VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

Fakulta elektrotechniky
a komunikačních technologií

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Brno, 2017

Pavel Had

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A KOMUNIKAČNÍCH TECHNOLOGIÍ
FACULTY OF ELECTRICAL ENGINEERING AND COMMUNICATION

ÚSTAV TELEKOMUNIKACÍ
DEPARTMENT OF TELECOMMUNICATIONS

VYTVOŘENÍ INTERAKTIVNÍCH PROGRAMŮ PRO PODPORU VÝUKY ZPRACOVÁNÍ SIGNÁLŮ A OBRAZŮ
INTERACTIVE SOFTWARE TOOLS FOR TEACHING SIGNAL AND IMAGE PROCESSING

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE
BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE Pavel Had
AUTHOR

VEDOUCÍ PRÁCE Ing. Marie Mangová
SUPERVISOR

BRNO 2017

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A KOMUNIKAČNÍCH TECHNOLOGIÍ

Bakalářská práce

bakalářský studijní obor **Teleinformatika**
Ústav telekomunikací

Student: Pavel Had ***ID:*** 147433
Ročník: 3 ***Akademický rok:*** 2016/17

NÁZEV TÉMATU:

Vytvoření interaktivních programů pro podporu výuky zpracování signálů a obrazů

POKYNY PRO VYPRACOVÁNÍ:

Vytvořte programy pro interaktivní podporu výuky zejména v kurzech Analýza signálů a soustav, Číslicové zpracování signálů a Základy počítačové sazby a grafiky. Budou napsány v JavaScriptu a tématicky zaměřeny na: 1/ lineární kombinaci obrazů, 2/ metodu nejmenších čtverců a lineární regresi, 3/ diskrétní lineární konvoluci ve 2D, 4/ interpolaci v 1D.

DOPORUČENÁ LITERATURA:

[1] Žára, J.; Beneš, B.; Sochor, J.; Felkel, P.: Moderní počítačová grafika (2. vydání), Computer Press, 2005, ISBN 80-251-0454-0.

[2] Anděl, J.: Matematická statistika. 1. vyd. Praha: SNTL/ALFA, 1978.

Termín zadání: 1.1.2017 ***Termín odevzdání:*** 6.8.2017

Vedoucí práce: Ing. Marie Mangová
Konzultant:

prof. Ing. Jiří Mišurec, CSc.
předseda oborové rady

ABSTRAKT

Tato práce se zabývá tvorbou interaktivních apletů pro podporu výuky. Jsou to tyto čtyři aplety: lineární kombinace obrazů, metoda nejmenších čtverců a lineární regrese, diskrétní lineární konvoluce ve 2D a interpolace v 1D. Každá část v této práci se skládá z teoretického rozboru daného problému a jeho realizace v jazyku JavaScript. Konkrétní aplety pak názorně demonstrují problém tak, aby šel snadno pochopit.

KLÍČOVÁ SLOVA

Lineární kombinace, metoda nejmenších čtverců, lineární regrese, konvoluce, interpolace, JavaScript, aplet, konvexní kombinace, aproximace přímkou, aproximace polynomem, aproximace parabolou, interpolace, extrapolace.

ABSTRACT

This thesis deals with the development of interactive applets for educational purposes. There are four applets: linear image combinations, least squares method and linear regression, discrete linear convolution in 2D, and interpolation in 1D. Each part of this thesis consists of a theoretical analysis of a given problem and its implementation in JavaScript. Specific applets then illustrate the problem so that it can be easily understood.

KEYWORDS

Linear combination, least squares method, linear regression, convolution, interpolation, JavaScript, aplet, convex combination, linear approximation, polynomical approximation, parabolic approximation, interpolation, extrapolation.

HAD, Pavel. *Vytvoření interaktivních programů pro podporu výuky zpracování signálů a obrazů*. Brno, Rok, 32 s. Bakalářská práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií, Ústav telekomunikací. Vedoucí práce: Ing. Marie Mangová

Vysázeno pomocí balíčku `thesis` verze 2.63; `http://latex.feec.vutbr.cz`

PROHLÁŠENÍ

Prohlašuji, že svou bakalářskou práci na téma „Vytvoření interaktivních programů pro podporu výuky zpracování signálů a obrazů“ jsem vypracoval(a) samostatně pod vedením vedoucího bakalářské práce a s použitím odborné literatury a dalších informačních zdrojů, které jsou všechny citovány v práci a uvedeny v seznamu literatury na konci práce.

Jako autor(ka) uvedené bakalářské práce dále prohlašuji, že v souvislosti s vytvořením této bakalářské práce jsem neporušil(a) autorská práva třetích osob, zejména jsem nezasáhl(a) nedovoleným způsobem do cizích autorských práv osobnostních a/nebo majetkových a jsem si plně vědom(a) následků porušení ustanovení § 11 a následujících autorského zákona č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon), ve znění pozdějších předpisů, včetně možných trestněprávních důsledků vyplývajících z ustanovení části druhé, hlavy VI. díl 4 Trestního zákoníku č. 40/2009 Sb.

Brno ....

podpis autora(-ky)

PODĚKOVÁNÍ

Rád bych poděkoval vedoucímu diplomové práce panu Ing. Marii Mangové, za odborné vedení, konzultace, trpělivost a podnětné návrhy k práci.

Brno ....

podpis autora(-ky)

OBSAH

SEZNAM OBRÁZKŮ

ÚVOD

Tato práce se zabývá čtyřmi výukovými aplety. Tyto aplety jsou naprogramovány v jazyce JavaScript, aby byly snadno spustitelné v každém prohlížeči, jelikož s aplety v jazyce Java jsou v dnešní době problémy s bezpečností.

Konkrétně se jedná o aplet lineární kombinace obrazů, kde je uživateli objasněno, jak funguje tato operace. Po zvolení třech obrazů a třech konstant jsou obrazy přepočteny a sečteny, tak aby bylo vše zřetelné podle popsaného vzorce.

Druhý aplet demonstruje použití metody nejmenších čtverců, kde je názorně ukázáno, že dokáže proložit například naměřené hodnoty takovou funkcí, která je zprůměruje a z části potlačí jejich odchylku. Jedná se o aproximaci lineární, parabolickou a exponenciální.

Třetí aplet ukazuje jak funguje operátor konvoluce. Zde si uživatel zvolí hodnoty vstupní funkce a konvolučního jádra, kde obě funkce jsou realizovány maticí hodnot. Poté je provedena konvoluce a uživatel může procházet jednotlivé její kroky a prohlížet si výpočet konkrétního prvku při pohybu konvolučního jádra po vstupní matici.

Poslední aplet ukazuje principy interpolace. Je zde vidět, že funkce prochází všemi zadanými body, tudíž je vhodná pro soubor přesných hodnot bez uvažování jejich odchylky. Konkrétně je znázorněna interpolace schodová, nejbližší soused, lineární splajn a Lagrangeova.

1 LINEÁRNÍ KOMBINACE OBRAZŮ

Popis

Tento aplet demonstruje použití lineární kombinace na obrazech. Obrazy slouží jako zdrojová data pro pozdější výpočet. Jsou použity černobílé obrazy, protože pro demonstraci stačí pouze jedna barevná složka. Uživatel si zde zvolí 3 obrazy podle vlastního uvážení a konstanty lineární kombinace a sleduje, jak se tyto obrazy přepočítají a následné spojí.

Lineární kombinace a její speciální případy

Je to základní pojem, který spadá v matematice do odvětví lineární algebry. Toto odvětví se zabývá vektory, vektorovými prostory, soustavami lineárních rovnic a lineárními transformacemi. Zde si však vystačíme pouze s vektorovým prostorem, nebo též lineárním prostorem. Je to v podstatě zobecnění množiny reálných, potažmo komplexních čísel. Podobně jako v těchto množinách je i ve vektorovém prostoru definována operace sčítání a násobení. Prvek vektorového prostoru se nazývá vektor. Na tomto prostoru je důležité, že má lineární strukturu, tím pádem lze dva vektory sečíst a výsledkem je opět vektor. Tyto pojmy jsou blíže popsány v [1].

Nejzákladnější věc, kterou lze s vektory provést je jejich součet, nebo je lze vynásobit prvkem tělesa viz [2]. Pro úplnost si definujme co je to těleso. Je to algebraická struktura, na které jsou definovány dvě binární operace. Je rozšířením okruhu, oproti kterému navíc přináší existenci inverzního prvku pro obě binární operace. Pro objasnění si k této definici uvedeme jednoduchý příklad.

Uvažujme k vektorů $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x_2}$, ..., $\mathbf{x}_k$, z nichž každý vynásobíme reálným číslem (α_1, α_2, ..., α_k) a nakonec všechny sečteme, tak dostaneme vektor

$$\alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \ldots + \alpha_k\mathbf{x}_k = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i\mathbf{x}_k$$

Tento vektor nazýváme lineární kombinace vektorů $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, ..., $\mathbf{x}_k$.

Nyní si uvedeme jednoduchý příklad:
Mějme reálná čísla 2 a 3, tyto prvky si označíme jako α_1, α_2. Máme tedy $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 3$. Dále mějme dva aritmetické vektory (uspořádané n-tice čísel) $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}.$$

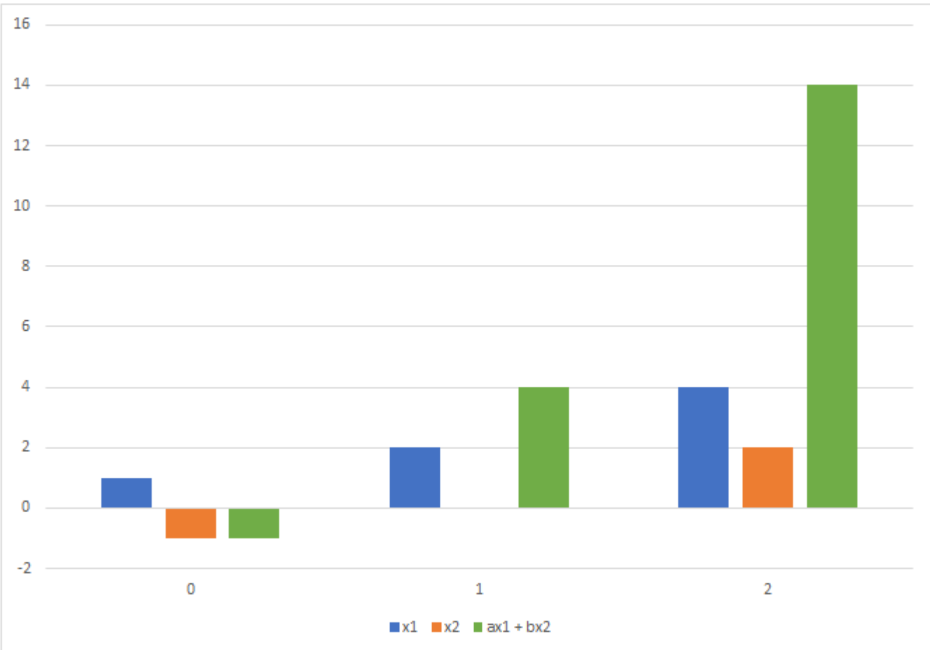
Obecně lze lineární kombinaci těchto vektorů vyjádřit jako

$$\alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 = \alpha_1 \begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix} + \alpha_1 2 \begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\alpha_1 - 1\alpha_2\\2\alpha_1 + 0\alpha_2\\4\alpha_1 + 2\alpha_2\end{pmatrix}.$$

Po dosazení konkrétních čísel dostaneme výsledný vektor

$$\begin{pmatrix}1\alpha_1 - 1\alpha_2\\2\alpha_1 + 0\alpha_2\\4\alpha_1 + 2\alpha_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\cdot 2 - 1\cdot 3\\2\cdot 2 + 0\cdot 3\\4\cdot 2 + 2\cdot 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\4\\14\end{pmatrix}.$$

A pro představu si zde můžeme prohlédnout ty stejné vektory a výsledný vektor po lineární kombinaci graficky na obrázku 1.1.



Obr. 1.1: Graf lineární kombinace funkcí.

Tento příklad je použit i pro demonstraci v tomto apletu. Jen je tam o koeficient více. tyto koeficienty α_1, α_2, α_3 si zvolí uživatel a vektory $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ a $\mathbf{x}_3$ jsou reprezentovány maticemi $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2$ a $\mathbf{X}_3$. Dále v textu je popsán podrobnější princip práce s obrazovými body v části Realizace apletu.

Tohle byl obecný popis lineární kombinace, avšak existují i speciální případy, kdy prvky tělesa T splňují určité podmínky. Jedná se o kombinaci **afinní** a **konvexní**. Viz [3].

Pro kombinaci **afinní** platí, že součet prvků tělesa T je roven číslu 1. Vyjádření vzorcem je následující

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1.$$

Jako příklad si uvedeme prvky $\alpha_1 = -2$, $\alpha_2 = 1$ a $\alpha_3 = 2$, po jejich sečtení, tedy $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -2 + 1 + 2 = 1$.

Pro kombinaci **konvexní** platí, že součet prvků tělesa T je roven číslu 1 a zároveň žádný z těchto prvků není záporný. Tudíž hodnoty prvků se pohybují v rozmezí 0–1. Tuto kombinaci lze vyjádřit vzorcem

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1 \quad \wedge \quad (\forall i \in \{1, \dots, k\})(\alpha_i \geq 0).$$

Jako příklad si uvedeme prvky $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0,7$ a $\alpha_3 = 0,3$. Po jejich sečtení, tedy $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 + 0,7 + 0,3 = 1$.

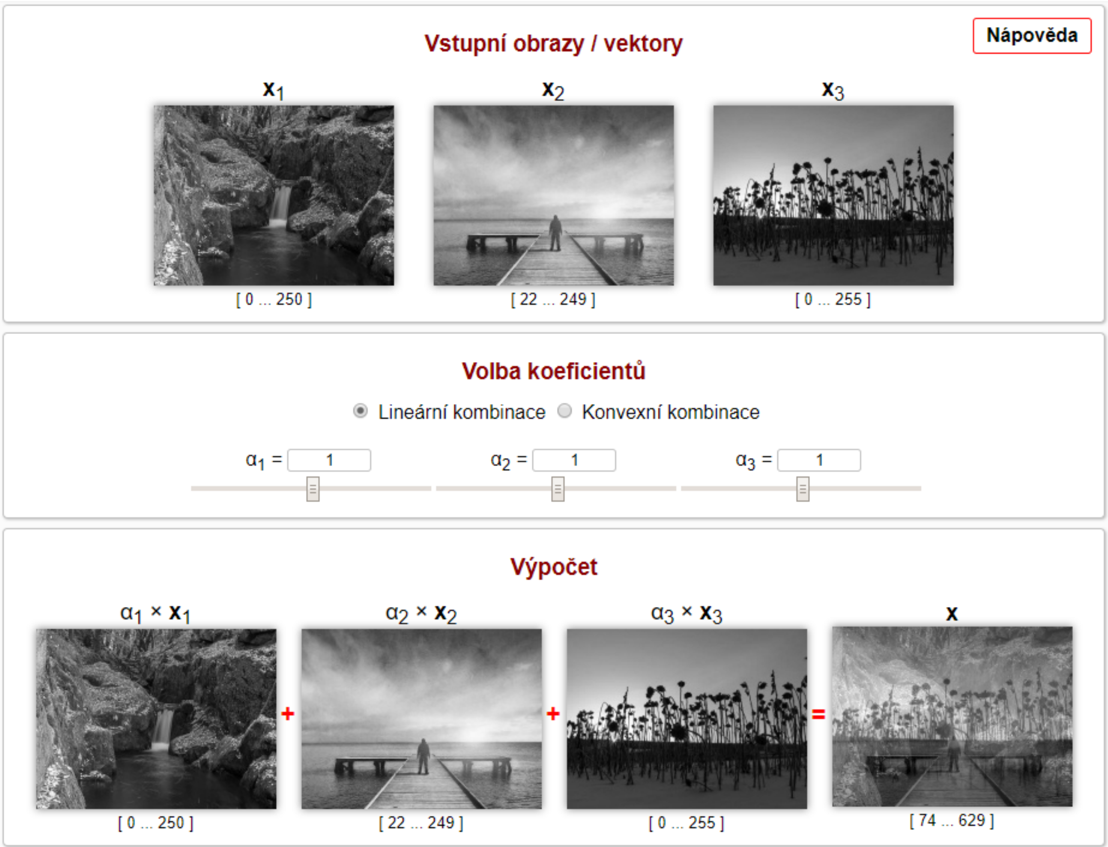
Realizace apletu

Jelikož matice v tomto apletu jsou reprezentovány obrazy, řekneme si jak se s nimi zachází. Obrazy se skládají z dvojrozměrného pole bodů. Pokud se jedná o barevné obrazy, každý bod je reprezentován hodnotou jednotlivých barevných složek, tedy červené, zelené a modré. Protože však pro demonstraci lépe poslouží obrazy černobílé, budeme brát tyto body pouze jako jednu hodnotu a to velikost jasové složky. Od hodnoty minimální, což je černá až po hodnotu maximální což je bílá. Prvky matic se poté vynásobí a sečtou. Obrazy se vždy přepočítávají tak, aby byl zřetelný princip lineární kombinace. Pokud by se obrazy nepřepočítávaly, stávalo by se že se s hodnotami jednotlivých bodů dostaneme mimo zobrazovací možnosti počítače a výsledný obraz by byl buďto celý černý nebo bílý.

Na obrázku 1.2 jsou vidět osy x, y, z. Osy x a y reprezentují indexy jednotlivých bodů obrazu a osa z jejich velikost (jasová složka). Osy mají počátek v levém horním rohu obrazu a první bod je na pozici [0][0]. Při programování v JavaScriptu se toto

Obr. 1.2: Reprezentace os obrazů v počítačové grafice.

trojrozměrné pole uvažuje pouze jako dvojrozměrné, kdy se za sebe poskládají jednotlivé řádky osy x, tudíž máme jednu dlouhou řadu jasových složek a pracujeme s ní jako s **vektorem**. Při zpětné rekonstrukci obrazu se řada rozdělí zpět podle rozlišení obrazu (délky osy x) na trojrozměrné pole.

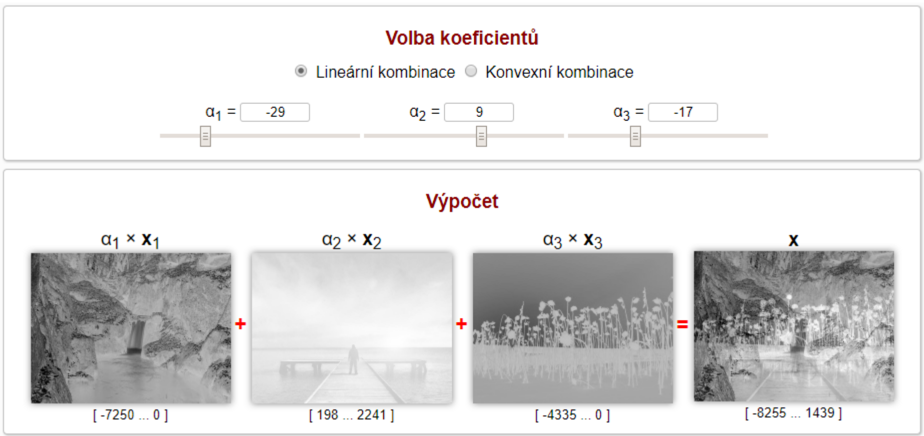


Obr. 1.3: Vzhled apletu.

Dále si popíšeme funkčnost a vzhled apletu který je vidět na obrázku 1.3. V části „Vstupní obrazy / vektory“ jsou 3 obrazy které reprezentují jednotlivé vektory $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_3$. Po kliknutí na obrazy se objeví nové okno viz. obr. 1.4, kde si uživatel zvolí, který obraz chce použít. V části „Volba koeficientů“ lze zvolit, zda chce uživatel použít kombinaci lineární nebo konvexní. Podle této volby se poté přepočítají koeficienty α_1, α_2 a α_3 a změní se měřítka posuvníků pod nimi. U kombinace lineární lze nastavit hodnoty od $-50 \ldots 50$, což je dostatečné rozmezí pro demonstraci. Záporná hodnota pak vytváří z obrazu negativ jak lze vidět na obrázku 1.5.

U kombinace konvexní lze nastavit hodnoty $0 \ldots 1$ a při změně jedné z konstant se ostatní automatický přepočítají aby platilo pravidlo, že jejich součet je vždy roven 1.

Obr. 1.4: Volba obrazu.



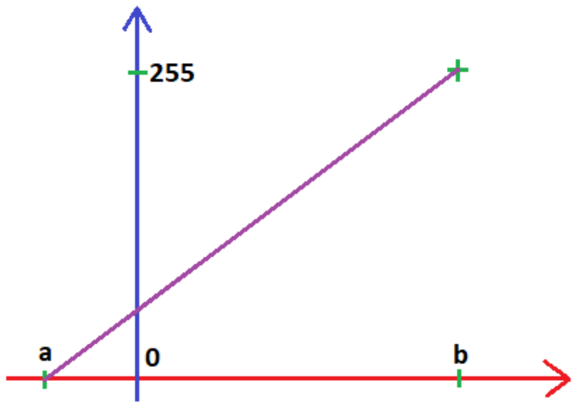
Obr. 1.5: Příklad lineární kombinace.

Pod každým obrazem je vidět rozsah hodnot jeho vektoru. Jedná se o minimální a maximální hodnotu obsaženou v daném poli hodnot. Pokud tedy máme vektor

$\mathbf{x} = \{1, 5, 3, 8, 6, 0\}$, pak jeho minimální a maximální hodnota bude zobrazena jako $[0 \ldots 8]$.

V části „Výpočet“ jsou poté vidět jednotlivé vektory $\mathbf{x}$ přepočtené podle zadaných koeficientů a vypočten jejich celkový rozsah aby je bylo možné zobrazit jako obrázky, musíme je přepočíst do rozsahu 0 – 255. Tento přepočet je vidět na obrázku 1.6. Zde červená osa reprezentuje skutečné hodnoty vektorů (x), kde a je minimum a b je maximum daného vektoru. A modrá osa reprezentuje přepočtené hodnoty (y). Výsledný fialový vektor poté zobrazujeme podle vzorce:

$$y = \frac{255(x-a)}{b-a}$$



Obr. 1.6: Přepočet hodnot vektoru na obrazová data.

Postup výpočtu v apletu je následující:

- Ze vstupních obrazů se vytvoří jednorozměrné pole.
- Tyto pole se projdou a zjistí se minimum a maximum každého z nich a to se zobrazí pod jejich obrazy.
- Uživatel zvolí konstanty lineární kombinace.
- Každý prvek polí se vynásobí těmito konstantami.
- Zjistí se nové minimum a maximum po vynásobení a to se vypíše pod obrazy v části „výpočet“.
- Zjistí se celkové minimum (min) a maximum (max) všech 3 vynásobených vektorů a zobrazí se pod výsledným obrazem.
- Rozsah = max - min.
- Krok = Rozsah / 255.
- Každá hodnota polí = (Hodnota + min) / Krok.
- Tyto data se poté zobrazí.

2 METODA NEJMENŠÍCH ČTVERCŮ A LINEÁRNÍ REGRESE

Popis apletu

Aplet seznamuje uživatele s použitím lineární, parabolické a exponenciální aproximace metodou nejmenších čtverců. Uživatel zvolí metodu aproximace, poté se vygeneruje příslušná rovnice, k této rovnici se přidá šum zvolené velikosti a vygenerují se body. Tyto body se poté aproximují metodou nejmenších čtverců a je zobrazena vypočtená funkce. Ukáží se oba vzorce a součet čtverců (přesnost).

Metoda nejmenších čtverců a lineární regrese

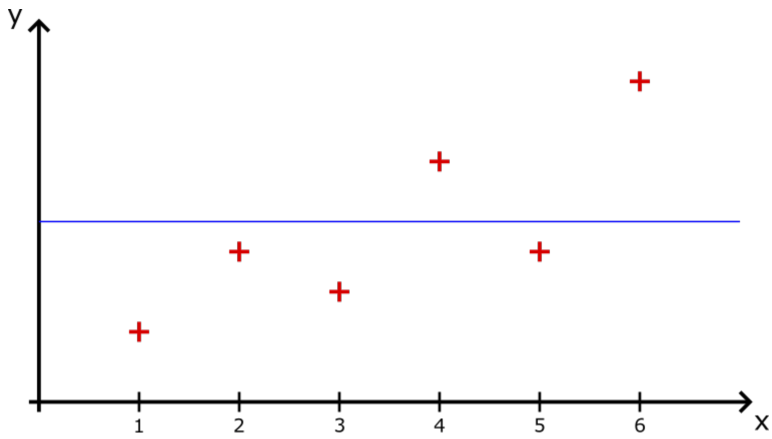
Nejprve si povíme co to vlastně je **metoda nejmenších čtverců** a co je **lineární regrese**. Jedná se o ten samý problém, ale z jiného úhlu pohledu. Zatímco metoda nejmenších čtverců je zkoumána matematicky, lineární regrese je spíše statistická metoda, která se v praxi používá například pro odhad očekávané pooperační délky života pacientů trpících rakovinou.

My se zde budeme zabývat spíše tou matematickou stránkou. Tato metoda je velmi podobná interpolaci, avšak zde počítáme s určitou odchylkou v údajích, jinak řečeno počítáme s nepřesností vstupních dat. Jedná se například o naměřené hodnoty z laboratoře, kde se může projevit odchylka teploty, nepřesnost přístrojů, špatné odečtení měřícím, nebo další nepřesnosti. Název metoda nejmenších čtverců se vžil díky grafickému názoru, že totiž opravdu hledáme takovou přímku, pro kterou je součet ploch čtverců odchylek minimální.

$$\sum_{i=1}^{n} [y_i - f(x_i)]^2 \to \min.$$

Obecně tato metoda slouží k eliminaci chyb a dopočtení hodnot mezi známými body. Tyto body lze aproximovat polynomy určitého stupně. Od těch nejjednodušších, což je **0. stupeň** (obr. 2.1), který nám v podstatě řekne pouze průměrnou hodnotu y protože má tvar přímky rovnoběžné s osou x.

Mějme například body $[x_n, y_n]$ - [1, 2], [2, 5], [3, 0], [4, -1], k jejich aproximaci stačí pouze spočítat průměr hodnot y. Rovnice přímky tedy bude $y = (2+5+0-1)/4 =$

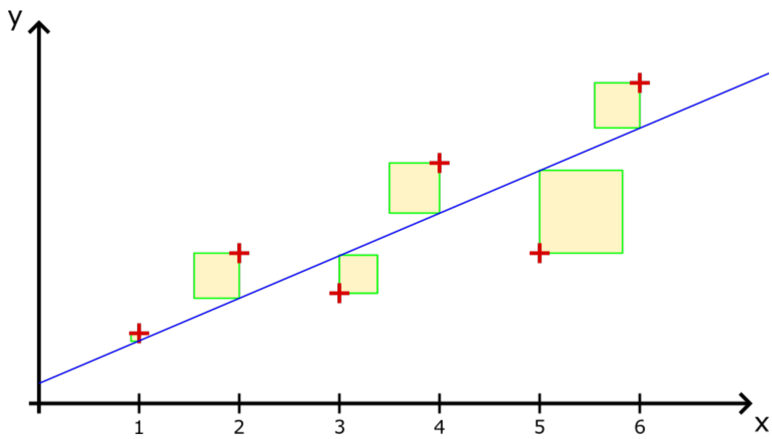


Obr. 2.1: Polynom 0. stupně.

$1,5.$

Poté máme aproximaci polynomem **1. stupně**. Opět se jedná o **aproximaci přímkou**, tentokrát už ale nemusí být rovnoběžná s osou x (obr. 2.2). Rovnici této přímky uvažujeme jako $y = f(x) = a + bx$. Pro nalezení koeficientů a a b nám poslouží následující vzorce

$$a = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}, \quad b = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$



Obr. 2.2: Polynom 1. stupně.

Uvedeme si jednoduchý příklad, mějme tabulku bodů

$\mathbf{x}_i$	0	1	3	5	6
$\mathbf{f}_i$	5	3	3	2	1

Celkem tedy máme 5 zadaných bodů. Pro výpočet si vytvoříme následující tabulku

i	$\mathbf{x}_i$	$\mathbf{y}_i$	$\mathbf{x}_i^2$	$\mathbf{x}_i\mathbf{y}_\mathbf{i}$
1	0	5	0	0
2	1	3	1	3
3	3	3	9	9
4	5	2	25	10
5	6	1	36	6
$\sum$	15	14	71	28

Sestavíme soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned} a \cdot počet uzlů \quad &+ b \cdot \sum x_i &= \sum y_i, \\ a \cdot \sum x_i \quad &+ b \cdot \sum x_i^2 &= \sum x_i y_i. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5a \quad &+15b &= 14, \\ 15a \quad &+71b &= 28. \end{aligned}$$

Řešením této soustavy je $a = \frac{287}{65} \doteq 4{,}415$ a $b = -\frac{7}{13} \doteq -0{,}538$. Nejlepší lineární aproximací je tedy přímka

$$y = 4{,}415 - 0{,}538x.$$

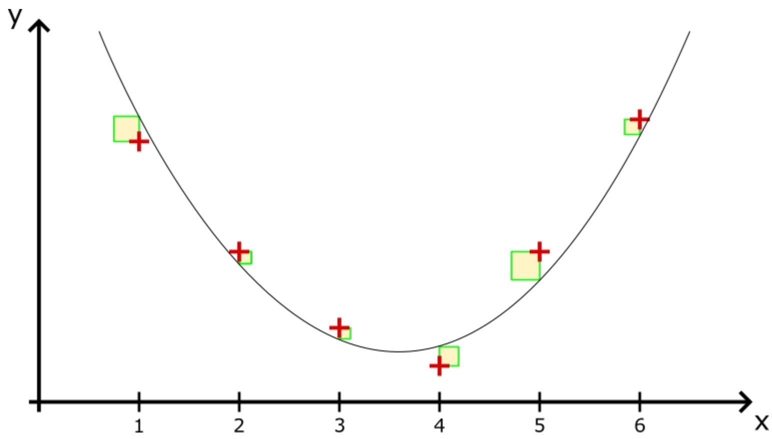
Dále máme **interpolaci polynomem 2. řádu** (obr. 2.3). Jedná se o **interpolaci parabolou**. Rovnice paraboly je zadána funkcí $y = a + bx + cx^2$.

Nejprve si zadáme hodnoty pro výpočet paraboly následující tabulkou

$\mathbf{x}_i$	1	2	3	4	5
$\mathbf{f}_i$	0,5	1,7	3,4	5,7	8,4

Znovu si vytvoříme pomocnou tabulku s vypočtenými hodnotami

i	$\mathbf{x}_i$	$\mathbf{x}_i^2$	$\mathbf{x}_i^3$	$\mathbf{x}_i^4$	$\mathbf{y}_i$	$\mathbf{x}_i\mathbf{y}_\mathbf{i}$	$\mathbf{x}_i^2\mathbf{y}_\mathbf{i}$
1	1	1	1	1	0,5	0,5	0,5
2	2	4	8	16	1,7	3,4	6,8
3	3	9	27	81	3,4	10,2	30,6
4	4	16	64	256	5,7	22,8	91,2
5	5	25	125	625	8,4	42	210
$\sum$	15	55	225	979	19,7	78,9	339,1



Obr. 2.3: Polynom 2. stupně.

Poté přejdeme k výpočtu jednotlivých koeficientů

$$\begin{aligned} a \cdot \text{počet uzlů} \quad &+b \cdot \sum x_i + c \cdot \sum x_i^2 &= \sum y_i \\ a \cdot \sum x_i \quad &+b \cdot \sum x_i^2 + c \cdot \sum x_i^3 &= \sum x_i y_i \\ a \cdot \sum x_i^2 \quad &+b \cdot \sum x_i^3 + c \cdot \sum x_i^4 &= \sum x_i^2 y_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5a \quad &+15b + 55c &= 19{,}7 \\ 15a \quad &+55b + 225c &= 78{,}9 \\ 55a \quad &+225b + 979c &= 339{,}1 \end{aligned}$$

$$a \doteq -0{,}2, \quad b \doteq 0{,}437143, \quad c \doteq 0{,}257143$$

A dostáváme rovnici paraboly $y = -0{,}2 + 0{,}437143x + 0{,}257143x^2$.

Dále si uvedeme **interpolaci exponenciálou**. Pokud chceme určit rovnici exponenciály, budeme postupovat následovně

$$\begin{aligned} y &= a \cdot b^x \\ \ln y &= \ln a + x \cdot \ln b \\ A \ &= \ln a, \quad B = \ln b \\ \ln y &= A \ + B \cdot x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A \ \cdot počet uzlů \quad &+b \cdot \sum x_i &= \sum \ln y_i \\ A \ \cdot \sum x_i \quad &+b \cdot \sum x_i^2 &= \sum x_i \cdot \ln y_i \end{aligned}$$

Pro hodnoty z předchozího příkladu

$$5A + 15B = 4,9315A + 55B = 21,64246$$

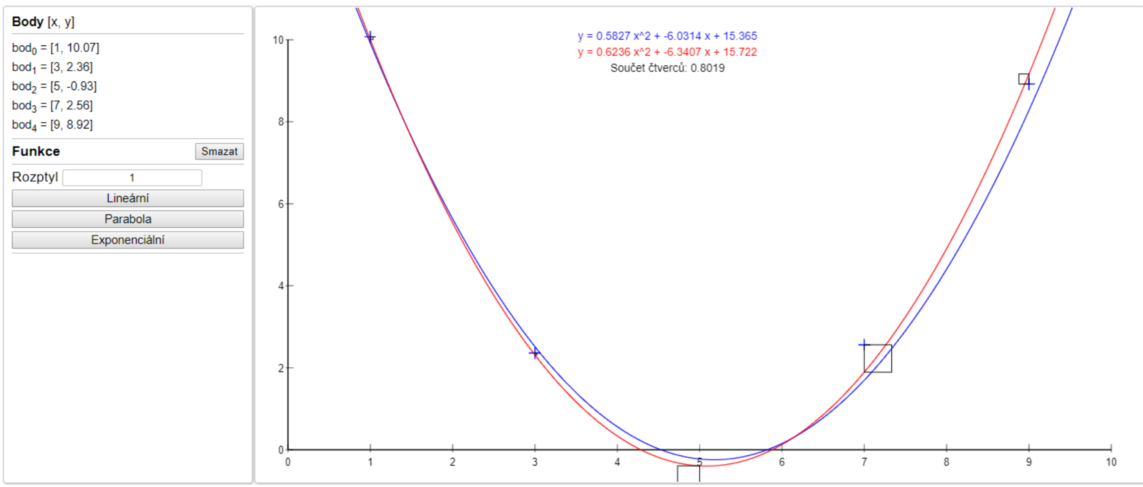
Potom

$$A \doteq -1,069738, \quad B \doteq 0,685246$$
$$a = e^{-1,069738} = 0,3431$$
$$b = e^{-0,685246} = 1,98426$$
$$y = 0,3431 \cdot 1,98426^x$$

Realizace apletu

Aplet se skládá ze dvou částí, jak je vidět na obrázku 2.4. V pravé části je graf zobrazující hodnoty a křivky. V levé části si pak uživatel volí druh aproximace a její rozptyl.

Když uživatel klikne na konkrétní aproximaci, nejdříve se vygeneruje náhodná funkce příslušného typu. K této funkci se poté přičte zvolený rozptyl a vygenerují se body s tímto rozptylem. Body se poté zobrazí v části Body i v grafu.



Obr. 2.4: Aplet metoda nejmenších čtverců.

Poté se provede výpočet funkce podle daného vzorce v teoretické části. U aproximace parabolou je použita Gauss-Seidlova iterační metoda pro výpočet koeficientů funkce. Poté je zobrazena původní rovnice a rovnice po aproximaci. Můžeme si prohlédnout jejich rozdíl, při zvolení různě velkého rozptylu. Zobrazí se také součet jednotlivých čtverců. Čím je součet menší, tím je aproximace přesnější.

3 DISKRÉTNÍ LINEÁRNÍ KONVOLUCE VE 2D

Popis

Tento aplet slouží pro demonstraci 2D konvoluce. Uživatel si může zvolit dvojrozměrnou funkci $f(x, y)$ o velikosti 5×5 a dvojrozměrné konvoluční jádro $h(x, y)$ o velikosti 3×3. Poté je spočtena a zobrazena výsledná funkce po konvoluci a uživatel může posouvat konvolučním jádrem po vstupní funkci a sledovat, jak se výsledek počítá.

Diskrétní lineární konvoluce

Konvoluce je matematický operátor, který zpravovává dvě funkce. Značí se hvězdičkou. Konvoluce dvou funkcí se tedy zapíše jako $f(x) * h(x)$. Funkci $h(x)$ se říká konvoluční jádro.

Vzorec [6] pro 1D konvoluci je následující

$$(f * h)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha)h(x - \alpha)d\alpha$$

A hned si uvedeme tento vzorec na jednoduchém příkladu. Mějme funkci $f(x) = [1, 3, 2, 4]$ a $h(x) = [1, 2, 3]$, kdy první hodnota je vždy na pozici $x = 0$. Otočíme si konvoluční jádro, tedy $h(-x) = [3, 2, 1]$, kde 1 je na pozici 0.

```
f(x) = (1, 3, 2, 4)
------------------------------------------------------------
 (3, 2, 1)                  y(0) = (1·1) = 1
    (3, 2, 1)               y(1) = (2·1) + (1·3) = 5
       (3, 2, 1)            y(2) = (3·1) + (2·3) + (1·2) = 11
          (3, 2, 1)         y(3) = (3·3) + (2·2) + (1·4) = 17
             (3, 2, 1)      y(4) = (3·2) + (2·4) = 14
                (3, 2, 1)   y(5) = (3·4) = 12
```

Výsledná funkce po konvoluci $f(x) * h(x)$ je tedy $[1, 5, 11, 17, 14, 12]$ kdy první hodnota je na pozici $x = 0$.

Toto byl jednoduchý příklad konvoluce pro jednorozměrné funkce. My zde ovšem používáme funkce dvojrozměrné. Hlavní užití konvoluce na funkce dvojrozměrné jsou takzvané obrazové filtry. Těmito filtry se dá dosáhnout různých efektů jako jsou doostření, rozostření, detekci hran a další.

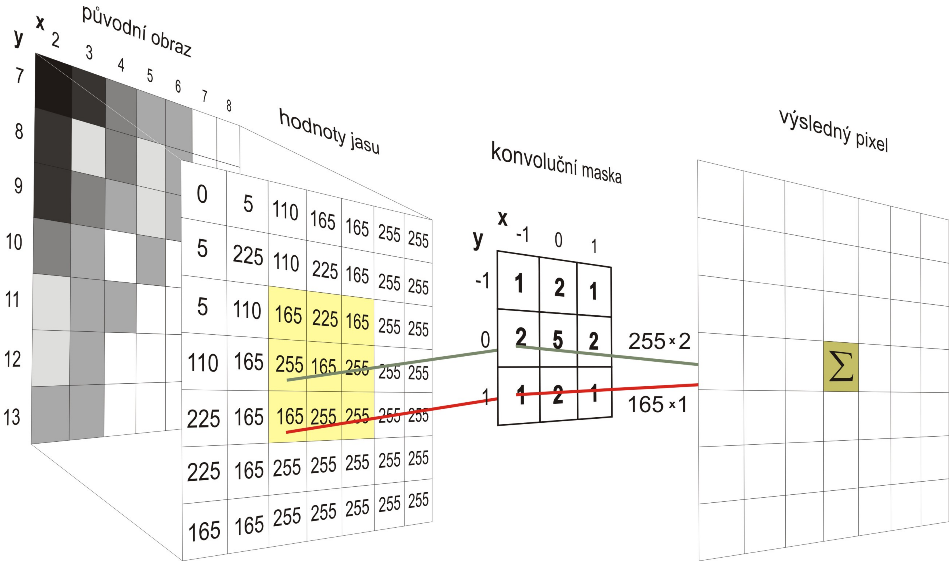
Základní matematický popis diskrétní 2D konvoluce je následující [7]:

$$f(x,y) * h(x,y) = \sum_{i=-k}^{k} \sum_{j=-k}^{k} f(x-i, y-j) \cdot h(i,j)$$

Základní myšlenka[7] konvoluce obrazu je posouvání konvolučního jádra po celém obraze a vždy provede následující kroky:

- Vynásobíme hodnoty konvolučního jádra hodnotami, které leží pod konvolučním jádrem na obrazu.
- Součet těchto násobků uložíme do právě zpracovávané buňky.
- Posuneme se o buňku dále.

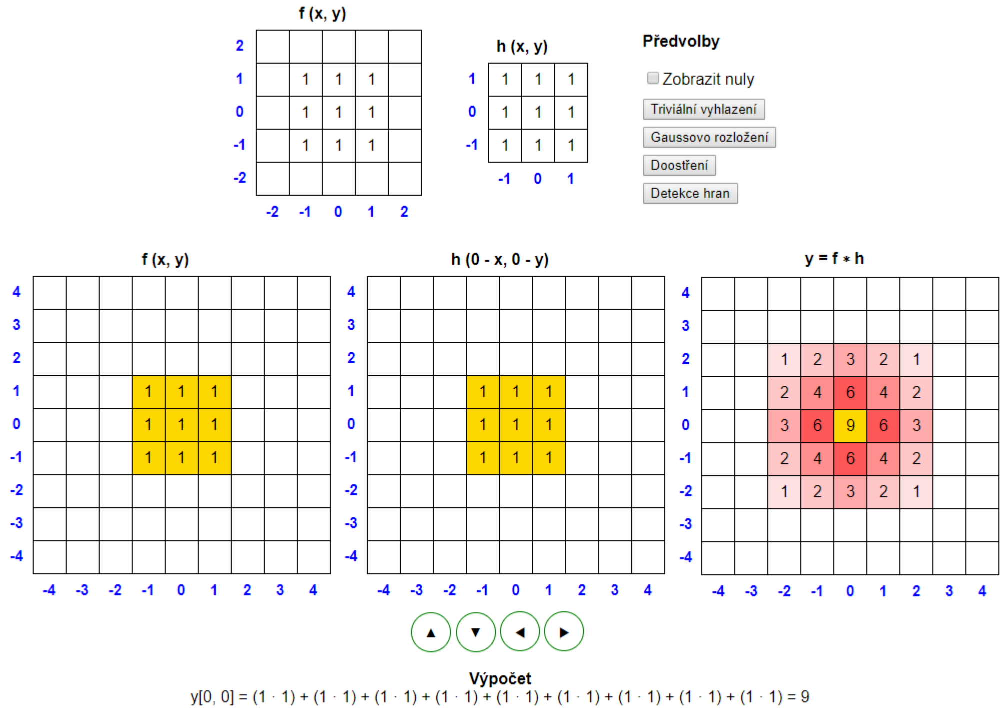
Tento princip je názorně ilustrován na následujícím obázku [6].



Obr. 3.1: Aplikace konvoluce na obrazová data.

Realizace apletu

Vzhled samotného apletu je vidět na obrázku 3.2. Ve vrchní části jsou vidět dvě matice $f(x,y)$ a $h(x,y)$. Po spuštění apletu jsou nastaveny základní hodnoty jak je vidět na obrázku. Pokud uživatel chce změnit hodnotu, stačí najet na příslušné políčko myší a kliknout pravým tlačítkem pro zvětšení hodnoty o 1 nebo levým tlačítkem pro zmenšení hodnoty o 1. Nebo může také využít některých přednastavených hodnot konvolučního jádra kliknutím na tlačítka Triviální vyhlazení, Gaussovo rozostření, Doostření nebo Detekce hran.



Obr. 3.2: Vzhled apletu lineární konvoluce 2D.

Jako výchozí hodnota je vypnuté zobrazování hodnoty 0 v maticích, pro zvýšení přehlednosti. Pokud by však chtěl vidět uživatel i tyto hodnoty, stačí zaškrtnout políčko Zobrazit nuly.

Pro posun konvolučního jádra po vstupní funkci lze použít i zelená tlačítka s šipkami, i šipky na klávesnici. Při posunu konvolučního jádra se zvýrazní na vstupní matici jeho překrytí a na výsledné matici právě počítaná hodnota. V části výpočet je pak přesně vidět výpočet konkrétní hodnoty na dané pozici, kdy první hodnota v závorce je vždy ze vstupní funkce a druhá hodnota z konvolučního jádra.

4 INTERPOLACE V 1D

Popis

V této čísti jsou popsány základní druhy interpolací s jejich vzorci. Poté je popsán aplet který má uživateli ukázat, jak vypadá interpolace schodová, nejbližší soused, lineární splajn a Lagrangeova interpolace zvoleného řádu. Uživatel si může zvolit vlastní body interpolace.

Pojmy interpolace, extrapolace

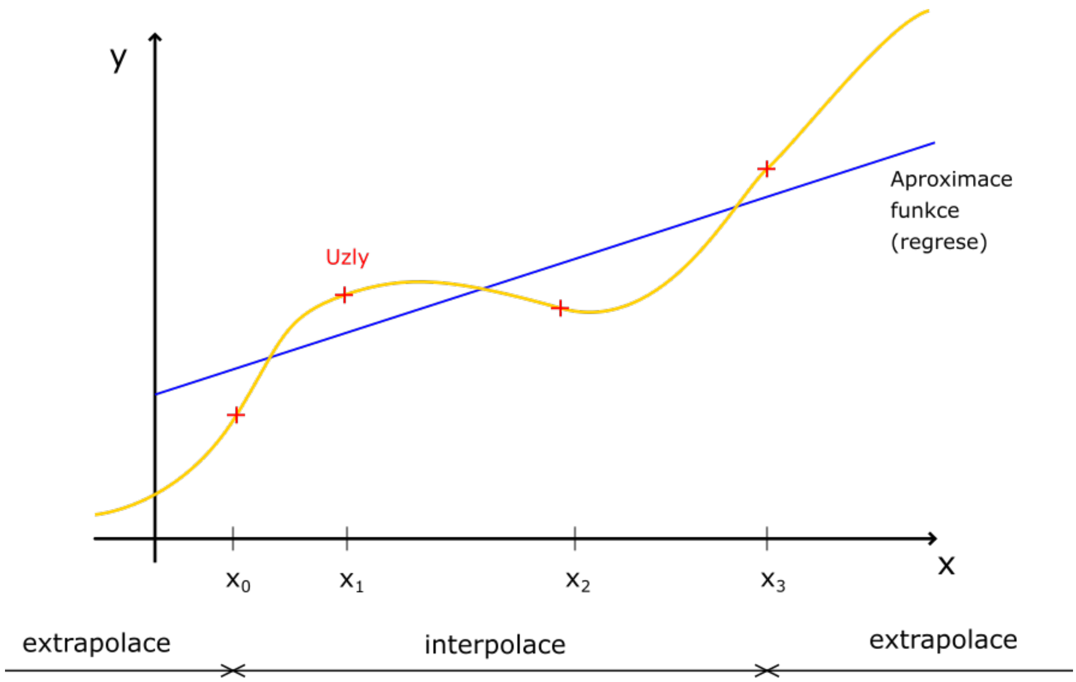
U některých funkcí se jejich funkční hodnota vypočítá snadno, u jiných to není tak snadné bez použití techniky. Některé funkce jsou tak složité, že je snazší najít jejich hodnotu v tabulce. A někdy máme funkce které nejsou zadány předpisem, ale známe pouze jejich funkční hodnoty v určitých bodech, třeba měřením v laboratoři. Těmto bodům budeme říkat uzly interpolace. Uzlem rozumíme všechny známé body [4].

Pokud chceme zjistit hodnoty i mezi těmito body, je možné nahradit zkoumanou funkci funkcí jinou, která se jaksi podobá té původní. Existují 2 základní druhy proložení, buďto funkce prochází přímo zadanými body, nebo pouze jejich okolím. Pokud funkce prochází jejich okolím, jedná se o aproximaci funkce a pokud prochází přímo zadanými body, jedná se o interpolaci která nás právě zajímá [5].

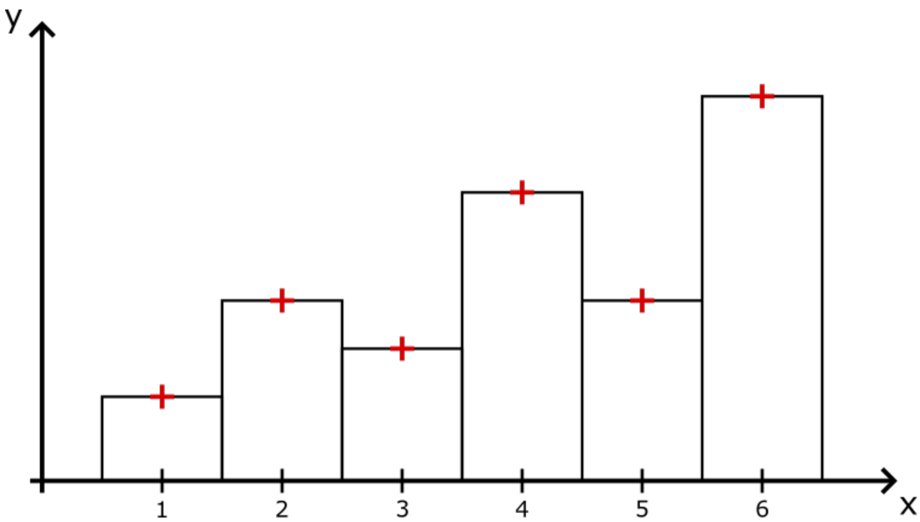
Nejprve si povíme co je to interpolace a extrapolace. Jak lze vidět na obrázku 4.1, interpolace se říká hodnotám, které se nachází mezi prvním a posledním známým bodem (uzlem). Extrapolace je část před prvním a za posledním uzlem, ta však není tak přesná. Dá se pomocí ní například odhadovat tendence pokračování funkce, což se využívá například v ekonomii. Interpolace se skládá z **bázových funkcí**, což jsou základní funkce ze kterých se poté složí ta výsledná.

A teď už k samotné interpolaci a jejím druhům. Těch existuje hned několik a každý má jiné využití. Od těch nejjednodušší, což je schodová (obr. 4.2), kdy předpokládáme že hodnota má okolo svého bodu stále stejnou, jako diskrétní veličina. **Schodová interpolace** se využívá například při přepočtu velikosti obrazu v počítačové grafice.

Další možností je **lineární interpolace** (někdy také interpolace lineárním splajnem), kterou vidíne na obrázku 4.3. Spočívá v proložení dvou sousedních bodů přímkou. Tato interpolace se nejčastěji využívá pro dva známé body, ale lze aplikovat i



Obr. 4.1: Intrerpolace, extrapolace, aproximace.



Obr. 4.2: Schodová interpolace.

na více bodů. Často se používá například pro zaplnění mezer v tabulce, pokud například známe populaci občanů ve městě v roce 2000 a 2005 a chceme odhadnout populaci v roce 2003, proložíme tyto hodnoty lineární interpolací.

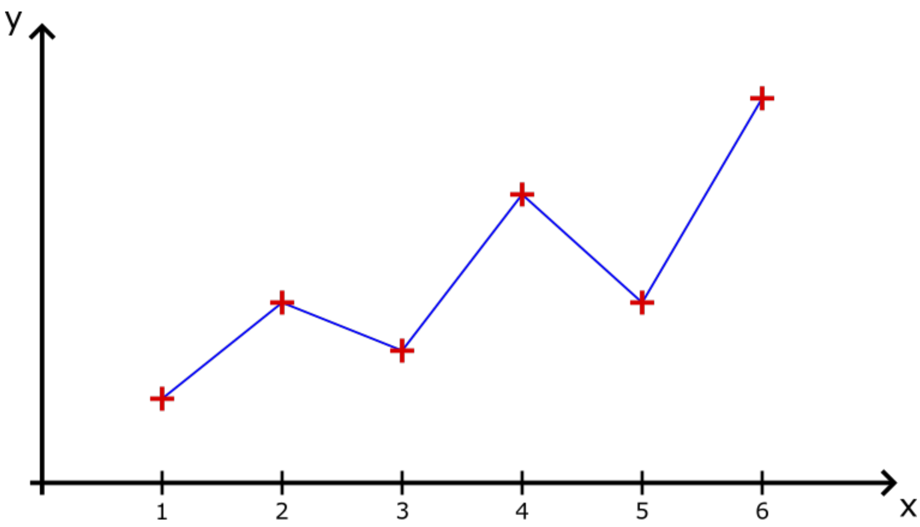
Výpočet je pak velice snadný. Pokud jsou zadány dva body o souřadnicích (x_0, y_0) a (x_1, y_1), pak je lineární interpolace přímka mezi těmito body. Pro hodnotu x je interval (x_0, x_1). Hodnota y podél přímky je dána rovnicí [4]

$$\frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}.$$

Vyřešením této rovnice pro y, což je neznámá v rovnici pro x dostaneme

$$y = y_0 + (x - x_0)\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}.$$

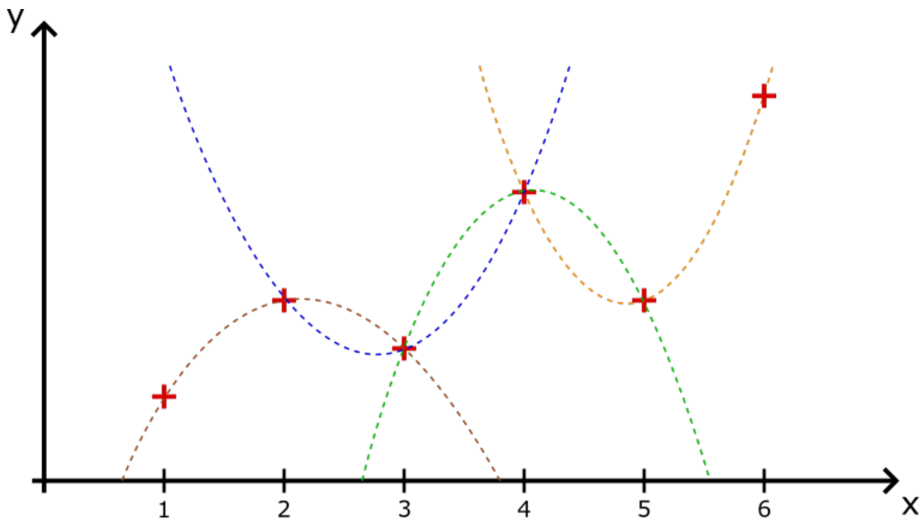
Toto je vzorec lineární interpolace. Mimo daný interval (x_0, x_1) je vzorec použitelný jako lineární extrapolace.



Obr. 4.3: Lineární interpolace.

Další variantou je **kvadratická interpolace**, konkrétně interpolace kružnicí nebo parabolou. Analogicky k lineární interpolaci, při kvadratické interpolaci je interpolační funkcí funkce kvadratická: $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ (grafem této funkce je parabola). Tato funkce lze ovšem využít jen pro 3 konkrétní body. Pokud by jsme chtěli proložit všechny zadané body touto funkcí, vzniklo by několik nezávislých parabol viz obr. 4.4. Kvadratická funkce má totiž tři parametry (a, b a c) a ty jsou jednoznačně dány třemi dvojicemi $[x_1,\ y_1]$, $[x_2,\ y_2]$ a $[x_3,\ y_3]$. Řešíme pak soustavu rovnic [5]

$$y_1 = a \cdot x_1^2 + b \cdot x_1 + c$$
$$y_2 = a \cdot x_2^2 + b \cdot x_2 + c$$
$$y_3 = a \cdot x_3^2 + b \cdot x_3 + c$$



Obr. 4.4: Kvadratická interpolace.

Odhad hodnot metodou kvadratické interpolace předpokládá, že data jsou seřazena podle hodnoty x, pokud ne, je dobré je tak seřadit.

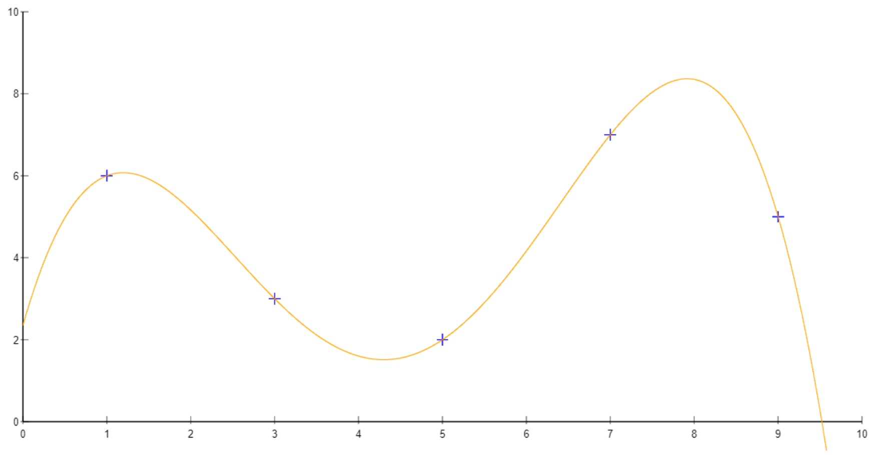
Jako poslední variantu si pak popíšeme **interpolaci polynomem**. Její příklad vidíme na obrázku 4.5, graf vygenerovaný programem Excel 2016. Systém bázových funkcí pro polynomy je čebyševský, tedy interpolační úloha má v prostoru polynomů stupně n jediné řešení. Jinak řečeno pro každou množinu $(n + 1)$ opěrných bod bodů interpolace existuje jediný interpolační polynom stupně nejvýše n.

Tedy pro $(n + 1)$ opěrných bodů určujeme polynom [4]

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

Splňující interpolační podmínky

$$f(x_i) = \sum_{j=0}^{n} a_j x_i^j = y_i.$$



Obr. 4.5: Interpolace polynomemem.

Pro výpočet interpolačního polynomu se používá několik metod: **Lagrangeova**, **Newtonova** a **Hermitova**.

Newtonova interpolace využívá poměrné diference konkrétního řádu podle počtu zadaných bodů. Tento polynom má tu výhodu, že je pro něj oproti Lagrangeově interpolaci méně náročné přidat další bod, protože výpočty předchozích koeficientů zůstanou beze změny. Tvar Newtonova interpolačního polynomu je následující [4]:

$$N_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})$$

Hermitova interpolace je speciální druh interpolace. Jejím charakteristickým rysem je, že její polynom je určen nejen zadanými hodnotami v uzlech, ale i jejich derivacemi.

Lagrangeova interpolace (viz. [4] strana 62) je známý a asi nejsnadnější způsob interpolace funkce zadané diskrétními body. Jedná se o součet polynomů vypočtených pro jednotlivé uzly, když vzorec pro každý uzel je

$$l_i(x) = \frac{(x - x_0)\ldots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\ldots(x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_i - x_0)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)}$$

Interpolační polynom určitého stupně poté dostaneme jako kombinaci $l_i(x)$:

$$
\begin{aligned}
P_n(x) &= f_0 l_0(x) + f_1 l_1(x) + \ldots + f_n l_n(x) \\
&= f_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_n)} + f_1 \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_1)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_n)} + \ldots \\
\ldots &+ f_n \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_n-x_1)(x_n-x_2)\ldots(x_n-x_n)},
\end{aligned}
$$

kde n je stupeň polynomu, nejvýše o jedna menší než je počet zadaných bodů. Tento vzorec si ukážeme na jednoduchém příkladu. Mějme data předepsaná tabulkou

$\mathbf{x}_i$	-1	1	2	3
$\mathbf{f}_i$	-6	-2	-3	2

Nejdříve spočteme jednotlivé polynomy

$$
\begin{aligned}
l_0(x) &= \tfrac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(-1-1)(-1-2)(-1-3)} &= -\frac{1}{24}(x^3 - 6x^2 - 6), \\
l_1(x) &= \tfrac{(x+1)(x-2)(x-3)}{(1+1)(1-2)(1-3)} &= \frac{1}{4}(x^3 - 4x^2 + x + 6), \\
l_2(x) &= \tfrac{(x+1)(x-1)(x-3)}{(2+1)(2-1)(2-3)} &= -\frac{1}{3}(x^3 - 3x^2 - x + 6), \\
l_3(x) &= \tfrac{(x+1)(x-1)(x-2)}{(3+1)(3-1)(3-2)} &= \frac{1}{8}(x^3 - 2x^2 - x + 2).
\end{aligned}
$$

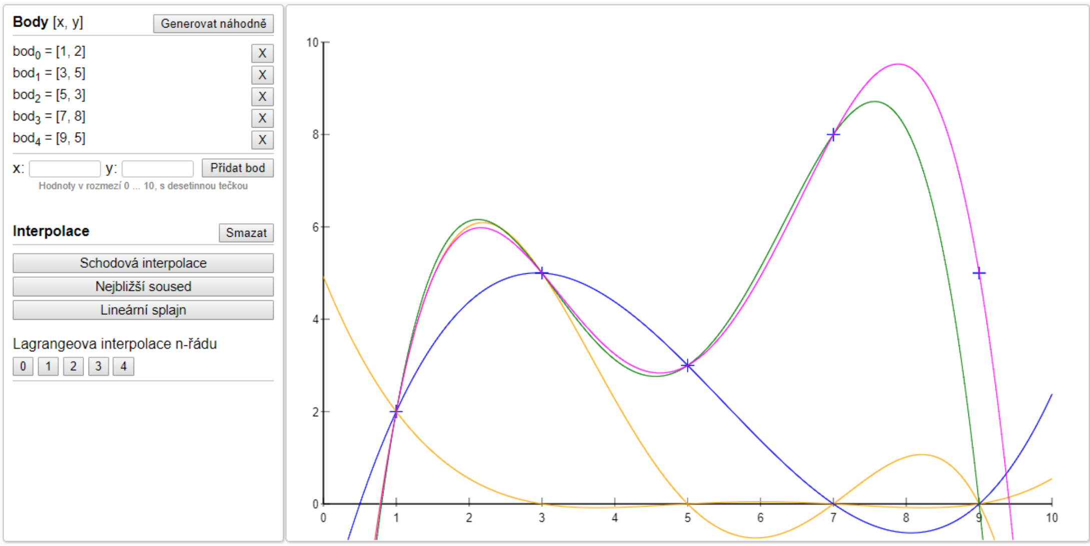
Poté sestavíme interpolační polynom jejich sečtením

$$P_3(x) = -6l_0(x) - 2l_1(x) - 3l_2(x) + 2l_3(x) = x^3 - 3x^2 + x - 1.$$

Realizace apletu

Vzhled apletu je vidět na obrázku 4.6. Aplet je rozdělen na část grafu a část ovládací. Lze zobrazit interpolaci schodovou, nebo nejbližší soused, které se používají například při přepočtu velikosti obrazu. Dále lze zobrazit interpolaci lineární, kdy jsou vstupní data interpolována po jednotlivých dvojicích bodů. Jako poslední možnost je Lagrangeova interpolace zvoleného stupně, kde si uživatel může všimnout, že podle zvoleného stupně interpolace postupně prochází zvoleným počtem bodů.

Pro vygenerování náhodných hodnot lze kliknout na tlačítko Generovat náhodně. Poté se vždy vygeneruje 5 hodnot, kdy hodnota $x = 1, 3, 5, 7, 9$ a hodnota y je zvolena v rozsahu 1–9. Pokud chce uživatel smazat určitou hodnotu klikne na tlačítko s nápisem X vedle příslušného bodu. Pro přidání bodu pak stačí vyplnit do políček



Obr. 4.6: Vzhled apletu interpolace.

hodnotu x a y, kdy hodnoty musí být v rozmezí 0–10 s použitím desetinné tečky a poté kliknout na tlačítko Přidat bod. Jelikož se jedná o interpolaci, aplet nedovolí přidat více různých hodnot y pro jedno x. Po úspěšném přidání nebo smazání bodu se změna projeví v části Body a také v grafu.

Na obrázku 4.6 vidíme graf s 5-ti body, kdy byly postupně aplikovány všechny řády Lagrangeovi interpolace. Kdy uživatel klikal postupně na jednotlivé řády interpolace a sledoval jak se mění výlsedný křivka. Každá nová interpolace se vykreslí náhodně zvolenou barvou pro lepší odlišení.

Pro smazání vykreslených křivek stačí kliknout na tlačítko Smazat vedle nadpisu Interpolace. Poté lze znovu zobrazovat jiné interpolace podle volby.

5 ZÁVĚR

V rámci této práce byly vytvořeny čtyři výukové aplety. Každý z nich se skládá z teorie daného problému, vysvětleného na konkrétních příkladech a možnostech užití, či aplikace v praxi. Dále se skládá z konkrétních apletů a to Lineární kombinaci obrazů, Metodu nejmenších čtverců a lineární regrese, Diskrétní lineární konvoluci ve 2D a Interpolaci v 1D.

Lineární kombinace obrazů se skládá ze tří obrazů, které si zvolí uživatel. Tyto obrazy jsou dále přepočteny podle nastavených parametrů. Aplet obsahuje kombinaci lineární a konvexní. Pod každým obrazem je vidět rozsah jeho hodnot a barevná škála zobrazující minimální a maximální hodnotu daného obrazu.

Metoda nejmenších čtverců a lineární regrese nám názorně ukazuje jak lze proložit naměřené hodnoty předpokládanou funkcí a potlačit tak jejich možnou nepřesnost. Je zde realizována metoda nejmenších čtverců pro funkci lineární, parabolickou a exponenciální, přičemž uživatel si může zvolit vlastní hodnotu nepřesnosti (rozptylu) bodů oproti původní funkci. Poté je spočten vzorec nové křivky a oba vzorce porovnány i s velikostí součtu čtverců. Exponenciální funkce není úplně přesná, myslím si že je to zaokrouhlením čísel javascriptu při použití funkce ln.

Diskrétní lineární konvoluce objasňuje jak funguje konvoluce dvou signálů ve dvojrozměrném poli. Tato operace má hlavní význam pro zpracování obrazu, například jako obrazové filtry, rozostření, detekce hran a jiné. Uživatel zvolí hodnoty vstupní matice a konvolučního jádra, s kterým pak pomocí šipek po této funkci posouvá a názorně vidí jak se počítají jednotlivé hodnoty.

Interpolace demonstruje proložení uživatelem zvolených bodů, u kterých předpokládá, že jsou přesné, protože interpolace prochází přesně těmito body. Uživatel si zvolí vstupní data buďto náhodně, nebo je ručně zadá, kdy žádné x nesmí mít více hodnot y. Poté zvolí druh interpolace (schodová, nejbližší soused, lineární splajn, nebo Lagrangerova), případně i řád. Poté se tato funkce v grafu zobrazí.

LITERATURA

[1] ANDĚL, J.: Matematická statistika. 1. vyd. Praha: SNTL/ALFA, 1978.

[2] ŠLAPAL, Josef. *Základy obecné algebry.* Brno, 2013. Fakulta strojního inženýrství VUT.

[3] PYTLÍČEK, Jiří. *Lineární algebra a geometrie.* Vyd. 3. V Praze: České vysoké učení technické, 2008. ISBN 978-80-01-04063-8.

[4] FAJMON, Břetislav a RŮŽIČKOVÁ Irena. *Matematika 3.* Fakulta elektroniky a komunikačních technologií VUT.

[5] VRBA, Václav. *Aplikace numerických metod aproximace, interpolace a derivování v prostředí Mathematica vhodných pro předmět Matematika I na FAI UTB ve Zlíně.* Město, 2011/2012. Bakalářská práce. Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně, Fakulta aplikované informatiky, Zlín.

[6] *Wikipedie: Otevřená encyklopedie: Konvoluce* [online]. [citováno 5. 08. 2017]. Dostupný z WWW: <https://cs.wikipedia.org/w/index.php?title=Konvoluceoldid=14650664>

[7] *Obrazové filtry.* Is.mendelu [online]. [cit. 2017-08-05]. Dostupné z: <https://is.mendelu.cz/eknihovna/opory/zobraz$_{c}ast.pl?cast = 18431 >$

6 OBSAH PŘILOŽENÉHO CD

Jednotlivé aplety je spouštějí otevřením souboru index.html a jsou testovány v prohlížeči Google Chrome 59.0.3071.115 a Mozilla Firefox 54.0.1.

```
/ ........................................... kořenový adresář přiloženého CD
├── linearni-kombinace
│   ├── images.js
│   ├── index.html
│   ├── jquery-3.2.1.min.js
│   └── vzorec1.PNG
├── konvoluce
│   ├── index.html
│   └── vzorec1.png
├── interpolace
│   ├── index.html
│   ├── vzorec1.png
│   ├── vzorec2.png
│   └── vzorec3.png
└── nejmensi-ctverce
    ├── index.html
    ├── vzorec1.png
    ├── vzorec2.png
    ├── vzorec3.png
    ├── vzorec4.png
    └── vzorec5.png
```