtom strán, ale rovnakým počtom ocenení a podobným rokom vydania, by sa podľa tejto relácie považovali za odlišné.

Preto by mohla byť vhodnejšia relácia, ktorá berie do úvahy malé rozdiely v hodnotách atribútov, kde môže byť užitočné použitie vzdialeností, napríklad:

$$(k, l) \in S' \Leftrightarrow |k_1 - l_1| \leq 50 \wedge |k_2 - l_2| \leq 5 \wedge |k_3 - l_3| \leq 2$$

Teda dve knihy sú podobné, ak sa ich počet strán líši maximálne o 50, ich roky vydania maximálne o 5 rokov a ich počet ocenení maximálne o 2. Aj relácia S' *je reflexívna a symetrická, navyše lepšie popisuje realitu.*

4.3 Pseudometriky

Pri klasickej podobnosti bolo spomenuté, ako podľa metrík vieme presne určiť podobnosť medzi objektmi. V niektorých situáciách sledované vlastnosti nemusia byť jednoznačné, nepostačia nám na ne klasické metriky. Aj fuzzy podobnosť súvisí so vzdialenosťou, čiže s

nejakou metrikou. Pre naše účely nám bude stačiť zovšeobecnenie klasickej metriky v podobe pseudometriky.

Definícia 38 Pseudometrika *na množine X je nezáporná funkcia $d : X^2 \to R$, ak pre ľubovoľné $x, y, z \in X$ platí*

- $d(x, x) = 0$,
- $d(x, y) = d(y, x)$,
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Teda budeme pracovať v pseudometrickom priestore, ktorý je zovšeobecnením metrického priestoru,v ktorom môžu existovať dva rôzne body s nulovou vzdialenosťou.

4.4 Fuzzy podobnosť

Podľa Zadeha je vytvorenie platnej, univerzálnej definície podobnosti náročným problémom.V súvislosti s fuzzy podobnosťou sa preto zavádza pojem relácie podobnosti, ktorý formálne definujeme nasledovne:

Definícia 39 *[12] Reláciu SIM nazývame reláciou podobnosti, ak spĺňa nasledujúce vlastnosti:*

- *SIM je fuzzy relácia na univerze X a $\mu_{SIM}(x, y)$ je stupeň podobnosti x a y.*
- *SIM je reflexívna relácia, teda $\forall x \in X$; $\mu_{SIM}(x, x) = 1$.*
- *SIM je symetrická relácia, teda $\forall x, y \in X$; $\mu_{SIM}(x, y) = \mu_{SIM}(y, x)$.*

Ako vidíme, je to monotónne rozšírenie klasickej podobnosti. Predchádzajúcu definíciu objasníme na ilustračnom príklade.

Príklad 8 *Príklad fuzzy podobnosti môže byť definovaný v kontexte podobnosti slov podľa ich frekvencie výskytu v textoch. Predpokladajme, že máme univerzum slov $\mathbb{X}$, kde každé slovo x a y je charakterizované svojou frenkvenciou výskytu v texte f_x a f_y . Môžeme definovať stupeň podobnosti medzi dvoma slovami x a y pomocou nasledovnej fuzzy relácie:*

$$\mu_{SIM}(x, y) = 1 - \frac{|f_x - f_y|}{\max(f_x, f_y)}.$$

Tento stupeň nadobúda hodnoty z intervalu [0,1], kde 1 znamená, že slová majú rovnakú frekvenciu, a 0 znamená, že sa úplne odlišujú. Relácia je reflexívna $\mu_{SIM}(x, x) = 1$ a symetrická $\mu_{SIM}(x, y) = \mu_{SIM}(y, x)$.

Súvislosť medzi metrikou a reláciou SIM vieme popísať nasledovne: Ak (X, d) je fuzzy metrický priestor, potom platí:

$$\forall x, y, z, u \in X : d(x, y) \leq d(z, u) \Rightarrow \mu_{SIM}(x, y) \geq \mu_{SIM}(z, u).$$

Je zrejmé, že aj fuzzy podobnosť objektov je úzko spätá s ich vzájomnou vzdialenosťou. Platí, že čím bližšie sú objekty v priestore X (teda vzdialenosť $d(x, y)$ je nižšia), tým väčšia je ich podobnosť $\mu_{SIM}(x, y)$. Naopak, veľmi vzdialené objekty sa budú menej na seba podobať.

Pre spojité archimedovské t-normy je vzťah medzi $T-$ekvivalenciou a pseudo-metrikou vyjadrený nasledovne:

Veta 1 *[8] Nech X je univerzum a T je spojitá archimedovská t-norma s aditívnym generátorom $f : [0,1] \to [0,\infty]$. Potom platí:*

- *Ak $d : X^2 \to [0,\infty]$ je pseudometrika na X, potom binárna fuzzy relácia E_d na X daná vzťahom $\mu_{E_d} = f^{(-1)} \circ d$ je T-ekvivalencia.*
- *Ak E je $T-$ekvivalencia na X, potom $d_E : X^2 \to [0,\infty]$ daná vzťahom $d_E(x,y) = f \circ \mu_E(x,y)$ je pseudometrika na X.*

Tento vzťah vysvetlíme V nasledujúcom príklade:

Príklad 9 *[8] Nech d je pseudo-metrika s predpisom*

$$d(x,y) = \frac{1}{10}|x-y|.$$

Łukasiewiczova t-norma je spojitá a archimedovská, pričom jej aditívny generátor je $f(x) = 1-x$. Potom T_L-ekvivalencia daná pseudometrikou d je daná vzťahom

$$\mu_{E_d}(x,y) = \max(1-d(x,y),0) = \max\left\{1-\frac{1}{10}|x-y|,0\right\}.$$

Kapitola 5

Fuzzifikácia podobnosti grafov

V tejto kapitole sa zameriame na definovanie metriky fuzzy podobnosti grafov, ktorá by zohľadňovala zmeny vo fuzzy twin-width. Keďže fuzzy twin-width predstavuje nové rozšírenie klasického twin-width na fuzzy grafy, naším cieľom je preskúmať, ako sa táto metrika mení pri úpravách fuzzy ohodnotenia hrán. Chceme navrhnúť spôsob merania podobnosti fuzzy grafov, ktorý by reflektoval nielen samotné rozdiely v ohodnotení hrán, ale aj ich vplyv na fuzzy twin-width. Keďže fuzzy twin-width neberie do úvahy ohodnotenie vrcholov, sústreďujeme sa výlučne na ohodnotenie hrán.

5.1 Návrh výpočtu fuzzy podobnosti

Nech $G_1 = (V_1, \sigma_1, \mu_1)$ a $G_2 = (V_2, \sigma_2, \mu_2)$ sú fuzzy grafy. Potom postupujeme nasledovne:

1. Odstránenie fuzzy ohodnotení
   - Z fuzzy grafov G_1 a G_2 vytvoríme klasické grafy G_1', G_2', odstránením ohodnotení vrcholov a hrán.
2. Kontrola izomorfizmu
   - Skontrolujeme, či grafy G_1', G_2' sú izomorfné.
   - Ak nejde o izomorfné grafy, ďalej s nimi v tejto metóde nepracujeme.
3. Nájdenie všetkých izomorfizmov
   - Identifikujeme všetky izomorfizmy medzi grafmi G_1', G_2'.
4. Výpočet rozdielov ohodnotenia hrán
   - Pre každý izomorfizmus priradíme hranám ich ohodnotenia (vrátime sa naspäť ku G_1, G_2). Hrany v prvom grafe označíme $h_1, h_2, ..., h_n$ a v druhom $v_1, v_2, ...v_n$.
   - Pre každú dvojicu izomorfne priradených hrán vypočítame rozdiel ohodnotení $|h_i - v_i|$.
   - Z týchto rozdielov vyberieme najväčší a označíme ho r_k pre daný izomorfizmus:

     $$r_k = S_M\left(\ldots\left(S_M\left(S_M\left(|h_1 - v_1|, |h_2 - v_2|\right), |h_3 - v_3|\right), \ldots\right), |h_m - v_m|\right).$$

   - Tento postup opakujeme pre všetky izomorfizmy, čím získame hodnoty $r_1, r_2, ..., r_m$.

- Výsledný rozdiel r bude minimum zo všetkých rozdielov:

$$r = T_M\left(\ldots\left(T_M\left(T_M\left(1, r_1\right), r_2\right), \ldots\right), r_m\right).$$

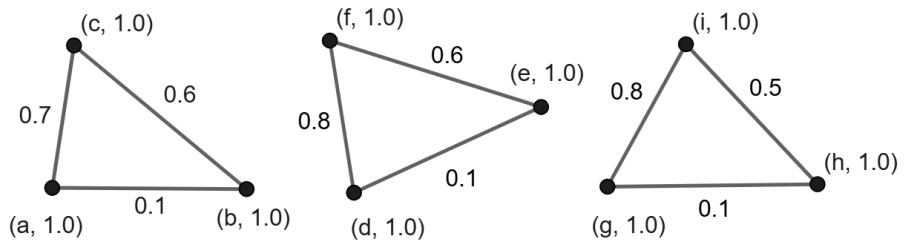
5. Podobnosť grafov

   - Podobnosť daných 2 fuzzy grafov následne definujeme ako

$$S(G_{,}G_2) = 1 - r.$$

Z uvedeného výpočtu podobnosti fuzzy grafov vyplýva, že rozdiel medzi danými grafmi spočíva v hodnote r, ktorá môže byť dôležitá aj pri výpočte fuzzy twin-width. Pri kontrakcii vrcholov vo fuzzy grafe sa menia hodnoty ohodnotenia hrán, čo ovplyvňuje šírku kontrakčnej sekvencie. Ak sú dva fuzzy grafy identické, rovnako identická je aj ich hodnota twin-width. Ak je podobnosť grafov vyjadrená ako $1 - r$ a $r > 0$, fuzzy twin-width sa môže líšiť práve o túto hodnotu.

Príklad 10 *Sú dané tri fuzzy grafy G_1, G_2, G_3:*



Obr. 5.1: Fuzzy grafy G_1, G_2, G_3.

Hodnoty fuzzy twin-width pre jednotlivé grafy sú nasledovné: fuzzy twin-width grafu G_1 je 0.1, pre G_2 je rovný 0.2 a pre G_3 je 0.3. Na prvý pohľad je zrejmé, že fuzzy grafy sú navzájom izomorfné. Pri výpočte fuzzy podobnosti podľa vyššie uvedeného postupu dostávame: $S(G_1, G_2) = S(G_1, G_3) = 0.9$
Vidíme, že oba grafy G_2 a G_3 majú rovnakú podobnosť s G_1, čo však nezohľadňuje ich skutočné rozdiely v hranových ohodnoteniach ani v hodnotách fuzzy twin-width. Konkrétne:

- *Graf G_2 sa od G_1 líši len v jednej hrane, kde sa hodnota funkcie príslušnosti zmenila o 0.1. Jeho fuzzy twin-width je 0.2, teda sa zvýšil len o 0.1 oproti G_1.*
- *Graf G_2 sa však líši v dvoch hranách, pričom každá zmena je opäť o 0.1. Navyše, jeho fuzzy twin-width je 0.3, teda rozdiel oproti G_1 je 0.2.*

Hoci teda G_2 a G_3 vykazujú odlišnú mieru zmeny, ich vypočítaná podobnosť s G_1 je rovnaká. Tento výsledok naznačuje, že súčasná metóda podobnosti dobre vystihuje prípady, kde sa grafy líšia len v ohodnotení jednej hrany, avšak nemusí byť dostatočne presná pri zachytení vplyvu viacerých zmien, najmä z pohľadu zmeny fuzzy twin-width grafu.

5.2 Vylepšenie výpočtu

Keďže predchádzajúci postup neodrážal dostatočne vplyv viacerých zmien v grafoch, bolo potrebné navrhnúť presnejší spôsob výpočtu podobnosti. Náš cieľ je zachovať rovnaké hodnoty podobnosti pre prípady, kde sa grafy líšia iba v jednej hrane, ako v pôvodnom postupe,

no zároveň lepšie zohľadniť vplyv viacerých zmien. Čím viac sa grafy líšia, tým menšia by mala byť ich výsledná podobnosť. Úprava sa týka len 4. kroku, konkrétne výpočtu r_k. Teda nový 4. krok bude nasledovný:

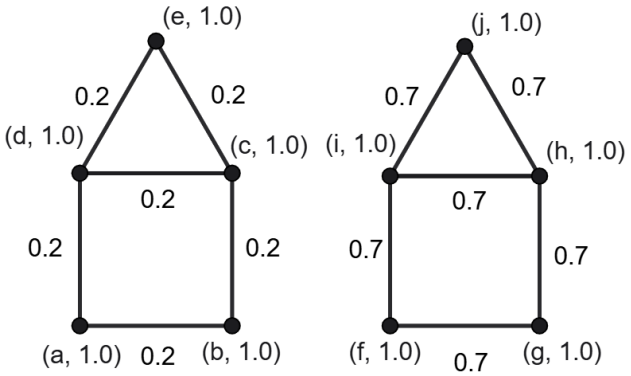
4. Výpočet rozdielov ohodnotenia hrán
   - Pre každý izomorfizmus priradíme hranám ich ohodnotenia (vrátime sa naspäť ku G_1, G_2). Hrany v prvom grafe označíme $h_1, h_2, ..., h_n$ a v druhom $v_1, v_2, ...v_n$.
   - Pre každú dvojicu izomorfne priradených hrán vypočítame rozdiel ohodnotení $|h_i - v_i|$.
   - Pre daný izomorfizmus vypočítame hodnotu r_k pomocou euklidovskej vzdialenosti:
   $$r_k = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(h_i - v_i)^2}$$
   - Tento postup opakujeme pre všetky izomorfizmy, čím získame hodnoty $r_1, r_2, ..., r_m$.

Ak by sme sa vrátili k príkladu 10, tak by hodnoty fuzzy podobnosti grafov podľa nového výpočtu boli nasledovné:

$$S(G_1, G_2) = 0.9,$$
$$S(G_1, G_3) = 1 - \sqrt{0.02} \doteq 0.86,$$

čo už lepšie odráža odlišnosť medzi grafmi.

Príklad 11 *Sú dané fuzzy grafy G_1, G_2:*



Obr. 5.2: Fuzzy grafy G_1, G_2.

Dané grafy sú izomorfné a existujú dva rôzne izomorfizmy týchto fuzzy grafov:

1. $f_1 : a \to f, b \to g, c \to h, d \to i, e \to j$.
   Pre tento izomorfizmus vypočítame r_1:
   $$r_1 = \sqrt{(ab - fg)^2 + (bc - gh)^2 + (cd - hi)^2 + (ad - fi)^2 + (de - ij)^2 + (ce - hj)^2} =$$
   $$= \sqrt{6 \cdot 0.5^2} \doteq 1.22$$

2. $f_2 : a \to g, b \to f, c \to i, d \to h, e \to j$.
   Rovnako vypočítame r_2*:*

$$r_2 = \sqrt{(ab-gf)^2 + (bc-fi)^2 + (cd-ih)^2 + (ad-gh)^2 + (de-hj)^2 + (ce-ij)^2} =$$

$$= \sqrt{6 \cdot 0.5^2} \doteq 1.22$$

Na základe uvedeného výpočtu sme dosiahli hodnotu $r \notin [0,1]$*, čo nedáva zmysel v kontexte podobnosti. Tento problém vzniká preto, že pri väčšom počte zmien sa hodnota* r *zvyšuje rýchlejšie, než by bolo žiadúce. Preto je potrebné tento postup upraviť tak, aby bola podobnosť normalizovaná v intervale* $[0,1]$*.*

Aby sme zabránili nežiaducim hodnotám podobnosti grafov, upravíme výpočet premennej r_k nasledovne:

$$r_k = \sqrt[n]{\sum_{i=1}^{n} (h_i - v_i)^n},$$

kde hodnota n predstavuje počet dvojíc izomorfných hrán. Použitím tejto úpravy zabezpečíme, že hodnota r ostane v rozumných medziach a podobnosť grafov bude vždy v intervale $[0,1]$.

Príklad 12 *Pre fuzzy grafy z 5.2 bude teda platiť nasledovný postup výpočtu ich podobnosti:*

1. $f_1 : a \to f, b \to g, c \to h, d \to i, e \to j$.
   Hodnota r_1*:*

$$r_1 = \sqrt{(ab-fg)^6 + (bc-gh)^6 + (cd-hi)^6 + (ad-fi)^6 + (de-ij)^6 + (ce-hj)^6} =$$

$$= \sqrt{6 \cdot 0.5^6} \doteq 0.67.$$

2. $f_2 : a \to g, b \to f, c \to i, d \to h, e \to j$.
   A ešte vypočítame r_2*:*

$$r_2 = \sqrt{(ab-gf)^6 + (bc-fi)^6 + (cd-ih)^6 + (ad-gh)^6 + (de-hj)^6 + (ce-ij)^6} =$$

$$= \sqrt{6 \cdot 0.5^6} \doteq 0.67.$$

   Výsledné r*:*

$$r \doteq \min(\min(1, 0.67), 0.67) \doteq 0.67,$$

   z čoho dostávame fuzzy podobnosť grafov:

$$S(G_1, G_2) \doteq 0.33.$$

Výpočet podobnosti vieme zovšeobecniť na rôzne t-normy v nasledujúcej vete:

Veta 2 *Nech* $G_1 = (V_1, \sigma_1, \mu_1)$ *a* $G_2 = (V_2, \sigma_2, \mu_2)$ *sú dva fuzzy grafy a nech existuje izomorfizmus medzi ich klasickými reprezentáciami* G_1', G_2'*. Potom funkcia*

$$S(G_1, G_2) = 1 - r,$$

kde

$$r = T\left(\ldots\left(T\left(T\left(1, r_1\right), r_2\right), \ldots\right), r_m\right),$$

a r_k pre každý izomorfizmus k je definovaný ako:

$$r_k = \sqrt[n]{\sum_{i=1}^{n}(h_i - v_i)^n},$$

je podobnosť medzi týmito grafmi. Hodnoty h_i a v_i predstavujú hodnoty funkcií príslušnosti izomorfne priradených hrán v G_1, G_2. Hodnota n je počet dvojíc izomorfných hrán medzi grafmi G_1 a G_2 a T predstavuje ľubovoľnú t-normu.

Dôkaz. Nech G_1 a G_2 sú dva identické fuzzy grafy. Potom existuje izomorfizmus medzi ich klasickými reprezentáciami, pri ktorom každá dvojica zodpovedajúcich si hrán má rovnaké hodnoty funkcie príslušnosti. Z toho vyplýva, že rozdiel r_k pre tento izomorfizmus je nulový, teda $r_k = 0$. Keďže t-norma T je monotónna a platí $T(1, 0) = 0$, celková hodnota

$$r = T(\dots T(1, r_1), \dots, r_k, \dots) = T(\dots T(1, r_1), \dots, 0, \dots) = 0.$$

Potom

$$S(G_1, G_2) = 1 - r = 1.$$

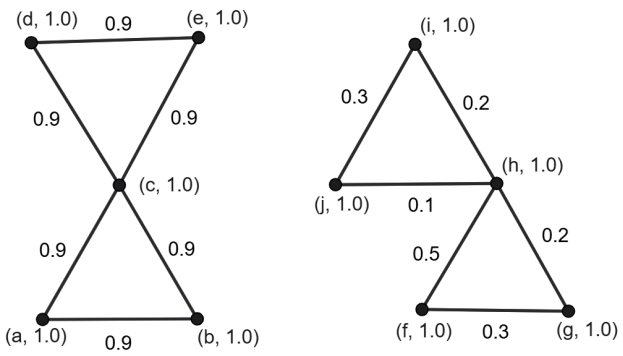
Symetria výpočtu podobnosti vyplýva z komutativity t-noriem, ktoré sú použité pri agregácii hodnôt r_k a samotného výpočtu r_k, kde absolutná hodnota rozdielu zachováva rovnakú hodnotu aj pri zámene operandov. Poradie grafov v porovnaní teda neovplyvňuje výsledok, a preto platí:

$$S(G_1, G_2) = S(G_2, G_1).$$

Teda takto určená funkcia S spĺňa obe podmienky fuzzy podobnosti.

Týmto spôsobom sme získali všeobecný postup na určenie podobnosti fuzzy grafov, ktorý zohľadňuje vyšší počet zmien v ohodnotení hrán a výber ľubovoľnej t-normy.

Príklad 13 *Sú dané dva fuzzy grafy G_1, G_2:*



Obr. 5.3: Fuzzy grafy G_1, G_2.

Hodnoty fuzzy podobnosti a twin-width daných grafov sú nasledovné:

V tabuľke 5.1 vidíme, ako sa sila t-normy odráža na hodnotách fuzzy podobnosti a twin-width grafov G_1, G_2. Slabšie t-normy (ako T_D) vedú k vyšším hodnotám podobnosti a twin-width, zatiaľ čo silnejšie t-normy (ako T_M) dávajú nižšie hodnoty. To ukazuje, že silnejšie t-normy znižujú podobnosť medzi grafmi, zatiaľ čo slabšie ju zvyšujú.

t-normy	Fuzzy podobnosť	Twin-width G_1	Twin-width G_2
T_M	0.08	0	0.3
T_P	0.50	0.36	0.5
T_L	0.66	0.4	0.7
T_D	1	1.8	1

Tabuľka 5.1: Tabuľka porovnania hodnôt fuzzy podobnosti fuzzy grafov G_1, G_2

5.3 Konštrukcie fuzzy podobností

Fuzzy podobnosť je prirodzene prepojená s konceptom vzdialenosti v metrickom priestore. Čím sú dva objekty bližšie, tým je ich podobnosť väčšia. Táto intuícia vychádza z vlastností metriky, ktoré umožňujú kvantifikovať vzdialenosti medzi bodmi v priestore. Doteraz sme podobnosť určovali pomocou výrazu $1-r$, kde r predstavovalo mieru odlišnosti. Tátu mieru odlišnosti dvoch grafov môžeme chápať ako ich vzdialenosť. Tento prístup je ekvivalentný využitiu vzdialenosti $d(x, y)$, ktorú teraz použijeme priamo vo viacerých funkciách fuzzy podobnosti. Na základe tohto poznatku som modelovala funkcie fuzzy podobnosti, ktoré vyjadrujú danú podobnosť medzi objektmi navzájom, čo si predstavíme v nasledujúcej časti kapitoly. Funkcie sú konštruované tak, aby spĺňali obe vlastnosti podobnosti, teda pre $d(x, y) = 0$ je $S(x, y) = 1$ a $S(x, y) = S(y, x)$. Navyše, tieto funkcie určujú nekonečné triedy podobností, tzv. parametrické triedy, pre prirodzený parameter k.

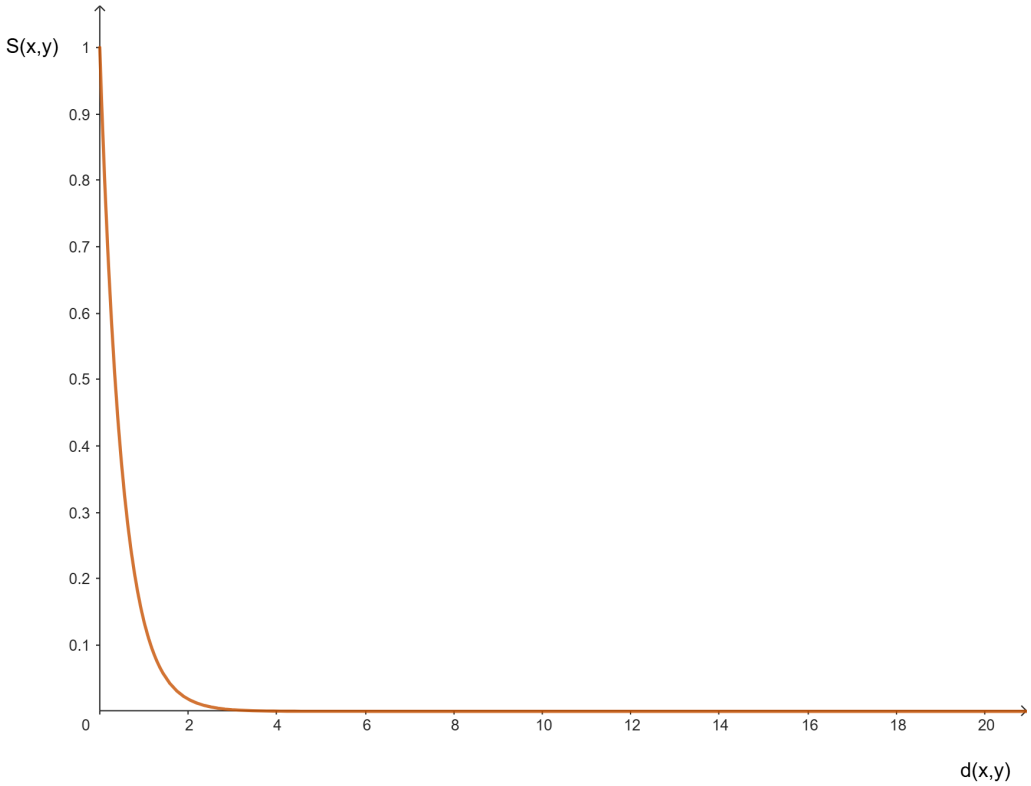
Veta 3 *Nech $d(x, y)$ je metrika určujúca vzdialenosť objektov x, y a $k \in \mathbb{R}^+$. Potom nasledujúce funkcie sú fuzzy podobnosti objektov x, y:*

1.
$$S_1(x, y) = e^{-kd(x,y)},$$

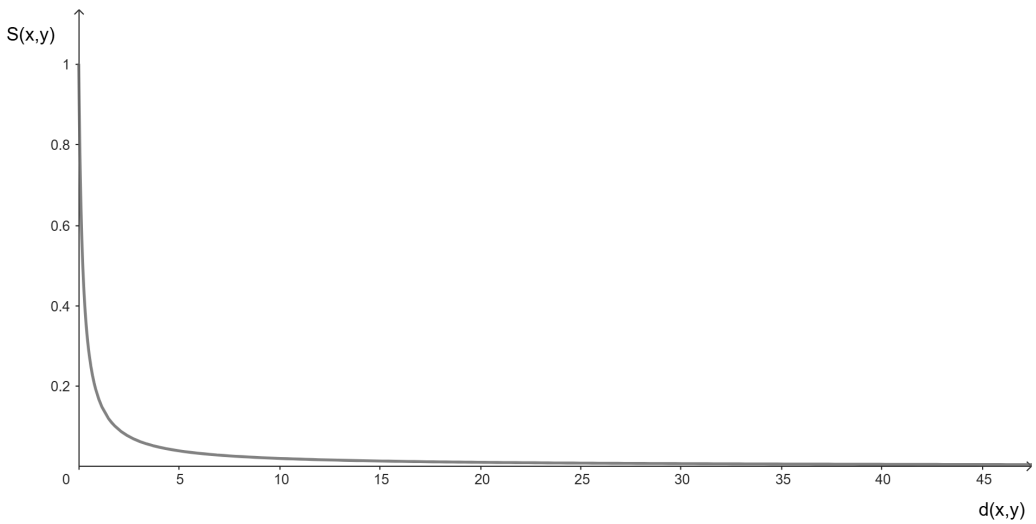
2.
$$S_2(x, y) = \frac{1}{1 + kd(x, y)},$$

3.
$$S_3(x, y) = 1 - \frac{kd(x, y)}{1 + kd(x, y)},$$

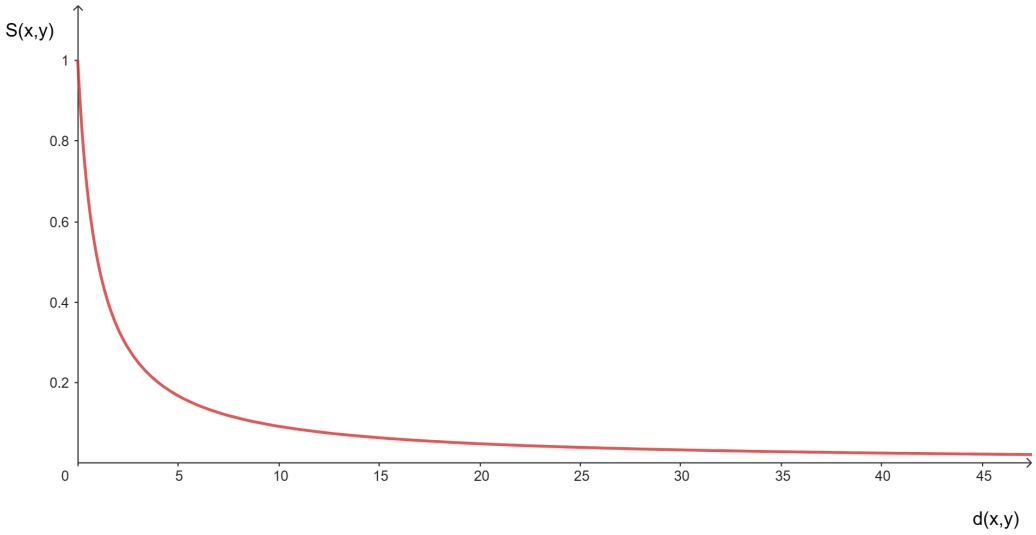
4.
$$S_4(x, y) = \frac{-\arctan(kd(x, y))}{\frac{\pi}{2}} + 1.$$



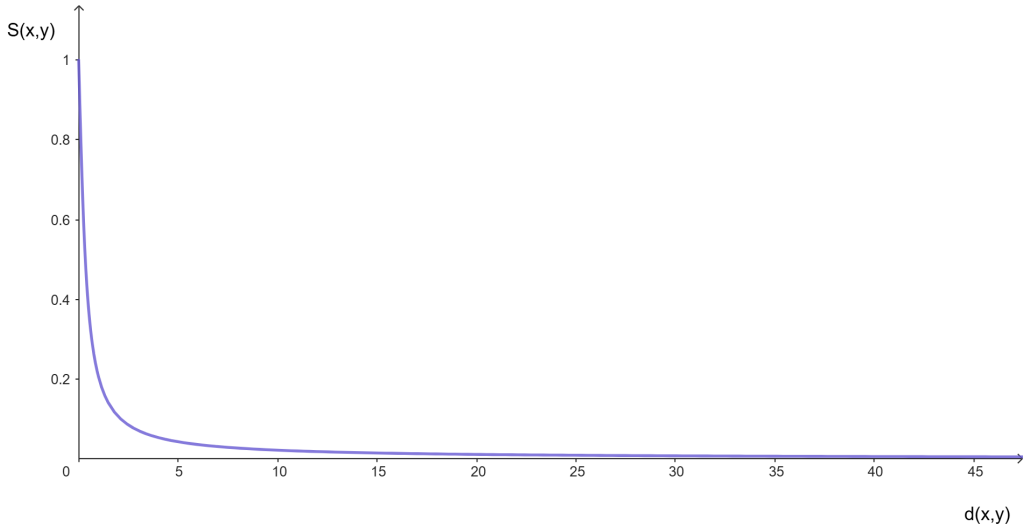
Obr. 5.4: Funkcia fuzzy podobnosti $S(x, y) = e^{-kd(x,y)}$ pre $k = 2$.



Obr. 5.5: Funkcia fuzzy podobnosti $S(x, y) = \frac{1}{1+kd(x,y)}$ pre $k = 5$.



Obr. 5.6: Funkcia fuzzy podobnosti $S(x,y) = 1 - \frac{kd(x,y)}{1+kd(x,y)}$ pre $k = 1$.



Obr. 5.7: Funkcia fuzzy podobnosti $S(x,y) = \frac{-\arctan(kd(x,y))}{\frac{\pi}{2}} + 1$ pre $k = 3$.

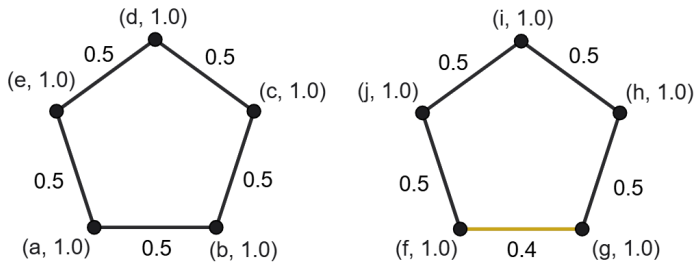
Samozrejmosťou je, že metrika $d(x,y)$ definuje vzdialenosť medzi bodmi v priestore X a nadobúda hodnoty v intervale $[0,\infty)$. Hodnota $d(x,y) = 0$ nastáva, keď $x = y$, teda keď ide o rovnaké objekty, zatiaľ čo pre $x \neq y$ je $d(x,y) > 0$, pričom vzdialenosť rastie úmerne so zvyšujúcimi sa rozdielmi medzi objektmi. Na druhej strane, funkcia fuzzy podobnosti $S(x,y)$ je konštruovaná tak, aby jej hodnoty patrili do intervalu $[0,1]$. Táto funkcia nadobúda hodnotu $S(x,y) = 1$, keď $x = y$, čo znamená, že objekty sú úplne identické, a hodnota $S(x,y)$ sa blíži k 0, keď $d(x,y) \to \infty$, čo vyjadruje, že veľmi vzdialené objekty sú takmer úplne nepodobné.

Príklad 14 *Pre fuzzy grafy $G_1., G_2$ z príkladu 13 sme dostali rôzne hodnoty fuzzy podobnosti na základe rozličných hodnôt r. Na ilustráciu určíme fuzzy podobnosti aj pomocou funkcií určených vo Vete 3. Pre výpočet daných hodnôt je potrebné dosadiť dve hodnoty: konštanta k a hodnota $d(G_1, G_2)$. Pre tento účel dosadíme za $d(G_1, G_2)$ hodnotu r, ktorá bude predstavovať odlišnosť grafov. Pre zvolené t-normy sú hodnoty r rôzne, môžeme si teda vybrať jednu konkrétnu z nich, napríklad podľa Łukasiewiczovej t-normy T_L je podobnosť grafov $S(G_1, G_2) = 0.66$, z čoho vyplýva, že $r = 1 - 0.66 = 0.34$. Fuzzy podobnosť je podľa danej odlišnosti r nasledovná:*

- $S(G_1, G_2) = e^{-kr} = e^{-2*0.34} = 0.51$ *pre* $k = 2$.
- $S(G_1, G_2) = \frac{1}{1+kr} = \frac{1}{1+5*0.34} = 0.37$ *pre* $k = 5$.
- $S(G_1, G_2) = 1 - \frac{kr}{1+kr} = 1 - \frac{0.34}{1+0.34} = 0.24$ *pre* $k = 1$.
- $S(G_1, G_2) = \frac{-\arctan(kr)}{\frac{\pi}{2}} + 1 = \frac{-\arctan(3*0.34)}{\frac{\pi}{2}} + 1 = 0.49$ *pre* $k = 3$.

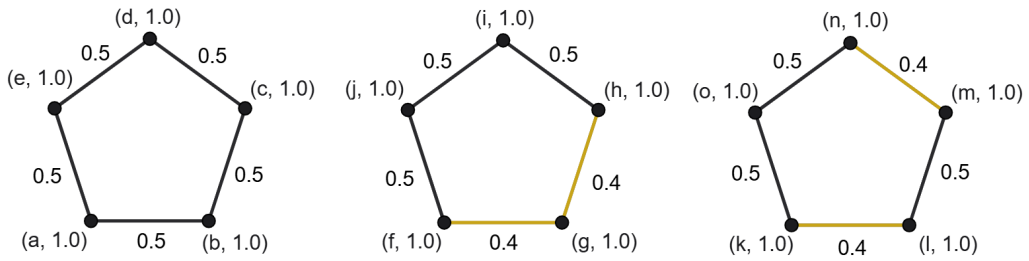
5.4 Fuzzy podobnosť a fuzzy twin-width

Pri porovnávaní fuzzy grafov nás zaujímalo, či je možné pomocou funkcie fuzzy podobnosti zachytiť rozdiely v hodnotách fuzzy twin-width medzi grafmi. Základnou myšlienkou bolo vytvoriť takú funkciu, kde odlišnosť r v definícii podobnosti $S(G_1, G_2) = 1 - r$ by vystihovala aj maximálnu odlišnosť v hodnotách fuzzy twin-width týchto grafov. Výpočtom fuzzy podobnosti podľa nášho postupu sme zistili, že v určitých prípadoch funkcia 1- r skutočne odzrkadľuje želaný rozdiel medzi fuzzy twin-width grafov.



Obr. 5.8: Fuzzy grafy G_1, G_2 odlišné v 1 hrane

Ak sa fuzzy grafy odlišujú len v jednej hrane (všetky zvyšné prislúchajúce hrany majú zhodné hodnoty funkcie príslušnosti) funkcia funguje ideálne. Napríklad, ak majú fuzzy grafy všetky hodnoty funkcie príslušností hrán 0.5, no v druhom grafe sa jedna líši hodnotou 0.4, fuzzy podobnosť je 0.9 (teda $r = 0.1$), čo presne vyjadruje veľkosť rozdielu v ich fuzzy twin-width. Fuzzy twin-width grafu G_1 je 1, pre G_2 to je 0.9.



Obr. 5.9: Fuzzy grafy G_2 (v strede), G_3 (vpravo) odlišné oproti fuzzy grafu G_1 (vľavo) v 2 hranách

Avšak, táto vlastnosť sa nezachováva vo všetkých prípadoch. Pri štruktúrach, ako sú napr. kružnice, keď sa líšia dve nesusediace hrany (fuzzy graf G_3), funkcia $1-r$ už nedokáže správne vystihnúť vzťah medzi fuzzy podobnosťou a rozdielom vo fuzzy twin-width. Pre prípady, keď sa líšia dve susediace hrany, ešte podobnosť korešponduje s očakávaním, no pre nesusediace zmeny už nie. Podobnosť $S(G_1, G_2) = 0.89$ a rovnako aj $S(G_1, G_3) = 0.89$, ale fuzzy twin-width pre G_1 je 1, pre G_2 je rovný 0.9 a pre G_3 to je 0.8.

Napriek týmto obmedzeniam majú vyššie uvedené funkcie fuzzy podobnosti širšie využitie. Nie sú určené výhradne na porovnávanie rozdielov v hodnotách fuzzy twin-width, ale dajú sa všeobecne použiť na porovnávanie fuzzy grafov v rôznych aplikáciách. Takéto porovnávanie môže byť užitočné napríklad:

- pri plánovaní trás v navigačných systémoch, kde grafy reprezentujú cestné siete s nepresnými alebo meniaci sa údajmi, ako je napríklad hustota premávky alebo kvalita ciest,
- v sociálnych sieťach, kde fuzzy grafy môžu modelovať mieru vzťahov medzi jednotlivcami alebo skupinami,
- v odporúčacích systémoch, kde sa podobnosť medzi používateľmi alebo produktmi nedá úplne presne určiť a je vhodné modelovať ju s určitým stupňom neistoty.

Kapitola 6

Implementácia aplikácie

V rámci svojej bakalárskej práce som vytvorila aplikáciu, ktorá sa zameriava na určovanie fuzzy podobnosti fuzzy grafov. Využíva metódu výpočtu, ktorá bola navrhnutá v kapitole 5.2. Ide o webovú aplikáciu, ktorá umožní uživateľovi vytvoriť dva fuzzy grafy, porovnať ich hodnoty fuzzy twin-width, vypočíta ich fuzzy podobnosť a zobrazí izomorfizmy medzi danými grafmi, pokiaľ existujú.[1]

6.1 Architektúra aplikácie

Aplikácia je rozdelená na dve hlavné časti:

- **Frontend** - zabezpečuje vizualizáciu a interakciu uživateľa s grafmi. Je implementovaný v `HTML`, `CSS` a `JavaScripte` s využitím knižnice `Cytoscape.js`, ktorá umožňuje jednoduchú manipuláciu s kreslením grafov.
  - `templates/graph_sim.html`
  - `static/js/graph.js`
  - `static/css/style.css`
- **Backend** - vykonáva výpočty fuzzy twin-width, fuzzy podobnosti a zisťovanie izomorfizmov.
  - `app.py` - serverová časť, ktorá spracúva požiadavky z frontendu,
  - `backend/TWBackend.py` - výpočet fuzzy twin-width, ktorého implementáciu vytvoril Marek Effenberger v rámci svojej bakalárskej práce [7],
  - `backend/isomorphism.py` - zisťovanie izomorfizmu grafov,
  - `backend/similarity.py` - výpočet fuzzy podobnosti grafov.

Backend aplikácie poskytuje `REST API`, ktoré umožňuje klientovi odosielať požiadavky na výpočty. API je implementované v `Python Flask` a komunikácia medzi frontendom a backendom prebieha pomocou `HTTP POST` požiadavkov, pričom grafy nevyhnutné pre výpočty sú odosielané vo formáte `JSON`.

[1] Aplikácia Fuzzy Graph Similarity je dostupná online na adrese: https://graph-sim.onrender.com/graph-sim

6.1.1 Tok údajov

1. Uživateľ nakreslí fuzzy grafy vo webovej aplikácii.
2. `static/js/graph.js` konvertuje graf do formátu `JSON` a odošle ho na backend pomocou `HTTP POST` požiadavky.
3. `app.py` príjme dáta a zavolá funkciu `build_graph_from_json()`, ktorá ich skonvertuje na objekt grafu (`Graph`).
4. Server zavolá výpočtovú funkciu zo zodpovedajúceho modulu (`backend/TWBackend.py`, `backend/isomorph.py`, `backend/similarity.py`).
5. Výsledok sa vráti vo forme `JSON` a frontend ho zobrazí.

6.1.2 Formát `JSON` požiadaviek a odpovedí

Každý z endpointov prijíma `JSON` štruktúru grafu.

Formát grafu v `JSON`
Každý graf obsahuje zoznam uzlov a hrán spolu s hodnotami funkcií príslušnosti.

```
{
    "nodes": [
        {"name": "Node1", "membershipFunction": 0.9},
        {"name": "Node2", "membershipFunction": 0.7}
    ],
    "edges": [
        {"source": "Node1", "target": "Node2", "weight": 0.5}
    ],
}
```

Požiadavka a odpoveď pre fuzzy twin-width
V rámci požiadavky je okrem štruktúry grafu nutné predať informáciu o zvolenej t-norme, ktorá je nevýhnutná pre výpočet fuzzy twin-width.

Požiadavka (`POST /get-tw`):

```
{
    "nodes": [...],
    "edges": [...],
    "tnorm": "min"
}
```

Odpoveď:

```
{
    "tw": 0.45,
    "sequence": ["Node1", "Node2", "Node3"]
}
```

Požiadavka a odpoveď pre izomorfizmus

V `JSON` štruktúre posielame 2 grafy.

Požiadavka (`POST /check-isomorphism`):

```
{
    "graph1": {...},
    "graph2": {...}
}
```

Odpoveď vracia informáciu o tom, či sú dané grafy izomorfné a všetky možné mapovania vrcholov.

Odpoveď:

```
{
    "isomorphic": true,
    "mappings": [{"Node1": "Node2", "Node3": "Node4", "Node5": "Node6", "
        Node7": "Node8"}]
}
```

Požiadavka a odpoveď pre podobnosť grafov

Požiadavka (`POST /get-similarity`):

```
{
    "graph1": {...},
    "graph2": {...},
    "tnorm": "min"
}
```

Odpoveď:

```
{
    "similarity": 0.85
}
```

6.1.3 Spracovanie chýb

Backend validuje vstupy – Ak požiadavka neobsahuje potrebné dáta alebo má nesprávny formát, server vráti odpoveď s `HTTP` kódom 400 a chybovou správou v `JSON` formáte.

Príklad odpovede pri nesprávnom vstupe:

```
{ "error": "Invalid input" }
```

Po odoslaní požiadavky na server sa kontroluje, či odpoveď obsahuje chybu. Ak áno, zobrazí sa používateľovi.

6.2 Implementačné algoritmy

V rámci aplikácie bolo nutné implementovať zisťovanie izomorfizmu grafov a algoritmus na výpočet ich fuzzy podobnosti.

6.2.1 Hľadanie izomorfizmov

V súbore `backend/isomorph.py` sa nachádza funkcia `find_isomorphisms()` ktorá využíva knižnicu `NetworkX` [5] na zisťovanie izomorfizmu grafov. Funkcia `is_isomorphic()` overuje izomorfizmus dvoch grafov pomocou rekurzívneho VF2 algoritmu. Jej princíp je založený na predbežnej kontrole sekvencie stupňov vrcholov pomocou `faster_could_be_isomorphic()`. Ak sa sekvencie nezhodujú, znamená to, že grafy nie sú izomorfné a funkcia vracia `False`.

Pokiaľ ide o potenciálne izomorfné grafy, funkcia `is_isomorphic()` využíva algoritmus VF2, ktorý rekurzívne prehľadá všetky možné mapovania vrcholov medzi grafmi. Používa pravidlá na orezávanie neplatných čiastočných mapovaní, čím znižuje počet potrebných výpočtov.

Časová zložitosť

V najlepšom prípade je časová zložitosť tohto algoritmu $O(n^2)$, ak majú grafy rozdielne sekvencie stupňov vrcholov. V najhoršom prípade, kedy je potrebné prehľadať všetky možné mapovania, je časová zložitosť tohto algoritmu $O(n! \cdot n)$.

6.2.2 Výpočet fuzzy podobnosti

Na výpočet fuzzy podobnosti fuzzy grafov sa používa funkcia `compute_similarity()` v súbore `backend/similarity.py`. Využíva postup, ktorý bol zadefinovaný v kapitole 5.2. Algoritmus v `compute_similarity()` najskôr hľadá všetky izomorfizmy medzi dvoma fuzzy grafmi. Následne pre každý izomorfizmus vypočíta rozdiel hodnôt funkcie príslušnosti zodpovedajúcich si hrán v grafoch G_1, G_2. Tieto rozdiely sa umocnia na počet hrán grafu, sčítajú a výsledok sa odmocní. Podľa vybranej t-normy sa agregujú rozdiely pre všetky izomorfizmy a výsledná podobnosť je $1-$ agregovaná hodnota.

Časová zložitosť

Najnáročnejšou časťou výpočtu je hľadanie všetkých izomorfných mapovaní medzi dvoma fuzzy grafmi, ktorého časová zložitosť v najhoršom prípade je $O(n! \cdot n)$, ako sme spomenuli vyššie. Pre každý izomorfizmus sa následne prechádzajú všetky hrany grafu, čo je v najhoršom prípade $O(m)$, kde m je počet hrán. Celková časová zložitosť algoritmu je teda:

$$O(n! \cdot n \cdot m),$$

kde n je počet vrcholov a m je počet hrán.

Najhorší prípad pre počet hrán nastáva vtedy, pokiaľ sú dané fuzzy grafy úplné, teda každý vrchol je spojený so všetkými ostatnými vrcholmi. Maximálny počet hrán v takomto grafe je daný vzťahom:

$$m = \frac{n(n-1)}{2},$$

kde n je počet vrcholov. Každý vrchol môže maž najviac $n-1$ susedov, ale každá hrana sa započítava len raz.

Vzhľadom na výpočtovú náročnosť algoritmu fuzzy podobnosti je aplikácia vhodná pre pre grafy s maximálnym počtom vrcholov 6. Pre väčšie grafy je výpočet časovo náročný.

```
Input: G_1, G_2: fuzzy grafy, tnorm: zvolená t-norma
Output: S(G_1, G_2): fuzzy podobnosť v intervale [0, 1] alebo "X"
Nájdeme všetky izomorfizmy medzi G_1 a G_2;
if G_1 a G_2 nie sú izomorfné then
    return "X";
end
Inicializuj prázdny zoznam r_k_values;
Spočítaj počet hrán v G_1, označ ho ako num_edges;
for Každý izomorfizmus mapping do
    Inicializuj r_i ← 0;
    Inicializuj množinu spracovaných hrán processed_edges;
    for Každý vrchol v v G_1 do
        v' ← mapping(v);
        for Každého suseda u vrchola v do
            u' ← mapping(u);
            if (v, u) alebo (u, v) už je v processed_edges then
                pokračuj na ďalšiu hranu;
            end
            Pridaj (v, u) do processed_edges;
            Nájdi váhu w' hrany (v', u') v G_2;
            Vypočítaj r_i ← r_i + |w(v, u) − w'(v', u')|^(num_edges);
        end
    end
    Vypočítaj r_k ← (num_edges)√r_i;
    Pridaj r_k do r_k_values;
end
Inicializuj r ← 1;
for Každé r_k v r_k_values do
    r ← t_norm(r, r_k, tnorm);
end
return 1 − r;
```

Algoritmus 1: Výpočet fuzzy podobnosti dvoch fuzzy grafov

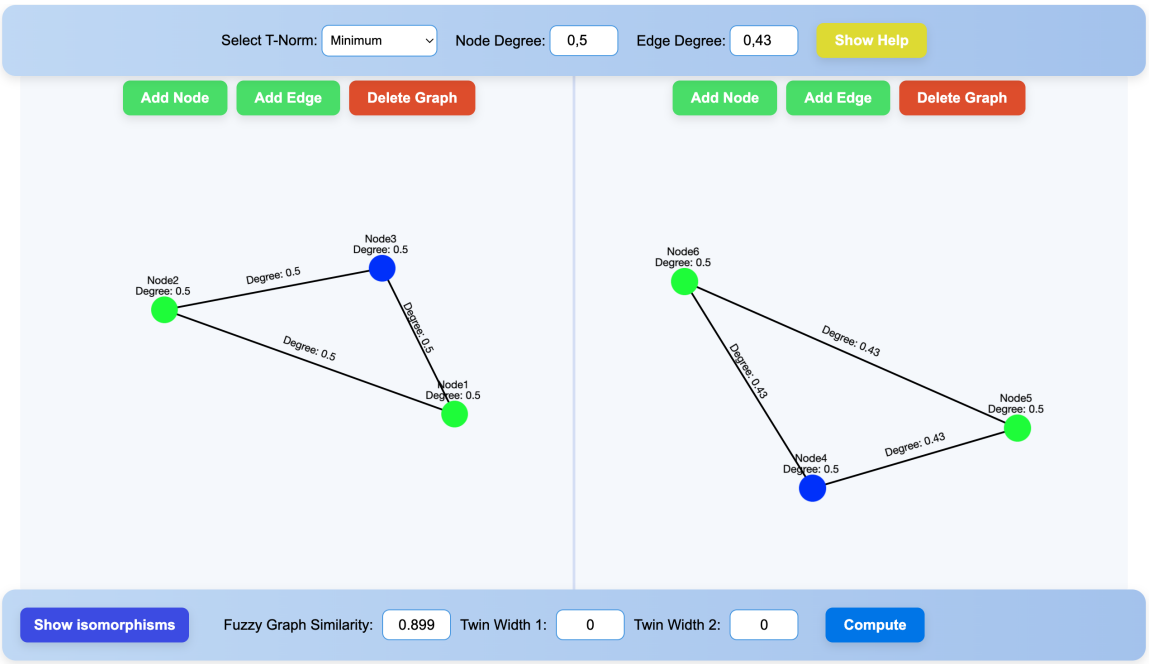
6.3 Uživateľské rozhranie

Užívateľ má možnosť vytvoriť dva samostatné fuzzy grafy s rôznym ohodnotením vrcholov a hrán. Vrcholy a hrany je možné pridávať pomocou tlačidiel `Add Node` a `Add Edge`, pričom hodnoty ich funkcií príslušnosti je možné nastaviť v paneli nad tlačidlami. Rovnako je možné zvoliť t-normu, ktorá je dôležitá pre výpočet twin-width a fuzzy podobnosti. Pravým kliknutím na objekt sa daný objekt odstráni, pričom tlačidlo `Delete Graph` vymaže celý graf z kresliacej plochy. Po stlačení tlačidla `Compute` sa vypočítajú hodnoty `Fuzzy Graph Similarity` (fuzzy podobnosť medzi grafmi), `Fuzzy twin-width 1` (hodnota fuzzy twin-width pre ľavý graf) a `Fuzzy twin-width 2` (hodnota fuzzy twin-width pre pravý graf).

V určitých prípadoch nie je možné určiť hodnotu fuzzy podobnosti alebo fuzzy twin-width. V takýchto situáciách je číselná hodnota nahradená znakom `"X"`. K tomu dochádza v dvoch prípadoch:

- Ak na jednej z kresliacich plôch chýba graf, nie je možné vypočítať jeho twin-width.
- Ak grafy nie sú izomorfné, nie je možné určiť ich fuzzy podobnosť.

Tlačidlo `Show isomorphisms`, zobrazuje všetky možné mapovania vrcholov medzi fuzzy grafmi, pokiaľ sú izomorfné. Pri jednotlivých mapovaniach vrcholov sa neberie do úvahy ich ohodnotenie ani váhy hrán.



Obr. 6.1: Aplikácia Fuzzy Graph Similarity.

Súčasťou návrhu bolo aj to, aby aplikácia Fuzzy Graph Similarity a aplikácia Mareka Effenbergera mali jednotný spôsob manipulácie s grafmi a mali podobné používateľské rozhranie.

6.4 Testovanie

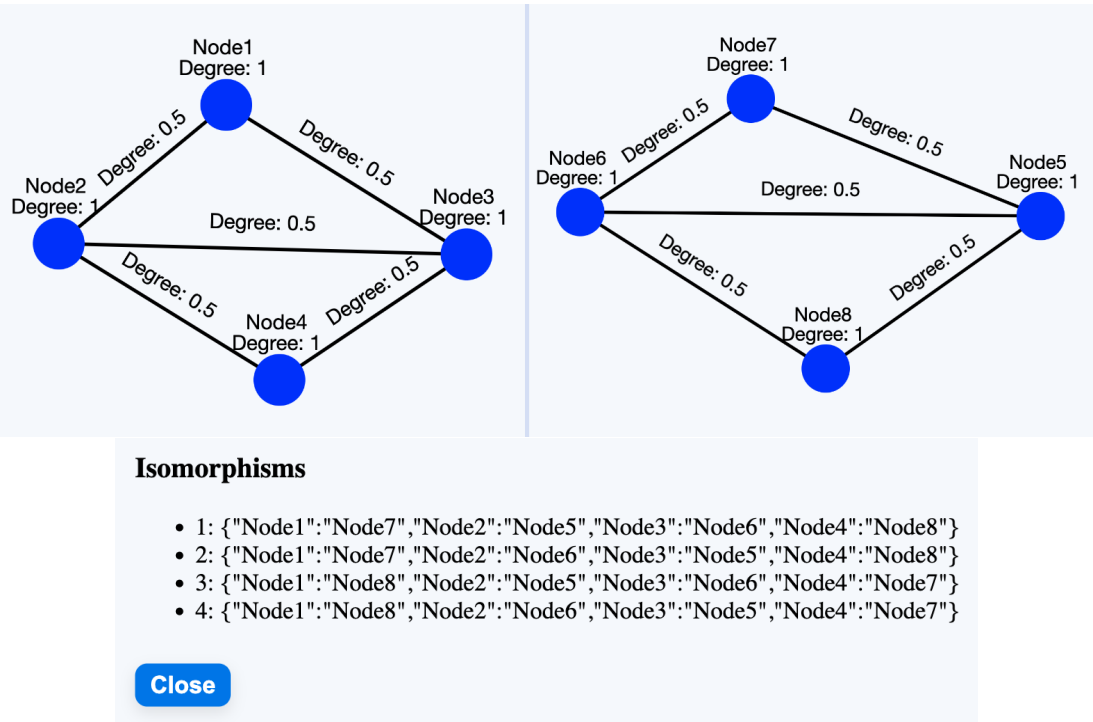
Testovanie aplikácie prebiehalo na rôznych vstupoch s cieľom overiť správnosť výpočtov. Testovanie prebiehalo aj manuálne, pričom som výsledky výpočtu fuzzy podobnosti grafov overovala ručne — zapisovaním medzivýpočtov a výsledkov na papier. Na overenie správnosti som používala rôzne fuzzy grafy s počtom vrcholov do 5.

6.4.1 Testovanie funkcionality

Boli testované kľúčové funkcie aplikácie - zisťovanie izomorfizmu, fuzzy podobnosť grafov.
Izomorfizmus - správne rozpoznanie identických grafov, či grafov s rôznou veľkosťou a topológiou.
Fuzzy podobnosť grafov - správanie pre rôzne úrovne podobnosti grafov, od úplne rovnakých po výrazne odlišné. Pri výpočtoch podobnosti sa testoval aj vplyv výberu t-normy, ktorá ovplyvňuje výsledky.

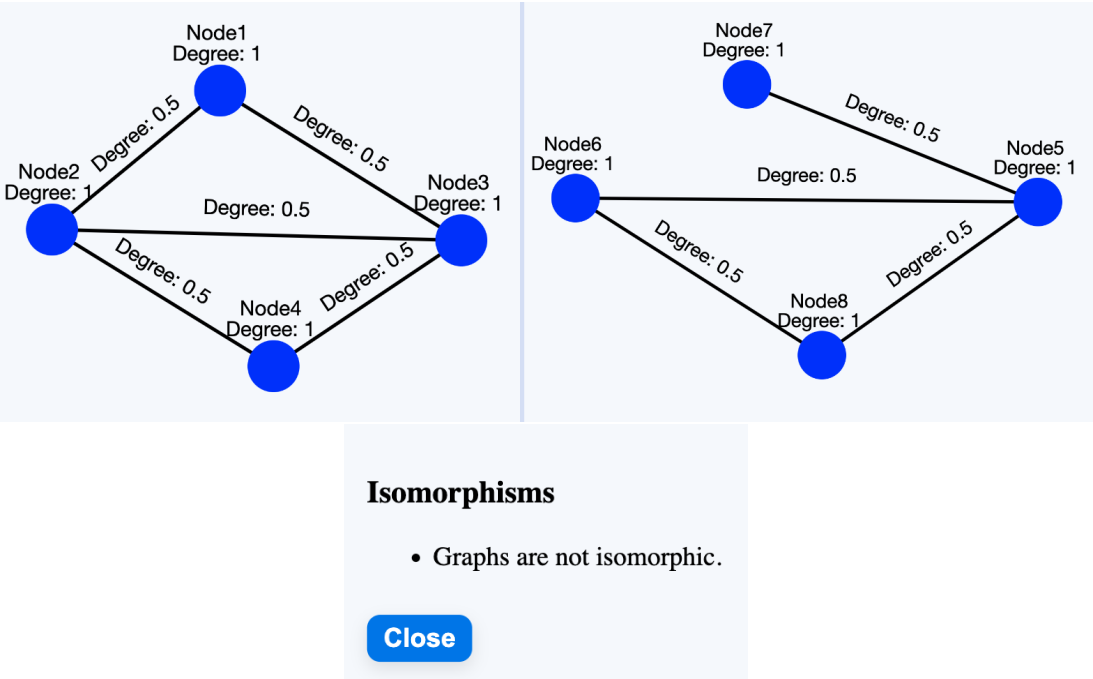
Príklady testovaných scenárov

1. **Izomorfizmus** - Dva grafy s rovnakou štruktúrou - Úspech ✓



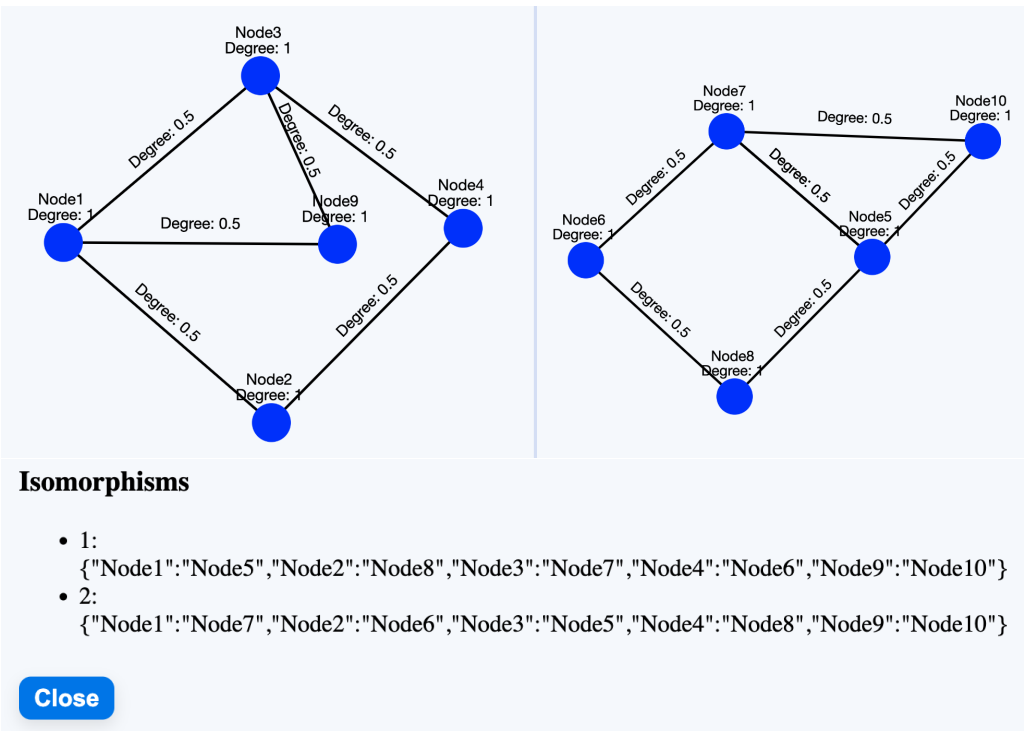
Obr. 6.2: Test 1

2. **Izomorfizmus** - Dva grafy s rozdielnou štruktúrou - Úspech ✓



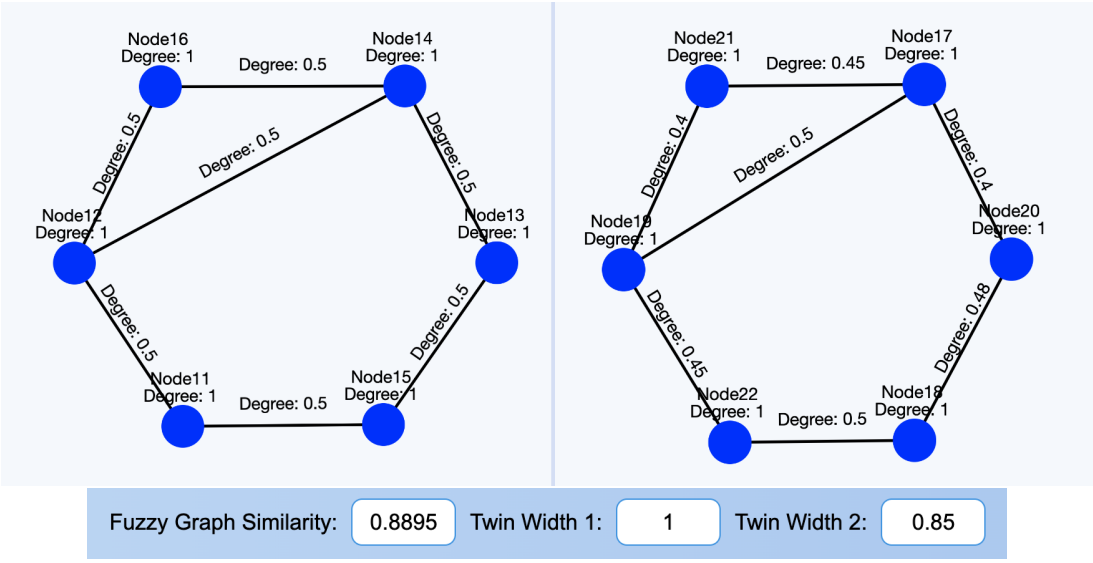
Obr. 6.3: Test 2

3. **Izomorfizmus** - Dva grafy s rovnakou štruktúrou, ale s rozdielnymi hodnotami funkcií príslušností hrán - Úspech ✓



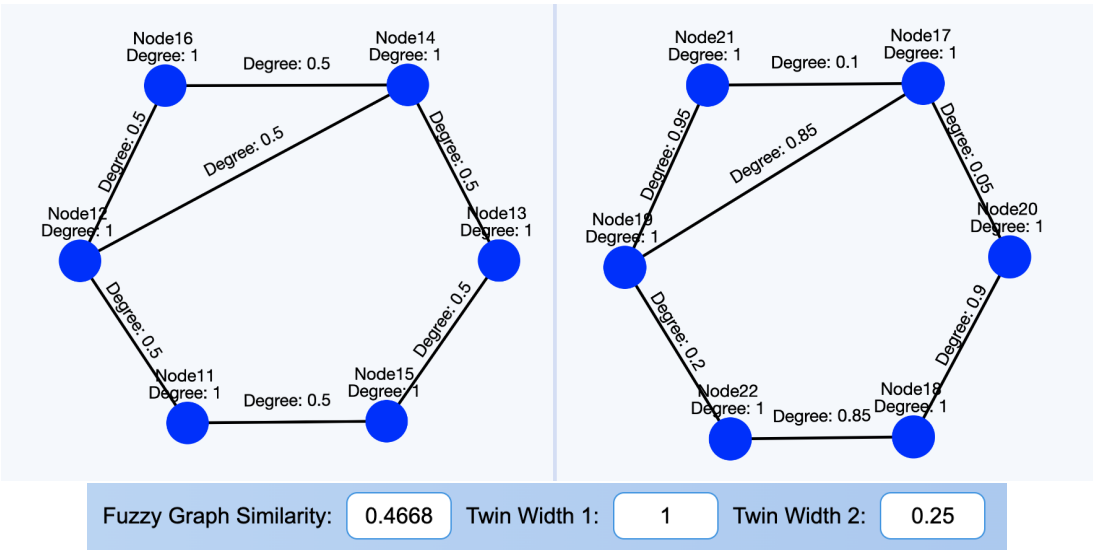
Obr. 6.4: Test 3

4. **Fuzzy podobnosť** (podľa T_M) - Dva grafy s mierne odlišnými hodnotami funkcií príslušností hrán (očakáva sa vyššia fuzzy podobnosť) - Úspech ✓



Obr. 6.5: Test 4

5. **Fuzzy podobnosť** (podľa T_M) - Dva grafy s význačne odlišnými hodnotami funkcií príslušností hrán (očakáva sa nižšia fuzzy podobnosť) - Úspech ✓



Obr. 6.6: Test 5

Kapitola 7

Záver

Táto bakalárska práca je venovaná téme fuzzy podobnosti grafov a jej vzťahom k metrike fuzzy twin-width. Úvod práce čitateľa prevedie základom teórie množín a binárnych relácií, ktoré tvoria teoretický základ pre pochopenie fuzzy množín a relácií. Zámer bol predstaviť rôzne typy funkcií ako sú t-normy, t-konormy a ukázať ich význam pri modelovaní neistoty a neurčitosti.

Následne bola pozornosť zameraná na teóriu grafov a metriku twin-width, ktorá bola len nedávno predstavená ako efektívny spôsob vyjadrenia štrukturálnej zložitosti grafu prostredníctvom kontrakcií vrcholov a sledovania tzv. červených hrán. Na túto metriku nadväzuje fuzzy twin-width, ktorá predstavuje jej rozšírenie pre fuzzy grafy. V práci je popísaný spôsob výpočtu tejto novej metriky, ako aj postup kontrakcie s ohľadom na fuzzy ohodnotenia hrán a vrcholov.

Hlavným cieľom bolo navrhnúť metódu výpočtu fuzzy podobnosti grafov, ktorá by zohľadňovala nielen rozdiely v ohodnotení hrán medzi grafmi, ale aj ich vplyv na metriku fuzzy twin-width, ako ju definoval Marek Effenberger vo svojej bakalárskej práci. Postupnými úpravami Euklidovskej vzdialenosti, ktorá bola ako metrika nedostatočná najmä v prípadoch, keď sa grafy líšili o väčší počet hrán, bol vytvorený funkčný predpis pre výpočet vhodnej metriky. Takto navrhnutý upravený spôsob výpočtu presnejšie vystihuje rozdiely medzi grafmi. Na konkrétnych príkladoch sa ukázalo, že tento nový výpočet vedie k realistickejším hodnotám podobnosti, obzvlášť pri väčších odchýlkach v ohodnotení grafov.

V budúcnosti by mohlo byť prínosné analyzovať správanie fuzzy twin-width pri rôznych typoch kontrakčných sekvencií a preskúmať jeho súvislosť s mierou podobnosti medzi fuzzy grafmi.

Súčasťou práce je aj implementácia jednoduchej webovej aplikácie určená na porovnávanie a analýzu fuzzy grafov. Aplikácia umožňuje vykreslenie a úpravu grafov, výpočet ich podobnosti aj fuzzy twin-width. Je plánované jej využitie v rámci výučby predmetu Matematické základy fuzzy logiky (IMF). Do budúcna sa uvažuje o rozšírení funkcionality o vizualizáciu kontrakcií.

Literatúra

[1] Alsina, C.; Frank, M. a Schweizer, B. *Associative functions: Triangular Norms and Copulas*. 1. vyd. Singapur: World Scientific, 2006. ISBN 981-256-671-6.

[2] Baczyński, M. a Jayaram, B. *Fuzzy implications*. 1. vyd. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008. ISBN 978-3-540-69080-1.

[3] Bonnet, É. *Twin-Width and Contraction Sequences*. 2024. Habilitation à diriger des recherches. École Normale Supérieure de Lyon. Dostupné z: https://perso.ens-lyon.fr/edouard.bonnet/text/hdr.pdf.

[4] Čermák, P.; Červinková, P. a Hanula, M. *Zmaturuj z matematiky*. Bratislava: Pedagogické vydavatel'stvo DIDAKTIS, 2004 [cit. 2024-09-20]. ISBN 80-89160-01-8.

[5] Developers, N. *Isomorphism - How to find if two graphs are similar?* online. NetworkX, 2024. Dostupné z: https://networkx.org/nx-guides/content/algorithms/isomorphism/isomorphism.html. [cit. 2025-05-05].

[6] Ducký, P. *Fuzzy teorie grafů*. Brno, 2024. Bakalářská práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta informačních technologií. Vedoucí práce doc. RNDr. Dana Hliněná, Ph.D.

[7] Effenberger, M. *Twin-Width Fuzzification*. Brno, 2025. Bakalářská práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta informačních technologií. Vedoucí práce doc. RNDr. Dana Hliněná, Ph.D.

[8] Hliněná, D. *Fuzzy množiny a ich aplikácie*. Banská Bystrica, SK, 2011. Habilitačná práca. Univerzita Mateja Bela.

[9] Hliněný, P. *Základy teorie grafů* online. 1. vyd. Masarykova univerzita, 2010 [cit. 2025-01-17]. Elportál. Dostupné z: http://is.muni.cz/elportal/?id=878389.

[10] Hušek, M. *Metrické prostory*. 1. vyd. MatfyzPress, 2024. ISBN 978-80-7378-515-4.

[11] Klement, E. P. *Triangular norms*. 1. vyd. Springer Dordrecht, 2000. ISBN 978-0-7923-6416-0.

[12] Kolesárová, A. a Kováčová, M. *Fuzzy množiny a ich aplikácie*. 1. vyd. Bratislava: Slovenská technická univerzita, 2004. ISBN 80-227-2036-4.

[13] Matthew, S.; Mordeson, J. N. a Malik, D. S. *Fuzzy graph theory*. 1. vyd. Springer International Publishing AG, 2018. ISBN 978-3-319-71407-3.

[14] McKay, B. D. a Piperno, A. Practical graph isomorphism, II. *Journal of Symbolic Computation*, 2014, zv. 60, s. 94–112. ISSN 0747-7171. Dostupné z: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0747717113001193.

[15] Navara, M. *Fuzzy množiny* online. Praha, 2022. České vysoké učení technické v Prahe, Fakulta elektrotechnická. Dostupné z: https://cmp.felk.cvut.cz/~navara/fl/fset_print.pdf. [cit. 2024-09-20].

[16] Portegys, T. General Graph Identification By Hashing. *CoRR*, 2015. Dostupné z: http://arxiv.org/abs/1512.07263.

Príloha A

Obsah cloudového úložiska

Cloudové úložisko obsahuje nasledujúce súbory:

- `xhalas14-BP.pdf` - text bakalárskej práce vo formáte PDF,
- `xhalas14-BP.zip` - komprimované zdrojové súbory bakalárskej práce písanej v LaTeX,
- `graph_sim.zip` - komprimované zdrojové súbory webovej aplikácie Fuzzy Graph Similarity.

Súbor `graph_sim.zip` obsahuje nasledujúce súbory:

```
graph_sim ..................................................................
├── backend ................................................................
│   ├── isomorph.py ........................ Súbor na zisťovanie izomorfizmu grafov
│   ├── TWBackend.py ........................ Súbor s výpočtami fuzzy twin-width
│   └── similarity.py ................... Súbor na výpočet fuzzy podobnosti grafov
├── static .................................................................
│   ├── css ................................................................
│   │   └── style.css ...................... Definované štýly pre webové rozhranie
│   └── js .................................................................
│       └── graph.js ......... Súbor na vykresľovanie fuzzy grafov a API komunikáciu
├── templates ..............................................................
│   └── graph_sim.html ......................... Hlavné HTML rozhranie aplikácie
├── app.py ..................................... Hlavný spúšťací súbor backendu
├── README.md .................................... Programová dokumentácia
└── requirements.txt ......................... Zoznam závislostí Python projektu
```

Obr. A.1: Adresárový strom aplikácie

Príloha B

Návod k spusteniu aplikácie

Táto kapitola popisuje postup, ako spustiť aplikáciu lokálne na vlastnom počítači. Predpokladá sa, že používateľ má nainštalovaný `Python` (verzia 3.8 alebo vyššia) a systémový terminál.

B.1 Lokálna inštalácia

1. Presuňte sa do koreňového adresára projektu:

   ```
   cd graph_sim
   ```

2. (Odporúčané) Aktualizujte `pip`:

   ```
   # macOS / Linux
   python3 -m pip install --upgrade pip

   # Windows
   python -m pip install --upgrade pip
   ```

3. Nainštalujte všetky požadované balíčky:

   ```
   # macOS / Linux
   python3 -m pip install -r requirements.txt

   # Windows
   python -m pip install -r requirements.txt
   ```

4. Spustite Flask server:

   ```
   # macOS / Linux
   python3 app.py

   # Windows
   python app.py
   ```

5. Otvorte webový prehliadač a prejdite na:

   `http://localhost:5001/graph-sim`

B.2 Nasadenie na web

Nasadenie webovej aplikácie bolo realizované prostredníctvom platformy Render. Po nahratí projektu do GitHub repozitára a jeho prepojení s Renderom bola aplikácia automaticky deploynutá.[1].

[1] Výsledná aplikácia Fuzzy Graph Similarity je dostupná online na adrese: https://graph-sim.onrender.com/graph-sim