Modelovanie marketingových stratégií a softwarové nástroje riešenia funkcionálnych diferenciálnych rovníc

Miroslav Dzimko

Abstrakt

V ekonomických aplikáciách matematických modelov sa často stretávame s predpokladom existencie vzťahov medzi premennými veličinami, ktoré sa menia v čase. Jednou z možností, ako sa s takýmito premennými vysporiadať, je zaradenie ich dynamickej zmeny do popisu matematického modelu použitím diferenciálnych funkcií a nadväzujúcim konkrétnym riešením týchto funkcií numerickými metódami.

Študovaním riešených rovníc pomocou moderných matematických metód a modernými teóriami vyššej matematiky dostaneme teoretické východiská logických modelov, ktoré sa premenia na modely matematické.

Abstract

In economic applications of mathematical models, we often encounter the assumption of relationships between variables that change over time. One way to deal with such variables is to include their dynamic change into the description of the mathematical model using differential functions and following a specific solution to these functions by numerical methods.

By studying the equations solved using modern mathematical methods and modern theories of higher mathematics we obtain the theoretical basis of logical models that will be transformed into mathematical models.

Úvod

Marketing je v dnešnom svete všadeprítomnou súčasťou ľudského života. Komunikačné médiá ovládajú veľkou silou spotrebné správanie sa ľudí. Možno povedať, že existuje presýtený trh s informáciami a reklamami a inými marketingovými akciami.

Článok pojednáva o používaní matematických modelov pri riešení problémov v ekonomickej sfére, pričom sa kladie dôraz na význam týchto metód ako nástrojov pre marketingové využitie. Spojením matematických metód a ekonomických aplikácií vzniká silný nástroj pre podniky v oblasti marketingu.

Matematické modelovanie, podľa B. Barnese a G. Fulforda [1] a V. Capasso a D. Baksteina [2] je dnes na rôznych úrovniach súčasťou prírodných, technických, ekonomických a sociálnych vied. Stalo sa dôležitým nástrojom pri modelovaní a simuláciách systémov, analýzach a predvídaní rôznych procesov, prejavov, správania druhov a stavov. Vytvárané matematické modely umožňujú zrozumiteľný popis všetkých relevantných faktorov daného stavu a umožňujú odhaliť podstatné vzťahy medzi prvkami študovaného systému [3]. Paul Romer [4] však poukazuje na to, že mainstreamová ekonomika pracuje s defektnými postupmi, ktoré hľadajú príčiny ekonomickej stability mimo systém a považuje ich za stratu času.

Ekonómia a marketing

V ekonomických procesoch a v marketingu je badateľná intenzívna zmena v závislosti od času a spoločenských vzťahov. V prostredí internom aj externom dochádza k zmenám a modifikáciám parametrických ukazovateľov makroekonomiky, menia sa ceny, počty zákazníkov atď. Na skúmanie nastávajúcich zmien slúži viacero nástrojov, od ekonometrických charakteristík, regresných modelov, rôznych analýz časových radov až po dynamické modely a diferenciálne rovnice. Samozrejme diferenciálne rovnice nehovoria o presnom zozbieraní údajov a ich následnej analýze a tvorbe modelov, je to viac v teoretickej rovine, avšak výsledky sú aplikovateľné do praxe [12]. Predstavme si situáciu, že sa na základe jedného signifikantného parametra s vplyvom na riadenie firmy v oblasti marketingu firmy zmení základ jej pôsobenia na trhu. Táto zmena zasiahne priamo alebo sprostredkovane aj iné firmy a tým sa následne mení aj počet zákazníkov ostatných firiem. Takáto zmena skoková alebo kontinuálna sa dá zapísať do dynamického systému diferenciálnych rovníc. Riešením systému dokážeme vypočítať alebo určiť, ako a kedy sa najviac oplatí danej spoločnosti na trhu pôsobiť. Základom takéhoto výpočtu je spoľahlivé určenie stability zvoleného a vymodelovaného systému a definovanie všetkých prípadných možných zmien stability (bifurkácie) v závislosti od určitého parametru, výšku ktorého môže organizácia ovplyvňovať**.**

Antonyová [12] ďalej uvádza: „pri skúmaní ekonomických javov sa ekonometrická analýza využíva na kvantifikáciu a verifikáciu v mnohých oblastiach, akými sú napríklad: určenie funkcie spotrebnej alebo investičnej, určenie funkcie dopytu po peniazoch, vzťahy produkčné alebo nákladové v rámci firmy a dopytu a spotreby v rámci domácností. Je zrejmé, že kvantitatívna analýza skúmaného ekonomického javu nie je samoúčelná. Neslúži len na poznávanie vývoja v období, za ktoré sú dáta známe, čiže tzv. aplikácia ex post, ale predovšetkým sleduje úsilie o prognózu budúcich hodnôt premenných, čiže o tzv. aplikáciu modelu „ex ante“. Takto simulácia na overovanie reálnosti modelových výsledkov slúži na predikciu, ktorá by mala viesť ku správnemu rozhodovaniu v oblasti riadenia hospodárstva a ku ekonomickej stabilite.“

Keď sa budeme venovať analýze a skúmaniu ekonomických procesov a javov, je prirodzený postup taký, že je použitá jedna dominantná ekonomická teória. Od nej sa odvíja predbežná hypotéza definujúca reálny systém s minimálnymi obmedzujúcimi alebo zjednodušujúcimi predpokladmi. Pri vlastnej tvorbe modelu systému musíme vyriešiť problém, ako najlepšie skúmaný jav popísať, určiť teda vonkajšie a vnútorné parametre vlastností a prípadné väzby javu navzájom dovnútra systému a na jeho okolie. Tieto parametre sú charakteristikou a umožňujú simplifikáciu aktuálneho modelu. Nebezpečím je možné skomplikovanie procesov a tým ich aj náročnejšie matematické popísania a následné riešenie – výpočet.

Opäť podľa Antonyovej [12] je možné postupovať uvedeným spôsobom:

- v prvom rade špecifikujeme premenné, ktorými budeme modelovaný jav charakterizovať,
- premenné sa zatriedia medzi tie, ktoré do reálneho systému, teda aj do modelu vstupujú zvonka (exogénne premenné), a tie, ktorých hodnoty generuje vlastný reálny systém (endogénne premenné), a teda ich hodnoty sa môžu vypočítať riešením sústavy rovníc charakterizujúcich konkrétny model,
- špecifikujú sa funkčné tvary jednotlivých rovníc a aj dynamická štruktúra modelu, čiže časové posuny medzi hodnotami premenných v jednotlivých rovniciach,
- vytvorený model sa považuje za hypotézu až do otestovania prostredníctvom konkrétnych empirických dát získaných v reálnom priebehu daného vzťahu v čase,
- ak je model správne vytvorený, určí sa pravdepodobná prognóza budúceho vývoja daného javu za daných podmienok, pričom sa prihliada na možné stochastické vplyvy.

Matematické modelovanie

Matematické modelovanie pri prognostike v rámci skúmania javov z oblasti ekonómie a ekonometrie je charakteristické tým, že využíva ekonomickú teóriu a vo svojich vzťahoch je založené na empirických dátach. Podľa viacerých autorov [7-26] možno uviesť nasledujúce definície charakteristiky procesov a parametrov.

Bifurkácie

Vlastnosti dynamických systémov závisia od rôznych parametrov, ako sú napríklad teplota a tlak pri chemickej reakcii [22], [23]. Hodnoty parametrov, pri ktorých sa kvalitatívne menia vlastnosti dynamického systému (napríklad počet stacionárnych riešení, zmena stability alebo prechod od jediného stacionárneho riešenia ku limitnému cyklu), sa nazývajú´ bifurkačné.

V matematickej analýze a v teórii systémov diferenciálnych rovníc je bifurkácia jav, ktorý hovorí to, že malá zmena parametra môže zásadne zmeniť dlhodobé správanie systému.

Globálne bifurkácie

Pri takejto bifurkácii sa mení stabilita systému v dôsledku viacerých faktorov, takéto bifurkácie sa dajú analyzovať iba pomocou stability stacionárnych bodov.

Lokálne bifurkácie

Lokálna bifurkácia je zmena stability stacionárneho bodu, periodického cyklu alebo invariantnej množiny vyvolaná malou zmenou parametra systému, avšak môže nastať aj zmenou viacerých parametrov a prejavuje sa zmenou topológie systému na určitom okolí stacionárneho bodu.

Hopfova bifurkácia

Hopfova bifurkácia sa stala často používaným nástrojom pri štúdiu nelineárnych dynamických ekonomických systémov. Dá sa aplikovať na systém, ktorý má prinajmenšom dve dimenzie a má komplexné vlastné hodnoty Jakobyho matice v stacionárnom alebo inak povedané v rovnovážnom stave. Ak Hopfova veta dokáže existenciu uzavretých cyklov, nedá nám to samotnú informáciu o ich počte alebo stabilite. Prihliadnuc na stabilitu, cyklus môže byť buď stabilný (vtedy je stacionárny bod atraktor) alebo nestabilný (stacionárny bod je repelor).

Sú dva prípady Hopfovej bifurkácie:

- subkritický prípad – vzniká nestabilný limitný cyklus,
- superkritický prípad – vzniká stabilný limitný cyklus.

Oba prípady sa vhodne dajú interpretovať aj v ekonomických modeloch. Napríklad v superkritickom prípade môžeme vidieť stabilný limitný cyklus ako štylizované podnikanie alebo rastový cyklus. Na druhej strane, subkritický prípad zodpovedá napríklad konceptu koridorovej stability, definovanému podľa Leidjonhuvuda a Hewitta. Nestabilné orbity subkritického prípadu obklopujú oblasť stability, v ktorom všetky orbity konvergujú k stacionárnemu bodu, pri superkritickom prípade je to opačne, stabilné orbity konvergujú k oblasti nestabilných orbitov obklopujúcich stacionárny bod. Na určenie stability a toho, či nastáva superkritický alebo subkritický prípad, sa používa nelineárna časť systému a prvý Ľjapunov koeficient stability, ktorý môže byť vyrátaný na určenie vlastností stability limitných cyklov. Pre zjednodušenie rátania stability a frekvencie limitných cyklov sa často používa pri Hopfovej bifurkácii transformácia do polárnych súradníc. Táto procedúra dovoľuje určiť jednoznačnosť cyklického riešenia a aproximáciu amplitúdy a frekvencie cyklu.

Klasifikácia matematických modelov

Podľa toho, či zahŕňame do modelu náhodné veličiny, možno modely rozdeliť do dvoch skupín: deterministické a stochastické modely.

Deterministické modely sú odvodzované na základe analýzy a matematického popisu skutočnej podstaty deja.

Stochastické modely predpokladajú, že modelovaný systém je "čierna skrinka" s definovanými vstupmi a výstupmi.

Ďalej možno tieto skupiny rozdeliť podľa vzťahu k priebehu času (dynamické, statické) alebo spojitosti (spojité, diskrétne). Matematické modely sú zvyčajne zložené z premenných, ktoré sú abstrakciou hľadaných zložiek systému a operátorov nad týmito premennými, ktoré môžu reprezentovať algebrické operácie, funkcie, funkcionály, diferenciálne operátory, atď.

Ak sú operátory v matematickom modeli lineárne, hovoríme o lineárnych modeloch, v opačnom prípade o nelineárnych modeloch.

V oblastiach prírodných a fyzikálnych vied, technike, ekonómii, manažmentu, marketingu, sociálnych a spoločenských vedách sa používa veľké množstvo rôznych typov matematických modelov, ktoré môžeme klasifikovať podľa rôznych hľadísk. Najvšeobecnejšej klasifikácie delí matematické modely do dvoch skupín:

Modely deskriptívne

Slúžia na zobrazenie prvkov a vzťahov v systéme a na analýzu základných vlastností systému. Pomocou týchto typov modelov sa odvodzujú ďalšie vlastnosti systému, určuje sa jeho rovnovážny stav, stabilné stavy, vplyv zmien vo vnútri aj vo vonkajšom okolí systému na jeho správanie. Príklady: sústava diferenciálnych rovníc modelujúca procesy zrodu a úmrtia, simulačný model modelujúci výskyt škodcov porastu, rovnice ponuky a dopytu v konkurenčnom prostredí, ekonometrický medziodvetvový model "Input-Output", atď.

Modely normatívne

Slúžia na analýzu a riadenie systému tak, aby bol splnený ~~nejaký~~ určitý cieľ alebo množina cieľov. Normatívne modely, ktorých cieľom je nájdenie optimálneho riešenia, sa nazývajú optimalizačné modely. Modely deskriptívne aj normatívne sú ďalej delené podľa typu systému, na ktorého modelovanie slúžia, alebo podľa typu matematických zložiek (premenné, štruktúry, riešenie), ktoré obsahujú.

Modely statické

Model zobrazuje a analyzuje systém bez zreteľa na jeho časový vývoj. Zobrazenie sa týka spravidla určitého časového intervalu (týždeň, mesiac, rok, a pod.).

Modely dynamické

Model zobrazuje a analyzuje systém v priebehu času. Zobrazenie môže byť typu "ex post" alebo "ex ante" a môže rešpektovať krátky či dlhší časový horizont. Podrobnejšie viď [3].

Vytváranie matematických modelov

Stav procesu je charakterizovaný hodnotami stavových veličín, ktoré ho popisujú. Matematickým modelom procesu alebo zariadenia rozumieme matematické vzťahy medzi týmito veličinami, najčastejšie v závislosti na čase [9]. Hovoríme potom o tzv. dynamike procesu. Matematickými vzťahmi sú najčastejšie diferenciálne rovnice (obyčajné i parciálne) alebo ich sústavy, ale aj nelineárne rovnice a ich sústavy, sústavy lineárnych rovníc a pod.

R-language, Matlab, Maple

R-language

Programovací systém R-language (alebo R-project) slúži na použitie variantu jazyka S / S plus s podrobnou dokumentáciou. R je jazykové a softvérové prostredie pre štatistické výpočty a grafiku. R poskytuje širokú škálu štatistických a grafických techník, pričom je vysoko prispôsobiteľný. R je voľne dostupný pod licenciou GNU. Samostatný jazyk R neposkytuje žiadne metódy na riešenie diferenciálnych rovníc. Napriek tomu existuje balíček s názvom „odosolve," ktorý je možné stiahnuť a nainštalovať na rozšírenie jazyka. Môže sa to urobiť priamo z hlavného menu softvérového prostredia. Tento balík obsahuje dve numerické metódy: „fourth-order" metóda RK a metóda Isode, ktorá je analogická metóde Idsode v prostredí Maple.

Matlab

Matlab je jazyk na vysokej úrovni pre technické výpočty a interaktívne prostredie pre vývoj algoritmov, vizualizáciu dát, ich analýzu a numerické výpočty.

Programovací jazyk Matlab umožňuje rýchlejšie riešenie problémov s technickými výpočtami, ako väčšina bežných jazykov ako C, C ++ alebo FORTRAN. Program Matlab má vo svojich knižniciach mnoho funkcií, ktoré sú vhodné na výpočet rôznych typov rovníc. DDE nie sú výnimkou - napríklad máme funkciu dde23. Veľkou výhodou použitia programu Matlab je okamžité nakreslenie rovnicového riešenia vo forme grafu.

"Prístup k riešeniu DDE využíva skutočnosť, že úloha má veľa spoločného s riešením obyčajných diferenciálnych rovníc (ODE). DDE riešiteľ dde23 je úzko spätý s ODE solverom ode23 z MATLAB ODE Suite"[6].

Maple

Počítačový systém Maple od spoločnosti Maplesoft, bol vyvinutý pred tridsiatimi rokmi a stále poskytuje solídny základ pre zlepšenie a rozvíjanie jeho využitia v oblasti komunikácie, dokumentácie a služieb vo vzdelávacom procese [7][8]. Maple je vedúci viacúčelový matematický softvérový nástroj. Poskytuje pokročilé vysokovýkonné matematické jadro s plne integrovaným číselným a symbolickým znakom, ktorý je prístupný z prostredia dokumentov WYSIWYG. [21]

Nepochybnou výhodou Maple je to, že dokáže nielen analytické operácie s receptami, ale môže fungovať adekvátne aj pri numerických výpočtoch a prípadnom grafickom zobrazovaní výsledkov. To z neho robí systém, ktorý vytvára atraktívne užívateľské prostredie, ako aj veľmi širokú paletu možností používania kvantitatívnych metód pre praktické nasadenie, aplikačné úlohy a vedecké výpočty pre mnohé oblasti atď.

Záver

Pri štúdiu moderných matematických modelov a ich uplatnení v ekonomike a predovšetkým v oblasti marketingu je zrejmé, že tvorba zodpovedajúceho matematického modelu nie je jednoduchá záležitosť. Vyžaduje dôkladne si ujasniť podstatu a mechanizmus študovaného deja, pretože každý proces marketingového výskumu sa vyznačuje množstvom osobitostí , ktoré vyplývajú z povahy riešených problémov. Reakcia trhu je oneskorená, reaguje s istým časovým odstupom na zmenu vyplývajúcu z modelových výstupov. Procesy v marketingu sú často považované za zložitejšie a komplexnejšie ako procesy vo financiách. Hlavný ekonóm britskej centrálnej banky Andrew Haldane [5] upozorňuje, že modely používané v súčasnosti sú nielen nedostatočne komplexné, ale navyše pracujú s tým, že ľudia sa vždy správajú racionálne, čo samozrejme nezodpovedá skutočnosti.

Acknowledgment

Za podporu pri príprave tohto článku autor ďakuje pracovníkom Ústavu informatiky, Fakulty podnikatelské VUT Brno, doc. RNDr. Bedřichovi Půžovi, CSc. a Mgr. Veronike Novotnej. Ph.D.

Príspevok je výstupom projektu špecifického výskumu: „Podnikání v éře Průmyslu 4.0“ Interní grantové agentury Vysokého učení technického v Brně s registračním číslem FP-S-17-4634.

References

[1] *B. Barnes a G. Fulford.* Mathematical Modelling with Case Studies: A Differential Equation Approach Using Maple. *T&F STM, 2002.*

[2] *V. Capasso a D. Bakstein.* An Introduction to Continuous-Time Stochastic Processes Theory, Models, and Applications to Finance, Biology, and Medicine. *New York: Springer, 2005.*

[3] *J. Hřebíček, M. Škrdla*, Úvod do matematického modelování , 2006 https://is.muni.cz/el/1431/podzim2007/Bi3101/um/skripta.pdf

[4] *Www.worldbank.org [online]. [cit. 2017-11-26]. Dostupné z:* http://www.worldbank.org/en/about/people/paul-romer

[5] *Guardian [online]. [cit. 2017-11-26]. Dostupné z: [5]* https://www.theguardian.com/commentisfree/2016/sep/19/its-time-to-junk-the-flawed-economic-models-that-make-the-world-a-dangerous-place

[6] Shampine, L.F. & Thompson S. (2001*) Solving DDEs in Matlab*, Appl. Numer. Math., Vol. 37. Simonov, P.M. (2002)

[7] *Chvátalová, Z. (2007) Maple pro e-learning matematiky a mat. disciplín v ekonomických studijních programech. Trendy ekonomiky a managementu. (1). p. 22 - 32. ISSN 1802-8527.*

[8] *Chvátalová, Z. (2009) Maple jako nástroj pro podporu kvantifikace užitečnosti v ekonomii. Trendy ekonomiky a managementu. 3(4). p. 6 - 17. ISSN 1802-8527.*

[9] *Vytváření matematických modelů,* http://uprt.vscht.cz/kminekm/mrt/F2/F2k21-mod.htm

[10]*SEYDEL, R. 2004. Practical Bifurcation and Stability Analysis. 3. vyd. New York : Springer, 2010. 483 s. ISBN 978-1-4419-1739-3.*

[11]*STERPU, M – ROCSOREANU, C. 2005. Hopf bifurcation in a system of two coupled advertising oscillators. In Nonlinear Analysis: Real World Applications., Romania : Department of Mathematical and Computer Sciences, University of Craiova, 2005. p. 1-12.*

[12]*ANTONYOVÁ, A.: Aplikácia matematického modelovania pri prognostike v rámci skúmania ekonometrických javov, In: EKONÓMIA A PROCES POZNÁVANIA, Zborník, Prešov 2009,* ISBN 978-80-555-0141-3

[13]*F. Collard, O. Licandro a L. Puch.Collard, F., Licandro, O. & Puch, L. (2008) Z krátkodobého hlediska dynamiky optimální The short run dynamics of optimalRůstové modely se zpožděním. growth models with delays. Annales d'Economie et Statistique 90, 127-144 Annales d'Economie et Statistique, Vol. 90.*

[14]*Kuznets, S. (1940) Schumpeter's business cycles. American Economic Review, Vol.30(2) (1940).*

[15]*Kuznets, S. (1930) Equilibrium economics and business cycle theory.*

[16]*Kitchin, J. (1923) Cycles and trends in economic factors. Review of Economic Statistics.*

[17]*Simonov, P.M. (2003) Issledovanie ustoichivosti rešenij někotorych dinamičeskich modelyach mikro - i makroekonomiki. Vestnik PGTU 2003.*

[18]*Azbelev, N.V., Maximov, V.T. & Rachmatullina, L.F. (2002) Elementy sovremnnoj teorii FDU. Metody I prilozenija, In-t kompjuter. Issled. Vol.2002.*

[19]*F. Collard, O. Licandro a L. Puch.Collard, F., Licandro, O. & Puch, L. (2008) Z krátkodobého hlediska dynamiky optimální The short run dynamics of optimalRůstové modely se zpožděním. growth models with delays. Annales d'Economie et Statistique 90, 127-144 Annales d'Economie et Statistique, Vol. 90.*

[20]*Dinu, M., Marinas, M.C., Socol, C. & Socol, A.G. (2011) Testing of the okun's law in Romania, Economic Computation and Economic Cybernetics Studies and Research,Vol. 1*

[21]*Maplesoft. (2012) Math Software for Engineers, Educators & Students. [Online]. [cit. 2012-07-15] Available from: http://www.maplesoft.com.*

[22]*Medveď, M. 1988. Dynamické systémy. VEDA, Bratislava, 256 s. 15, 81*

[23]*Brunovský, P. — Medveď, M. 1982. Bifurkácie negradientnych systémov. Pokroky matematiky, fyziky a astronómie, JSMF, 27, 2, 74–93. 81*

[24]*HAPÁKOVÁ, A. a kolektív autorov. 2000. Mathematical Modelling of Technical Processes. Košice : FVT TU Košice so sídlom v Prešove, 2000. 170 p. ISBN 8088941-12-1.*

[25]*Buša, J., Hnatič, M.: Chaos, Úvod do problematiky, Košice 2004,* ISBN 80-89061-94-X

Kontaktná adresa
Ing. Miroslav Dzimko
Vysoké učení technické v Brne
Fakulta podnikateľská
Ústav informatiky
Kolejní 4, 612 00 Brno
Česká republika
Tel.: +420 54114 2674
E-mail: xdzimk00@vutbr.cz