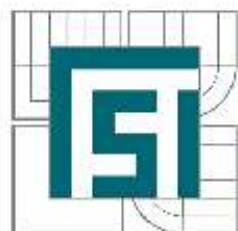


VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
ÚSTAV MATEMATIKY
FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
INSTITUTE OF MATHEMATICS

ROTAČNÍ KVADRATICKÉ PLOCHY

ROTATIONAL QUADRIC SURFACES

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE
BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE
AUTHOR

LENKA PAVLÍČKOVÁ

VEDOUcí PRÁCE
SUPERVISOR

RNDr. MÁJA LOVEČKOVÁ

BRNO 2010

Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství

Ústav matematiky

Akademický rok: 2009/2010

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

student(ka): Lenka Pavlíčková

který/která studuje v **bakalářském studijním programu**

obor: **Matematické inženýrství (3901R021)**

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Rotační kvadratické plochy

v anglickém jazyce:

Rotational quadric surfaces

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Práce popisuje definice a základní vlastnosti rotačních kvadratických ploch (regulárních i singulárních). Dále se zabývá řezy na těchto plochách, konstrukcemi tečných rovin a obrysů ploch v Mongeově promítání. Závěr práce by mohl obsahovat i stručný popis nerotačních kvadratických ploch a ukázat využití kvadrik v technické praxi.

Cíle bakalářské práce:

Vytvořit ucelený přehled o rotačních kvadratických plochách, který by mohl být využit jako studijní opora pro předmět Konstruktivní a počítačová geometrie.

Abstrakt

Tento text je určen všem zájemcům z řad široké veřejnosti, především jako studijní materiál pro studenty Konstruktivní a počítačové geometrie. Práce pojednává o rotačních kvadratických plochách, zahrnuje obecné vlastnosti rotačních kvadratických ploch, postupy konstrukce, zejména řezů na plochách, konstrukce tečné roviny a analytické vyjádření plochy. Dále obsahuje přehled nerotačních kvadratických ploch a na závěr užití rotačních kvadratických ploch v praxi. Celá práce je doplněna obrázky v Mongeově promítání a prostorovými obrázky z Maple.

Klíčová slova

Mongeovo promítání, kuželosečka, rotační plocha.

Abstract

This text is especially intended as an educational material for students of Construction and computer geometry, however it can be interesting also for general public. The thesis deals rotational quadric surfaces, includes general common properties of rotational quadric surfaces, processes of procedure and its drawing, especially drawing of sections, constructions of tangent plane and analytical representation of surface. It contains list of quadric surfaces which are not rotational and in conclusion, it contains application of rotational quadric surfaces practically. The all thesis is coupled with pictures of two-plane projection and 3-D pictures of program Maple.

Keywords

Two-plane projection, conic section, rotational surfaces.

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci Rotační kvadratické plochy vypracovala samostatně pod vedením RNDr. Máji Lovečkové, s použitím materiálů uvedených v seznamu literatury.

V Brně dne 17.5.2010

Lenka Pavlíčková

Děkuji vedoucí mé bakalářské práce paní RNDr. Máji Lovečkové za pomoc a rady, které mi pomohly při práci na daném tématu.

Lenka Pavlíčková

OBSAH

Obsah	1
Úvod.....	2
1. Kulová plocha	6
1.1 Definice, základní vlastnosti, obrys	6
1.2 Rovinné řezy kulové plochy	7
1.3 Tečná rovina kulové plochy.....	8
1.4 Analytické vyjádření.....	9
2. Rotační válcová plocha	11
2.1 Definice, základní vlastnosti, obrys	11
2.2 Rovinné řezy rotační válcové plochy.....	12
2.3 Analytické vyjádření.....	15
3. Rotační kuželová plocha	17
3.1 Definice, základní vlastnosti, obrys	17
3.2 Rovinné řezy rotační kuželové plochy.....	18
3.3 Analytické vyjádření.....	23
4. Rotační elipsoidy	25
4.1 Definice, základní vlastnosti, obrys	25
4.2 Rovinné řezy rotačního elipsoidu	26
4.3 Tečná rovina rotačního elipsoidu.....	28
4.4 Analytické vyjádření.....	31
5. Rotační paraboloid	33
5.1 Definice, základní vlastnosti, obrys	33
5.2 Rovinné řezy rotačního paraboloidu.....	34
5.3 Tečná rovina rotačního paraboloidu	37
5.4 Analytické vyjádření.....	37
6. Rotační hyperboloidy.....	39
6.1 Definice, základní vlastnosti.....	39
6.2 Rotační hyperboloid dvojdílný	39
6.2.1 Další vlastnosti, obrys.....	39
6.2.2 Rovinné řezy rotačního hyperboloidu dvojdílného	40
6.2.3 Tečná rovina rotačního hyperboloidu dvojdílného.....	42
6.2.4 Analytické vyjádření.....	43
6.3 Rotační hyperboloid jednodílný.....	44
6.3.1 Další vlastnosti, obrys.....	44
6.3.2 Tečná rovina rotačního hyperboloidu jednodílného	46
6.3.3 Rovinné řezy rotačního hyperboloidu jednodílného.....	48
6.3.4 Analytické vyjádření.....	50
Závěr	61
Literatura.....	62

ÚVOD

Úkolem mé bakalářské práce je vytvořit ucelený přehled o rotačních kvadratických plochách, text je koncipován jako studijní materiál pro konstruktivní geometrii. Pro doplnění jsou také uvedeny rovnice jednotlivých rotačních ploch. Mojí snahou je napsat text, který by byl uspořádaným a srozumitelným přehledem dané problematiky. Nutností pro pochopení textu jsou základní znalosti Mongeova promítání a vlastnosti kuželoseček. Snažila jsem se vše demonstrovat názornými obrázky.

V první kapitole si nadefinujeme pojmy, které budeme v dalším textu používat.

Druhá kapitola je nejobsáhlejší částí celé bakalářské práce. Jsou v ní rozebrány jednotlivé rotační kvadratické plochy. U každé plochy je uvedena definice, základní vlastnosti, obrys, rovinné řezy, tečné roviny a analytické vyjádření. Vše je demonstrováno na obrázcích.

Ve třetí kapitole jsem uvedla přehled nerotačních kvadratických ploch. U každé plochy je uvedena rovnice a 3-D obrázek.

Na závěr celé práce se zmiňuji o využití rotačních kvadratických ploch v praxi, se kterými se můžeme setkat všude kolem nás. Aplikace těchto ploch nacházíme opravdu všude, ať už je to stavební či strojní průmysl, kde je využití asi největší.

I. OBECNÉ VLASTNOSTI ROTAČNÍ PLOCHY

Plocha vzniká pohybem křivky, kde křivka není dráhou pohybu a její tvar se při pohybu může měnit. Je-li daný pohyb rotační a tvar křivky se při pohybu nemění, dostáváme **rotační plochu**. Lze tedy říci, že rotační plocha vzniká otáčením křivky k kolem přímky o za předpokladu, že křivka k není částí přímky o a neleží v rovině kolmé na přímku o .

- Křivka k se nazývá **tvořící křivka**.
- Přímka o je osou otáčení a nazývá se **osa rotační plochy**, body osy o jsou samodružné.
- Osa o a tvořící křivka k určují rotační plochu.

Každý bod tvořící křivky, který neleží na ose plochy, opíše při rotaci kružnici, která se nazývá **rovnoběžková kružnice (rovnoběžka)**.

- **Rovníkovou kružnici (rovník)** vytvoří bod tvořící křivky, který má od osy o relativně největší vzdálenost. Poloměr rovníku je lokální extrém, ze všech sousedních rovnoběžek je tento poloměr největší.
- **Hrdelní kružnici (hrdlo)** vytvoří bod tvořící křivky, který má od osy o relativně nejmenší vzdálenost. Poloměr hrdla je lokální extrém, ze všech sousedních rovnoběžek je tento poloměr nejmenší.
- **Kráterovou kružnici** vytvoří bod tvořící křivky, v němž je tečna tvořící křivky kolmá na osu rotace.
- **Hraniční kružnici** vytvoří krajní body tvořící křivky.

Každá rovnoběžková kružnice je souměrná podle každého svého průměru, proto je rotační plocha souměrná podle každé roviny procházející její osou.

Meridián m (poledník) je řez rotační plochy rovinou μ procházející osou plochy.

- **Hlavní meridián** leží v rovině rovnoběžné s průmětnou.
- Všechny meridiány rotační plochy jsou navzájem shodné křivky a každý meridián m je souměrný podle osy plochy.
- **Polomeridián** je část meridiánu, která leží v jedné polorovině roviny μ s hraniční přímkou o .

Rotační plocha je také určena osou o a meridiánem m .

Skutečným obrysem rotační plochy při pravouhlém promítání na rovinou kolmou k její ose jsou hrdla, rovníky, hraniční kružnice a singulární body plochy. **Skutečným obrysem** rotační plochy při pravouhlém promítání na rovinu rovnoběžnou s její osou je hlavní meridián, kráterové kružnice a hraniční kružnice plochy. **Zdánlivým obrysem** jsou jejich pravouhlé průměty.

Poznámka: Při zobrazování rotační plochy v Mongeově promítání budeme volit její osu kolmou k půdorysně $^1\pi$, tedy nárysna $^2\pi$ je pak s osou rovnoběžná.

Každým bodem A ($A \notin o$) rotační plochy prochází právě jedna rovnoběžková kružnice a právě jeden meridián. Jejich tečny v bodě A jsou různé a vzájemně kolmé (protože tečna k rovnoběžce je kolmá k rovině meridiánu) a určují **tečnou rovinu** rotační plochy v bodě A .

Jestliže $A \in o$, pak mohou nastat dva případy:

- a) meridián m je kolmý k ose o , pak existuje právě jedna tečná rovina, která je kolmá k ose plochy,
- b) meridián m není kolmý k ose o , pak bod A je singulárním bodem plochy.

Poznámka: Úhlem rovinných křivek ve společném bodě rozumíme úhel jejich tečen v tomto bodě.

Tečny všech meridiánů rotační plochy v bodech jedné rovnoběžkové kružnice tvoří buď

- a) rotační válcovou plochu (tzv. **dotyková rotační válcová plocha**), nebo
- b) rotační kuželovou plochu (tzv. **dotyková rotační kuželová plocha**), nebo
- c) rovinu (rovnoběžka je kráterová kružnice).

Poznámka: Předpokládáme, že meridián nemá inflexní tečny rovnoběžné s osou rotace nebo k ní kolmé.

Rotační kvadratická plocha (rotační kvadrika) je plocha, která vznikne rotací kuželosečky kolem její osy souměrnosti. Plochy se nazývají kvadratické, protože jejich rovnice v pravouhlé souřadnicové soustavě jsou kvadratické.

Rozdělení rotačních kvadrik:

- a) **singulární** (rotační válcová a kuželová plocha), vznikají rotací singulárních kuželoseček (viz kapitola 3.),

b) **regulární** (kulová plocha, rotační elipsoidy, rotační paraboloid a rotační hyperboloidy), vznikají rotací regulárních kuželoseček (viz kapitola 3.).

Analytické vyjádření rotační plochy budeme popisovat pomocí implicitní rovnice a pomocí rovnic parametrických. Využíváme následující věty:

Věta: Rovnice plochy, která vznikne rotací křivky $x = f(z)$ ležící v rovině $y = 0$, kolem osy z , je $x^2 + y^2 = [f(z)]^2$.

Věta: Rovnice plochy, která vznikne rotací křivky $f(x, z) = 0$ ($x \geq 0$) ležící v rovině $y = 0$ kolem osy z , je $f(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$.

Poznámka: Podmínka $x \geq 0$ bývá nepodstatná. Často se podaří rovnici $f(x, z) = 0$ uvést na tvar $g(x^2, z) = 0$. Pak rovnice příslušné rotační plochy je $g(x^2 + y^2, z) = 0$.

Věta: Jestliže je tvořící křivka k daná parametrickými rovnicemi $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, kde $t \in I \subset (-\infty, \infty)$, a osa rotace $o = z$, pak parametrické rovnice plochy, která vznikne rotací křivky k kolem osy z , lze psát ve tvaru

$$x = x(t) \cos u - y(t) \sin u$$

$$y = y(t) \sin u + x(t) \cos u$$

$$z = z(t), \text{ kde } t \in I \subset (-\infty, \infty), u \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

Eliminací parametrů t, u dostaneme explicitní tvar rovnice rotační plochy $z = F(\sqrt{x^2 + y^2})$.

Poznámka: Za známé považujeme základní pojmy o plochách: body na ploše (regulární, singulární), přímky na ploše (regulární, torzální), klasifikace ploch (podle tvořící křivky, podle druhu pohybu).

II. PŘEHLED ROTAČNÍCH KVADRATICKÝCH PLOCH

1. KULOVÁ PLOCHA

1.1 Definice, základní vlastnosti, obrys

Kulová plocha vzniká rotací kružnice k kolem její libovolné osy o (osa o prochází středem S kružnice k a leží v rovině této kružnice). Kružnice k se nazývá **tvořicí křivka** plochy, osa o je **osa kulové plochy**, bod S je **střed kulové plochy** a poloměr r kružnice k je **poloměr kulové plochy**. Protože tvořicí kružnice je středová kuželosečka, je kulová plocha středovou kvadrikou.

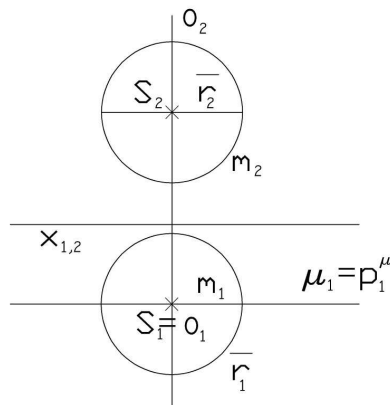
Všechny kružnice kulové plochy, které leží v rovinách procházející středem kulové plochy mají poloměr r a nazývají se **hlavní kružnice**.

Bod S je středem souměrnosti kulové plochy, tedy všechny přímky a roviny, které jím procházejí jsou osami, resp. rovinami souměrnosti, kulové plochy.

Protože tvořicí křivkou je kružnice, patří kulová plocha mezi **plochy cyklické**.

Kulovou plochu lze také definovat jako množinu všech bodů v prostoru, které mají konstantní vzdálenost $r > 0$ od daného pevného bodu S .

Volíme-li osu rotace kolmou k půdorysně ${}^1\pi$, pak prvním zdánlivým obrysem plochy je rovníková kružnice $\bar{r}_1(S_1, r)$. Střed této kružnice je průmět středu kulové plochy, poloměr se rovná poloměru kulové plochy, půdorysem plochy je kruh. Druhým zdánlivým obrysem je hlavní meridián, tj. kružnice $m_2(S_2, r)$ (obr.1.1.).



Obr1.1.

1.2 Rovinné řezy kulové plochy

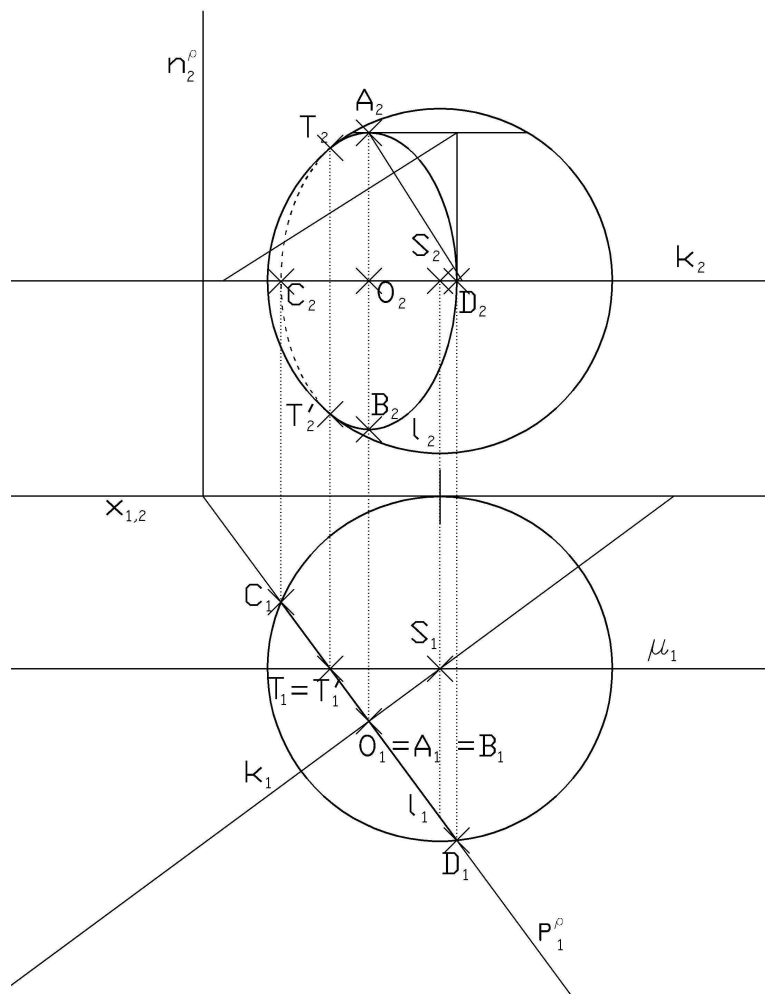
Řez rotační kulové plochy rovinou ρ je:

- kružnice l , jejíž střed O leží na přímce procházející středem S kulové plochy kolmé k rovině řezu ρ (speciálně **hlavní kružnice**, jestliže $S \in \rho$),
- jediný bod T , rovina řezu je pak **tečnou rovinou** kulové plochy a bod T je **bod dotyku**,
- prázdná množina, jestliže rovina řezu ρ kulovou plochu neprotíná.

Příklad: V Mongeově promítání zobrazte řez kulové plochy, je-li dána rovina řezu $\rho \perp \pi$. Kulová plocha je určena středem S a poloměrem r .

Řešení (obr.1.2.):

- Protože rovina řezu $\rho \perp \pi$, je půdorysem řezu l úsečka, nárysem řezu l je elipsa.
- Střed O kružnice řezu l leží na kolmici k vedené středem S kulové plochy kolmo k rovině řezu ρ , poloměr r' kružnice l je roven $r' = \sqrt{r^2 - (SO)^2}$.
- Průmět l_1 je úsečka $C_1D_1 \subset p_1^\rho$, krajní body leží na obrysu kulové plochy, $|C_1D_1| = 2r'$.
- Průmět l_2 je elipsa, body C_2, D_2 jsou její vedlejší vrcholy, hlavní vrcholy A_2, B_2 leží na h^ρ a $|A_2O_2| = |B_2O_2| = r'$.
- Průmět l_2 se dotýká druhého zdánlivého obrysu kulové plochy v bodech T_2, T_2' . Jejich půdorysy $T_1 = T_1'$ leží na l_1 a na průmětu roviny μ hlavního meridiánu.
- Určí se viditelnost řezu vzhledem ke kulové ploše.



Obr.1.2.

1.3 Tečná rovina kulové plochy

Bodem A ($A \notin o$) kulové plochy prochází právě jedna rovnoběžková kružnice a a právě jeden meridián m . Tečná rovina τ v bodě A je určena tečnami t^a, t^m ($t^a \perp t^m$) k rovnoběžkové kružnici a k meridiánu, které bodem A procházejí. Jestliže $A \in o$, pak tečná rovina $\tau \perp o$.

Tečná rovina τ v bodě A kulové plochy je kolmá ke spojnici středu kulové plochy a dotykového bodu A .

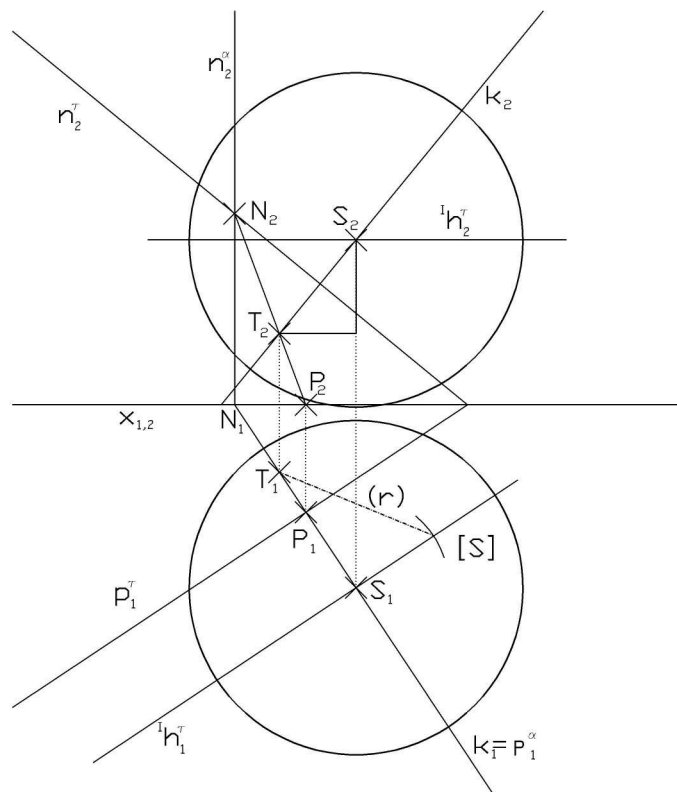
Tečné roviny kulové plochy v bodech rovnoběžkové kružnice (resp. v bodech rovníkové kružnice) obalují dotykovou rotační kuželovou plochu (resp. dotykovou rotační válcovou plochu), jejíž osou je spojnice středu rovnoběžkové kružnice a středu kulové plochy.

Přímka v bodě A kolmá k tečné rovině τ je **normála** n kulové plochy. Všechny normály kulové plochy procházejí jejím středem S .

Příklad: V Mongeově promítání zobrazte kulovou plochu, je-li dán její střed S a tečná rovina τ .

Řešení (obr.1.3.):

1. Bodem S se vede přímka $k \perp \tau$.
2. Sestrojí se bod T , průsečík přímky k a roviny τ (pomocí promítací roviny $\alpha \perp \pi$ přímky k).
3. Sklopením promítací roviny úsečky ST do půdorysny se určí poloměr $r = |ST|$ kulové plochy.



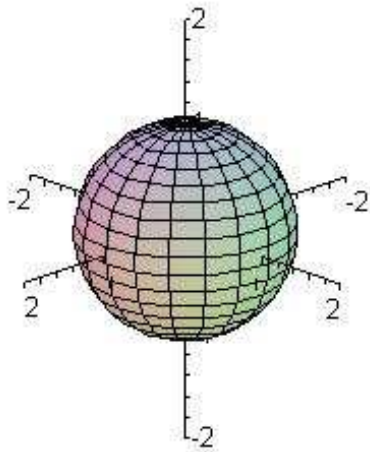
Obr.1.3.

1.4 Analytické vyjádření

Implicitní rovnice:

Jestliže volíme souřadnicovou soustavu $\{O; x, y, z\}$ tak, aby $O = S$, $z = o$, rovnice kulové plochy je ve tvaru $x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$, $r > 0$, a vzniká rotací meridiánu $x^2 + z^2 = r^2$, $y = 0$.

Poznámka: Platí-li $x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$, leží bod $M[x, y, z]$ na kulové ploše se středem $S[0, 0, 0]$ a poloměrem r . Jestliže $x^2 + y^2 + z^2 - r^2 > 0$ (resp. $x^2 + y^2 + z^2 - r^2 < 0$), bod M leží vně (resp. uvnitř) kulové plochy.



Obr.1.4.

Parametrické rovnice:

Jestliže volíme polomeridián plochy jako tvořící křivku danou parametrickými rovnicemi

$x = r \cdot \cos t$, $y = 0$, $z = r \cdot \sin t$, kde $t \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$, osa rotace $o = z$, pak parametrické rovnice

kulové plochy můžeme psát ve tvaru

$$x = r \cdot \cos t \cdot \cos u$$

$$y = r \cdot \cos t \cdot \sin u$$

$$z = r \cdot \sin t, \text{ kde } t \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle, u \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

2. ROTAČNÍ VÁLCOVÁ PLOCHA

2.1 Definice, základní vlastnosti, obrys

Rotační válcová plocha vzniká rotací přímky p kolem osy o rovnoběžné s přímkou p a různé od této přímky p .

Přímka p je **tvůřící přímka**. Přímka o je **osa rotační válcové plochy**, průsečík přímky p s osou o je **nevlastní vrchol** ∞V rotační válcové plochy.

Plocha je souměrná podle každé roviny procházející osou o a podle každé roviny kolmé k ose o . Každým bodem plochy prochází právě jedna tvořící přímka p a právě jedna rovnoběžková kružnice. Všechny rovnoběžkové kružnice na ploše mají stejný poloměr r , tzv. **poloměr rotační válcové plochy**.

Rotační válcovou plochu lze vytvořit posunutím (translací) její libovolné rovnoběžkové kružnice k ve směru osy o , která prochází středem kružnice k a je kolmá k rovině této kružnice. Rotační válcová plocha je tedy také **plochou translační**.

Protože rotační válcová plocha vzniká pohybem přímky, patří mezi **plochy přímkové**. Vzniká také pohybem kružnice, řadí se i mezi **plochy cyklické**.

Vrcholová rovina rotační válcové plochy je každá rovina, která prochází nevlastním vrcholem ∞V . Vrcholová rovina je rovnoběžná s osou plochy.

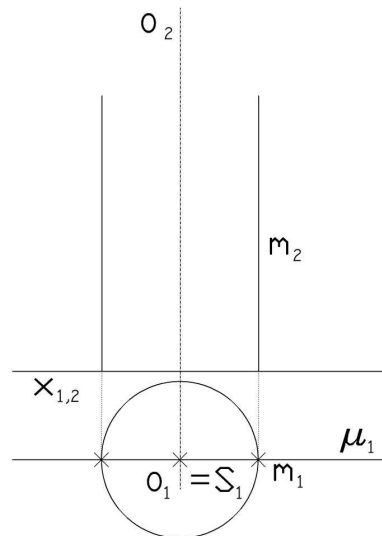
Rotační válcovou plochu můžeme také definovat jako elementární plochu:

Je určena kružnicí k (**řídící křivkou**) ležící v rovině α a směrem s , který je kolmý k rovině α kružnice k . Rotační válcová plocha je množina všech přímek, které jsou rovnoběžné se směrem s (kolmé k rovině α) a rovinu α protínají v bodech kružnice k . Přímka určená bodem křivky k a směrem s je **tvůřící přímka plochy**.

Poznámka:

1. **Válcový prostor** je množina všech bodů ležících na přímkách rovnoběžných se směrem s , které protínají rovinu α v bodech kružnice k a v bodech uvnitř této kružnice.
2. **Rotační válec** je průnik válcového prostoru a prostorové vrstvy určené rovinou α řídící kružnice k a rovinou $\alpha' \parallel \alpha$.
3. Za známé považujeme pojmy: podstava, výška, podstavná hrana, osa, poloměr, atd.

Volíme-li osu rotační válcové plochy kolmou k půdorysně ${}^1\pi$, pak prvním zdánlivým obrysem i prvním průmětem plochy je rovnoběžková kružnice. Druhým zdánlivým obrysem je hlavní meridián m_2 , nebo-li dvě rovnoběžné přímky (obr.2.1). Na obr.2.1. je zobrazena rotační válcová plocha v poloprostoru s hraniční rovinou ${}^1\pi$ pro $z \geq 0$ a je nakreslena její rovnoběžková kružnice ležící v ${}^1\pi$.



Obr.2.1.

2.2 Rovinné řezy rotační válcové plochy

Řezem rotační válcové plochy **vrcholovou rovinou** je:

- nevlastní vrchol ∞V (směr osy o),
- tvořící přímka, vrcholová rovina je **tečnou rovinou plochy**,
- dvě rovnoběžné tvořící přímky.

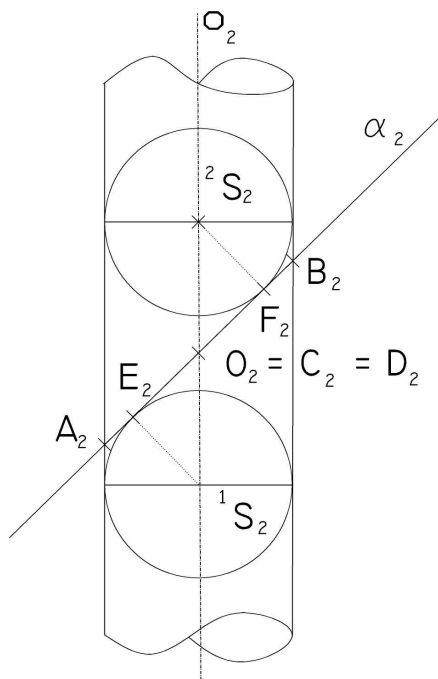
Řezem rotační válcové plochy rovinou neprocházející vrcholem ∞V je:

- kružnice,
- elipsa.

Mezi body řezu válcové rotační plochy a body její řídicí kružnice je vztah osové afinity, kde osou afinity je průsečnice roviny řezu a roviny řídicí kružnice. Směr afinity je nevlastní bod tvořících přímek.

Pro řez rotační válcové plochy platí **Quételetova-Dandelinova věta** (obr.2.2.):

Řez rotační válcové plochy rovinou, která svírá s osou plochy ostrý úhel, je elipsa. Její ohniska jsou body, v nichž se rovina řezu dotýká kulových ploch, které jsou do rotační válcové plochy vepsány. Délka vedlejší poloosy elipsy se rovná poloměru válcové plochy.



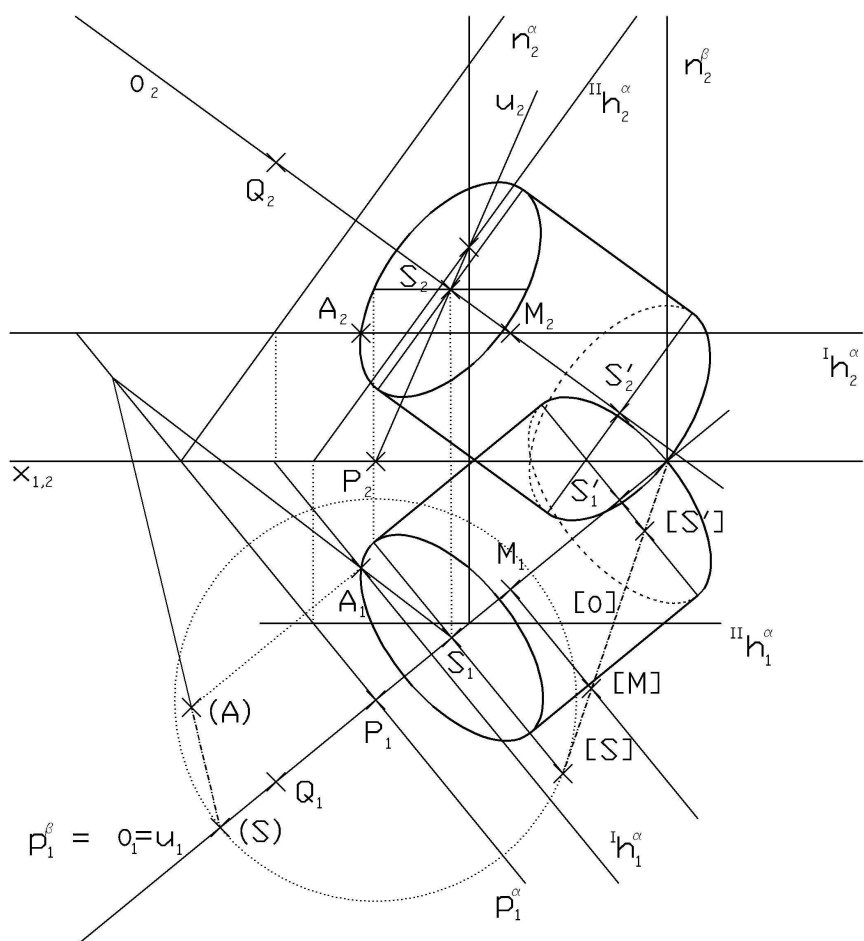
Obr.2.2.

Tečná rovina v libovolném bodě T ($T \neq \infty V$) rotační válcové plochy je určena povrchovou přímkou p plochy v bodě T a tečnou t rovnoběžkové kružnice k v bodě T ($p \perp t$). Tečná rovina v bodě T válcové plochy se plochy dotýká ve všech bodech povrchové přímky p tímto bodem procházející a je rovnoběžná s osou o plochy. Říkáme, že rovina se dotýká plochy **podél povrchové přímky**, přímka p je **dotyková přímka**. Podél každé povrchové přímky válcové plochy se plochy dotýká právě jedna tečná rovina. Tedy každá povrchová přímka na rotační válcové ploše je **přímkou torzální** (tj. podél přímky existuje jediná tečná rovina plochy), a proto je rotační válcová plocha **plochou rozvinutelnou**.

Příklad: V Mongeově promítání zobrazte rotační válec, který je daný osou $o = MQ$, bodem A podstavné hrany a výškou v .

Řešení (obr.2.3.):

1. Bodem A se sestrojí rovina α kolmá k ose o .
2. Průsečík roviny α a přímky o je střed S podstavy válce (bod S je sestrojen pomocí krycí přímky u přímky o).
3. Poloměr r válce se určí otočením roviny α do půdorysny ${}^I\pi$ podle p_1^α .
4. Půdorysem (resp. nárysem) podstavné hrany je elipsa, jejíž hlavní osa je rovnoběžná s půdorysem půdorysné (resp. nárysem nárysné) stopy roviny α , velikost hlavní poloosy $a = r$. Vedlejší vrcholy se sestrojí aplikací proužkové konstrukce (konstrukce není vyrýsována).
5. Výška válce v se sestrojí sklopením promítací roviny přímky o do půdorysny.
6. Určí se viditelnost podstavných hran v půdoryse a náryse.

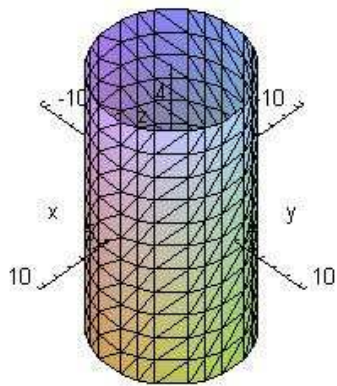


Obr.2.3.

2.3 Analytické vyjádření

Implicitní rovnice:

Nejčastěji se setkáváme s rotačními válcovými plochami, jejichž povrchové přímky jsou rovnoběžné s některou souřadnicovou osou a řídicí kružnice leží v rovině kolmé k této ose. Jestliže volíme souřadnicovou soustavu $\{O; x, y, z\}$ tak, aby $z = o$, pak implicitní rovnice rotační válcové plochy poloměru r je ve tvaru $x^2 + y^2 - r^2 = 0$. Vznikne rotací meridiánu $x^2 = r^2, y = 0$ (dvě přímky $x = r, x = -r$ rovnoběžné s osou z ležící v rovině $y = 0$). Rotační válcová plocha vzniká také rotací polomeridiánu $x = r, y = 0$ (obr.2.4).



$r = 5$
Obr.2.4.

Parametrické rovnice:

Jestliže volíme polomeridián plochy jako tvořící křivku danou parametrickými rovnicemi $x = r$, $y = 0$, $z = t$, kde $t \in \mathbb{R}$ a osu rotace $o = z$, pak parametrické rovnice rotační válcové plochy můžeme psát ve tvaru

$$x = r \cdot \cos u$$

$$y = r \cdot \sin u$$

$$z = t, \text{ kde } t \in \mathbb{R}, u \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

3. ROTAČNÍ KUŽELOVÁ PLOCHA

3.1 Definice, základní vlastnosti, obrys

Rotační kuželová plocha vzniká otáčením přímky p kolem osy o různoběžné (ne kolmé) s přímkou p .

Přímka p je **tvořící přímka**, jednotlivá umístění tvořící přímky se nazývají **povrchové přímky plochy**. Přímka o je **osa rotační kuželové plochy**, průsečík přímky p s osou o je **vrchol** V rotační kuželové plochy. Vrchol V je singulární bod plochy (**kónický**). Plocha je souměrná podle každé roviny procházející její osou. Každým bodem plochy (s výjimkou vrcholu V) prochází právě jedna tvořící přímka a právě jedna rovnoběžková kružnice. Každá rovina procházející vrcholem V rotační kuželové plochy se nazývá **vrcholová rovina**. Protože rotační kuželová plocha vzniká pohybem přímky, patří mezi **plochy přímkové**.

Rotační kuželovou plochu lze také definovat jako elementární plochu:

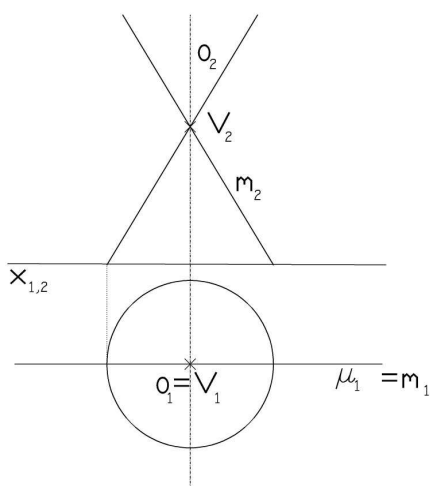
Je určena kružnicí $k(S,r)$, **řídící křivkou**, ležící v rovině α a bodem V ($V \notin \alpha$), pro který platí $SV \perp \alpha$. Je tvořena množinou všech přímek, které procházejí bodem V a protínají rovinu α v bodech kružnice k . Přímka určená bodem V a bodem křivky k je **povrchová přímka plochy**.

Poznámka:

1. **Kuželový prostor** je množina všech bodů ležících na přímkách, které procházejí daným bodem V a protínají rovinu α v bodech kružnice k a v bodech uvnitř této kružnice.
2. **Rotační kužel** je průnik kuželového prostoru a prostorové vrstvy určené rovinou α řídící kružnice k a rovinou vrcholovou $\alpha' \parallel \alpha$.
3. Za známé považujeme pojmy jako podstava, podstavná hrana, poloměr, osa, atd.

Volíme-li osu rotační kuželové plochy kolmou k půdorysně ${}^1\pi$, pak první zdánlivý obrys plochy je půdorys vrcholu V a půdorysem plochy je celá průmětna ${}^1\pi$. Druhým zdánlivým obrysem je nárys hlavního meridiánu m_2 , tedy dvě různoběžné přímky (obr.3.1.).

Na obr.3.1. je zobrazena rotační kuželová plocha v poloprostoru s hraniční rovinou ${}^1\pi$ pro $z \geq 0$ a je nakreslena její rovnoběžková kružnice ležící v ${}^1\pi$.



Obr.3.1.

3.2 Rovinné řezy rotační kuželové plochy

Označíme: α - velikost úhlu tvořících přímek rotační kuželové plochy a osy o ,

β - velikost úhlu roviny řezu ρ a osy o .

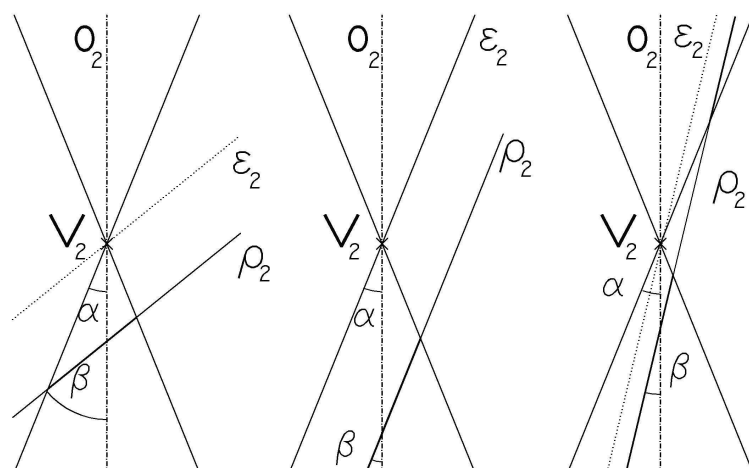
Řez rotační kuželové plochy vrcholovou rovinou ε je (obr.3.2.):

- vrchol V , jestliže $\beta > \alpha$,
- dvojice splývajících povrchových přímek, jestliže $\beta = \alpha$, vrcholová rovina je pak **tečnou rovinou plochy**,
- dvojice různoběžných povrchových přímek, jestliže $\beta < \alpha$.

Řez rotační kuželové plochy rovinou ρ , která není vrcholovou rovinou, je (obr.3.2.):

- kružnice, jestliže $\beta = \frac{\pi}{2}$,
- elipsa, jestliže $\beta > \alpha$,
- parabola, jestliže $\beta = \alpha$,
- hyperbola, jestliže $\beta < \alpha$.

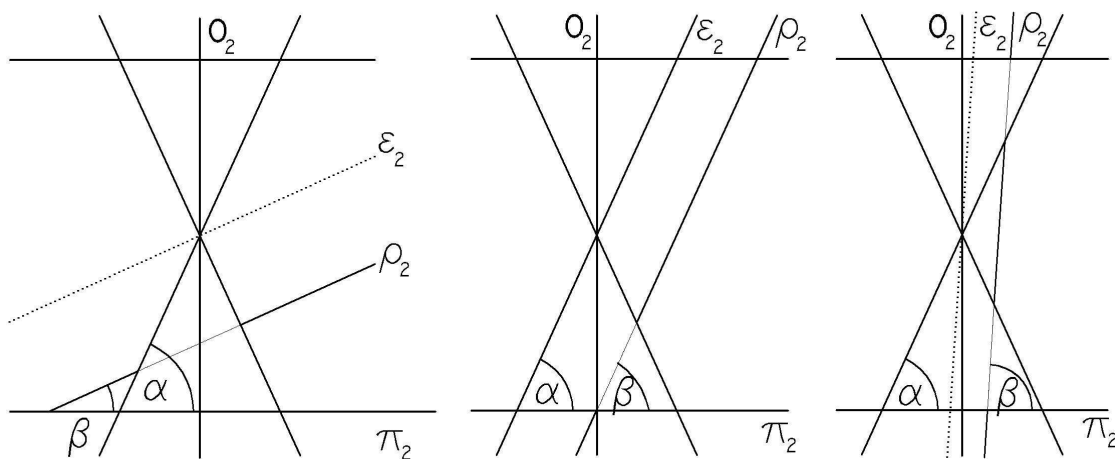
V prvním případě se kuželosečka řezu nazývá **singulární**, ve druhém případě se nazývá **regulární**.



Obr.3.2.

Poznámka: Klasifikaci řezů na rotační kuželové ploše lze také provádět pomocí úhlu α , který svírají tvořící přímky kuželové plochy a osa o , a úhlu β dané roviny řezu ρ s rovinou kolmou k ose rotační kuželové plochy (obr.3.3.).

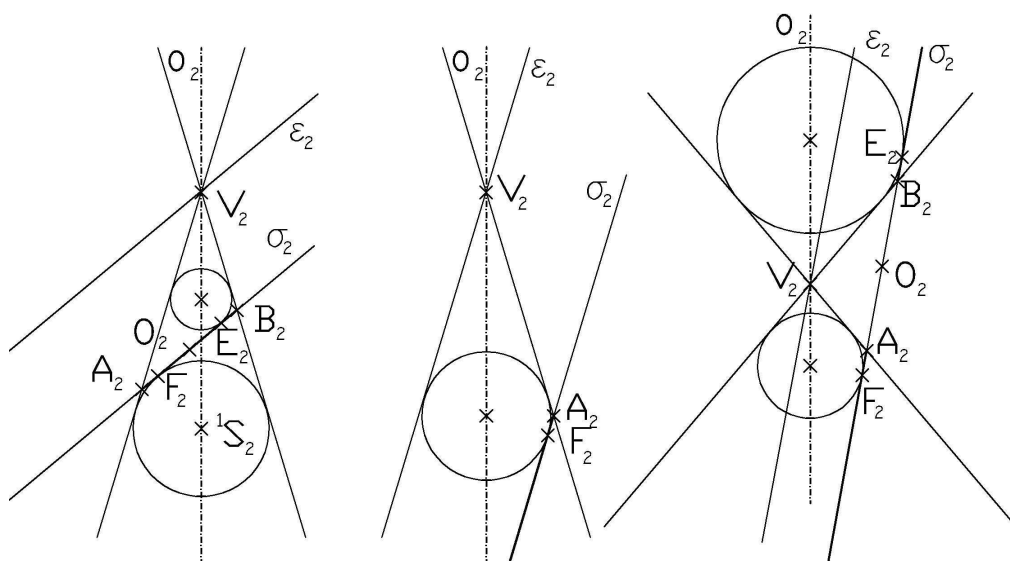
Eliptický řez vznikne právě tehdy, když $\alpha > \beta > 0^\circ$, parabolický řez dostaneme pro $\alpha = \beta$ a hyperbolický pro $\alpha < \beta \leq 90^\circ$ (obr.3.3.).



Obr.3.3.

Pro řez rotační kuželové plochy platí **Quételetova - Dandelinova věta** (obr.3.4.):

Rovina, která není vrcholová, protíná rotační kuželovou plochu v regulární kuželosečce. Její ohniska jsou dotykové body kulových ploch, které jsou vepsány rotační kuželové ploše a dotýkají se roviny řezu.



Obr.3.4.

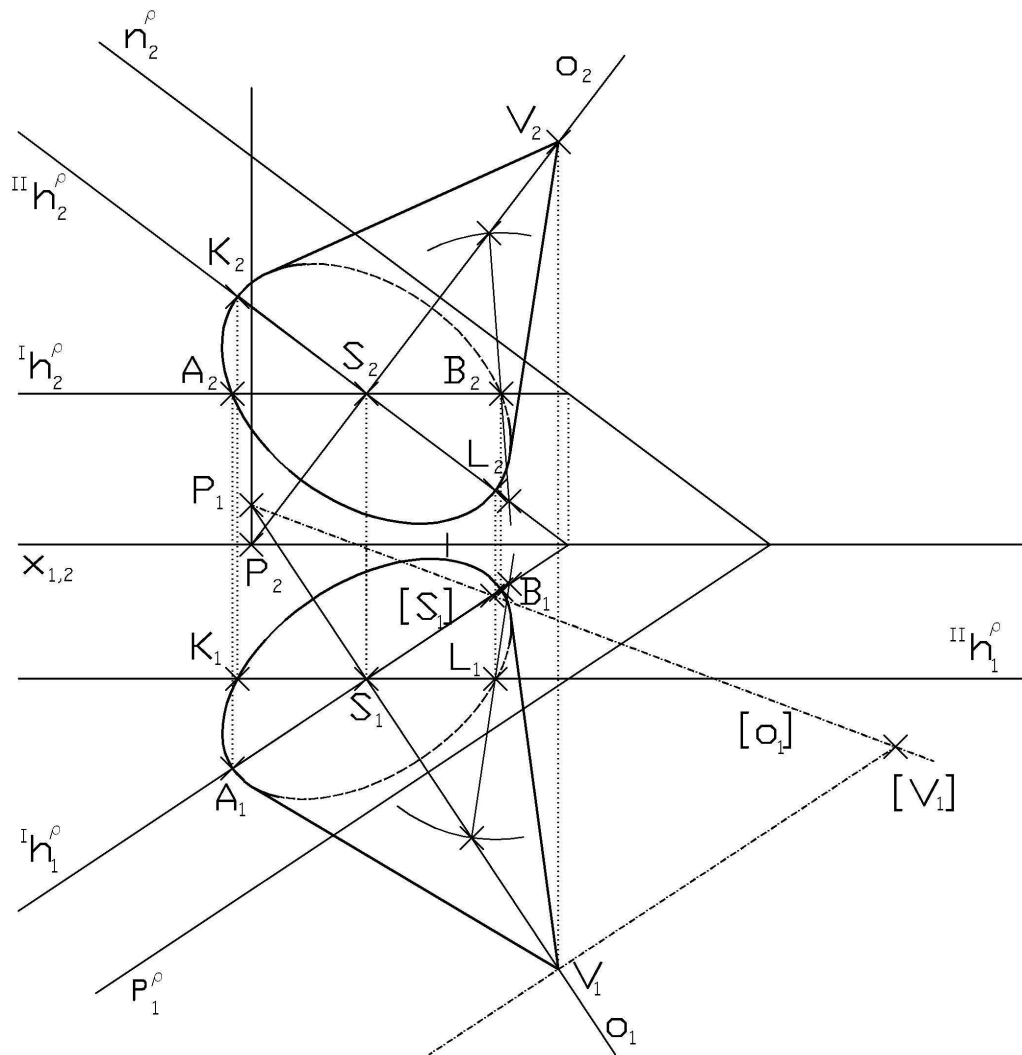
Tečná rovina v libovolném bodě T (různém od vrcholu V) rotační kuželové plochy je určena např. tvořící přímkou p plochy v bodě T a tečnou t rovnoběžkové kružnice k v bodě T ($p \perp t$). Tečná rovina v bodě T kuželové plochy se plochy dotýká ve všech bodech tvořící přímkou p tímto bodem procházející. Říkáme, že rovina se plochy dotýká **podél tvořící přímkou**, přímkou p je **dotyková přímkou**. Podél každé tvořící přímkou kuželové plochy se plochy dotýká právě jedna tečná rovina. Každá tvořící přímkou na rotační kuželové ploše je tedy **přímkou torzální** (podél ní, mimo bodu V , existuje jediná tečná rovina plochy), a proto je rotační kuželová plocha **plochou rozvinutelnou**.

Příklad: V Mongeově promítání zobrazte rotační kužel s výškou v a podstavou o středu S a poloměrem r v rovině ρ , jestliže z-ová souřadnice vrcholu V je větší než z-ová souřadnice středu podstavy S .

Řešení (obr.3.5.):

1. Průměty kruhové podstavy kužele jsou elipsy se středem S_1 (resp. S_2) a hlavní poloosou ležící na hlavních přímkách 1h , 2h roviny ρ , velikost hlavní poloosy je rovna poloměru r podstavy.
2. $A_1, B_1 \in ^1h_1, |A_1S_1| = |B_1S_1| = r, K_1, L_1 \in ^2h_2, |K_2S_2| = |L_2S_2| = r$.
3. V půdoryse je elipsa určena hlavními vrcholy A_1, B_1 a obecnými body K_1, L_1 . V náryse má elipsa hlavní vrcholy K_2, L_2 a A_2, B_2 jsou jejími obecnými body. Vedlejší vrcholy v obou průmětech se sestojí aplikací proužkové konstrukce.

4. Sklopením promítací roviny osy o do půdorysny a nanesením výšky v se dostanou průměty vrcholu V .
5. Obrysové přímky průmětu kužele jsou tečny z bodu V_1 (resp. V_2) k elipse. V bodech dotyku se mění viditelnost podstavné hrany.

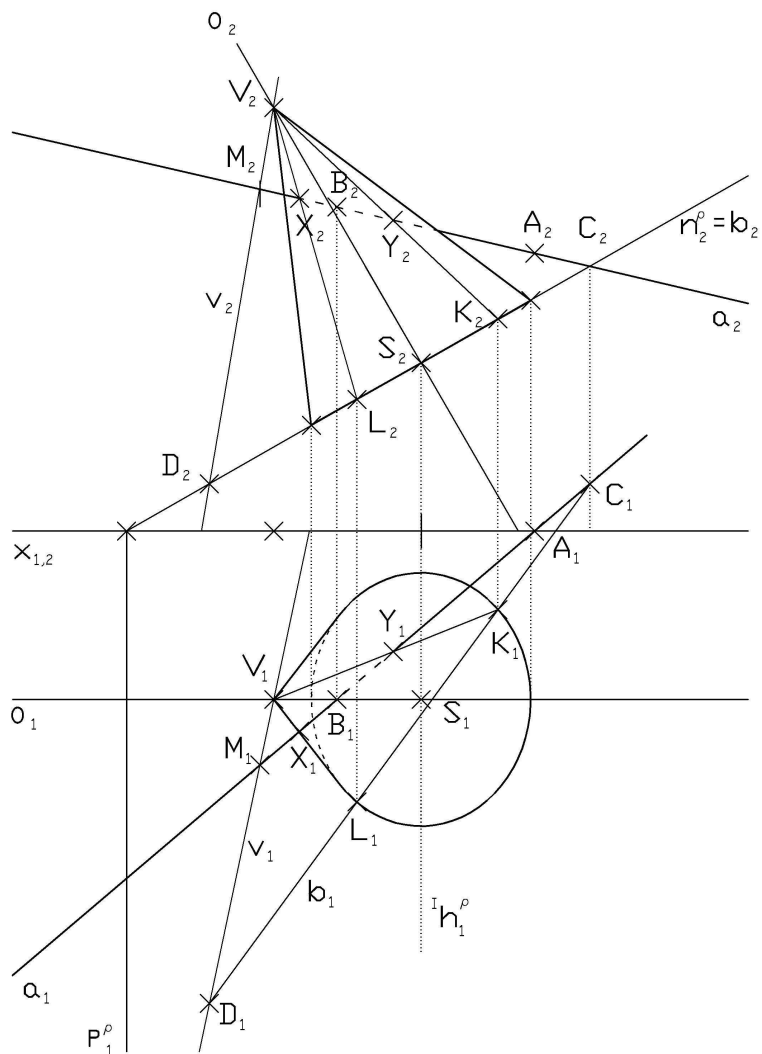


Obr.3.5.

Příklad: V Mongeově promítání zobrazte rotační kužel s výškou v a podstavou o středu S a poloměru r v rovině $\rho \perp \pi$. Sestrojte průsečíky přímky a s povrchem kužele.

Řešení (obr.3.6.):

1. Průmětem kruhové podstavy je v náryse je úsečka se středem S_2 o velikosti $2r$, průmět podstavy v půdoryse je elipsa se středem S_1 , její hlavní poloosa má stejnou velikost jako poloměr r a leží na h^p . Vedlejší poloosa se odvodí z nárysu.
2. Protože osa o kužele je rovnoběžná s $^2\pi$, nanáší se výška $v = |S_2V_2|$ v náryse ve skutečné velikosti.
3. Sestrojí se vrcholová rovina ε rotačního kužele, ve které leží daná přímka a . Rovina ε bude určena pomocí dvou různoběžek, jedna přímka je přímka a , druhá je přímka $v = VM$, kde M je libovolný bod přímky a .
4. Sestrojí se přímka $b = CD$, která je průsečnicí vrcholové roviny ε a roviny ρ podstavy kužele.
5. Vrcholová rovina protíná povrch kužele ve dvou různých úsečkách KV , LV .
6. Průsečky X , Y úseček KV , LV s přímkou a jsou hledané průsečky přímky a s povrchem kužele.
7. Určí se viditelnost přímky v půdoryse a náryse vzhledem k povrchu kužele.



Obr.3.6.

3.3 Analytické vyjádření

Implicitní rovnice:

Jestliže volíme souřadnicovou soustavu $\{O; x, y, z\}$ tak, aby $O = V$, $z = o$, pak implicitní

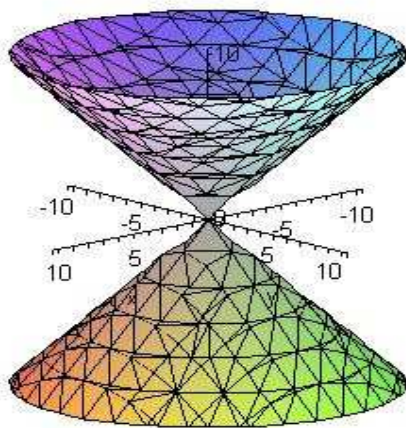
rovnice rotační kuželové plochy je ve tvaru $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$, $a \neq 0$, $c \neq 0$.

Rotační kuželová plocha vznikne rotací meridiánu $x^2 = \frac{a^2}{c^2} z^2$, $y = 0$ (dvě různoběžky

$x = \frac{a}{c} z$, $x = -\frac{a}{c} z$ ležící v rovině $y = 0$, procházející počátkem souřadnicové soustavy).

Poznámka: Užívá se také tvar rovnice $z^2 = p^2(x^2 + y^2)$, $p \neq 0$. Rotační kuželová plocha

vznikne rotací meridiánu s rovnicí $x^2 = \frac{z^2}{p^2}$, $y = 0$.



$$a = 4$$

$$c = 5$$

Obr.3.7.

Parametrické rovnice:

Jestliže volíme polomeridián plochy jako tvořící křivku danou parametrickými rovnicemi

$x = a \cdot t$, $y = 0$, $z = c \cdot t$, kde $t \in \mathbb{R}$ a osu rotace $o = z$, pak parametrické rovnice rotační

kuželové plochy můžeme psát ve tvaru

$$x = a \cdot t \cdot \cos u,$$

$$y = a \cdot t \cdot \sin u,$$

$$z = c \cdot t, \text{ kde } t \in \mathbb{R}, u \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

4. ROTAČNÍ ELIPSOIDY

4.1 Definice, základní vlastnosti, obrys

Rotační elipsoid vzniká rotací elipsy kolem její osy.

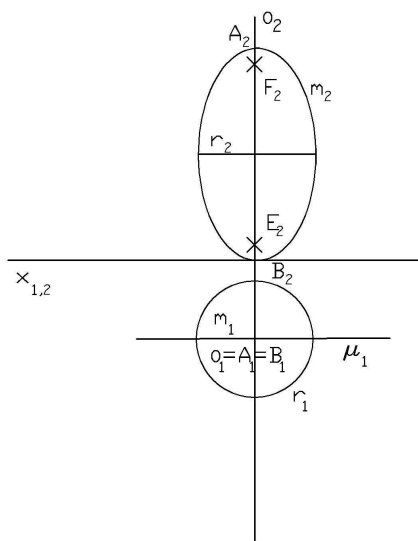
Jestliže elipsa rotuje kolem své hlavní osy, vznikne **rotační elipsoid protáhlý** (vejčitý), rotací kolem vedlejší osy vznikne **rotační elipsoid zploštělý**.

Základní vlastnosti mají oba rotační elipsoidy většinou stejné, proto je budeme popisovat společně.

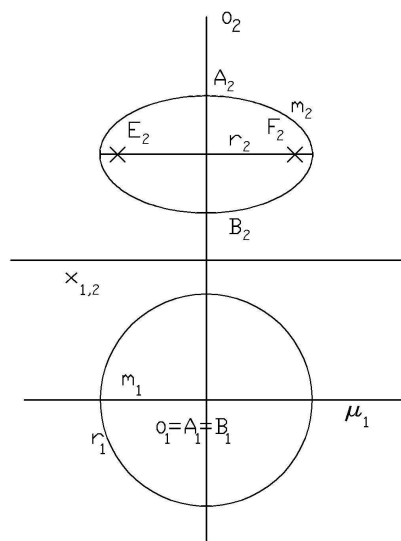
Protože tvořící kuželosečka (elipsa) je středová kuželosečka, je její střed S **středem rotačního elipsoidu**, osa rotace o je **osou rotačního elipsoidu**. Rotační elipsoid patří mezi **středové kvadriky** a je podle středu S středově souměrný. Rotační elipsoid je jako každá rotační plocha souměrný podle každé roviny procházející jeho osou. Je také souměrný podle roviny procházející jeho středem S kolmo k jeho ose o . Průsečky elipsoidu s osou o nazýváme **vrcholy elipsoidu**.

Jestliže je rotační elipsoid protáhlý, pak ohniska E, F tvořící elipsy leží na ose rotace a jsou společná pro všechny meridiány. Proto rotační elipsoid protáhlý lze také definovat jako množinu všech bodů v prostoru, jejichž součet vzdáleností od dvou pevných různých bodů E, F je konstantní, větší než vzdálenost daných pevných bodů E, F . Tyto body se nazývají **ohniska rotačního elipsoidu protáhlého** (obr.4.1.). Pro rotační elipsoid zploštělý toto tvrzení neplatí, ohniska tvořící elipsy neleží na ose rotace a při rotaci opíší kružnici (obr.4.2.).

Volíme-li osu rotace kolmou k půdorysně l_π , pak prvním zdánlivým obrysem plochy je rovníková kružnice r_1 , půdorysem plochy je kruh. Druhým zdánlivým obrysem je hlavní meridián m_2 , tj. elipsa (obr.4.1., obr.4.2.).



Obr.4.1.



Obr.4.2.

4.2 Rovinné řezy rotačního elipsoidu

Řez rotačního elipsoidu rovinou ρ je:

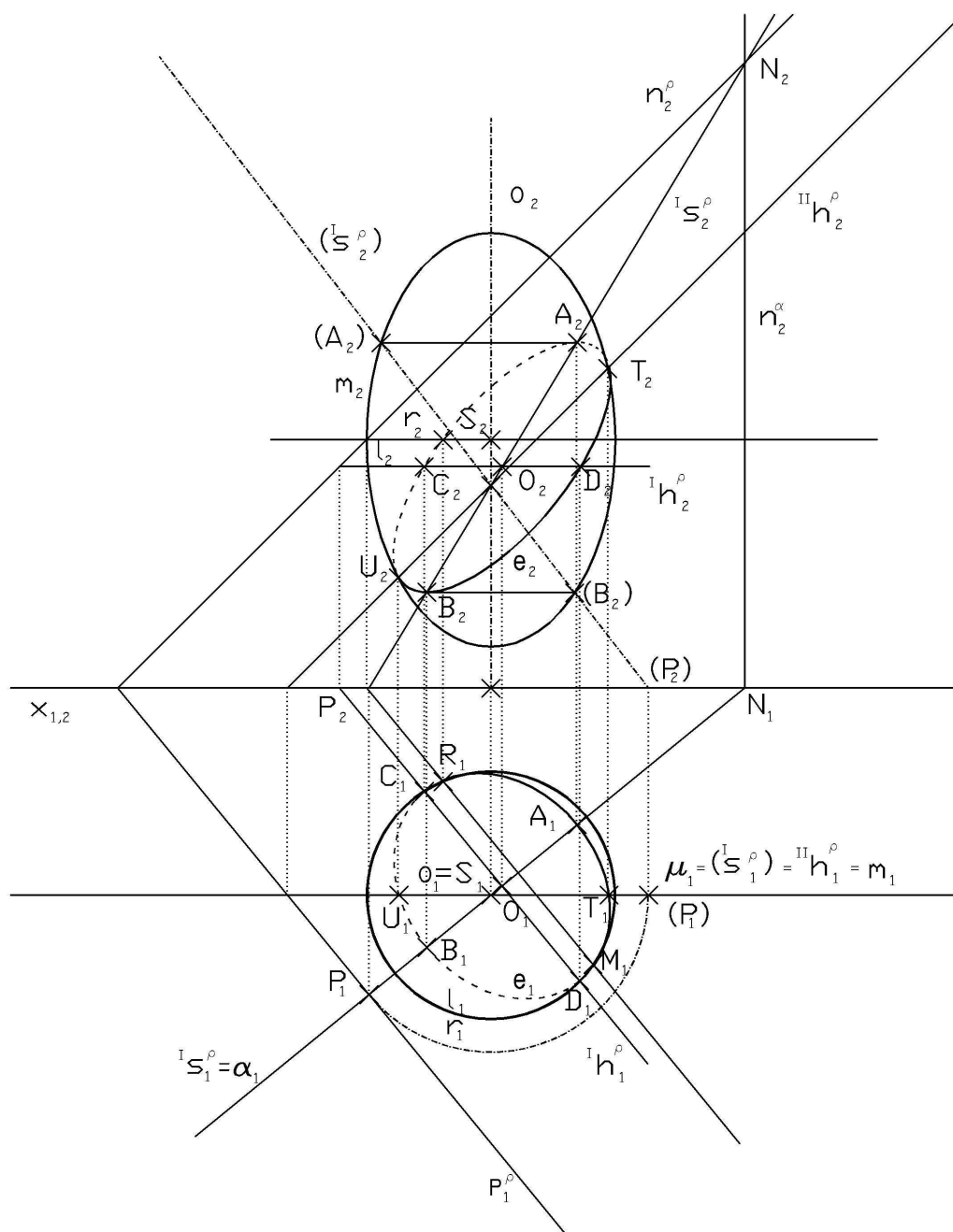
- prázdná množina**, jestliže rovina nemá s rotačním elipsoidem společné body,
- jeden bod T** , pak rovinou řezu je **tečná rovina rotačního elipsoidu** a bod T je **bod dotyku**,
- kružnice**, jestliže rovina řezu je kolmá k ose plochy a nenastává případ a), b),
- elipsa**, jestliže rovina ρ svírá s osou plochy ostrý úhel a nenastává případ a), b).

Řez je souměrný podle roviny α procházející osou rotačního elipsoidu a kolmé k rovině řezu ρ . Průsečnice s roviny α a roviny ρ ($s = \alpha \cap \rho$) je osa souměrnosti řezu, tj. osa kuželosečky řezu.

Příklad: V Mongeově promítání zobrazte **eliptický řez** rotačního elipsoidu protáhlého, je-li dána rovina řezu ρ . Elipsoid je určen osou rotace $o \perp {}^I\pi$ a hlavním meridiánem m .

Řešení (obr.4.3.):

1. Jelikož řez je souměrný podle roviny α , která prochází osou elipsoidu a je kolmá k rovině řezu ρ , je přímka $s = \alpha \cap \rho$ osou řezu (protože $\alpha \perp {}^I\pi$, je přímka $s = {}^I s^\rho$ spádová přímka I. osnovy roviny ρ). Její průsečíky A, B s elipsoidem jsou pak vrcholy řezu.
2. Průsečíky A, B přímky $s = \alpha \cap \rho$ s rotačním elipsoidem se sestrojí otočením přímky s kolem osy o do roviny μ hlavního meridiánu m . Otočená přímka (s^ρ) protíná meridián m v bodech (A) a (B). Jejich zpětným otočením na přímku s dostaneme body A, B .
3. Středem O úsečky AB se vede druhá osa průsečné elipsy, která leží v rovině řezu ρ a je kolmá k přímce s , tedy leží na ${}^I h^\rho$.
4. Obrazy vrcholů C, D se sestrojí pomocí rovnoběžkové kružnice rotačního elipsoidu, jejíž rovina prochází bodem O .
5. Půdorysem řezu je elipsa e_1 s hlavní osou A_1B_1 a vedlejší osou C_1D_1 , která se prvního zdánlivého obrysu r_1 elipsoidu dotýká v bodech M_1, R_1 . Body M, R leží na rovníkové kružnici elipsoidu a ${}^I h^\rho$. Elipsa e_1 se sestrojí bodovou konstrukcí.
6. Nárysem řezu je elipsa e_2 , pro kterou A_2B_2 a C_2D_2 jsou jejími sdruženými průměry. Elipsa e_2 se dotýká druhého zdánlivého obrysu v bodech U_2, T_2 ležících na hlavní přímce druhé osnovy ${}^{II} h^\rho$ roviny ρ a v rovině μ hlavního meridiánu. Elipsu e_2 se sestrojí Rytzovou konstrukcí.
7. Viditelnost řezu se určí v půdoryse a náryse vzhledem ke zdánlivému obrysu elipsoidu.



Obr.4.3.

4.3 Tečná rovina rotačního elipsoidu

Tečnou rovinou τ v bodě A rotační plochy určíme tečnami ke dvěma křivkám plochy, které daným bodem procházejí a navzájem se nedotýkají.

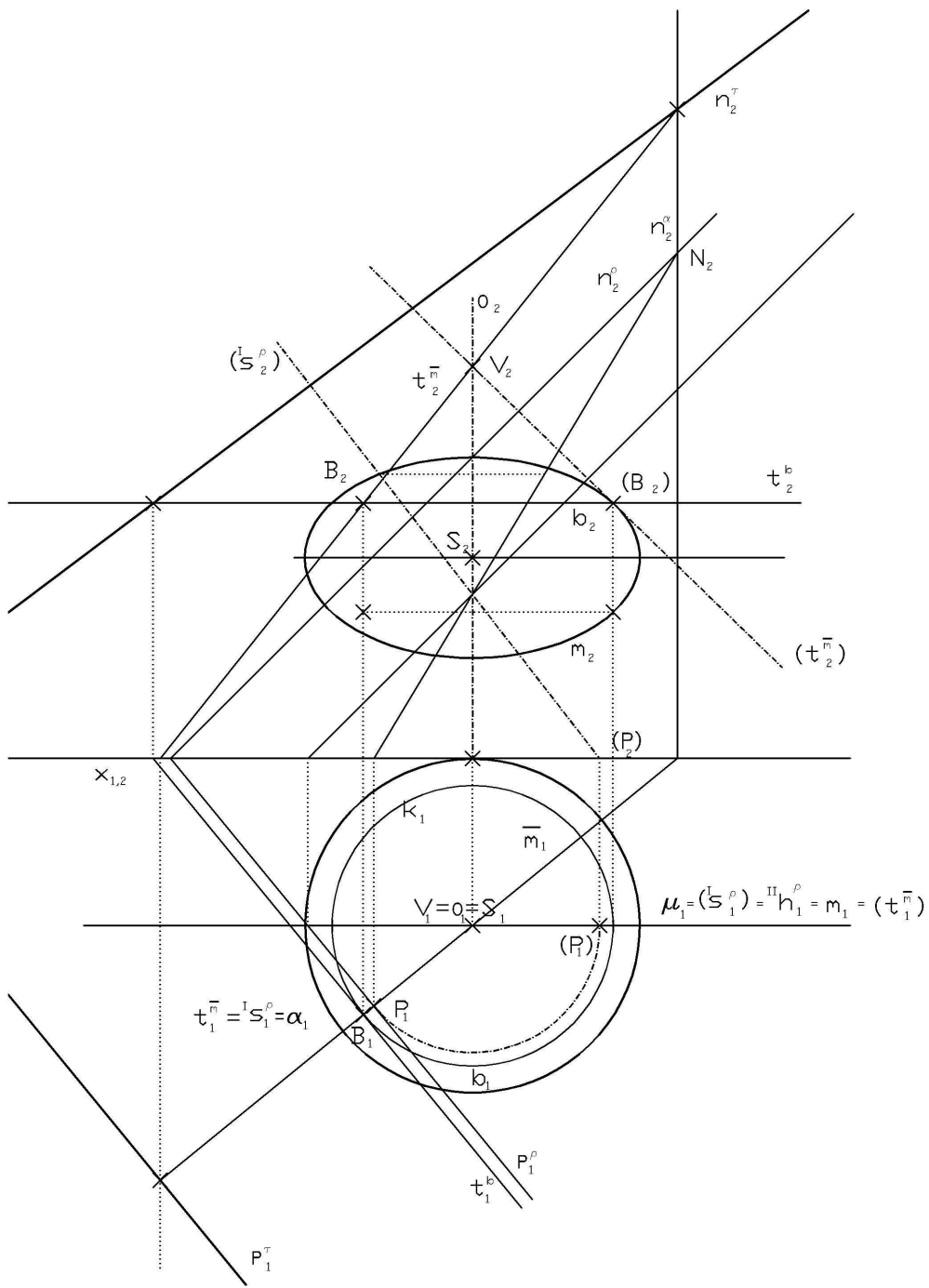
Každým bodem A rotačního elipsoidu (mimo vrcholů) prochází právě jedna rovnoběžková kružnice a a právě jeden meridián m . Tečná rovina v bodě A plochy bude určena tečnou t^a

k rovnoběžkové kružnici a a tečnou t^m k meridiánu m , které tímto bodem A procházejí ($t^a \perp t^m$). Tečné roviny ve vrcholech elipsoidu jsou kolmé k jeho ose.

Příklad: V Mongeově promítání zobrazte v bodě B rotačního elipsoidu zploštělého tečnou rovinu. Elipsoid je určen osou rotace $o \perp \pi$ a hlavním meridiánem m , bod B svým půdorysem.

Řešení (obr.4.4.):

1. K půdorysu B_1 bodu B se sestrojí nárys pomocí rovnoběžkové kružnice. Tečná rovina τ v bodě B rotačního elipsoidu se určí tečnou k rovnoběžkové kružnici v bodě B a tečnou k meridiánu v bodě B .
2. Sestrojí se tečna t^b k rovnoběžkové kružnici b v bodě B (t_1^b se dotýká kružnice b_1 , $b_2 \subset t_2^b$).
3. Meridián \bar{m} v bodě B v obr.4.4. není nakreslen, otočíme jej kolem osy o do roviny μ hlavního meridiánu.
4. V bodě (B) se sestrojí tečna ($t^{\bar{m}}$) k hlavnímu meridiánu m .
5. Při otáčení zpět do bodu B se užije pevného bodu V na ose o (V je vrchol dotykové kuželové plochy podél rovnoběžkové kružnice b).
6. Tečná rovina τ je určena dvojicí přímek $t^b, t^{\bar{m}}$. Tečny $t^b, t^{\bar{m}}$ jsou k sobě kolmé. Na obr.4.4. jsou sestrojeny stopy tečné roviny τ .



Obr.4.4

4.4 Analytické vyjádření

Implicitní rovnice:

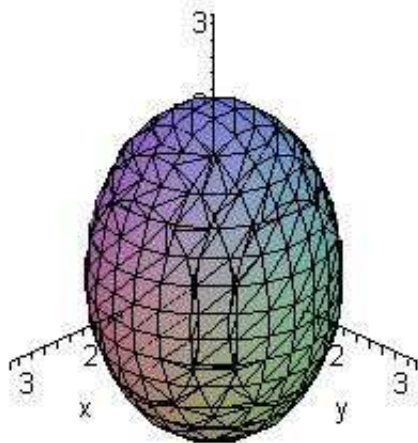
U rotačních elipsoidů volíme souřadnicovou soustavu $\{O; x, y, z\}$ tak, aby $O = S, z = o$.

Pak implicitní rovnice rotačního elipsoidu je $\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$, kde $a > 0, c > 0, (a \neq c)$,

jsou velikosti poloos tvořící elipsy, poloosa c leží na ose rotace.

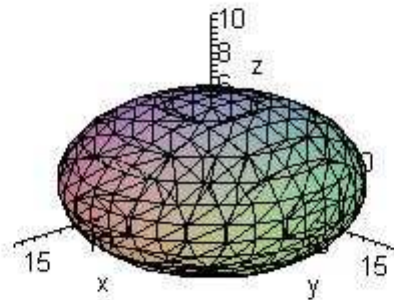
Jestliže $a < c$, je rotační elipsoid protáhlý, a je vedlejší poloosa tvořící elipsy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, c je hlavní poloosa této elipsy.

Jestliže $a > c$, je rotační elipsoid zploštělý, a je hlavní poloosa tvořící elipsy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, c je vedlejší poloosa této elipsy.



$$a = \sqrt{2}$$
$$c = 2$$

Obr.4.5.



$$a = 9$$
$$c = 5$$

Obr.4.6.

Parametrické rovnice:

Jestliže volíme polomeridián plochy jako tvořící křivku danou parametrickými rovnicemi

$$x = a \cdot \cos t, \quad y = 0, \quad z = c \cdot \sin t, \quad \text{kde } t \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle, \quad a \neq c, \quad \text{osa rotace } o = z, \text{ pak}$$

parametrické rovnice rotačního elipsoidu můžeme psát ve tvaru

$$x = a \cdot \cos t \cdot \cos u,$$

$$y = a \cdot \cos t \cdot \sin u,$$

$$z = c \cdot \sin t, \text{ kde } t \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle, u \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

5. ROTAČNÍ PARABOLOID

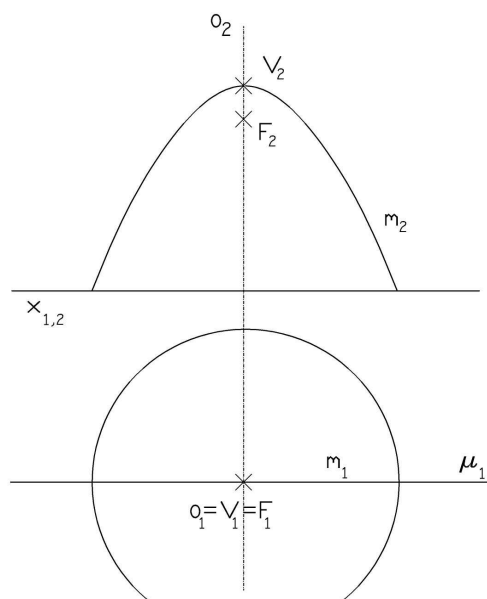
5.1 Definice, základní vlastnosti, obrys

Rotační paraboloid vzniká rotací paraboly kolem své osy.

Průsečík osy rotace s rotačním paraboloidem je **vrchol V paraboloidu**, osa rotace o je **osou paraboloidu**. Protože tvořící parabola není středová kuželosečka, není ani rotační paraboloid středovou kvadrikou. Rotační paraboloid je souměrný podle každé roviny procházející jeho osou. Ohnisko F tvořící paraboly leží na ose rotace, je společné pro všechny meridiány rotačního paraboloidu a je **ohniskem paraboloidu**. Řídící přímka tvořící paraboly při rotaci kolem osy paraboly vytvoří rovinu φ , tzv. **řídící rovinu rotačního paraboloidu**.

Rotační paraboloid lze také definovat jako množinu všech bodů v prostoru, které mají od pevného bodu F (ohniska) a pevné roviny φ (řídící roviny) stejnou vzdálenost, $F \notin \varphi$. Vzdálenost ohniska F od řídící roviny φ je **parametr p rotačního paraboloidu**.

Jestliže osu rotace volíme kolmou k půdorysně ${}^1\pi$, pak plocha nemá první zdánlivý obrys a půdorysem plochy je celá rovina ${}^1\pi$. Druhým zdánlivým obrysem plochy je hlavní meridián, tj. parabola (obr.5.1.). Na obr.5.1. je zobrazen rotační paraboloid v poloprostoru s hraniční rovinou ${}^1\pi$ pro $z \geq 0$ a je nakreslena jeho rovnoběžková kružnice ležící v ${}^1\pi$.



Obr.5.1.

5.2 Rovinné řezy rotačního paraboloidu

Řez rotačního paraboloidu rovinou ρ je:

- prázdná množina, jestliže rovina ρ nemá s rotačním paraboloidem společné body,
- jeden bod T , pak rovina řezu ρ je **tečnou rovinou** rotačního paraboloidu a bod T **bod dotyku**,
- kružnice, jestliže rovina řezu ρ je kolmá k ose paraboloidu,
- elipsa, jestliže rovina řezu ρ je různoběžná s osou paraboloidu,
- parabola, jestliže rovina řezu ρ je rovnoběžná s osou paraboloidu.

Pro řezy rotačního paraboloidu platí následující dvě věty.

Věta:

Pravouhlým průmětem eliptického řezu rotačního paraboloidu do roviny kolmé k ose paraboloidu je kružnice.

Věta:

Všechny paraboly na rotačním paraboloidu jsou shodné křivky (paraboly leží v rovinách rovnoběžných s osou paraboloidu a jsou shodné s meridiány).

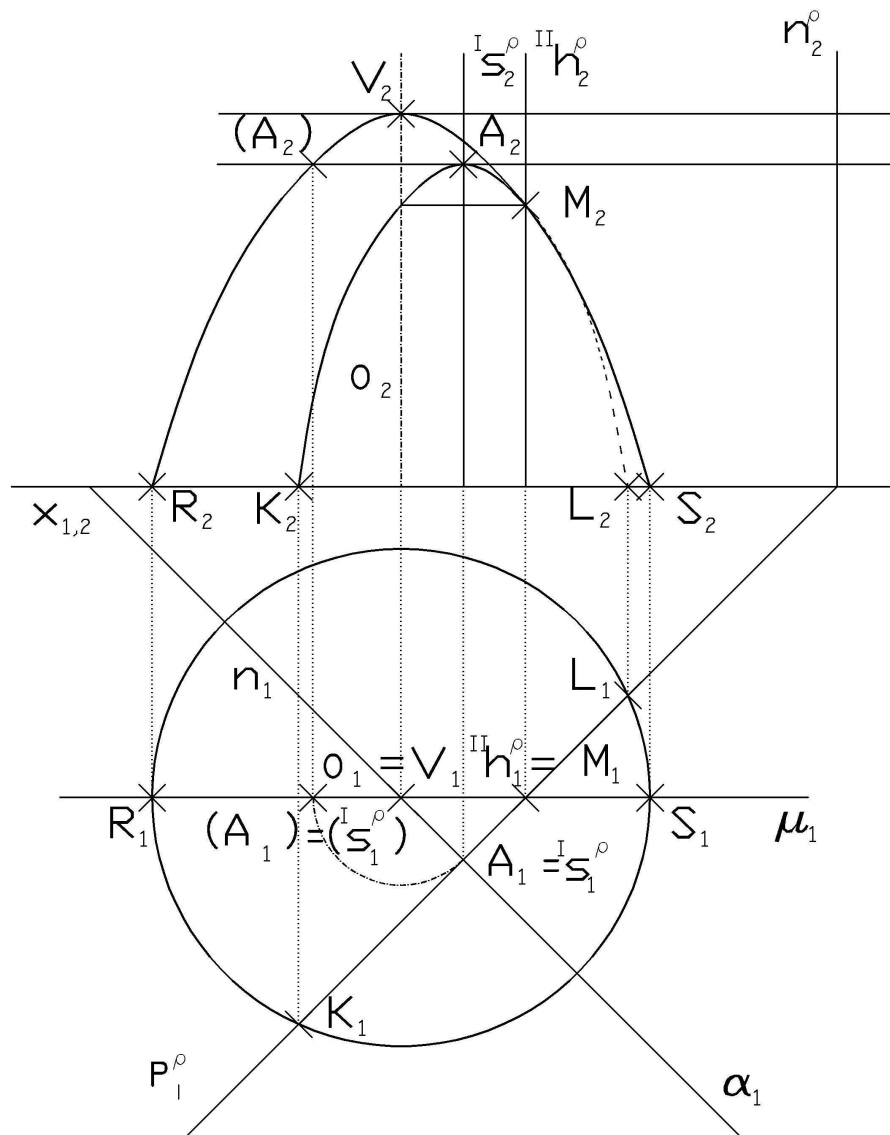
Poznámka: Rotační paraboloid je také translační plocha. Vznikne při pohybu paraboly (tvořící křivky), jejíž vrchol opisuje shodnou parabolu (řídící křivku). Roviny tvořící a řídící křivky jsou na sebe kolmé, roviny všech tvořících křivek jsou navzájem rovnoběžné, každý bod křivky při translaci opíše shodnou dráhu.

Příklad: V Mongeově promítání zobrazte řez rotačního paraboloidu rovinou ρ rovnoběžnou s osou rotačního paraboloidu. Rotační paraboloid je určen osou $o \perp \pi$ a hlavním meridiánem m (parabola).

Řešení (obr.5.2.):

- Rotační paraboloid omezíme půdorysnou, proto půdorysem rotačního paraboloidu je kruh se středem V_I a poloměrem $|R_I V_I| = |V_I S_I|$.
- Řezem je parabola, půdorys parabolického řezu je úsečka $K_I L_I$ ($\rho \perp \pi$).

3. Vrchol A paraboly řezu leží v rovině α kolmé k rovině řezu ρ a procházející osou o .
Rovina α protíná rovinu řezu ρ ve spádové přímce $^I s^\rho$ ($^I s^\rho \perp ^I \pi$) a paraboloid v meridiánu n . V otočení do roviny hlavního meridiánu μ se určí společný bod A meridiánu n a přímky s .
4. Nárýsem parabolického řezu je parabola určena vrcholem A_2 , dvěma body K_2, L_2 a osou $^I s_2^\rho$.
5. Nárýs paraboly řezu se dotýká druhého zdánlivého obrysu paraboloidu v bodě M_2 . Tento se určí pomocí hlavní přímky druhé osnovy roviny ρ , která leží v rovině hlavního meridiánu μ .

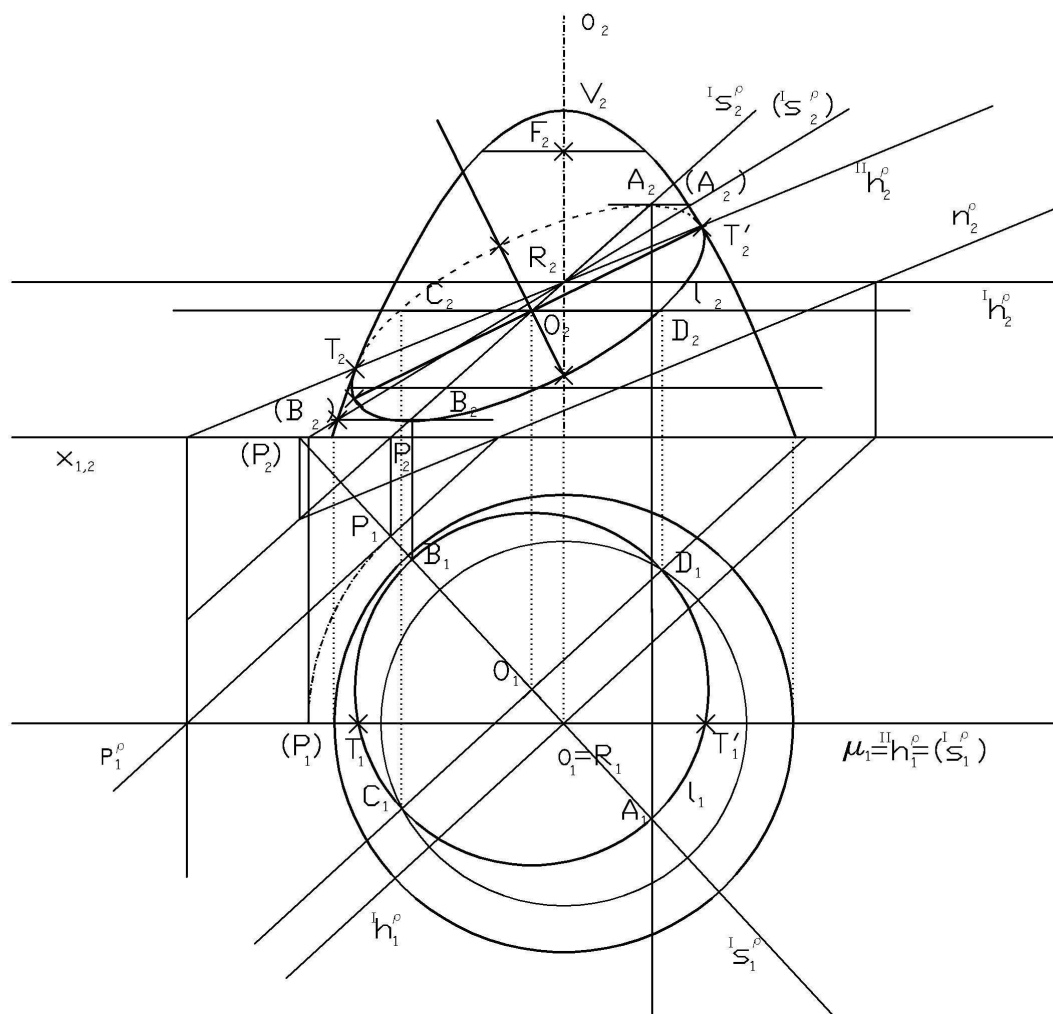


Obr.5.2.

Příklad: V Mongeově promítání zobrazte eliptický řez rotačního paraboloidu rovinou ρ . Rotační paraboloid je určen osou $o \perp l\pi$ a hlavním meridiánem m (parabola).

Řešení (obr.5.3.):

Eliptický řez rotačního paraboloidu se sestrojí podobně jako u elipsoidu (viz obr.4.4.). Půdorysem řezu je kružnice l_1 a nárysem řezu elipsa l_2 .



Obr.5.3.

Poznámka: Na obr.5.3. jsem se při rýsování dopustila nepřesnosti, která je způsobená vykreslením paraboly, pomocí splinu. Proto body A_2, B_2 neleží přesně na elipse řezu.

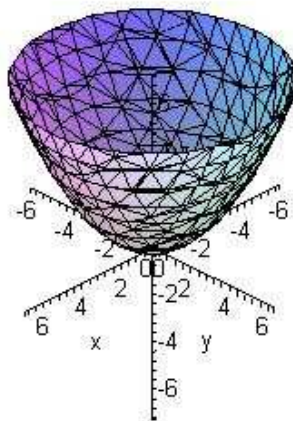
5.3 Tečná rovina rotačního paraboloidu

Konstrukce tečné roviny rotačního paraboloidu v bodě T (T je různý od vrcholu paraboloidu V) je stejná jako konstrukce tečné roviny rotačního elipsoidu (viz obr.4.3.). Tečná rovina ve vrcholu V paraboloidu je kolmá k ose paraboloidu.

5.4 Analytické vyjádření

Implicitní rovnice:

U rotačního paraboloidu volíme souřadnicovou soustavu $\{O; x, y, z\}$ tak, aby $O = V, z = o$.
Rovnice rotačního paraboloidu je tvaru $x^2 + y^2 - 2pz = 0$ (resp. $x^2 + y^2 + 2pz = 0$), $p > 0$,
kde p je parametr rotačního paraboloidu. Meridiánem rotačního paraboloidu v rovině (x,z) je parabola $x^2 = 2pz$ (resp. $x^2 = -2pz$), $y = 0$.



$$p = 2$$

Obr.5.4.

Parametrické rovnice:

Jestliže volíme polomeridián plochy jako tvořící křivku danou parametrickými rovnicemi

$x = t, y = 0, z = \frac{t^2}{2p}$, kde $t \in \mathbb{R}, p > 0$, osa rotace $o = z$, pak parametrické rovnice rotačního

paraboloidu můžeme psát ve tvaru

$$x = t \cdot \cos u,$$

$$y = t \cdot \sin u,$$

$$z = \frac{t^2}{2p}, \text{ kde } t \in \mathbb{R}, p > 0, u \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

6. ROTAČNÍ HYPERBOLOIDY

6.1 Definice, základní vlastnosti

Rotační hyperboloid vzniká rotací hyperboly kolem její osy.

Jestliže hyperbola rotuje kolem hlavní osy, vznikne **rotační hyperboloid dvojdílný** (v dalším textu RHD), rotací kolem vedlejší osy vznikne **rotační hyperboloid jednodílný** (v dalším textu RHJ). Rotací asymptot tvořící hyperboly se vytvoří **asymptotická kuželová plocha**.

Protože tvořící hyperbola je středová kuželosečka, je její střed S **středem hyperboloidu**. Hyperboloidy patří mezi středové rotační kvadriky. Podle středu S jsou hyperboloidy středově souměrné. Osa rotace o je **osou hyperboloidu**. Rotační hyperboloidy jsou souměrné podle každé roviny procházející jejich osou a podle roviny, která prochází jejich středem S kolmo k jejich ose.

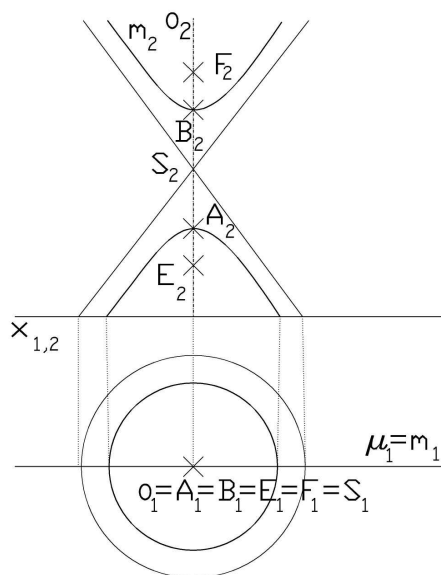
Hyperboloidy nemají další základní vlastnosti stejné, proto je budeme popisovat odděleně.

6.2 Rotační hyperboloid dvojdílný

6.2.1 DALŠÍ VLASTNOSTI, OBRYS

RHD vzniká rotací hyperboly kolem její hlavní osy. Průsečky A, B hyperboloidu s osou o jsou **vrcholy hyperboloidu**. Ohniska E, F tvořící hyperboly leží na ose rotace, jsou tedy společná pro všechny meridiány plochy. Proto lze také RHD definovat jako množinu všech bodů v prostoru, které mají od dvou pevných různých bodů E, F konstantní rozdíl vzdáleností $|AB|$, který je menší než vzdálenost daných bodů E, F . Body E, F se nazývají **ohniska rotačního hyperboloidu dvojdílného**.

Jestliže volíme osu rotace kolmou k půdorysně ${}^1\pi$, pak tato plocha nemá první zdánlivý obrys, půdorysem plochy je celá rovina ${}^1\pi$. Druhý zdánlivý obrys je hlavní meridián, tj. hyperbola (obr.6.1.). Na obr.6.1. je zobrazen RHD v poloprostoru s hraniční rovinou ${}^1\pi$ pro $z \geq 0$ a je nakreslena jeho rovnoběžková kružnice ležící v ${}^1\pi$ a kružnice hrdelní.



Obr.6.1.

6.2.2 ROVINNÉ ŘEZY ROTAČNÍHO HYPERBOLOIDU DVOJDÍLNÉHO

Řez RHD rovinou ρ je:

- prázdná množina, jestliže rovina ρ nemá s hyperboloidem společné body,
- jeden bod T , pak rovina řezu ρ je **tečná rovina hyperboloidu** a bod T je **bod dotyku**,
- kružnice, jestliže rovina řezu ρ je kolmá k ose,
- elipsa,
- parabola,
- hyperbola.

Při konstrukci kuželosečky řezu RHD využíváme následujících tvrzení:

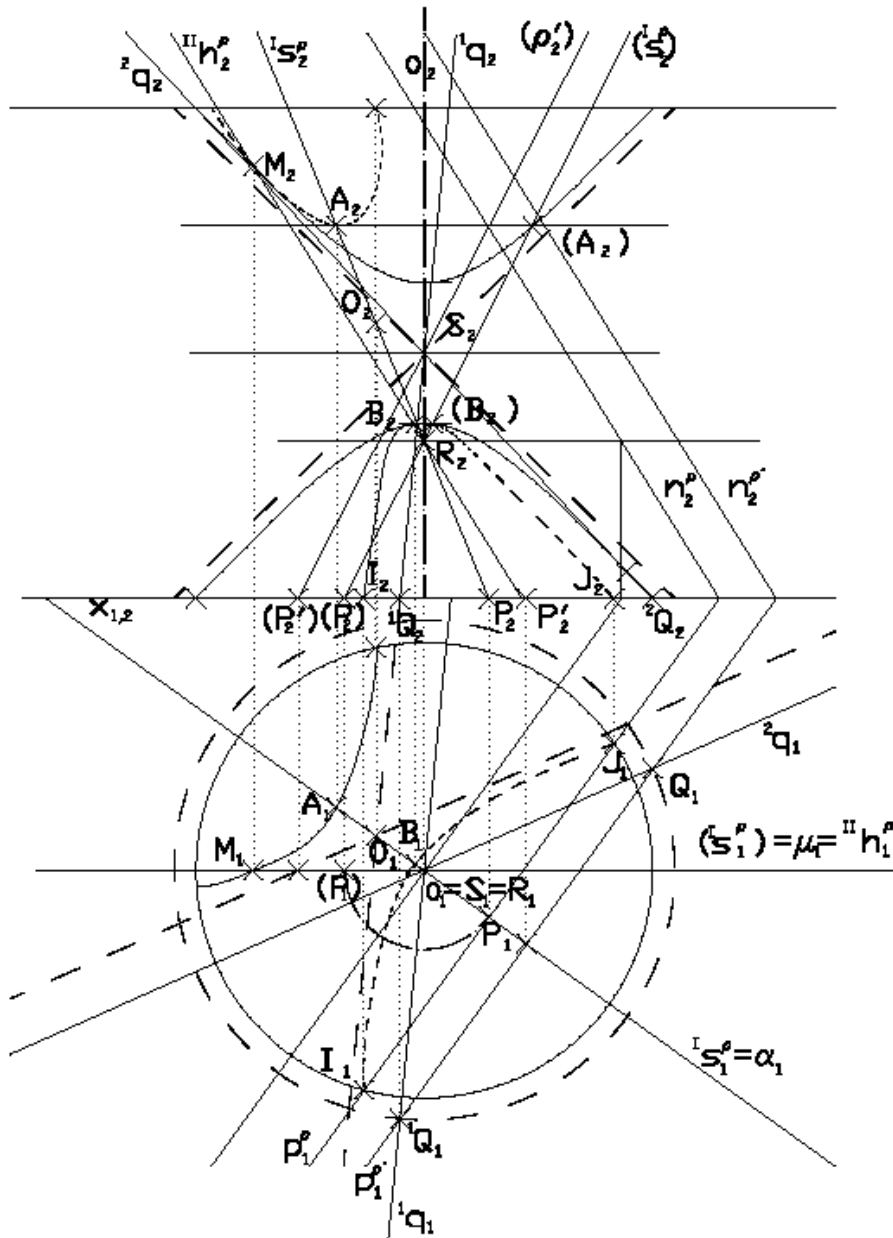
- Protože rotační hyperboloid a asymptotická kuželová plocha mají společné nevlastní body, protíná rovina obě plochy v kuželosečkách stejného druhu. Tedy řezy RHD a asymptotické kuželové plochy touž rovinou jsou dvě kuželosečky stejného druhu.
- Jestliže jsou řezem hyperboly, pak mají stejný střed a společné asymptoty. Asymptoty jsou rovnoběžné s povrchovými přímkami ${}^1q, {}^2q$, v nichž vrcholová rovina $\rho' \parallel \rho$ protíná asymptotickou kuželovou plochu. Asymptoty hyperboly řezu jsou tedy průsečnice roviny řezu ρ s tečnými rovinami asymptotické kuželové plochy podél přímkou ${}^1q, {}^2q$.

- Osa parabolického řezu je rovnoběžná s tvořící přímkou asymptotické kuželové plochy, podél níž se vrcholová rovina $\rho' \parallel \rho$ dotýká asymptotické kuželové plochy.

Příklad: V Mongeově promítání zobrazte hyperbolický řez RHD rovinou ρ . Hyperboloid je určen osou $o \perp \pi_1$ a hlavním meridiánem m (hyperbola).

Řešení (obr.6.2.):

1. Sestrojí se vrcholy A, B řezu, které leží na přímce $s = \alpha \cap \rho$, kde α je rovina procházející osou hyperboloidu kolmo k rovině řezu ρ (viz obr.4.3.).
2. Střed O úsečky AB je střed hyperboly řezu, AB je její hlavní osa. V půdoryse A_1B_1 je hlavní osa půdorysu hyperboly řezu, v náryse A_2B_2 je průměr nárysu hyperboly řezu.
3. Sestrojí se středem S hyperboloidu rovina $\rho' \parallel \rho$.
4. Rovina ρ' protíná asymptotickou kuželovou plochu v různoběžkách ${}^1q, {}^2q$, které jsou rovnoběžné s asymptotami hyperboly řezu.
5. Body řezu na druhém zdánlivém obryse plochy jsou průsečíky plochy a hlavní přímky druhé osnovy roviny ρ , která leží v rovině hlavního meridiánu m (v obr.6.2. popsán bod M).
6. Hyperbola řezu je určena body A, B a asymptotami.
7. Mohou se určit průsečíky I, J půdorysné stopy roviny ρ s rovnoběžkou hyperboloidu ležící v ${}^1\pi$, nebo získat další body hyperboly řezu jako u obecných rotačních ploch.



Obr.6.2.

6.2.3 TEČNÁ ROVINA ROTAČNÍHO HYPERBOLOIDU DVOJDÍLNÉHO

Konstrukce tečné roviny v bodě T (T je různý od vrcholů hyperboloidu) je stejná jako konstrukce tečné roviny rotačního elipsoidu (viz obr.4.4.). Tečné roviny ve vrcholech rotačního hyperboloidu dvojdílného jsou kolmé k ose plochy. Tečná rovina v nevlastním bodě RHD je **asymptotická tečná rovina**. Asymptotická tečná rovina má s RHD společný jediný nevlastní bod a dotýká se asymptotické kuželové plochy.

6.2.4 ANALYTICKÉ VYJÁDŘENÍ

Implicitní rovnice:

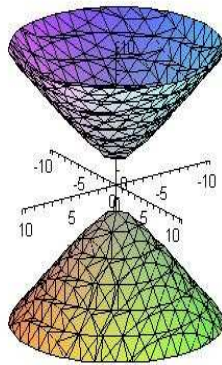
Volíme souřadnicovou soustavu $\{O; x, y, z\}$ tak, aby $O = S, z = o$.

Rovnice rotačního hyperboloidu dvojdílného je ve tvaru $-\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$, kde $a > 0$,

$c > 0$, poloosa c leží na ose rotace a je hlavní poloosou tvořící hyperboly.

Hyperboloid vzniká rotací meridiánu $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, y = 0$ kolem osy rotace $o = z$.

Rovnice asymptotické kuželové plochy je ve tvaru $\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$, kde $a > 0, c > 0$.



$$a = 2$$

$$c = 2$$

Obr.6.3.

Parametrické rovnice:

Jestliže volíme polomeridián plochy jako tvořící křivku danou parametrickými rovnicemi

$x = a \cdot \operatorname{tg} t, y = 0, z = \frac{c}{\cos t}$, kde $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, osa rotace $o = z$, pak parametrické rovnice

rotačního hyperboloidu dvojdílného můžeme psát ve tvaru

$$x = a \cdot \operatorname{tg} t \cdot \cos u$$

$$y = a \cdot \operatorname{tg} t \cdot \sin u,$$

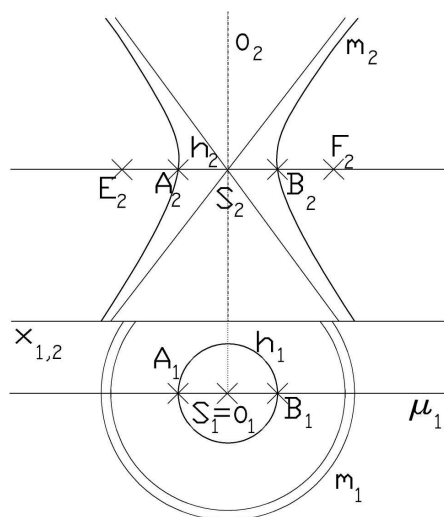
$$z = \frac{c}{\cos t}, \text{ kde } t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), u \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

6.3 Rotační hyperboloid jednodílný

6.3.1 DALŠÍ VLASTNOSTI, OBRYS

RHJ vzniká rotací hyperboly kolem její vedlejší osy.

Na ose rotace body nemá, proto nemá vrcholy. Jestliže volíme osu rotace kolmou k půdorysně ${}^1\pi$, pak prvním zdánlivým obrysem plochy je hrdelní kružnice h , která vznikne rotací vrcholů A, B tvořící hyperboly. Půdorysem plochy je množina všech bodů průmětu hrdelní kružnice a množina všech vnějších bodů průmětu této kružnice. Druhým zdánlivým obrysem je hlavní meridián, tj. hyperbola (obr.6.4.). Na obr.6.4. je zobrazen RHJ v poloprostoru s hraniční rovinou ${}^1\pi$ pro $z \geq 0$ a je nakreslena jeho rovnoběžková kružnice ležící v ${}^1\pi$ a hrdelní kružnice h .



Obr.6.4.

RHJ je jediná regulární rotační kvadratická plocha, která je přímková.

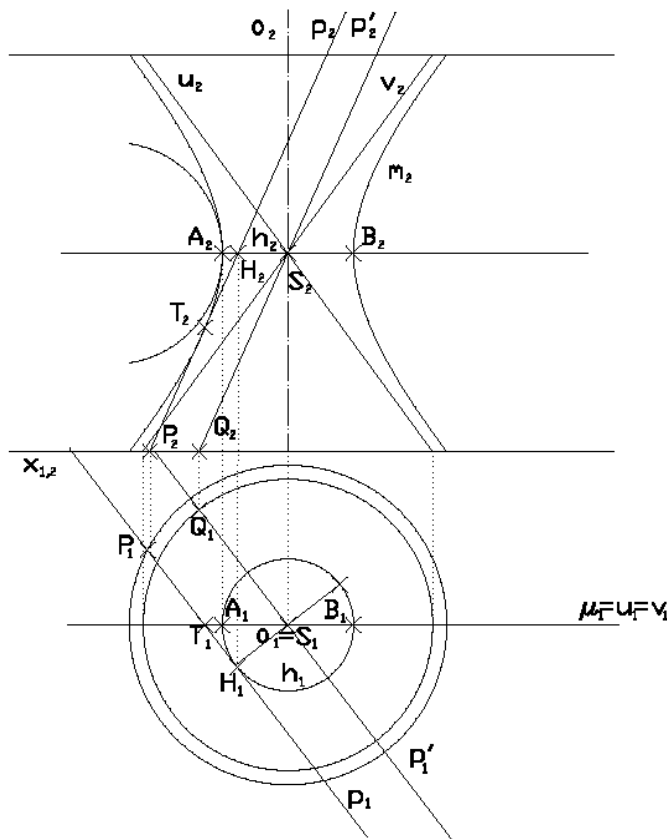
Rotační hyperboloid jednodílný může být vytvořen rotací přímky p kolem osy o , jsou-li obě přímky navzájem mimoběžné, ne však kolmé. Přímka p je **tvořící přímka** plochy.

Příklad: V Mongeově promítání zobrazte hlavní meridián RHJ, který je dán $o \perp {}^1\pi$ a tvořící přímkou p .

Řešení (obr.6.5.):

1. Na tvořící přímce p se určí bod H , který je nejbližší osy o . Rotací bodu H kolem osy o vznikne hrdelní kružnice h se středem S . Bod S je střed hyperboloidu a současně vrchol asymptotické kuželové plochy daného hyperboloidu.

2. Středem S se sestrojí přímka p' rovnoběžná s přímkou p . Její rotací vznikne asymptotická kuželová plocha. Půdorysný stopník Q přímky p' při rotaci vytvoří rovnoběžkovou kružnici asymptotické kuželové plochy, která leží v půdorysně.
3. Druhým zdánlivým obrysem asymptotické kuželové plochy jsou přímky u_2, v_2 , jsou to asymptoty hledaného meridiánu m_2 .
4. Body hrdelní kružnice h , které leží v rovině μ hlavního meridiánu, jsou vrcholy A_2, B_2 meridiánové hyperboly m_2 a její asymptoty u_2, v_2 jsou průsečnice roviny μ a asymptotické kuželové plochy.
5. Na obr.6.5. je sestrojen bod T , v němž se druhý zdánlivý obrys hyperboloidu dotýká nárysu p_2 tvořící přímky p .



Obr.6.5.

Rotací přímky p kolem mimoběžné osy o vznikne soustava nekonečně mnoha přímek, která se nazývá **regulus**. Protože RHJ je souměrný podle každé roviny procházející jeho osou (resp. podle roviny hrdelní kružnice), obsahuje hyperboloid také přímku p' souměrnou

s přímkou p podle roviny libovolného meridiánu (resp. podle roviny hrdelní kružnice). Při rotaci přímky p' se vytvoří druhý regulus, **sdružený** s prvním.

Tedy tvořící přímky RHJ tvoří dvě soustavy přímek: jedna soustava je tvořena množinou přímek vzniklých rotací přímky p , druhá soustava množinou přímek vzniklých rotací přímky p' , která je souměrná s přímkou p podle roviny libovolného meridiánu nebo podle roviny hrdelní kružnice. Tyto soustavy se nazývají **reguly tvořících přímek** rotačního hyperboloidu jednodílného.

Platí následující tvrzení:

- Na RHJ existují dva různé reguly přímek.
- Každé dvě přímky téhož regulu jsou navzájem mimoběžné.
- Každá přímka jednoho regulu protíná všechny přímky druhého regulu (v bodě vlastním nebo nevlastním).

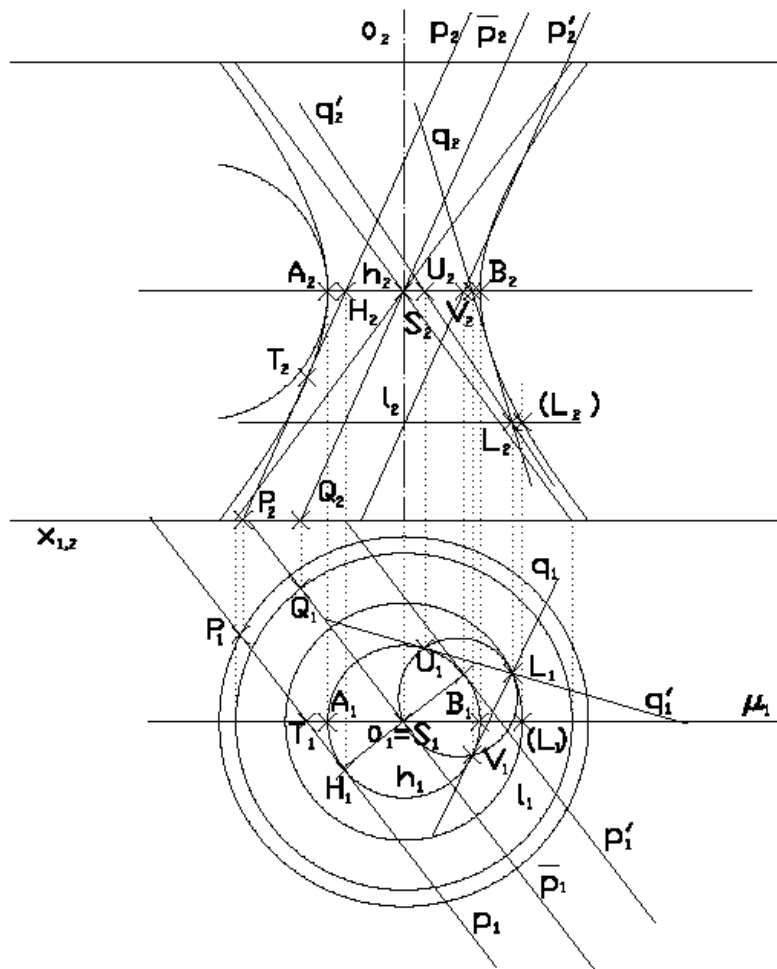
6.3.2 TEČNÁ ROVINA ROTAČNÍHO HYPERBOLOIDU JEDNODÍLNÉHO

Tečnou rovinu v libovolném bodě RHJ lze sestavit jako u každé rotační plochy (viz obr.4.4.). Můžeme ji ale také určit tvořícími přímkami p a p' plochy (přímka p je přímkou jednoho regulu, přímka p' regulu sdruženého), které daným bodem procházejí. Speciálně tečná rovina v nevlastním bodě hyperboloidu, **asymptotická tečná rovina**, je určena přímkami p a p' , které tímto nevlastním bodem procházejí (přímky p a p' jsou rovnoběžné). Asymptotickou tečnou rovinu hyperboloidu v nevlastním bodě jeho dané tvořící přímky p sestojíme tak, že najdeme na hyperboloidu povrchovou přímku p' s ní rovnoběžnou (přímky p , p' jsou souměrné podle roviny meridiánu, která je s přímkou p rovnoběžná), která náleží regulu sdruženému. Pak tečná rovina τ je určena přímkami $p \parallel p'$. Každou tvořící přímkou p hyperboloidu prochází právě jedna asymptotická tečná rovina. Při rotaci přímky p kolem osy o plochy obalí asymptotické tečné roviny hyperboloidu asymptotickou kuželovou plochu. Jednotlivé přímky této kuželové plochy jsou rovnoběžné s příslušnými dvojicemi rovnoběžek $p \parallel p'$ na RHJ. Střed S hyperboloidu je bodem asymptotické tečné roviny.

Příklad: Jednodílný rotační hyperboloid je určen osou $o \perp \pi_l$ a tvořící přímkou p . V Mongeově promítání zobrazte jeho tečnou rovinu v bodě L (bod $L \notin p$ je dán svým prvním průmětem) a asymptotickou tečnou rovinu procházející tvořící přímkou p .

Řešení (obr.6.6.):

1. Bod L je bodem hyperboloidu určeného tvořící přímkou p . K danému půdorysu bodu L se sestrojí nárys pomocí rovnoběžkové kružnice l tímto bodem procházející.
2. Sestrojí se hrdelní kružnice h hyperboloidu (viz obr.6.5.).
3. Tečná rovina hyperboloidu v bodě L je určena přímkami q a q' obou regulů. Jejich půdorysy se dotýkají hrdelní kružnice h v bodech U_1, V_1 , nárysy přímek procházejí body U_2, V_2 .
4. Asymptotická tečná rovina je určena přímkou p a přímkou p' ($p \parallel p'$), jejíž půdorys se dotýká půdorysu hrdelní kružnice h . Nárys přímky p' se dotýká nárysu hlavního meridiánu. Asymptotická tečná rovina se dotýká se asymptotické kuželové plochy podél přímky \bar{p} rovnoběžné s přímkou p . Asymptotickou tečnou rovinu můžeme také určit přímkou p a středem S hyperboloidu.
5. Na obr.6.6. je nakreslen také druhý zdánlivý obrys daného RHJ.



Obr.6.6.

Jestliže bod dotyku T tečné roviny a hyperboloidu se pohybuje po libovolné tvořící přímce p hyperboloidu, pak tečné roviny v bodech téže přímky p tvoří **svazek tečných rovin**. Tedy RHJ je **plocha zborcená**, tzv. **rotační zborcený hyperboloid**. Přímka p je regulární přímka plochy.

6.3.3 ROVINNÉ ŘEZY ROTAČNÍHO HYPERBOLOIDU JEDNODÍLNÉHO

Řez RHD rovinou ρ je:

- dvojice různých přímek s vlastním (resp. nevlastním) průsečíkem T , pak rovina řezu je **tečná rovina** (resp. **asymptotická tečná rovina**) **hyperboloidu** a bod T je **bod dotyku** (vlastní nebo nevlastní),
- kružnice, rovina řezu je kolmá k ose,
- elipsa,
- parabola,
- hyperbola.

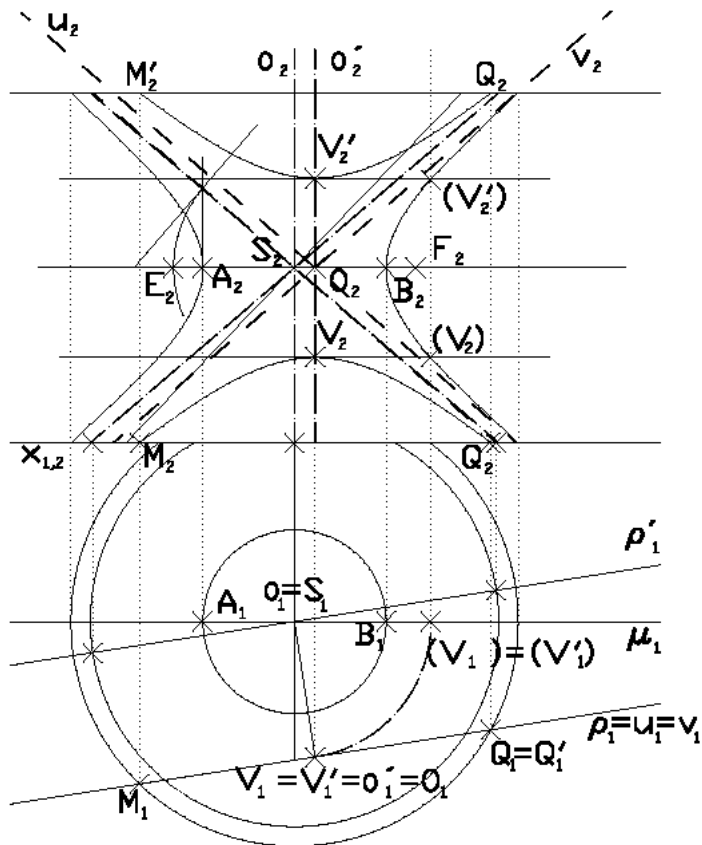
Při konstrukci kuželosečky řezu RHJ využíváme stejná tvrzení jako u RHD (viz kap.6.2.2).

Typ kuželosečky řezu určíme podle stejné věty jako u RHD.

Příklad: V Mongeově promítání zobrazte hyperbolický řez RHJ rovinou $\rho \perp {}^l\pi$. Hyperboloid je určen osou $o \perp {}^l\pi$ a hlavním meridiánem m (hyperbola).

Řešení (obr.6.7.):

- Asymptoty u, v hyperboly řezu jsou rovnoběžné s tvořícími přímkami asymptotické kuželové plochy, v nichž vrcholová rovina $\rho' \parallel \rho$ protíná asymptotickou kuželovou plochu.
- Vrcholy řezu V, V' se sestrojí stejně jako u řezu dvojdílného hyperboloidu (obr.6.2.), střed O úsečky VV' je střed hyperboly řezu, přímka o' je hlavní osa hyperboly řezu.
- Půdorysem hyperbolického řezu je úsečka M_1Q_1 ($\rho \perp {}^l\pi$).
- Nárysem hyperbolického řezu je hyperbola určená hlavními vrcholy V_2, V'_2 a asymptotami u_2, v_2 .



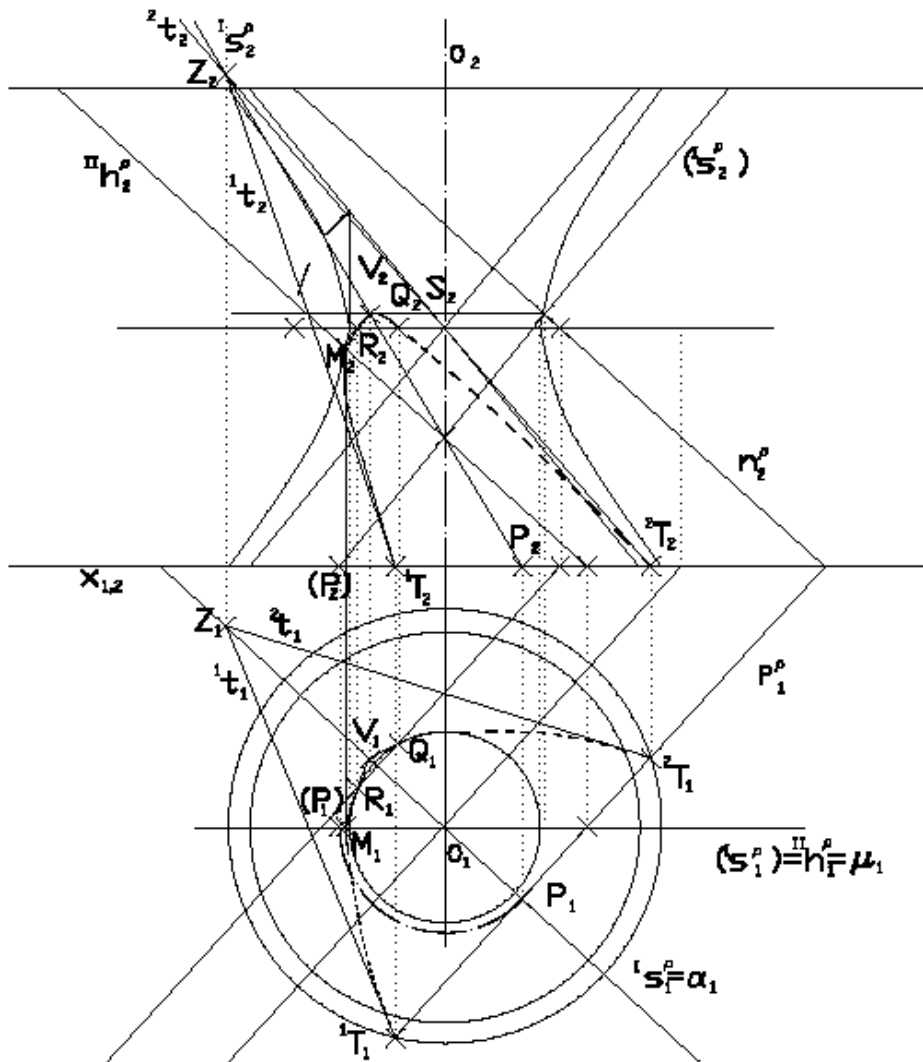
Obr.6.7.

Příklad: V Mongeově promítání zobrazte parabolický řez RHJ rovinou ρ . Hyperboloid je určen osou $o \perp \pi_l$ a hlavním meridiánem m (hyperbola).

Řešení (obr.6.8.):

1. Sestrojí se vrchol V parabolického řezu. Leží na přímce $s = \alpha \cap \rho$, kde α je rovina procházející osou hyperboloidu kolmo k rovině řezu ρ ($s = {}^l s^\rho$).
2. Dva body řezu ${}^1T, {}^2T$ jsou průsečíky rovnoběžkové kružnice hyperboloidu ležící v půdorysně a půdorysné stopy roviny řezu.
3. Půdorys paraboly řezu je určen vrcholem V_l , půdorysem osy paraboly řezu ${}^l s_1^\rho$ a dvěma body ${}^1T_l, {}^2T_l$. Užitím věty o subtangentě paraboly se sestrojí tečny ${}^1t_l, {}^2t_l$ paraboly řezu v bodech ${}^1T_l, {}^2T_l$ a pomocí věty o subnormále paraboly se určí parametr půdorysné paraboly.
4. Nárys paraboly řezu je určen dvěma tečnami ${}^1t_2, {}^2t_2$ s body dotyku ${}^1T_2, {}^2T_2$. Parabola se sestrojí pomocí lichoběžníkové konstrukce.

5. Na obr.6.8. jsou určeny také body řezu R , Q ležící na hrdelní kružnici a bod M , v němž se druhý zdánlivý obrys dotýká nárysu paraboly řezu.



Obr.6.8.

6.3.4 ANALYTICKÉ VYJÁDŘENÍ

Implicitní rovnice:

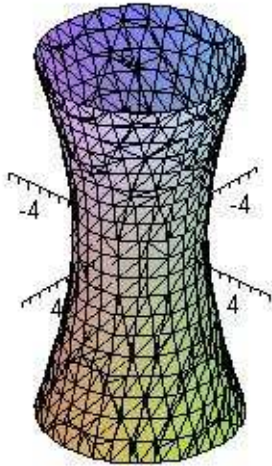
Volíme souřadnicovou soustavu $\{O; x, y, z\}$ tak, aby $O = S$, $z = o$.

Rovnice rotačního hyperboloidu jednodílného je ve tvaru $\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$, kde $a > 0$,

$c > 0$, poloosa a je hlavní poloosa tvořící hyperboly, poloosa c leží na ose rotace a je vedlejší poloosou tvořící hyperboly.

Hyperboloid vzniká rotací meridiánu $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, $y = 0$ kolem osy rotace $o = z$.

Rovnice asymptotické kuželové plochy je ve tvaru $\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$, kde $a > 0$, $c > 0$.



$$a = 2$$

$$c = 5$$

Obr.6.9.

Parametrické rovnice:

Jestliže volíme polomeridián plochy jako tvořící křivku danou parametrickými rovnicemi

$x = \frac{a}{\cos t}$, $y = 0$, $z = c \cdot \operatorname{tg} t$, kde $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, osa rotace $o = z$, pak parametrické rovnice

rotačního hyperboloidu jednodílného můžeme psát ve tvaru

$$x = a \frac{\cos u}{\cos t}$$

$$y = a \frac{\sin u}{\cos t}$$

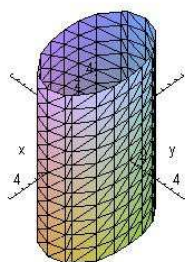
$$z = c \cdot \operatorname{tg} t, \text{ kde } t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), u \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

III. NEROTAČNÍ KVADRATICKÉ PLOCHY

Pravoúhlo souřadnicovou soustavu $\{O; x, y, z\}$ volíme tak, aby osy x, y, z splývaly s osami plochy, u středových kvadrik $O = S$, vrchol paraboloidů $O = V$. Předpokládáme, že $a > 0$, $b > 0, c > 0, p > 0, q > 0$.

- **ELIPTICKÁ VÁLCOVÁ PLOCHA** (obr.1.)

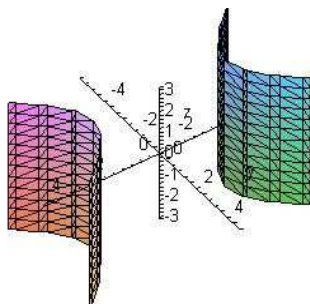
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \text{ pro } a = 3, b = 2:$$



Obr.1.

- **HYPERBOLICKÁ VÁLCOVÁ PLOCHA** (obr.2.)

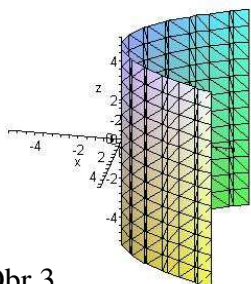
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \text{ pro } a = 3, b = 2:$$



Obr.2.

- **PARABOLICKÁ VÁLCOVÁ PLOCHA** (obr.3.)

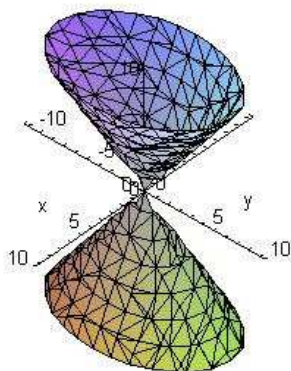
$$x^2 - 2py = 0, \text{ pro } p = 2:$$



Obr.3.

- **ELIPTICKÁ KUŽELOVÁ PLOCHA**

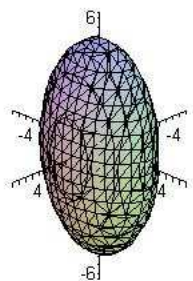
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \text{ pro } a = 2, b = 3, c = 5:$$



Obr.4.

- **TROJOSÝ ELIPSOID** (obr.5.)

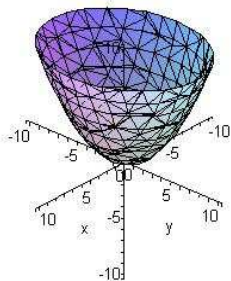
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0, \text{ pro } a = 2, b = 5, c = 3:$$



Obr.5.

- **ELIPTICKÝ PARABOLOID** (obr.6.)

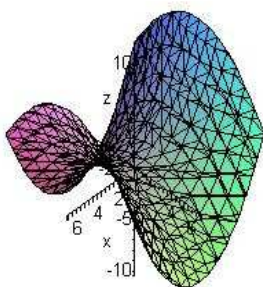
$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} - 2z = 0, \text{ pro } p=2, q=3:$$



Obr.6.

- **HYPERBOLICKÝ PARABOLOID** (obr.7)

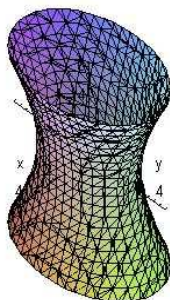
$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} - 2z = 0, \text{ pro } p=2, q=3:$$



Obr.7.

- **TROJOSÝ HYPERBOLOID JEDNODÍLNÝ** (obr.8.)

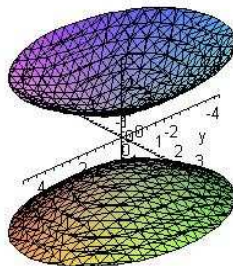
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{c^2} - \frac{z^2}{b^2} - 1 = 0, \text{ pro } a=2, b=5, c=3:$$



Obr.8.

- **TROJOSÝ HYPERBOLOID DVOJDÍLNÝ** (obr.9.)

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2} + \frac{z^2}{b^2} - 1 = 0, \text{ pro } a = 2, b = \sqrt{2}, c = \sqrt{1,5} :$$

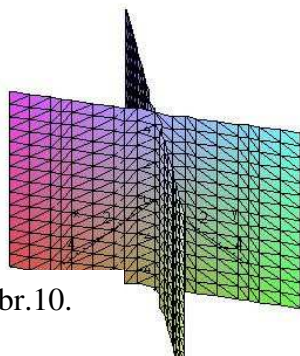


Obr.9.

- **DVĚ RŮZNOBĚŽNÉ ROVINY** (obr.10.)

Průsečnicí rovin je osa z.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0, \text{ pro } a = 2, b = 3:$$

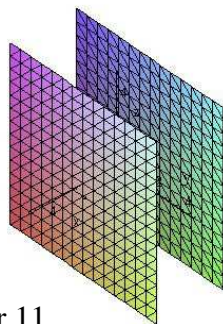


Obr.10.

- **DVĚ ROVNOBĚŽNÉ ROVINY** (obr.11.)

Roviny jsou rovnoběžné s rovinou (y,z).

$$x^2 - a^2 = 0, \text{ pro } a = 2:$$

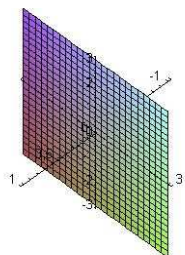


Obr.11.

- **JEDNA ROVINA** (obr.12.)

Rovina je dvojnásobná a je rovinou (y,z).

$$x^2 = 0$$



Obr.12.

- **JEDEN BOD O[0,0,0]**

Bod je počátek souřadnicové soustavy.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$$

- **JEDNA PŘÍMKA**

Přímka je osa z.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$$

IV. UŽITÍ ROTAČNÍCH PLOCH

V této kapitole si ukážeme využití rotačních kvadratických ploch v praxi.

Obecně se dá říci, že rotační kvadratické plochy využívají téměř všechna odvětví průmyslu.

Využití si můžeme všimnout zejména ve stavebním a strojním průmyslu, kde užití je nejnámější. Rotací kolem své osy rotační plocha přechází v sama sebe a této vlastnosti se hojně využívá ve strojní praxi.

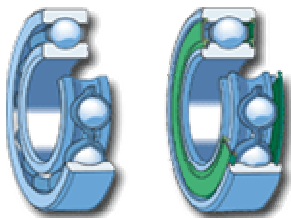
Kulová plocha



Kinosál v Paříži Deoda



Opera v Sydney-část kulové plochy



Kuličková ložiska

Válcová plocha



Válcové potrubí



Okurka



Hřídel

Budova společnosti Swiss Re v Londýně, tzv. 'nakládaná okurka', má plášť budovy ve tvaru rotační plochy, který vznikl pootočením sousedních pater (celkem 41 pater) vždy o 5° po směru hodinových ručiček, a vytvořil charakteristickou spirálovitou strukturu.

Kuželová plocha



Kuželová soukolí

Rotační elipsoidy

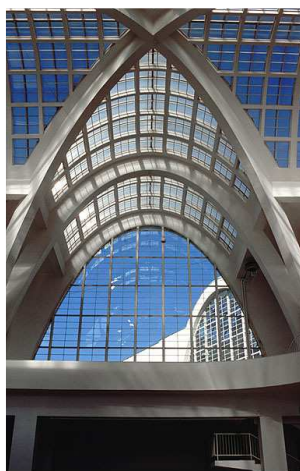


The Infosys Elipsoid Pune

Rotační paraboloid a parabolické válcové plochy



Satelitní anténa



Pavilon A BVV

Příklad použití několika parabolických válcových ploch a jejich průniků je pavilon A na brněnském výstavišti.

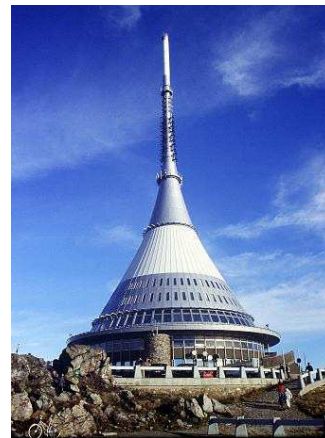
Rozhodnutím o výstavbě brněnského výstaviště získalo Brno největší moderní výstaviště v předválečném Československu o rozloze 360000 m² pod vedením architekta Emila Králíka. Výstavba začala 8. února 1927. Celá konstrukce pavilonu se prováděla klasickým bedněním do parabolických oblouků při minimální mechanizaci.

Rotační hyperboloidy

Plocha rotačního jednodílného hyperboloidu je pro chladicí věž vhodnější než plocha válcová. Má větší obsah povrchu, a proto se kapalina rychleji ochlazuje.



Chladicí věže - RHH



Ještěd



Hyperbolické převody

Hotel a televizní vysílač na vrcholu Ještědu je také stavba využívající rotační plochy, ale nejedná se o rotační hyperboloid (hyperbola rotuje kolem své asymptoty a ne kolem své osy). Tvar hyperboloidu byl zvolen kvůli panujícím povětrnostním podmínkám na vrcholu hor. Díky tomuto tvaru hotel dokonale navazuje na svahy hor a opticky horu dokončuje. Její

nosnou konstrukcí je dvojice železobetonových soustředných válců zakotvených v základové desce uložené v křemencovém podloží.

Uvnitř sloupů se nacházejí schodiště a výtahy, na sloupech jsou ukotveny ocelové konstrukce jednotlivých podlaží.

Ve strojírenské praxi se používají hyperbolické převody. Používají se jednodílné rotační hyperboloidy k převodu rotačních pohybů okolo dvou mimoběžných os.

ZÁVĚR

Cílem mé bakalářské práce bylo sestavit přehled o rotačních kvadratických plochách, který by měl přispět k lepšímu pochopení dané problematiky a k rozšíření učiva, které se na VUT FSI neprobírá. Byla bych ráda, kdyby tento materiál sloužil jako studijní opora studentům pro předmět Konstruktivní a počítačové geometrie.

Toto téma mě zaujalo a práce na tomto tématu mě bavila. Obohatila mě zejména po technické stránce, obrázky byly tvořeny v programu AutoCad, modelování ploch v programu Maple.

Na závěr bych chtěla podotknout, že i přes upadající zájem o deskriptivní geometrii, je uplatnění tohoto oboru stále velké. Je nezbytný pro inženýry, jednak při kreslení náčrtů tužkou nebo při tvorbě modelu na počítači.

LITERATURA

- [1] Borecká K., Chvalinová L., Lovečková M., Šmídová-Roušarová V.: *Konstruktivní geometrie*, Vysoké učení technické v Brně, 2006
- [2] Harant M., Lanta O., Menšík M., Urban A.: *Deskriptivní geometrie pro II. a III. ročník SVVŠ*, Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1965
- [3] Karásek J., Skula L.: *Lineární algebra, Teoretická část*, Vysoké učení technické v Brně, 2005
- [4] Kopřivová H.: *Deskriptivní geometrie I*, Vydavatelství ČVUT, 1997
- [5] Kopřivová H.: *Deskriptivní geometrie II*, Vydavatelství ČVUT, 1997
- [6] Obůrka O. a kolektiv: *Analytická geometrie křivek a ploch*, Rektorát Vysokého učení technického v Brně, 1974
- [7] Rektorys, K. *Přehled užité matematiky*, Praha: SNTL, 1968
- [8] Urban, A.: *Deskriptivní geometrie II*, Praha: SNTL, 1967

Internetové stránky

- [9] <http://www.celysvet.cz/aplikace.php>
- [10] <http://mdg.vsb.cz/jdolezal/DgFAST/Realizace/RotacniPlochy/RotacniPlochy.html>
- [11] <http://www.ceps-as.cz/rehabilitace-cz.html>
- [12] http://www.indiadesignfestival.org/Dhananjay_Dake.html
- [13] <http://www.tvujdum.cz/dum-stavba/architektura/architektura-brnenskeho-vystaviste.aspx>
- [14] <http://www.zubalik.prodej.net/>
- [15] <http://www.ozubeni.cz/ozubeni/kuzel.html>
- [16] http://www.moto-prodejna.cz/index.php/cPath/46_67
- [17] http://deskriptiva.webzdarma.cz/studimatr/rotacni_kvadriky.pdf
- [18] <http://home.zcu.cz/~rvyru/WWW-KMA/GS2/Prednasky/Kvadriky.pdf>
- [19] <http://www.acmcf.org.tw/model/page/model/ntut/F02.htm>