



# VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

## FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

## ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A BIOMECHANIKY

INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND BIOMECHANICS

## EMPIRICKÉ VZTAHY PRO VYHODNOCENÍ MINIATURNÍ ZKOUŠKY PROTLAČOVÁNÍM

EMPIRICAL RELATIONSHIPS FOR THE ASSESSMENT OF THE SMALL PUNCH TEST

### BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

### AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Jiří Venský

### VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Ing. František Šebek, Ph.D.

BRNO 2019



# Zadání bakalářské práce

Ústav:	Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky
Student:	<b>Jiří Venský</b>
Studijní program:	Strojírenství
Studijní obor:	Základy strojního inženýrství
Vedoucí práce:	<b>Ing. František Šebek, Ph.D.</b>
Akademický rok:	2018/19

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

## **Empirické vztahy pro vyhodnocení miniaturní zkoušky protlačováním**

### **Stručná charakteristika problematiky úkolu:**

Zpracujte rešerši na téma vyhodnocení miniaturní zkoušky protlačováním využitelné zejména v energetickém průmyslu s ohledem na mechanické vlastnosti poskytnuté slitiny hliníku a austenitické oceli. Srovnajte dostupné empirické vztahy s analytickým řešením pro kruhovou desku.

### **Cíle bakalářské práce:**

1. Rešerše na téma miniaturní zkoušky protlačováním.
2. Vyhodnocení experimentů pro poskytnutou slitinu hliníku a austenitickou ocel.
3. Porovnání výsledků dostupných empirických vztahů s analytickým řešením.

### **Seznam doporučené literatury:**

CAMPITELLI, E. N., SPÄTIG, P., BERTSCH, J., HELLWIG, C.: Assessment of irradiation-hardening on Eurofer97' and Zircaloy 2 with punch tests and finite-element modeling. Materials Science and Engineering: A, roč. 400-401, str. 386-392, DOI:10.1016/j.msea.2005.02.088, 2005

JEČMÍNKA, M.: Využitelnost protlačovacích zkoušek na miniaturních discích (small punch test - SPT) pro stanovování materiálových charakteristik za vysokých teplot. Brno, 2013. Diplomová práce. Vysoké učení technické v Brně.

HŮLKA, J. Výpočtová predikce tvárného porušování. Brno, 2014. Disertační práce. Vysoké učení technické v Brně.

DOBEŠ, F., DYMÁČEK, P., BESTERCI, M.: Estimation of the mechanical properties of aluminium and an aluminium composite after equal channel angular pressing by means of the small punch test. Materials Science and Engineering: A, roč. 626, str. 313-321, DOI:10.1016/j.msea.2014.12.054, 2015

DÍEZ, P. M. B., CALZADA, M. P., GONZALO, D. C., CHICA, J. C.: Change of mechanical properties of AM60B alloy with heat treatments and its correlation with small punch tests. Theoretical and Applied Fracture Mechanics, roč. 86, č. A, str. 101-108, DOI:10.1016/j.tafmec.2016.09.014, 2016

ŠEBEK, F., KUBÍK, P., PETRUŠKA, J.: Standard tensile test compared to the small punch test of aluminium alloy. In: Engineering Mechanics 2018. Prague: Institute of Theoretical and Applied Mechanics of the Czech Academy of Sciences, 2018, str. 745-748. DOI:10.21495/91-8-745. ISBN 978-80-86246-88-8. ISSN 1805-8248

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2018/19

V Brně, dne

L. S.

---

prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc.  
ředitel ústavu

---

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.  
děkan fakulty

## **ABSTRAKT**

Cílem této práce je popsání miniaturní zkoušky protlačováním, vymezení použití této zkoušky, a to včetně shrnutí její aplikace. Dále byla provedena rešerše empirických vztahů, které slouží k určení meze kluzu a také meze pevnosti zkušební vzorku, který byl podroben této zkoušce. Byly vytvořeny čtyři modely, pomocí kterých byla analyticky stanovena mez kluzu dvou materiálů na základě Kirchhoffovy teorie desek. Vypočítané hodnoty byly srovnány s hodnotami meze kluzu, která byla zjištěna normovanou zkouškou tahem a také s hodnotami obdrženy z empirických vztahů. Empirické vztahy dosahují při určování meze kluzu menších odchylek než použité výpočtové modely.

## **KLÍČOVÁ SLOVA**

Miniaturní zkouška protlačováním, Kirchhoffova teorie desek, mez kluzu, hliníková slitina 2024 – T351, austenitická ocel AISI 316L

## **ABSTRACT**

This thesis aims at describing the small punch test, considering its limitations and its applications. Research of empirical equations, by which the value of yield stress and ultimate tensile stress is determined, was carried out. Furthermore, four calculation models were introduced. These models served to establish the yield stress of two materials using analytical solution based on Kirchhoff's theory of plates. Calculated values of the yield stress were compared to the values obtained by the normalized tensile test. Calculated values were compared to the values of yield stress from the empirical equations found in literature as well. Yield stress values obtained by empirical relations were more accurate than those obtained from analytical solutions stated in this thesis.

## **KEY WORDS**

Small punch test, Kirchhoff's plate theory, yield stress, aluminium alloy 2024 – T351, austenitic steel AISI 316L



## **BIBLIOGRAFICKÁ CITACE**

VENSKÝ, J. *Empirické vztahy pro vyhodnocení miniaturní zkoušky protlačováním*. Brno, 2019. Dostupné také z: <https://www.vutbr.cz/studenti/zav-prace/detail/116029>. Bakalářská práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky. Vedoucí práce František Šebek.



## **PROHLÁŠENÍ**

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci na téma Empirické vztahy pro vyhodnocení miniaturní zkoušky protlačováním vypracoval samostatně pod vedením Ing. Františka Šebka, PhD., a to pouze s použitím uvedené literatury.

V Brně dne 23.května 2019

---

Jiří Venský



## **PODĚKOVÁNÍ**

Tímto bych chtěl poděkovat vedoucímu této práce Ing. Františkovi Šebkovi, PhD. za trpělivost, ochotu během konzultací a za věcné rady. Také bych chtěl poděkovat své rodině, přítelkyni a přátelům za podporu.



## OBSAH

1. ÚVOD.....	16
2. MATERIÁLOVÉ CHARAKTERISTIKY .....	17
2.1 Mez kluzu a mez pevnosti.....	17
2.1.1 Normovaná zkouška tahem .....	17
2.2 Tečení materiálu – <i>Creep</i> .....	17
2.3 Tranzitní teplota a <i>small punch testing</i> .....	18
2.4 Lomová houževnatost .....	18
3. <i>SMALL PUNCH TEST</i> .....	19
3.1 Aplikace SPT .....	20
3.2 Určení kritických hodnot zátěžných sil.....	22
3.3 Metody určování meze kluzu a meze pevnosti .....	22
3.3.1 Empirické vztahy.....	22
3.3.1.1 Mao a Takahashi.....	23
3.3.1.2 Guan a Wang .....	23
3.3.1.3 Song a kolektiv .....	24
3.3.1.4 Norris a Parker.....	24
3.3.1.5 Purmanský a Matocha.....	24
3.3.1.6 García a kolektiv .....	25
3.3.1.7 <i>Slope</i> metody .....	25
4. TEORETICKÝ PRINCIP ŘEŠENÍ .....	26
4.1 Tělesa pružnosti a pevnosti .....	26
4.2 Desky.....	27
4.2.1 Rozdělení desek.....	27
4.2.1.1 Tlusté desky .....	27
4.2.1.2 Tenké desky s malými průhyby.....	27
4.2.1.3 Tenké desky s velkými průhyby .....	27
4.2.1.4 Skořepiny .....	27
4.2.2 <i>Kirchhoffova</i> teorie desek.....	28
5. VÝPOČTOVÉ MODEL Y PRO URČENÍ MEZE KLUZU .....	30
5.1 Zatížení osamělou silou.....	30
5.1.1 Vetknutí .....	30
5.1.2 Rotační vazba .....	32
5.2 Konstantní zatížení.....	33
5.2.1 Vetknutí .....	33
5.2.2.1 Interval $0 < r < r_1$ .....	33
5.2.2.2 Interval $r_1 < r < r_2$ .....	34
5.2.2.3 Výpočet integračních konstant .....	36
5.2.3 Rotační vazba .....	37
5.2.3.1 Výpočet integračních konstant .....	37
5.3 Parabolické zatížení .....	38
5.3.1 Vetknutí .....	38

5.3.1.1	Interval $0 < r < r_1$ .....	39
5.3.1.2	Interval $r_1 < r < r_2$ .....	40
5.3.1.3	Výpočet integračních konstant vetknutí .....	42
5.3.2	Rotační vazba .....	43
5.3.2.1	Výpočet integračních konstant rotační vazby .....	43
5.4	Lineární zatížení .....	44
5.4.1	Vetknutá deska .....	45
5.4.1.1	Interval $0 < r < r_1$ .....	45
5.4.1.2	Interval $r_1 < r < r_2$ .....	46
5.4.2	Výpočet integračních konstant vetknutí .....	48
5.4.3	Rotační vazba .....	49
5.4.3.1	Výpočet integračních konstant rotační vazby .....	49
5.5	Zkoumané materiály .....	50
5.5.1	Hliníková slitina 2024-T351 .....	50
5.5.2	Austenitická ocel AISI 316L .....	50
6.	VYČÍSLENÍ ANALYTICKÉHO ŘEŠENÍ .....	51
6.1	Hliníková slitina 2024-T351 .....	51
6.1.1	Zatížení osamělou silou v ose rotace .....	51
6.1.1.1	Vetknutí .....	52
6.1.1.2	Rotační vazba .....	52
6.1.2	Konstantní zatížení .....	52
6.1.2.1	Vetknutí .....	52
6.1.2.2	Rotační vazba .....	53
6.1.3	Parabolické zatížení .....	53
6.1.3.1	Vetknutí .....	53
6.1.3.2	Rotační vazba .....	54
6.1.4	Lineární klesající zatížení .....	54
6.1.4.1	Vetknutí .....	54
6.1.4.2	Rotační vazba .....	54
6.2	Austenitická ocel AISI 316L .....	55
6.2.1	Zatížení osamělou silou v ose rotace .....	56
6.2.1.1	Vetknutí .....	56
6.2.1.2	Rotační vazba .....	56
6.2.2	Konstantní zatížení .....	56
6.2.2.1	Vetknutí .....	56
6.2.2.2	Rotační vazba .....	56
6.2.3	Parabolické zatížení .....	57
6.2.3.1	Vetknutí .....	57
6.2.3.2	Rotační vazba .....	57
6.2.4	Lineární klesající zatížení .....	57
6.2.4.1	Vetknutí .....	57
6.2.4.2	Rotační vazba .....	58
7.	ZHODNOCENÍ VÝSLEDKŮ .....	59

7.1 Hliníková slitina .....	59
7.2 Austenitická ocel .....	61
8. ZÁVĚR .....	63
Seznam použité literatury .....	64
Seznam fyzikálních veličin .....	68

## 1. ÚVOD

Jednou z nejdůležitějších materiálových charakteristik je mez kluzu. Pro veškerá zařízení je nutné, aby byla zajištěna jejich bezpečná činnost. Jakákoliv změna tvaru, hlavního rozměru nebo případně trhlina může ohrozit bezpečnost zařízení. Při navrhování konstrukčního řešení jakéhokoliv problému musí být bráno v potaz chování materiálu, který je při výrobě použit. Většina havarijních stavů nenastává při překročení meze kluzu, nýbrž v důsledku únavy. Pochopení stavu meze kluzu je totiž mnohem jednodušší a v praxi se mu díky tomu dá snadněji vyhnout.

Mimo navrhování je důležité znát i chování materiálu za chodu. Právě posuzování chování materiálu během provozu je velice problematické. Není možné udělat analýzu, je-li materiálu nedostatek, nebo by jeho odběr ohrozil funkčnost. Právě z tohoto důvodu byla vyvinuta zkouška, která vyžaduje velmi malé rozměry zkušební vzorku. Tato metoda se nazývá miniaturní zkouška protlačováním, anglicky *Small punch test*. Jedná se o protlačování miniaturních disků a následné vyhodnocení meze kluzu na základě síly, která je potřebná k protlačení vzorku.

I když je známa síla, která vyvolá mez kluzu, pořád zůstává problém, jak přesně určit samotnou mez kluzu. Za tímto účelem byly vypořádovány jisté závislosti a různé výzkumné týmy vytvořily mnoho empirických vztahů, které slouží právě k určení meze kluzu. V této práci je několik z nich uvedeno a následně aplikováno na dva materiály.

V další části této práce byly odvozeny vztahy pro výpočet meze kluzu na základě Kirchhoffovy teorie desek. Celkem byly vypracovány čtyři modely, které posloužily k určení meze kluzu. Hodnoty vypočtené pomocí těchto modelů byly nakonec srovnány s hodnotami určenými pomocí empirických vztahů a pomocí přesnější experimentální metody, a to zkouškou tahem.

## 2. MATERIÁLOVÉ CHARAKTERISTIKY

V této kapitole je uveden přehled materiálových charakteristik, které je možné zkoumat pomocí miniaturní zkoušky protlačováním.

### 2.1 Mez kluzu a mez pevnosti

Mezní stav pružnosti materiálu nastává v bodě, kdy vzniká první plastická deformace. Do tohoto bodu je materiál deformován elasticky a po odlehčení se vrátí do původního stavu. Mechanismem elastické deformace je posouvání atomů v uzlových bodech své mřížky vlivem vnějšího zatížení, mění se parametr mřížky [1]. Mez pružnosti se dá také definovat jako napětí, při kterém ztrácí Hookovský materiál linearitu. Určování přesných deformací a posuvů těles za mezi kluzu už proto není možné analyticky řešit.

Mez pevnosti je stav, ve kterém vzniká plastická nestabilita. U tahových zkoušek je to vznik krčku. U kovových materiálů je to také nejvyšší možné dosažitelné napětí. Do meze pevnosti platí základní mechanismy plastické deformace, kterými jsou skluz dislokací anebo dvojčatění. Skluz dislokací probíhá v nejhustěji obsazených rovinách krystalové mřížky a to proto, že práce pro přemístění atomů je v těchto rovinách nejmenší. Při dvojčatění na rozdíl od skluzu dislokací se jedná o pohyb neúplných dislokací, a to o necelou meziatomovou vzdálenost. V mikrostruktuře je konečný obrazec souměrný podle roviny dvojčatění [1].

Určování deformací a posuvů reálných strojních součástí mezi těmito dvěma hodnotami se provádí numericky. Jedním z nejpoužívanějších nástrojů v dnešní době je metoda konečných prvků.

#### 2.1.1 Normovaná zkouška tahem

K určení meze kluzu se používá normovaná zkouška tahem [1]. Při této zkoušce je normovaný vzorek natahován a síla vyvinutá na vzorek se zaznamenává. Pohyb uchopovacích čelistí je pomalý, aby se zatížení vzorku dalo považovat za kvazistatické, tzn i když se čelisti pohybují, jejich dynamický vliv je velmi malý. U této zkoušky vzniká v materiálu jednoosý stav napjatosti a trojosý stav deformace. Pro tahovou zkoušku tedy platí Hookeův zákon pro jednoosou napjatost. Ten říká, že závislost mezi napětím a deformací je lineární [2].

$$\sigma = E \varepsilon \quad (2.1)$$

- $\sigma$  – napětí
- $E$  – Youngův modul pružnosti v tahu
- $\varepsilon$  – přetvoření

Reálné strojní součásti ale zpravidla nebývají zatíženy jen v jedné ose. A přepočtení reálného víceosého napětí na redukované napětí s sebou nese chyby [2]. Proto se používají i jiné mechanické zkoušky, mezi které patří i protlačovací zkoušky, které vystihují zatížení některých reálných součástí lépe. Vzájemné přepočty mezi různými zkouškami podléhají v dnešní době výzkumu.

### 2.2 Tečení materiálu – Creep

*Creep* neboli tečení materiálu nastává, pokud je materiál vystaven za vysokých teplot konstantnímu zatížení a v důsledku i při napětí, které je nižší než mez kluzu, deformace roste [3]. *Creepu* podléhají konstrukce vystavené vyšším teplotám. Mezi tyto konstrukce patří lopatky spalovacích turbín nebo potrubí v tepelných elektrárnách a jejich odolnost vůči *creepu* je důležitá, neboť na jejich funkčnosti závisí mnoho životů. *Creepové* zkoušky jsou drahé a pro vytvoření *creepových* křivek pro různá napětí je potřeba relativně velké množství materiálu

[4]. Neboť zkoušeným materiálem může být drahá superslitina, byla snaha vyvinout nestandardní zkoušku, jejíž realizace by byla levnější. I toto byl jeden z impulsů k vyvinutí miniaturního testu protlačováním – *Small punch test (SPT)*. Jeden z SPT se nazývá *constant force*, tedy konstantní síla a slouží právě pro posouzení *creepových* vlastností [5].

Další z faktorů, které umožňuje SPT určit, je relaxace napětí. Dochází k ní v tělesech upnutých tak, aby jejich deformace zůstala konstantní [4]. Při těchto podmínkách se pak část elastické deformace přemění na plastickou a napětí v tělese poklesne. Relaxace se může určovat za pokojových i zvýšených teplot. K určení relaxačních vlastností slouží speciální SPT – R test, kde R značí relaxaci. Při této zkoušce se udržuje konstantní deformace, a to pomocí počítače. Opět je velkou výhodou SPT velikost zkušební vzorku.

### 2.3 Tranzitní teplota a *small punch testing*

Jednou z dalších materiálových charakteristik je nárazová práce. Jedná se o práci potřebnou k přeražení zkušební vzorku. K určení této charakteristiky slouží zkouška rázem v ohybu a provádí se na Charpyho kladivu [1]. Práce se následně určuje jako rozdíl potenciálních energií. Hodnota této práce závisí na tom, v jakém stavu je zkoušený vzorek. Rozlišujeme dva stavy, křehký a houževnatý. U materiálů s BCC krystalovou mřížkou je změna nárazové práce s rostoucí teplotou výrazná. Pro přeražení houževnatého materiálu (lom je tvárný) je zapotřebí vykonat více práce. Každý materiál je z části houževnatý a z části křehký. Práce potřebná pro přeražení vzorku (a tím i podíl křehkého lomu) je funkcí teploty a závisí na ní podle funkce *hyperbolický tangens*. Teplota, při které dosáhne podíl křehkého lomu 50 %, se nazývá tranzitní teplota  $t_{50\%}$ . Další tranzitní teploty se řídí například konkrétní hodnotou nárazové práce, nebo střední hodnotou nárazové práce. Určení této teploty je důležité z konstrukčního hlediska, aby při provozní teplotě nedošlo k jinému chování než za pokojové teploty.

Podobně jako u normalizované zkoušky tahem i u zkoušky rázem v ohybu má nevýhodu velikost vzorku, pokud jsou zkoumány vlastnosti materiálu, kterého není mnoho k dispozici, nebo podobně jako u meze pružnosti a meze pevnosti není možno odebrat z provozního místa velké množství materiálu na výrobu normovaného vzorku. Proto byla snaha zkusit zjistit tranzitní teplotu pomocí SPT. Testy ovšem ukázaly rozdílné hodnoty tranzitní teploty u Charpyho testu a SPT [6]. Tyto rozdíly mohou být důsledkem velikosti, absence vrubu a také rozdílné rychlosti zatěžování u obou zkoušek. Po přidání vrubu na vzorek pro SPT už bylo možno proložit data funkcí *hyperbolický tangens* a tranzitní teplota se přiblížila teplotě zjištěné Charpyho testem.

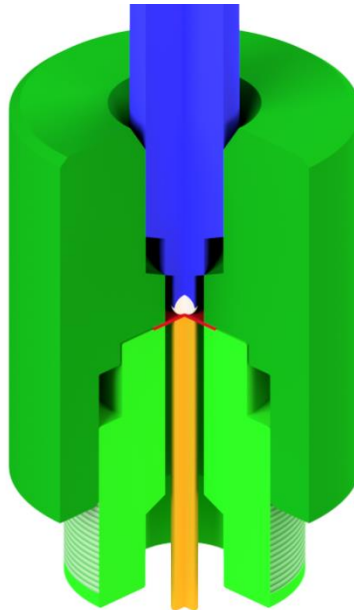
### 2.4 Lomová houževnatost

Poslední problematrická materiálová charakteristika je lomová houževnatost. Lomová houževnatost  $K_{IC}$  (v anglicky psaných zdrojích se používá i jiné značení) pomáhá správně vyhodnotit budoucí chování trhliny [7]. Jedná se o kritickou hodnotu faktoru intenzity napětí  $K_I$ . Je možné hodnotu  $K_I$  chápat jako hnací sílu trhliny k lomu a  $K_{IC}$  jako odpor materiálu [8]. Pro hodnotu lomové houževnatosti platí předpoklad, který tvrdí, že nezávisí na velikosti tělesa.

Kvůli tomuto předpokladu byla snaha odvodit její hodnotu ze záznamu SPT. Do doby rozmachu SPT byla pro určení lomové houževnatosti potřeba větších vzorků. Zjišťování lomové houževnatosti se setkala s počátečními neúspěchy, ale nakonec se podařilo najít lineární závislost mezi lomovou houževnatostí a přetvořením, které odpovídá lomu [9]. I přesto není doporučováno používat SPT k určování lomové houževnatosti a literatura doporučuje tyto testy vyhodnocovat s většími vzorky při jiných testech. Mezi tyto testy patří například Pelliniho test padajícím závažím nebo Robertsonův test [8].

### 3. SMALL PUNCH TEST

*Small punch test* je poměrně nová, alternativní metoda zjišťování mechanických vlastností. Poprvé byla použita na *Massachusetts Institute of Technology (MIT)* pro studium radiačního zkrhčování v roce 1981 [10]. Poté se tato zkouška začala používat a vyvíjet v Japonsku a první pokusy o standardizaci proběhly již v roce 1988 Japonským výzkumným institutem *JAERI*. Impulsem pro vývoj takové zkoušky bylo testování mechanických vlastností součástí, které by mohly podléhat degradačním procesům způsobeným například zvýšenou radiací [9]. Vývoj SPT byl umožněn vývojem přesných počítačem řízených elektromotorů a výsledky byly dále zlepšeny použitím metody konečných prvků.



Obrázek 1: Aparatura SPT [11]

Na obrázku 1 [11] je znázorněn přístroj na provádění *small punch* testu. Zelenými barvami jsou nakresleny spodní a horní matrice. Modrá barva představuje těleso, ve kterém je umístěná bílá protlačovací kulička. Zkušební vzorek má červenou barvu. Posledním dílem se žlutá tyčinka, která slouží k zaznamenávání průhybu. Tato tyčinka neklade prohýbání vzorku téměř žádný odpor a její přítomnost je tedy pro analytické řešení této situace nepodstatná. Měřený průhyb je zaznamenáván a vykreslován. Pomocí znalostí některých z empirických vztahů pro napětí se vypočítá mez kluzu. SPT může být realizováno třemi základními způsoby: za konstantní rychlosti posunu kuličky, za použití konstantní zátěžné síly a kombinací těchto dvou. První zmíněný způsob se používá k určení meze kluzu [4]. Druhý a třetí pak k určení *creepových* a relaxačních vlastností. Tato práce se bude zabývat prvním způsobem, ten je v literatuře označován jako *Small punch test – constant deflection rate (SPT-CDR)*.

Princip provádění SPT je znázorněn na obrázku. Zkušební vzorek je uchopen mezi horní a spodní matici. Tyto matrice jsou při provádění zkoušky na sebe našroubovány a přitaženy. To, jakou velikost má přitahovací síla nadále určuje, jaký typ SPT-CDR se provádí. Při použití vysoké přitahovací síly se jedná o tzv. *bulge punch test* [5] a vzorek se v průběhu zkoušky nepohybuje. Při použití nízké, nebo dokonce žádné přitahovací síly je zkouška označována jako *punch drawing test* [5]. U *punch drawing* testu může dojít k posunutí vzorku, a to podobným způsobem jako u tvářecí technologie hlubokého tažení. Podstatnou součástí zkoušky je samozřejmě samotné protlačovací těleso. Realizace „razníku“, pokud se protlačuje kulovým tělesem, je možná dvěma způsoby. První způsob je uskutečněn obrobenu plochou, protlačování je uskutečněno jedním tělesem. Druhá možnost je tlačení ocelové, případně

i keramické, kuličky pomocí válce. Keramická protlačovací kulička je na obrázku 2 [12]. Protlačování nemusí být vždy uskutečněno koulí. Výzkumná centra používají i čtvercové a jiné profily a porovnávají jejich rozdíly vůči kouli. Empirické vztahy, používané na zjištění požadovaných mechanických vlastností, jsou vytvořeny pro kulové protlačovací těleso, a proto protlačování jinými profily není prozatím velmi užitečné [9].



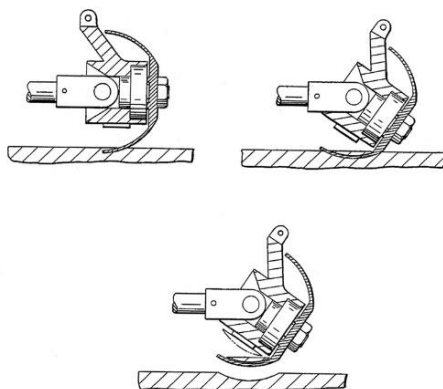
Obrázek 2: Protlačovací těleso keramické [12]

### 3.1 Aplikace SPT

SPT se používá, jak již bylo uvedeno, na materiálech vystavených degradačním procesům. Jaderné elektrárny ve svém primárním oběhu využívají řízené štěpné řetězové reakce na radioaktivním uranu a reaktor je vystaven vysoké radiaci. Poblíž reaktorů bývají umístěny vzorky tak, aby byly radiaci také vystaveny, nebo jsou vzorky odebrány nedestruktivně. Pomocí SPT pak může být zkoumán vliv radiace na mechanické vlastnosti. Součástky vystavované zvláštním procesům většinou bývají vyrobeny z kvalitních, a proto také velmi drahých, slitin. U SPT je tedy oceňována malá spotřeba materiálu při testování [5]. Mezi další vlivy, u kterých je snaha zjistit, jak ovlivňují mechanické vlastnosti, patří korozní (nebo jinak reagující) prostředí, voda a její roztoky, elektrina apod.

Ve strojírenském průmyslu je potřeba součásti k sobě spojovat. Spoje jsou realizovány mnoha způsoby. Jeden z nejrozšířenějších typů spojů je spoj svarový. Určit mechanické vlastnosti vlastního svaru je sice velice důležité, ale pomocí tradičních zkoušek nemožné [5]. Před vynálezem SPT se vlastnosti svarových spojů posuzovaly nepřímými metodami. Simulace založené na analytických řešeních kritických míst ne vždy dostatečně vystihovaly skutečné průběhy napětí a deformací svaru. SPT umožňuje výzkumným týmům udělat si lepší představu o tom, k jakým deformacím v zatížených svarech dochází.

Odvětví, které SPT využívá nejčastěji, je energetický průmysl, kde ve většině případů není k dispozici mnoho materiálů a klasické zkoušky proto nepřipadají v úvahu. Odběr vzorku pro SPT, jak již bylo zmíněno, může být nedestruktivní [13]. Pokud tedy při konstrukci zařízení nebylo bráno v potaz potenciální testování a nejsou tudíž vzorky materiálu na místě, můžeme si materiál odebrat přímo ze zařízení. K odběru se používá například patentovaný nástroj firmy *Rolls-Royce*, který je znázorněn na obrázku 3 [13]. Ten pomocí řezné skořápky vyřízne část koule z tělesa a magnetem jej zadrží. Z vyříznuté části koule poté může být vyříznut a následně vybroušen testovací vzorek pro SPT. Požadavky na přesnost i drsnost vzorku jsou poměrně vysoké, protože výsledky se i při malých změnách rozměrů mohou výrazně lišit.



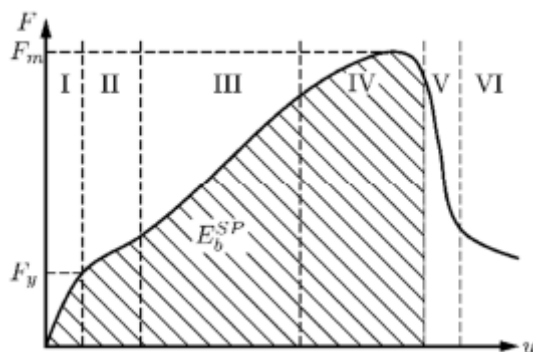
Obrázek 3: Zařízení pro nedestruktivní odběr vzorku [13]

Vzorky mohou nabývat různých rozměrů. Takahashi a Mao, kteří publikovali o SPT již v 80. letech minulého století, použili disk o průměru 3 mm a výšce 0,5 mm [9]. Evropský výbor pro normalizaci doporučuje průměr 8 mm, průměr dolní matrice 4 mm a průměr protlačovací kuličky 2,5 mm [5]. V případě, je-li použit k testování vzorek jiných rozměrů, je nutno tomu přizpůsobit i průměry dolní matrice a protlačovacího tělesa.

Hlavní nevýhoda SPT spočívá v tom, že neexistuje norma, která by tuto zkoušku popisovala. Proto mnoho výzkumných center přichází s jinými výsledky, přestože byl zkoušce podroben stejný materiál. Významnou roli v neshodě výsledků hraje různá síla stisku čelistí testujícího zařízení. V současnosti se o normalizaci SPT snaží Evropský výbor pro normalizaci *Comité Européen de Normalisation* (CEN) ve své práci *Small Punch Test Method for Metallic Materials* (CWA), která je jakýmsi návodem pro realizaci této zkoušky [5].

Ovšem i kdyby byly podmínky zkoušky jednotné, pořád by docházelo k rozdílným výsledkům, i když už s menšími odchylkami. Příčinou takového chování je malý rozměr zkušebních vzorků [4]. Při těchto rozměrech už hraje roli vzájemné rozložení jednotlivých zrn a jejich velikost. Toto chování může být očekávatelné, byla-li součástí, ze které je vzorek odebrán, vystavena technologickým procesům, které ovlivňují orientaci a tvar mikrostruktury [14]. Mezi procesy ovlivňující orientaci a tvar patří tvářecí operace jako například válcování a tažení.

Klasický záznam zkoušky pro houževnatý materiál (na obrázku 4) je možné rozdělit do šesti oblastí. I. oblast je elastická a končí silou  $F_e$ , oblast II. tedy zaznamenává přechod elastického a plastického chování materiálu. Oblast III. ukazuje zpevňování a IV. naopak tvorbu krčku a následné změkčování, tato oblast končí iniciací trhliny. Oblast V. značí šíření trhliny ve tvaru kružnice (jako protlačující těleso) a je charakteristická prudkým poklesem síly. V oblasti VI. již dochází jen k odlomení části vzorku [15].



Obrázek 4: Záznam zkoušky pro houževnatý materiál [15]

## 3.2 Určení kritických hodnot zátěžných sil

Zatímco síla  $F_m$ , jež je potřebná k dosažení meze pevnosti, je ze záznamu zkoušky snadno zjištělná, síla  $F_e$ , která způsobí mez kluzu, již není jednoduše odečitatelná. Experimenty ukázaly několik možných způsobů určení této síly. Další metody jsou i nadále zkoumány a navrhovány.

V první části záznamu lze křivku aproximovat lomenou přímkou [16]. Toto řešení vychází ze dvou okrajových bodů. Počátek a bod, jehož souřadnice jsou  $u_b = h$  a tomu odpovídající síla. Dále se pomocí metody nejmenších čtverců určí bod zlomu přímky. Tato metoda se označuje, metoda dvou sečen. Za sílu  $F_e$  se potom označuje síla odečtena přímo z průsečíku těchto dvou přímek. CWA dále doporučuje minimalizovat chybu podle vzorce v rovnici 3.1 [5]. Síla  $F$  je funkcí průhybu, stejně tak i lomená přímka  $f$ .

$$E_{rr} = \int [F(u) - f(u)]^2 du \quad (3.1)$$

To znamená, že za sílu  $F_e$  se považuje síla, která byla odečtena z grafu spuštěním kolmice z průsečíku dvou sečen. Průsečík této kolmice a vlastního záznamu zkoušky má souřadnice  $u_a$  a  $F_e$ . Obvykle vychází hodnota  $F_e$  vyšší před korekcí doporučenou CWA.

Další způsob odečítání síly  $F_e$  se nazývá metoda dvou tečen [6]. Metoda je podobná předchozí uvedené metodě. Rozdíl spočívá v tom, že namísto metody nejmenších čtverců se ve dvou bodech, nejčastěji pro  $u = 0$  a  $u = h$  sestrojí tečny k záznamu zkoušky. Nevýhodou této metody je podmínka sestrojitelosti tečen. Oba výchozí body musí mít dostatečně lineární okolí, aby tato metoda dodávala přibližně přesnou hodnotu  $F_e$ . Proto se metoda dvou sečen, která spoléhá čistě na numerický algoritmus, používá častěji.

Základní trojici metod vedoucích k určení síly  $F_e$  uzavírá metoda offset. Podobně jako se u jednoosé tahové zkoušky v  $\sigma/\varepsilon$  diagramu určuje  $R_e$  vykreslením rovnoběžky k tečně záznamu v počátku grafu posunutě o konkrétní hodnotu po ose  $\varepsilon$ , metoda offset vykresluje rovnoběžku k tečně posunutou o hodnotu  $u$ . Nejčastěji se používají hodnoty  $u = h/10$  případně  $u = h/100$  [6].

Mimo grafické metody určování potřebných sil se v technické praxi používají i empirické vztahy.

## 3.3 Metody určování meze kluzu a meze pevnosti

Mezní hodnoty napětí mohou být při testování určovány empirickými vztahy anebo pomocí numerických simulací. Dva nepoužívanější principy simulací jsou využití neuronových sítí a inverzní numerická simulace pro získání křivky zpevnění [17].

Při vytváření modelu pro simulace musí být bráno v potaz mnoho vlivů. Například řešení nebude dávat přibližně správná řešení, pokud nebudou všechny ostatní přítomná tělesa kromě disku mít charakter tuhého tělesa [15]. Ve skutečnosti se ale i matrice i razník také deformují. V porovnání s deformací desky jsou to ovšem zanedbatelné hodnoty. Dále musí být brán v potaz součinitel tření mezi razníkem a vzorkem. Tato nelinearita způsobuje v analytických řešeních SPT problémy. Pro modelování je nutno předpokládat izotropní charakter vzorku z pohledu jeho struktury, jakékoliv vady mikrostruktury, případně vměstky také způsobují odchylky modelu od reálného chování vzorku při zkoušce.

### 3.3.1 Empirické vztahy

Protože analytický výpočet meze kluzu a pevnosti je velice náročný uvádí různé zdroje své vlastní aproximační vztahy. Tyto vztahy byly určeny experimentálně, a proto nemusí být vždy všechny použitelné. Platnost vztahů může být ovlivněna materiálem, rychlostí posuvu a jinými

faktory. V následujících odstavcích budou tyto empirické vztahy uvedeny a bude popsán jejich princip.

### 3.3.1.1 Mao a Takahashi

Jedna z prvních vědeckých prací zabývajících se miniaturním testováním, konkrétně SPT byla napsána Maoem a Takahashim. Určování mezních napětí vychází z regrese experimentálních hodnot pro 8 materiálů [9]. Pro tuto zkoušky byly použity dva typy vzorků, a to disky o průměru 3 mm a výšce 0,24–0,25 mm a kvádry s čtvercovou podstavou 10×10×0,5 mm. Cílem výzkumu bylo určení lomové houževnatosti za pomoci ekvivalentního lomového přetvoření. K empirickému určení lomové houževnatosti ovšem musely být navrženy i vztahy aproximující mez kluzu  $R_e$  i mez pevnosti  $R_m$ .

$$R_e = 0,36 \left( \frac{F_e}{t^2} \right) \quad (3.2)$$

$$R_m = 0,13 \left( \frac{F_m}{t^2} \right) + 320 \quad (3.3)$$

- $t$  [mm]– počáteční tloušťka vzorku (literatura uvádí případně označení  $h_0$ )

Tyto vzorce lze obecněji zapsat následovně:

$$R_e = \beta_{1k} \left( \frac{F_e}{t^2} \right) + \beta_{2k} \quad (3.4)$$

$$R_m = \beta_{1m} \left( \frac{F_m}{t^2} \right) + \beta_{2m} \quad (3.5)$$

$\beta_{1k}$ ,  $\beta_{2k}$ ,  $\beta_{1m}$  a  $\beta_{2m}$  představují koeficienty, které závisí na podmínkách testování. Pro vztahy podle Takahashiho a Maa platí, že  $\beta_{2k} = 0$ . V číselných hodnotách je zohledněn například průměr penetrační kuličky a průměr spodní matrice. Hodnoty těchto koeficientů se liší také kvůli různým možnostem určení síly  $F_e$ . To znamená, že jejich hodnoty je doporučeno při každém měření optimalizovat [6]. Za zmínku stojí také rozměry koeficientů. Ty, jež vystupují ve vztahu jako součinitele síly ( $\beta_1$ ) jsou bezrozměrné, koeficienty  $\beta_1$  musí mít stejný rozměr jako veličina na levé straně, tedy MPa [16].

Z obecného zápisu vychází většina dalších empirických vztahů. Vztahy se tedy vzájemně liší hlavně v hodnotách  $\beta$  koeficientů. V následujících vztazích se síla dosazuje v N, a ne v kN, jak tomu bylo u prvních dvou vztahů.

Další vztahy, které mají stejně jako první uvedené hodnotu  $\beta_{2k} = 0$  a hodnota  $\beta_{1k}$  byla stanovena ze vzorku o tloušťce 0,25 mm, jsou tyto:

Ruan [18]:

$$R_e = 0,413 \left( \frac{F_e}{t^2} \right), \quad (3.6)$$

Finarelli [19]:

$$R_e = 0,45 \left( \frac{F_e}{t^2} \right), \quad (3.7)$$

Následující vztah byl odvozen pro vzorky o tloušťce 0,5 mm:

Cuesta a Alegre [20]:

$$R_e = 0,4329 \left( \frac{F_e}{t^2} \right). \quad (3.8)$$

Tyto vztahy slouží pouze k určení meze kluzu.

### 3.3.1.2 Guan a Wang

Empirické vztahy podle Guana a Wanga používají sílu  $F$  zjištěnou metodou offset pro  $u = h/10$ . Na rozdíl od Takahashiho a Maa jejich empirické vztahy používají čtyři koeficienty

nabývající těchto hodnot:  $\beta_{1k} = 0,4847$ ,  $\beta_{2k} = 21,359$ ,  $\beta_{1m} = 0,0666$  a  $\beta_{2m} = 146,03$  [21]. Empirické vztahy tedy mají následující tvar:

$$R_e = 0,4847 \left( \frac{F_e}{t^2} \right) + 21,359 \quad (3.9)$$

$$R_m = 0,0666 \left( \frac{F_m}{t^2} \right) + 146,03 \quad (3.10)$$

### 3.3.1.3 Song a kolektiv

Podobně jako předchozí empirický vztah i vztahy Songa a kolektivu pro určení napětí mají čtyři korekční koeficienty. I v tomto případě byla síla  $F_e$  určena metodou odsazení (z anglického *offset*) [22]. Hodnoty koeficientů jsou následující:  $\beta_{1k} = 0,23944$ ;  $\beta_{2k} = 55,26$ ;  $\beta_{1m} = 0,07464$ ,  $\beta_{2m} = 92,54$ . Empirické vztahy jsou uvedeny v rovnicích (3.11) a (3.12) [22].

$$R_e = 0,23944 \left( \frac{F_e}{t^2} \right) + 55,26 \quad (3.11)$$

$$R_m = 0,07464 \left( \frac{F_m}{t^2} \right) + 92,54 \quad (3.12)$$

### 3.3.1.4 Norris a Parker

Vztah pro určení meze kluzu je celkem jednoduchý a má tento tvar [23]:

$$R_e = 0,457 \left( \frac{F_e}{t^2} \right) \quad (3.13)$$

Za to pro odvození meze pevnosti Norris a Parker použili následující vztah:

$$R_m = \frac{F_m}{t(2,32D - 0,9Cl + 0,56)} \quad (3.14)$$

- $D$  – průměr razníku
- $Cl$  – vůle matrice  $Cl = A - D - 2h_0$ , kde  $A$  je průměr spodní matrice

Pro přepočítání a úpravě pro tuto geometrii SPT se jejich vztah do výchozí podoby s hodnotami koeficientů  $\beta_{1m} = 0,0846$  a  $\beta_{2m} = 0$  zapíše takto [23]:

$$R_m = 0,0846 \left( \frac{F_m}{t^2} \right) \quad (3.15)$$

### 3.3.1.5 Purmanský a Matocha

Doposud uvedené vztahy se lišily pouze hodnotami koeficientů  $\beta$ . Purmanský a Matocha ze svých měření došli k závěru, že by měl být brán zřetel na změnu tloušťky vzorku v průběhu zatěžování [24]. V jejich vztazích není tedy normalizace síly  $F_m$  uskutečněná druhou mocninou tloušťky vzorku, ale součinem počáteční tloušťky vzorku a průhybu jež odpovídá v záznamu síle  $F_m$ . Jejich aproximace kromě součinu  $u_m$  a  $t$  ještě obsahuje koeficient  $\beta_{2m}$ . V literatuře je uveden pouze vztah pro určení meze pevnosti. Mez kluzu tedy musí být určena jiným empirickým vztahem.

$$R_m = 0,35 \left( \frac{F_m}{u_m t} \right) + 23 \quad (3.16)$$

Nahrazení tloušťky hodnotou průběhu pro sílu  $F_m$  dává smysl i z fyzikálního hlediska, kdy se odpor, který deska klade deformaci podstatně zmenšuje v důsledku tvorby krčku. Matocha se problematice určování meze pevnosti při SPT věnoval i v dalších pracích a společně s Hurstem odvodili následující vztah s novými hodnotami koeficientů  $\beta_{1m}$  a  $\beta_{2m}$  [25]:

$$R_m = 0,444 \left( \frac{F_m}{u_m t} \right) + 86,8 \quad (3.17)$$

### 3.3.1.6 García a kolektiv

Myšlenku zohlednění tvorby krčku adoptoval García z práce Purmenského a Matochy. Aproximační vztahy byly zpracovány pro oceli a tato úprava by měla dostatečně zohlednit rozdílnost materiálů, na kterých se SPT provádí [26].

$$R_e = 0,346 \left( \frac{F_e}{t^2} \right) \quad (3.18)$$

$$R_m = 0,084 \left( \frac{F_m}{t^2} \right) \quad (3.19)$$

$$R_m = 0,277 \left( \frac{F_m}{u_m \cdot t} \right) \quad (3.20)$$

### 3.3.1.7 Slope metody

Mezi poměrně nový způsob určování materiálových charakteristik patří metody  $slope_{min}$  a  $slope_{ini}$ . Při vypracování těchto metod se vycházelo z databáze materiálů v rozmezí meze pevnosti 150 MPa až 1300 MPa [27]. Při vytváření této predikční metody byl řešen jeden z největších nedostatků určování meze pevnosti pomocí SPT. Tímto nedostatkem je skutečnost, že maximální síla, která je ze záznamu zkoušky na první pohled patrná, neodpovídá hodnotě síly, která je nutná k dosažení meze pevnosti. Podle autorů článku mnohem lépe síle korespondující mezi pevnosti odpovídá inflexní bod grafu záznamu. Tudiž bod, ve kterém je sklon tečny nejnižší (odtud i název metod, *slope* – sklon).

Pro výpočty bylo vytvořeno 30 modelů materiálů s různými materiálovými charakteristikami [27]. Při porovnání výsledků nové metody s výsledky obdržené pomocí simulací v rámci metody konečných prvků (MKP) byla ve většině případů zjištěna velmi malá odchylka. K maximální odchylce docházelo, pokud nabývala hodnota zpevňujícího koeficientu nízkých hodnot. Koeficient zpevnění  $n$  je dalším omezujícím faktorem. Jeho hodnota by se měla pohybovat od 4 do 45. Nejmenších odchylek mezi touto metodou a analýzou pomocí MKP docházelo pro  $n = 10$ .

Následně byla provedena i praktická měření. Opět byly zaznamenány poměrně malé odchylky. Pokud je určena hodnota  $slope_{ini/min}$ , dá se mez kluzu určit pomocí vztahu v rovnici (3.21) [27].

$$R_e = 37,437 e^{1,79995 \cdot 10^{-4} \cdot slope_{ini}/t} \quad (3.21)$$

## 4. TEORETICKÝ PRINCIP ŘEŠENÍ

V této kapitole je shrnut teoretický základ, ze kterého bylo vycházeno při analytickém řešení SPT.

### 4.1 Tělesa pružnosti a pevnosti

Analytický popis napjatosti a deformace těles je složitý, a proto byla odvozena teorie prosté pružnosti a pevnosti. Tato teorie je schopná popsat stavy zatížených těles poměrně přesně, pokud jsou splněny určité předpoklady. Mezi modelová tělesa patří pruty, tlustostěnná válcová tělesa, stěny, desky a momentové nebo bezmomentové skořepiny. V technické praxi se tato modelová tělesa při jednoduchých aplikacích stále používají. Většina os a hřidel se modeluje prutovým tělesem, jehož popis je nejjednodušší. Skořepiny dále modelují tlakové nádoby a různé nádrže. Pomocí stěn bývají modelovány rotující brzdné kotouče.

Napjatost v bodě tělesa jednoznačně určena tenzorem napětí [2]. Jedná se o symetrický tenzor druhého řádu. Tenzor napětí (rovnice (4.1)) má devět složek. Na hlavní diagonále leží normálová napětí  $\sigma$  pro všechny tři směry pravouhlého souřadného systému (ss). Zbylá pole tenzoru zaujímají smyková napětí  $\tau$ . Jejich indexy označují v tomto pořadí normálu roviny, v níž působí a směr působení. Smyková napětí jsou sdružená, to znamená, že hodnoty  $\tau_{xy}$  a  $\tau_{yx}$  a všechny odpovídající dvojice jsou stejné.

$$\mathbb{T}_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

Stejně jako napětí je i přetvoření plně určeno svým tenzorem [2]. Opět se jedná o symetrický tenzor, pro který platí rovnost hodnot odpovídajících pozic. Členy na hlavní diagonále představují délková přetvoření ve směru os pravouhlého souřadnicového systému.  $\gamma$  označuje úhel zkosení. Zkosení jsou dělena, protože každé smykové napětí vyvolá právě polovinu celkové hodnoty zkosení.

$$\mathbb{T}_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{yx}}{2} & \varepsilon_y & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{zx}}{2} & \frac{\gamma_{zy}}{2} & \varepsilon_z \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

V předchozích rovnicích jsou tenzory znázorněny pro obecný pravouhlý ss. Tento ss je vhodný pro popis prutových těles se smykovou napjatostí. Pro další modelová tělesa obecné pružnosti a pevnosti ovšem není vhodný, protože všechna tato tělesa jsou rotačně symetrická. V tomto případě se používá cylindrický ss [2]. Díky rotační symetrii vstupních parametrů (geometrie, vazby, zatížení) se můžou výstupní veličiny řešených problémů také předpokládat rotačně symetrické.

Tenzor napětí uveden v rovnici (4.3) znázorňuje situaci pro obecný ss. Je možné ovšem najít takový ss, pro který platí, že hodnoty všech smykových napětí jsou nulové, což je pro popis těles velmi výhodné, neboť se velmi usnadní výpočet bezpečností [2]. Normálová napětí se potom označují  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  a  $\sigma_3$ . Tenzor napětí tedy vypadá takto:

$$\mathbb{T}_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

## 4.2 Desky

Deska je, jak již bylo uvedeno, jedno z modelových těles mechaniky. Základní charakteristikou, a zároveň i jediným rozdílem mezi deskou a stěnou, je způsob zatížení [7]. Zatížení působí rovnoběžně s osou symetrie, respektive kolmo na střednicovou plochu. Za určující parametry matematického popisu desek se považují průhyb střednicové plochy  $w$  a její natočení vůči nedeformované střednicové ploše  $\vartheta$ . Jako souřadnicový systém pro řešení desek se používá cylindrický souřadnicový systém. Tenzor napjatosti desek má následující tvar:

$$\mathbb{T}_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_r & 0 & \tau_{zr} \\ 0 & \sigma_t & 0 \\ \tau_{rz} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

Hodnota napětí  $\sigma_z$  je nulová díky malé hodnotě výšky desky. V tenzoru vystupují i členy smykových napětí, jejichž hodnoty mohou být zanedbatelné, jedná-li se o konkrétní aplikace.

### 4.2.1 Rozdělení desek

Podle relativní tloušťky, což je poměr tloušťky a poloměru desky, se dají desky dělit do několika skupin [7].

#### 4.2.1.1 Tlusté desky

Tyto desky zůstávají po zatížení velmi málo deformované. Radiální vlákna se prodlužují jen nepatrně [7]. Normálová i smyková napětí nabývají podobných hodnot, a proto nesmí být při výpočtech zanedbány. Normály střednicové plochy se v průběhu zatížení zakřivují. Matematický popis je v důsledku velmi složitý. Pro výpočty takových desek se používá *Mindlinova* teorie, která zanedbává zakřivování normál.

#### 4.2.1.2 Tenké desky s malými průhyby

U tenkých desek nabývají hodnoty smykových napětí velmi malých hodnot a ve výpočtech bývají zanedbány [7]. Díky tomuto zjednodušení se z cylindrického ss stává hlavní ss napětí. Je-li materiál desky Hookovský, je tento ss zároveň i hlavním ss přetvoření. Deska je zatížena pouze ohybovými liniovými momentovými vnitřními účinky, a tedy pouze těmito vnitřními účinky způsobenými normálovými napětími. Tenké desky s malými průhyby popisuje Kirchhoffova teorie.

#### 4.2.1.3 Tenké desky s velkými průhyby

Je-li zatěžovaná deska málo tuhá, rostou hodnoty průhybů až nad úroveň, kdy už se řešení nedá předpokládat v lineárním tvaru [7]. Limitní tuhost desky není možno přesně stanovit, protože je funkcí nejen materiálových charakteristik, ale i konkrétních hodnot zatížení. Při vysokých hodnotách průhybu rostou hodnoty membránových napětí tak, že při řešeních takovýchto úloh nemůžou být zanedbány. Hodnoty, pro které se s deskou jedná jako s deskou s velkým průhybem, náleží intervalu  $(0,25h; 5h)$

#### 4.2.1.4 Skořepiny

Jedná se o velmi tenké desky, jejichž průhyby nabývají velmi vysokých hodnot [7]. Když se deska začíná chovat jako skořepina, znamená to, že napětí nejsou rozložena po průřezu tak, aby nabývala nulové hodnoty na střednicové ploše, ale jsou konstantní po celém průřezu. S deskou se dá počítat jako se skořepinou, pokud průhyb přesáhne hodnotu  $w > 5h$ .

## 4.2.2 Kirchhoffova teorie desek

Pro technickou praxi je nejvýznamnější případ tenkých desek s malými průhyby. Mezi tyto aplikace se řadí víka tlakových nádob nebo válců. Aby byla tato teorie aplikovatelná, musí být splněny rozměrové předpoklady [7]:

- $h < 0,1r$
- $w < 0,25h$

Jsou-li tyto předpoklady splněny, je možné stanovit několik následujících postulátů o chování desky. Jak napětí, tak přetvoření je rotačně symetrické a tečný směr je směrem hlavním [7]. Prodloužení radiálních vláken je minimální. V desce nenastává membránová napjatost, hodnoty napětí mají lineární průběh po šířce desky a nulovou hodnotu na střednicové ploše. Válcové řezy desek se v průběhu zatížení deformují na kužely. Hodnoty smykových napětí  $\tau_{rz}$  jsou pro bezpečnostní výpočty ve srovnání s normálovými napětími zanedbatelné. Napětí ve směru osy  $z$  je díky nízkým hodnotám tloušťky desky také zanedbatelné. V deskách je dvouosá napjatost.

Jako i pro jiná modelová tělesa i pro desky platí závislost mezi jednotlivými deformačními parametry [7]. Natočení  $\vartheta$  je derivací průhybu. Zde lze vidět jistou analogii s chováním ohybem zatížených prutů. Analytické řešení nelineární diferenciální rovnice (DR) průhybové čáry je ovšem velmi složité (v některých případech nemožné). Kirchhoffovy vztahy pro výpočet chování desek byly odvozeny jako lineární diferenciální rovnice a jsou tedy často analyticky řešitelné.

Při řešení desek se vychází ze silové rovnováhy v ose symetrie tohoto tělesa. Díky silové rovnováze je určen vnitřní účinek posouvající liniové síly  $\mathcal{T}$ . Tento předpis je poté použit k řešení DR pro určení natočení od střednicové plochy  $\vartheta$ . Tuto rovnici je možné zapsat v diferenciálním (rovnice (4.5)) nebo integrálním (rovnice (4.6)) tvaru [7].

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} \left( \frac{d}{dr} (r\vartheta) \right) \right) = -\frac{\mathcal{T}}{B} \quad (4.5)$$

$$\vartheta(r) = C_1 r + \frac{C_2}{r} + \left( -\frac{1}{rB} \int (r \int \mathcal{T}(r) dr) dr \right) \quad (4.6)$$

Partikulárním integrálem natočení je rovnice průhybu střednicové plochy. Pro účely této práce se jedná o zanedbatelný krok řešení. Mnohem důležitější veličinou jsou ohybové liniové momenty. Ty se v případě tenkých desek rozlišují na momenty působící v radiálním směru a ve směru tangenciálním [7]. Podle Kirchhoffovy teorie závisí na natočení tak, jak je uvedeno v rovnici (4.7) [7] pro radiální liniový moment a v rovnici (4.8) [7] pro tangenciální liniový moment.

$$m_r = -B \left( \frac{d\vartheta}{dr} + \mu \frac{\vartheta}{r} \right) \quad (4.7)$$

$$m_t = -B \left( \frac{\vartheta}{r} + \mu \frac{d\vartheta}{dr} \right) \quad (4.8)$$

Pro liniové veličiny platí, že jsou vztaženy na jednotku délky, tudíž posouvající síla má rozměr N/mm a momenty pak Nmm/mm. Rozměr momentu není vhodné zkracovat, protože by se tím ztratil jeho význam.

Napětí v jednotlivých hlavních směrech jsou přímo funkcí odpovídajících momentů [7]. Díky podobnosti vztahů pro liniové ohybové momenty se od sebe hodnoty radiálního a tangenciálního napětí také většinou moc neliší. Vztahy pro výpočet napětí desek odvodil Kirchhoff ve své teorii. Právě tyto vztahy jsou uvedeny v rovnicích (4.9) a (4.10). V rovnicích vystupuje operátor  $\pm$ , který bere v potaz průběh napětí podél tloušťky desky. Pro vlákna, jejichž hodnota napětí nabývá kladných hodnot, platí, že jsou namáhána tahem, kdežto pro vlákna,

jejichž hodnota napětí je záporná, platí, že jsou namáhána tlakem. Desky mohou být takto namáhány jak v radiálním, tak v tangenciálním směru.

$$\sigma_r = \frac{m_r}{\frac{1}{12}h^3} \cdot \left(\pm \frac{h}{2}\right) \quad (4.9)$$

$$\sigma_t = \frac{m_r}{\frac{1}{12}h^3} \cdot \left(\pm \frac{h}{2}\right) \quad (4.10)$$

## 5. VÝPOČTOVÉ MODELY PRO URČENÍ MEZE KLUZU

Tato část práce se zabývá aplikací Kirchhoffovy teorie na SPT. Pro řešení byly předpokládány čtyři modely. První model je nejjednodušší. Jedná se o desku zatíženou silou ve své ose symetrie. Deska zatížená konstantním tlakem je popsána druhým modelem. Třetí model předpokládá, že obrazcem zatěžujícím desku je paraboloid. Zátěžný obrazec čtvrtého modelu je složen z válce a jehlanu. Díky rotační symetrii jsou všechny modely vyřešeny v řezu.

Při odvozování vztahů pro chování modelových těles bylo zjištěno, že se ve vzorcích často objevuje jeden konkrétní člen. Tento člen se nazývá ohybová tuhost desky (resp. skořepiny) a počítá se následovně [7]:

$$B = \frac{Eh^3}{12(1 - \mu^2)} \quad (5.1)$$

- $\mu$  – Poissonův poměr

Kromě ohybové tuhosti desky vystupuje ve výpočtech nadále i veličina  $r$ , která je jedinou proměnnou, na které závisí všechny důležité charakteristiky desky (posouvající síla, natočení, průhyb a momenty) a její konkrétní hodnoty potřebné ke stanovení okrajových podmínek.

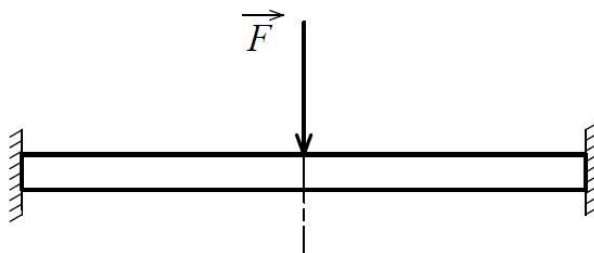
- $r$  – vzdálenost od osy symetrie (osa  $z$ ) v rovině řezu kolmého na střednicovou plochu
- $r_1$  – vzdálenost od osy, která odpovídá poloměru prorážející kuličky (pro tento model  $r_1 = 1,25$  mm)
- $r_2$  – vzdálenost od osy, ve které je uvažována vazba

### 5.1 Zatížení osamělou silou

Tento model byl vypracován pro desku vetknutou i pro desku uloženou v rotačních vazbách. Podobně byly vypracovány i ostatní modely obsažené v této práci.

#### 5.1.1 Vetknutí

Jedná se o jednoduchý model, který je znázorněný na obrázku 5.



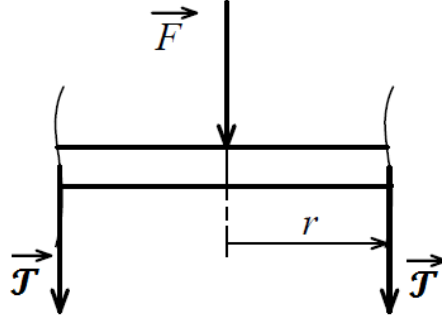
Obrázek 5: Vetknutá deska zatížená osamělou silou

Hodnota síly, která je dosazena do výpočtu je právě ta síla, která byla naměřena během SPT. V závislosti na této síle byla vypočítána liniová posouvající síla  $\mathcal{T}$ . Při výpočtu tohoto vnitřního účinku se vychází z rovnice silové rovnováhy v ose  $z$ .

$$\sum F_z = 0 \quad (5.2)$$

$$F + 2\pi r\mathcal{T} = 0 \quad (5.3)$$

$$\mathcal{T} = -\frac{F}{2\pi r} \quad (5.4)$$



Obrázek 6: Znárodnění řezu pro výpočet předpisu liniové posouvající síly  $T$

Jak bylo uvedeno v podkapitole 4.2.2 o Kirchhoffově teorii, dalším krokem postupu je určení předpisu pro natočení. Odvození pro tento model je uvedeno v rovnicích (5.5) – (5.12).

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} \left( \frac{d}{dr} (r\vartheta) \right) \right) = -\frac{T}{B} = \frac{F}{2\pi Br} \quad (5.5)$$

$$\int d \left( \frac{1}{r} \left( \frac{d}{dr} (r\vartheta) \right) \right) = \int \left( \frac{F}{2\pi Br} \right) dr \quad (5.6)$$

$$\frac{1}{r} \left( \frac{d}{dr} (r\vartheta) \right) = \frac{F}{2\pi B} \ln(r) + C_1 \quad (5.7)$$

$$\int d(r\vartheta) = \int \left( \frac{F}{2\pi B} r \ln(r) + C_1 r \right) dr \quad (5.8)$$

$$r\vartheta = C_3 \frac{r^2}{2} + \frac{F}{2\pi B} \left| \begin{array}{l} u = \ln(r) \quad u' = \frac{1}{r} \\ v' = r \quad v = \frac{r^2}{2} \end{array} \right| \quad (5.9)$$

$$r\vartheta = C_3 \frac{r^2}{2} + \frac{F}{2\pi B} \left( \ln(r) \frac{r^2}{2} - \int \frac{r^2}{2} \frac{1}{r} dr \right) \quad (5.10)$$

$$r\vartheta = C_3 \frac{r^2}{2} + \frac{F}{2\pi B} \left( \ln(r) \frac{r^2}{2} - \frac{r^2}{4} \right) + C_2 \quad (5.11)$$

$$\vartheta(r) = \frac{F}{4\pi B} \ln(r)r - \frac{F}{8\pi B} r + C_1 \frac{r}{2} + C_2 \frac{1}{r} \quad (5.12)$$

Ve svislých čarách je znázorněna integrace *per partes*. Pomocí natočení byly určeny liniové momenty. Ze vztahů z rovnic (4.7) a (4.8) je zřejmé, že pro určení předpisů pro tyto momenty je potřeba derivace natočení  $\vartheta(r)$  podle vzdálenosti od osy  $r$  a podíl natočení a vzdálenosti od osy. Obé je uvedeno v rovnicích (5.13) a (5.14).

$$\frac{d\vartheta}{dr} = \frac{F}{8\pi B} + \frac{F}{4\pi B} \ln(r) + \frac{C_3}{2} - \frac{C_4}{r^2} \quad (5.13)$$

$$\frac{\vartheta}{r} = -\frac{F}{8\pi B} + \frac{F}{4\pi B} \ln(r) + \frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{r^2} \quad (5.14)$$

Dosazení a následné úpravy vedou ke konečným podobám vztahů pro liniové ohybové momenty jakožto funkce vzdálenosti od osy  $z$  a numerických konstant popisujících zatížení a vlastnosti materiálu desky.

$$m_r(r) = \frac{F(\mu - 1)}{8\pi} - \frac{F(1 + \mu)}{4\pi} \ln(r) - \frac{C_1 B(1 + \mu)}{2} + \frac{C_2 B(1 - \mu)}{r^2} \quad (5.15)$$

$$m_t(r) = \frac{F(1-\mu)}{8\pi} - \frac{F(1+\mu)}{4\pi} \ln(r) - \frac{C_1 B(1+\mu)}{2} + \frac{C_2 B(\mu-1)}{r^2} \quad (5.16)$$

V předpisech vystupují dále dvě integrační konstanty  $C_1$  a  $C_2$ . K jejich vyčíslení je potřeba okrajových podmínek (OP). Pro správnou aplikaci okrajové podmínky je potřeba správně předpokládat deformaci zatíženého tělesa. OP tohoto modelu představují tu skutečnost, že po zatížení bude tečna ke střednicové ploše ve středu desky a v jejím uložení vodorovná. Tyto okrajové podmínky mají následující tvar.

$$\vartheta(r=0) = 0 \quad (5.17)$$

$$\vartheta(r=r_2) = 0 \quad (5.18)$$

Po dosazení to těchto podmínek byly určeny tvary integračních konstant.

$$0 = \frac{F}{4\pi B} \ln(0)0 - \frac{F}{8\pi B} 0 + C_1 \frac{0}{2} + C_2 \frac{1}{0} \rightarrow C_2 = 0 \quad (5.19)$$

Tato rovnice je splněna pouze v případě, když je hodnota  $C_2$  rovna 0. Tato skutečnost není překvapující, protože tato deska není mezikruhová. I v případě jiných modelových těles mechaniky nabývala jedna z integračních konstant nulové hodnoty, bylo-li těleso plné, tedy pro hodnotu  $r = 0$  z  $\neq 0$  [7]. V rovnicích (5.20) – (5.22) je uvedena aplikace OP z rovnice (5.18).

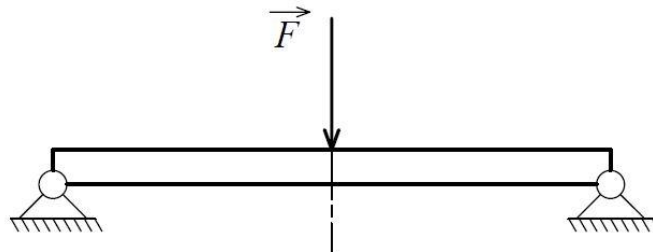
$$0 = \frac{F}{4\pi B} \ln(r_2)r_2 - \frac{F}{8\pi B} r_2 + C_1 \frac{r_2}{2} + 0 \frac{1}{r_2} \quad (5.20)$$

$$C_1 \frac{r_2}{2} = -\frac{F}{4\pi B} \ln(r_2)r_2 + \frac{F}{8\pi B} r_2 \quad (5.21)$$

$$C_1 = \frac{F}{4\pi B} - \frac{F}{2\pi B} \ln(r_2) \quad (5.22)$$

### 5.1.2 Rotační vazba

Tento model využívá stejných rovnic jako v případě vetknutí. To znamená, že všechny předpisy vypočtené v podkapitole 5.1.1 jsou s výjimkou aplikace okrajové podmínky stejné.



Obrázek 7: Deska uložená v rotační vazbě a zatížená osamělou silou

Konstanta  $C_2$  je i v tomto případě nulová. Druhá OP pro tuto situaci vychází již ze základního principu statiky, a to že v rotační vazbě nevzniká žádný reakční moment. Tato podmínka, díky které byla určena konstanta  $C_1$ , je uvedena v rovnici (5.23).

$$m_r(r=r_2) = 0 \quad (5.23)$$

Výpočet  $C_1$  je uveden níže.

$$0 = \frac{F(\mu-1)}{8\pi} - \frac{F(1+\mu)}{4\pi} \ln(r_2) - \frac{C_1 B(1+\mu)}{2} \quad (5.24)$$

$$\frac{C_1 B(1+\mu)}{2} = \frac{F(\mu-1)}{8\pi} - \frac{F(1+\mu)}{4\pi} \ln(r_2) \quad (5.25)$$

$$C_1 = \frac{F(\mu-1)}{4\pi B(1+\mu)} - \frac{F}{2\pi B} \ln(r_2) \quad (5.26)$$

## 5.2 Konstantní zatížení

Druhý výpočtový model řeší konstantní rozložení spojitého zatížení po průměru protlačující kuličky. Opět bylo provedeno řešení pro dva způsoby uložení.

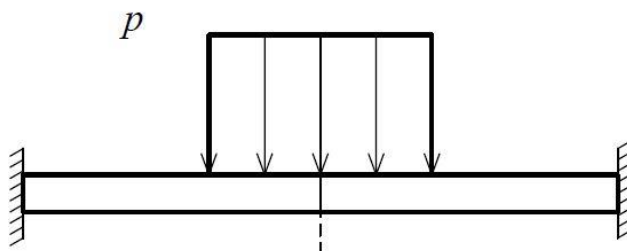
### 5.2.1 Vetknutí

Na rozdíl od modelu osamělé síly, v tomto modelu bylo zapotřebí převést spojitě zatížení na sílu. Také díky tomu, že se jedná o spojitě zatížení, muselo být řešení rozděleno do dvou intervalů, a to  $0 < r < r_1$  a  $r_1 < r < r_2$ . Síla zjištěná z SPT je obsahem zátěžného obrazce.

Neboť obrazcem je válec, byla síla vyjádřena následovně.

$$F_1 = p_{max} \pi r^2 \quad (5.27)$$

Kde  $p_{max}$  představuje výšku zatěžujícího válce.

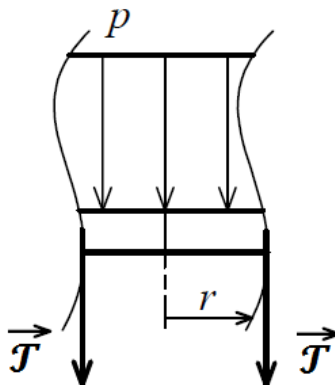


Obrázek 8: Vetknutá deska zatížená konstantním spojitým zatížením

#### 5.2.2.1 Interval $0 < r < r_1$

Po dosazení do rovnice rovnováhy byl vyjádřen předpis vnitřního účinku liniové posouvající síly, jak je uvedeno v rovnici (5.28).

$$\mathcal{T}_1 = -\frac{p_{max} r}{2} \quad (5.28)$$



Obrázek 9: Znárodnění řezu pro výpočet předpisu liniové posouvající síly  $\mathcal{T}$

Odtud už není problém vypočítat rovnici natočení.

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} \left( \frac{d}{dr} (r\vartheta) \right) \right) = \frac{p_{max}}{2B} r \quad (5.29)$$

$$\int d \left( \frac{1}{r} \left( \frac{d}{dr} (r\vartheta) \right) \right) = \int \left( \frac{p_{max}}{2B} r \right) dr \quad (5.30)$$

$$\frac{1}{r} \left( \frac{d}{dr} (r\vartheta) \right) = \frac{p_{max}}{4B} r^2 + C_1 \quad (5.31)$$

$$\int d(r\vartheta) = \int \left( \frac{p_{max}}{4B} r^3 + C_1 r \right) dr \quad (5.32)$$

$$r\vartheta = \frac{p_{max}}{16B} r^4 + C_1 \frac{r^2}{2} + C_2 \quad (5.33)$$

$$\vartheta_1(r) = \frac{p_{max}}{16B} r^3 + \frac{C_1}{2} r + C_2 \frac{1}{r} \quad (5.34)$$

Stejně jako při řešení předpisů momentů pro zatížení silou byly i zde vypočteny jak derivace  $\vartheta_1(r)$  podle  $r$ , tak jejich podíl.

$$\frac{d\vartheta_1}{dr} = \frac{3p_{max}}{16B} r^2 + \frac{C_1}{2} - \frac{C_2}{r^2} \quad (5.35)$$

$$\frac{\vartheta_1}{r} = \frac{p_{max}}{16B} r^2 + \frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{r^2} \quad (5.36)$$

Odtud už je to jen pár kroků k určení předpisů pro momenty. Po dosazení a úpravách byly stanoveny konečné podoby jednotlivých předpisů. Ty jsou uvedeny v rovnicích (6.37) a (6.38).

$$m_{r1}(r) = \frac{p_{max} r^2 (-3 - \mu)}{16} - \frac{C_1 B (1 + \mu)}{2} + \frac{C_2 B (1 - \mu)}{r^2} \quad (5.37)$$

$$m_{t1}(r) = \frac{p_{max} r^2 (-3 - \mu)}{16} - \frac{C_1 B (1 + \mu)}{2} + \frac{C_2 B (\mu - 1)}{r^2} \quad (5.38)$$

Pro výpočet konkrétních hodnot momentů a následně napětí v kritických bodech desky je potřeba vyčíslit hodnoty konstant vystupujících v předpisech. S výjimkou dvou členů je možné za všechny proměnné dosadit jejich konkrétní hodnotu. Dvě neznámé hodnoty představují integrační konstanty  $C_1$  a  $C_2$ . Ty je možné vyčíslit z okrajových podmínek řešení tohoto modelu.

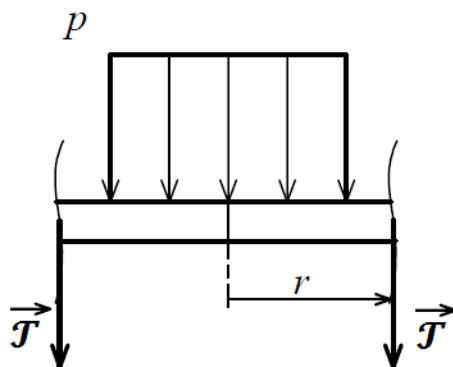
### 5.2.2.2 Interval $r_1 < r < r_2$

K vyčíslení integračních konstant musí být vyjádřeny i klíčové předpisy druhého intervalu (natočení a momenty). Velikost zatížení se už nemění s rostoucí hodnotou  $r$ . Síla působící na desku má tedy také neproměnnou hodnotu.

$$F_{II} = p_{max} \pi r_1^2 \quad (5.39)$$

Na předpis pro posouvající sílu má tato skutečnost následující vliv, viz rovnice (5.40).

$$\mathcal{J}_2 = -\frac{p_{max} r_1^2}{2r} \quad (5.40)$$



Obrázek 10: Znáornění řezu pro výpočet předpisu liniové posouvající síly  $\mathcal{J}$   
 Výpočet natočení  $\vartheta_2(r)$  je uveden v rovnicích (5.41) – (5.48).

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} \left( \frac{d}{dr} (r\vartheta) \right) \right) = \frac{p_{max} r_1^2}{2rB} \quad (5.41)$$

$$\int d \left( \frac{1}{r} \left( \frac{d}{dr} (r\vartheta) \right) \right) = \int \left( \frac{p_{max} r_1^2}{2rB} \right) dr \quad (5.42)$$

$$\frac{1}{r} \left( \frac{d}{dr} (r\vartheta) \right) = \frac{p_{max} r_1^2}{2B} \ln(r) + C_3 \quad (5.43)$$

$$\int d(r\vartheta) = \int \left( \frac{p_{max} r_1^2}{2B} \ln(r) r + C_3 r \right) dr \quad (5.44)$$

$$r\vartheta = C_3 \frac{r^2}{2} + \frac{p_{max} r_1^2}{2B} \left| \begin{array}{l} u = \ln(r) \quad u' = \frac{1}{r} \\ v' = r \quad v = \frac{r^2}{2} \end{array} \right. \quad (5.45)$$

$$r\vartheta = C_3 \frac{r^2}{2} + \frac{p_{max} r_1^2}{2B} \left( \ln(r) \frac{r^2}{2} - \int \frac{r^2}{2} \frac{1}{r} dr \right) \quad (5.46)$$

$$r\vartheta = C_3 \frac{r^2}{2} + \frac{p_{max} r_1^2}{2B} \left( \ln(r) \frac{r^2}{2} - \frac{r^2}{4} \right) + C_4 \quad (5.47)$$

$$\vartheta_2(r) = \frac{p_{max} r_1^2}{4B} r \ln(r) - \frac{p_{max} r_1^2}{8B} r + \frac{C_3}{2} r + C_4 \frac{1}{r} \quad (5.48)$$

Následuje výpočet derivace a podílu (rovnice (5.49) a (5.50)), jak již tomu bylo v předchozích případech.

$$\frac{d\vartheta_2}{dr} = \frac{p_{max} r_1^2}{4B} \ln(r) + \frac{p_{max} r_1^2}{8B} + \frac{C_1}{2} - \frac{C_2}{r^2} \quad (5.49)$$

$$\frac{\vartheta_2}{r} = \frac{p_{max} r_1^2}{4B} \ln(r) - \frac{p_{max} r_1^2}{8B} + \frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{r^2} \quad (5.50)$$

Po dosazení do známých rovnic a následných úpravách byly vyjádřeny předpisy momentů pro druhý interval (rovnice (5.51) a (5.52)).

$$m_{r2}(r) = -\frac{p_{max} r_1^2 (1 + \mu)}{4} \ln(r) + \frac{p_{max} r_1^2 (\mu - 1)}{8} - \frac{C_3 B (1 + \mu)}{2} + \frac{C_4 B (1 - \mu)}{r^2} \quad (5.51)$$

$$m_{t2}(r) = -\frac{p_{max}r_1^2(1+\mu)}{4}\ln(r) + \frac{p_{max}r_1^2(1-\mu)}{8} - \frac{C_3B(1+\mu)}{2} + \frac{C_4B(\mu-1)}{r^2} \quad (5.52)$$

### 5.2.2.3 Výpočet integračních konstant

Nyní již jsou vyjádřeny všechny veličiny, které jsou potřebné k vyčíslení integračních konstant  $C_1$  až  $C_4$ . K jejich určení slouží okrajové podmínky, které vyplývají z charakteru uložení, ale dvě z nich představují také podmínky spojitosti natočení a radiálního napětí. Po dosazení okrajových podmínek jsou integrační konstanty vyjádřeny jako funkce sebe samých. Vzniklé systémy byly řešeny pomocí MATLABu. Okrajové podmínky jsou uvedeny v rovnicích (5.53) – (5.56).

$$\vartheta_1(r=0) = 0 \quad (5.53)$$

$$\vartheta_1(r=r_1) = \vartheta_2(r=r_1) \quad (5.54)$$

$$m_{r1}(r=r_1) = m_{r2}(r=r_1) \quad (5.55)$$

$$\vartheta_2(r=r_2) = 0 \quad (5.56)$$

Nyní následuje dosazení do těchto podmínek a vyjádření konstant.

$$0 = \frac{p_{max}}{16B}0^3 + \frac{C_1}{2}0 + C_2\frac{1}{0} \quad (5.57)$$

$$C_2 = 0 \quad (5.58)$$

Opět díky plnosti desky je druhá konstanta nulová. V rovnicích (5.59) – (5.61) je znázorněno použití podmínky z rovnice (5.54).

$$\frac{p_{max}}{16B}r_1^3 + \frac{C_1}{2}r_1 = \frac{p_{max}r_1^2}{4B}r_1 \ln(r_1) - \frac{p_{max}r_1^2}{8B}r_1 + \frac{C_3}{2}r_1 + C_4\frac{1}{r_1} \quad (5.59)$$

$$\frac{C_3}{2}r_1 = -\frac{p_{max}r_1^2}{4B}r_1 \ln(r_1) + \frac{p_{max}r_1^3}{8B} - C_4\frac{1}{r_1} + \frac{p_{max}}{16B}r_1^3 + \frac{C_1}{2}r_1 \quad (5.60)$$

$$C_3 = -\frac{p_{max}r_1^2}{2B}\ln(r_1) - \frac{2C_4}{r_1^2} + \frac{3p_{max}r_1^2}{8B} + C_1 \quad (5.61)$$

Aplikace OP z rovnice (5.55).

$$\begin{aligned} & \frac{p_{max}r_1^2(-3-\mu)}{16} - \frac{C_1B(1+\mu)}{2} = \\ & = -\frac{p_{max}r_1^2(1+\mu)}{4}\ln(r_1) + \frac{p_{max}r_1^2(\mu-1)}{8} - \frac{C_3B(1+\mu)}{2} + \frac{C_4B(1-\mu)}{r_1^2} \end{aligned} \quad (5.62)$$

$$C_1 = \frac{p_{max}r_1^2}{2B}\ln(r_1) - \frac{p_{max}r_1^2(\mu-1)}{4B(1+\mu)} + C_3 - \frac{C_4(1-\mu)}{2r_1^2(1+\mu)} - \frac{p_{max}r_1^2(3+\mu)}{8B(1+\mu)} \quad (5.63)$$

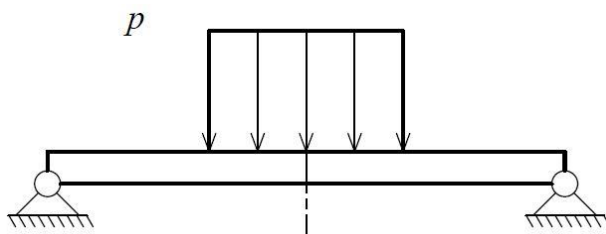
Aplikace poslední OP z rovnice (5.56).

$$0 = \frac{p_{max}r_1^2}{4B}r_2 \ln(r_2) - \frac{p_{max}r_1^2}{8B}r_2 + \frac{C_3}{2}r_2 + C_4\frac{1}{r_2} \quad (5.64)$$

$$C_4 = \frac{p_{max}r_1^2r_2^2}{8B} - \frac{p_{max}r_1^2r_2^2}{4B}\ln(r_1) - \frac{C_3}{2}r_2^2 \quad (5.65)$$

### 5.2.3 Rotační vazba

Charakter uložení nemá vliv na výpočet jednotlivých veličin. Vliv uložení se projeví až při výpočtu integračních konstant, protože jedna z okrajových podmínek je jiná. Předpisy, které slouží k vyjádření integračních konstant tohoto modelu, jsou uvedeny v rovnicích (5.66), (5.67), (5.68) a (5.69).



Obrázek 11: Deska uložená v rotační vazbě a zatížená konstantním spojitém zatížením

#### 5.2.3.1 Výpočet integračních konstant

Okrajové podmínky tohoto uložení se tedy od vetknutí liší pouze podmínkou, která určuje radiální moment ve vazbě Ten je totiž kvůli rotační vazbě nulový.

$$\vartheta_{1r}(r = 0) = 0 \quad (5.66)$$

$$\vartheta_1(r = r_1) = \vartheta_2(r = r_1) \quad (5.67)$$

$$m_{r1}(r = r_1) = m_{r2}(r = r_1) \quad (5.68)$$

$$m_{r2}(r = r_2) = 0 \quad (5.69)$$

Nyní byly OP aplikovány na odpovídající předpisy. Dále byl odvozen systém lineárních rovnic. Aplikace OP z rovnice (5.66).

$$0 = \frac{p_{max}}{16B} 0^3 + \frac{C_1}{2} 0 + C_2 \frac{1}{0} \quad (5.70)$$

$$C_2 = 0 \quad (5.71)$$

Na plnosti desky se nic nemění a  $C_2$  tedy stále nabývá nulové hodnoty.

Aplikace druhé OP z rovnice (5.67).

$$\frac{p_{max}}{16B} r_1^3 + \frac{C_1}{2} r_1 = \frac{p_{max} r_1^2}{4B} r_1 \ln(r_1) - \frac{p_{max} r_1^2}{8B} r_1 + \frac{C_3}{2} r_1 + C_4 \frac{1}{r_1} \quad (5.72)$$

$$\frac{C_3}{2} r_1 = -\frac{p_{max} r_1^2}{4B} r_1 \ln(r_1) + \frac{p_{max} r_1^3}{8B} - C_4 \frac{1}{r_1} + \frac{p_{max}}{16B} r_1^3 + \frac{C_1}{2} r_1 \quad (5.73)$$

$$C_3 = C_1 - \frac{p_{max} r_1^2}{2B} \ln(r_1) + \frac{3p_{max} r_1^2}{8B} + \frac{2 C_4}{r_1^2} \quad (5.74)$$

Aplikace třetí OP z rovnice (5.68).

$$\begin{aligned} & \frac{p_{max} r_1^2 (-3 - \mu)}{16} - \frac{C_1 B (1 + \mu)}{2} = \\ & = -\frac{p_{max} r_1^2 (1 + \mu)}{4} \ln(r_1) + \frac{p_{max} r_1^2 (\mu - 1)}{8} - \frac{C_3 B (1 + \mu)}{2} + \frac{C_4 B (1 - \mu)}{r_1^2} \end{aligned} \quad (5.75)$$

$$C_1 = \frac{p_{max} r_1^2}{2B} \ln(r_1) - \frac{p_{max} r_1^2 (\mu - 1)}{4B (1 + \mu)} + C_3 - \frac{C_4 (1 - \mu)}{2 r_1^2 (1 + \mu)} - \frac{p_{max} r_1^2 (3 + \mu)}{8B (1 + \mu)} \quad (5.76)$$

Aplikace poslední OP z rovnice (5.69).

$$0 = -\frac{p_{max}r_1^2(1+\mu)}{4}\ln(r_2) + \frac{p_{max}r_1^2(\mu-1)}{8} - \frac{C_3B(1+\mu)}{2} + \frac{C_4B(1-\mu)}{r_2^2} \quad (5.77)$$

$$C_4 = -\frac{p_{max}r_1^2r_2^2}{4B(1-\mu)}\ln(r_2) + \frac{p_{max}r_1^2r_2^2}{8B} + \frac{C_3(1+\mu)r_2^2}{2(1-\mu)} \quad (5.78)$$

### 5.3 Parabolické zatížení

V tomto výpočtovém modelu bylo zatížení popsáno paraboloidem, jehož nulová hodnota připadá na okraj protlačovací kuličky.

$$p = ar^2 + c \quad (5.79)$$

Okrajové podmínky pro určení koeficientů paraboly jsou uvedeny v rovnicích (5.80) a (5.81).

$$p(r = r_1) = 0 \quad (5.80)$$

$$p(r = 0) = p_{max} \quad (5.81)$$

Okrajové podmínky byly dosazeny do rovnice (5.79) a následně byla odvozena rovnice spojitěho zatížení.

$$p_{max} = c \quad (5.82)$$

$$0 = ar_1^2 + c \quad (5.83)$$

$$a = \frac{-p_{max}}{r_1^2} \quad (5.84)$$

$$p(r) = -\frac{p_{max}}{r_1^2}r^2 + p_{max} \quad (5.85)$$

Pro určení vnitřních účinků je potřeba určit hodnotu síly ve směru osy  $z$ . Jestliže je dán předpis pro tlak, dalším krokem je integrace přes plochu desky.

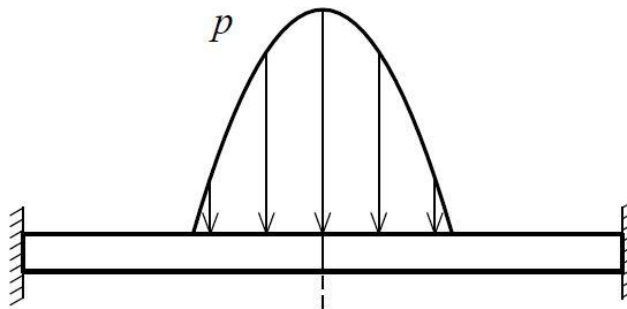
$$F = \int p(r) dr \quad (5.86)$$

Pro případ, kdy se hodnota veličiny pro danou hodnotu  $r$  nemění, je možné elementární část plochy zapsat takto:

$$dS = 2\pi dr \quad (5.87)$$

#### 5.3.1 Vetknutí

Pro popsání situace, ve které je horní matrice testovacího přístroje utažena silou tak, aby nedošlo k posunutí vzorku, slouží model vetknuté desky.



Obrázek 12: Vetknutá deska zatížená parabolicky rozloženým spojitým zatížením

### 5.3.1.1 Interval $0 < r < r_1$

$$F = \int_0^r \left( -\frac{p_{max}}{r_1^2} r^2 + p_{max} \right) 2\pi r \, dr =$$

$$= \int_0^r \left( 2\pi \frac{p_{max}}{r_1^2} r^3 + 2\pi p_{max} r \right) dr = \left[ 2\pi \frac{p_{max}}{r_1^2} \frac{r^4}{4} + 2\pi p_{max} \frac{r^2}{2} \right]_0^r \quad (5.88)$$

Po úpravách vypadá vztah pro sílu působící v prvním intervalu následovně.

$$F_1 = \frac{-\pi p_{max} r^4}{2r_1^2} + \pi p_{max} r^2 \quad (5.89)$$

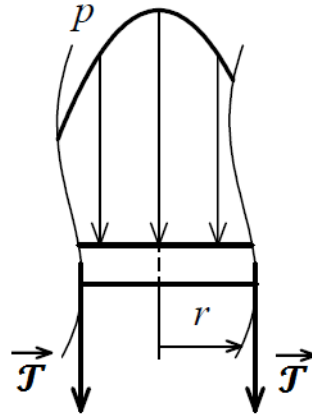
Poté co byly určeny síly, je možné určit vnitřní účinek posouvající liniové síly. Ta vychází z rovnice silové rovnováhy ve směru osy z.

$$\sum F_z = 0 \quad (5.90)$$

$$F_1 + 2\pi r \mathcal{T}_1 = 0 \quad (5.91)$$

Rovnice vyjadřující liniovou posouvající sílu  $\mathcal{T}$  pro první interval je uvedena v rovnici (5.92)

$$\mathcal{T}_1 = \frac{p_{max}}{4r_1^2} r^3 - \frac{p_{max}}{2} r \quad (5.92)$$



Obrázek 13: Znárodnění řezu pro výpočet předpisu liniové posouvající síly  $\mathcal{T}$

Je-li určena posouvající liniová síla, je možné z následujícího vztahu vypočítat předpis pro natočení zdeformované desky od střednicové plochy. Ten je odvozen v rovnicích (5.93) – (5.98).

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} \left( \frac{d}{dr} (r\vartheta) \right) \right) = -\frac{\mathcal{T}_1}{B} = -\frac{p_{max}}{4r_1^2 B} r^3 + \frac{p_{max}}{2B} r \quad (5.93)$$

$$\int d \left( \frac{1}{r} \left( \frac{d}{dr} (r\vartheta) \right) \right) = \int \left( -\frac{p_{max}}{4r_1^2 B} r^3 + \frac{p_{max}}{2B} r \right) dr \quad (5.94)$$

$$\frac{1}{r} \left( \frac{d}{dr} (r\vartheta) \right) = -\frac{p_{max}}{4r_1^2 B} \frac{r^4}{4} + \frac{p_{max}}{2B} \frac{r^2}{2} + C_1 \quad (5.95)$$

$$\int d(r\vartheta) = \int \left( -\frac{p_{max}}{4r_1^2 B} \frac{r^5}{4} + \frac{p_{max}}{2B} \frac{r^3}{2} + C_1 r \right) dr \quad (5.96)$$

$$r\vartheta = -\frac{p_{max}}{16r_1^2B} \frac{r^6}{6} + \frac{p_{max}}{4B} \frac{r^4}{4} + C_1 \frac{r^2}{2} + C_2 \quad (5.97)$$

$$\vartheta_1(r) = -\frac{p_{max}}{96r_1^2B} r^5 + \frac{p_{max}}{16B} r^3 + \frac{C_1}{2} r + C_2 \frac{1}{r} \quad (5.98)$$

Funkční předpis pro natočení umožňuje určení ohybových liniových momentů v radiálním a tangenciálním směru, a to opět aplikací vztahů z rovnic (4.7) a (4.8). K jejich aplikaci je nutné vyjádřit derivaci a podíl natočení a vzdálenosti od osy.

$$\frac{d\vartheta_1}{dr} = \frac{-p_{max}}{96r_1^2B} 5r^4 + \frac{p_{max}}{16B} 3r^2 + \frac{C_1}{2} - \frac{C_2}{r^2} \quad (5.99)$$

$$\frac{\vartheta_1}{r} = \frac{-p_{max}}{96r_1^2B} r^4 + \frac{p_{max}}{16B} r^2 + \frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{r^2} \quad (5.100)$$

Konečné podoby předpisů uvádí rovnice (5.101) a (5.102). Mezi rovnicemi jsou minimální rozdíly, jelikož derivace a podíl polynomiálních členů se liší pouze v hodnotě koeficientu, který tomuto členu přísluší.

$$m_{r1}(r) = \frac{p_{max}r^4(5 + \mu)}{96r_1^2} - \frac{p_{max}r^2(3 + \mu)}{16} + \frac{C_2B(1 - \mu)}{r^2} - \frac{C_1B(1 + \mu)}{2} \quad (5.101)$$

$$m_{t1}(r) = \frac{p_{max}r^4(1 + 5\mu)}{96r_1^2} - \frac{p_{max}r^2(1 + 3\mu)}{16} + \frac{C_2B(\mu - 1)}{r^2} - \frac{C_1B(1 + \mu)}{2} \quad (5.102)$$

### 5.3.1.2 Interval $r_1 < r < r_2$

Integrál pro určení síly v druhém intervalu se liší pouze hodnotou horní meze.

$$\begin{aligned} F &= \int_0^{r_1} \left( 2\pi \frac{p_{max}}{r_1^2} r^3 + 2\pi p_{max} r \right) dr = \\ &= \left[ 2\pi \frac{p_{max}}{r_1^2} \frac{r^4}{4} + 2\pi p_{max} \frac{r^2}{2} \right]_0^{r_1} \end{aligned} \quad (5.103)$$

Po úpravách:

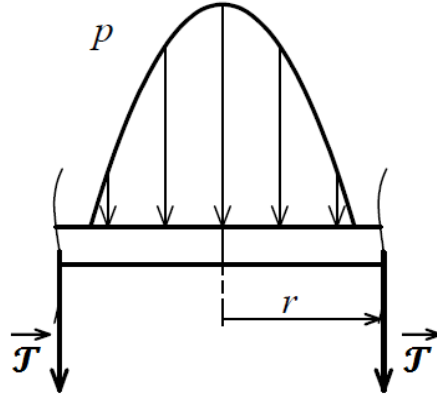
$$F_{II} = \frac{p_{max}\pi r_1^2}{2} \quad (5.104)$$

Vyjádření předpisu posouvající liniové síly, která stejně jako v předchozím intervalu vychází ze silové rovnováhy uvolněného prvku v ose  $z$ :

$$F_{II} + 2\pi r \mathcal{J}_2 = 0 \quad (5.105)$$

Dosazení a převedení vystupujících veličin na odpovídající stranu rovnice je uvedeno v rovnici (5.106).

$$\mathcal{J}_2 = -\frac{p_{max}}{4} \frac{r_1^2}{r} \quad (5.106)$$



Obrázek 14: Znárodnění řezu pro výpočet předpisu liniové posouvající síly  $\mathcal{T}$

Postup v druhém intervalu je obdobný, tudíž výpočet pro určení natočení  $\vartheta_2(r)$  vypadá následovně (rovnice (5.107) – (5.114)):

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} \left( \frac{d}{dr} (r\vartheta) \right) \right) = -\frac{T_1}{B} = \frac{p_{max} r_1^2}{4B} \frac{1}{r} \quad (5.107)$$

$$\int d \left( \frac{1}{r} \left( \frac{d}{dr} (r\vartheta) \right) \right) = \int \left( \frac{p_{max} r_1^2}{4B} \frac{1}{r} \right) dr \quad (5.108)$$

$$\frac{1}{r} \left( \frac{d}{dr} (r\vartheta) \right) = \frac{p_{max} r_1^2}{4B} \ln(r) + C_3 \quad (5.109)$$

$$\int d(r\vartheta) = \int \left( \frac{p_{max} r_1^2}{4B} r \ln(r) + C_3 r \right) dr \quad (5.110)$$

$$r\vartheta = C_3 \frac{r^2}{2} + \frac{p_{max} r_1^2}{4B} \left| \begin{array}{l} u = \ln(r) \quad u' = \frac{1}{r} \\ v' = r \quad v = \frac{r^2}{2} \end{array} \right| \quad (5.111)$$

$$r\vartheta = C_3 \frac{r^2}{2} + \frac{p_{max} r_1^2}{4B} \left( \ln(r) \frac{r^2}{2} - \int \frac{r^2}{2} \frac{1}{r} dr \right) \quad (5.112)$$

$$r\vartheta = C_3 \frac{r^2}{2} + \frac{p_{max} r_1^2}{4B} \left( \ln(r) \frac{r^2}{2} - \frac{r^2}{4} \right) + C_4 \quad (5.113)$$

$$\vartheta_2(r) = \frac{p_{max} r_1^2}{8B} \ln(r) r - \frac{p_{max} r_1^2}{16B} r + C_3 \frac{r}{2} + C_4 \frac{1}{r} \quad (5.114)$$

Předpis natočení v druhém intervalu je obdobný.  $C_3$  a  $C_4$  jsou opět integrační konstanty. Dále bylo provedeno vyjádření ohybových liniových momentů pomocí stejných vzorců (rovnice (4.7) a (4.8)), které byly použity v prvním intervalu:

Obdobně jako v prvním intervalu jsou nyní uvedeny jednotlivé členy (derivace i podíl):

$$\frac{d\vartheta_2}{dr} = \frac{p_{max} r_1^2}{16B} + \frac{p_{max} r_1^2}{8B} \ln(r) + \frac{C_3}{2} - \frac{C_4}{r^2} \quad (5.115)$$

$$\frac{\vartheta_2}{r} = \frac{p_{max} r_1^2}{8B} \ln(r) - \frac{p_{max} r_1^2}{16B} + \frac{C_3}{2} + \frac{C_4}{r^2} \quad (5.116)$$

Pomocí vyjádřených vztahů byly určeny ohybové liniové momenty ve druhém intervalu. Opět jsou vztahy pro oba vnitřní účinky velmi podobné. Pro tento interval je očekávána nejvyšší hodnota momentů (i napětí) ve vetknutí, tedy pro  $r = r_2$ .

$$m_{r_2}(r) = \frac{p_{max}r_1^2(\mu - 1)}{16} - \frac{p_{max}r_1^2 \ln(r) (1 + \mu)}{8} + \frac{C_4B(1 - \mu)}{r^2} - \frac{C_3B(\mu + 1)}{2} \quad (5.117)$$

$$m_{t_2}(r) = \frac{p_{max}r_1^2(1 - \mu)}{16} - \frac{p_{max}r_1^2 \ln(r) (1 + \mu)}{8} + \frac{C_4B(\mu - 1)}{r^2} - \frac{C_3B(\mu + 1)}{2} \quad (5.118)$$

### 5.3.1.3 Výpočet integračních konstant vetknutí

Okrajové podmínky mají pro vetknutí podobu znázorněnou rovnicemi (5.119), (5.120), (5.121) a (5.122).

$$\vartheta_1(r = 0) = 0 \quad (5.119)$$

$$\vartheta_1(r = r_1) = \vartheta_2(r = r_1) \quad (5.120)$$

$$m_{r_1}(r = r_1) = m_{r_2}(r = r_1) \quad (5.121)$$

$$\vartheta_2(r = r_2) = 0 \quad (5.122)$$

Dosazení první OP z rovnice (5.119) opět vede na eliminaci druhé integrační konstanty.

$$C_2 = 0 \quad (5.123)$$

Díky nulové hodnotě  $C_2$  již v následujících rovnicích členy tuto konstantu obsahující nebudou uvedeny. V rovnicích (5.124) – (5.127) je znázorněna aplikace druhé OP z rovnice (5.120).

$$\begin{aligned} & -\frac{p_{max}}{96r_1^2B}r_1^5 + \frac{p_{max}}{16B}r_1^3 + \frac{C_1}{2}r_1 = \\ & = \frac{p_{max}r_1^2}{8B}\ln(r_1)r_1 - \frac{p_{max}r_1^2}{16B}r_1 + C_3\frac{r_1}{2} + C_4\frac{1}{r_1} \end{aligned} \quad (5.124)$$

$$\frac{C_1}{2}r_1 = \frac{p_{max}}{8B}\ln(r_1)r_1^3 - \frac{p_{max}}{16B}r_1^3 + C_3\frac{r_1}{2} + C_4\frac{1}{r_1} + \frac{p_{max}}{96B}r_1^3 - \frac{p_{max}}{16B}r_1^3 \quad (5.125)$$

$$C_1 = \frac{p_{max}}{4B}\ln(r_1)r_1^2 - \frac{p_{max}}{8B}r_1^2 + C_4\frac{2}{r_1^2} + \frac{p_{max}}{48B}r_1^2 - \frac{p_{max}}{8B}r_1^2 + C_3 \quad (5.126)$$

$$C_1 = \frac{p_{max}}{4B}\ln(r_1)r_1^2 - \frac{11p_{max}}{48B}r_1^2 + C_4\frac{2}{r_1^2} + C_3 \quad (5.127)$$

Aplikace třetí OP z rovnice (5.121).

$$\begin{aligned} & \frac{p_{max}r_1^2(5 + \mu)}{96} - \frac{p_{max}r_1^2(3 + \mu)}{16} - \frac{C_1B(1 + \mu)}{2} = \\ & = \frac{p_{max}r_1^2(\mu - 1)}{16} - \frac{p_{max}r_1^2 \ln(r_1) (1 + \mu)}{8} + \frac{C_4B(1 - \mu)}{r_1^2} - \frac{C_3B(\mu + 1)}{2} \end{aligned} \quad (5.128)$$

$$\begin{aligned} \frac{C_3B(\mu + 1)}{2} & = -\frac{p_{max}r_1^2(5 + \mu)}{96} + \frac{p_{max}r_1^2(3 + \mu)}{16} + \frac{C_1B(1 + \mu)}{2} \\ & + \frac{p_{max}r_1^2(\mu - 1)}{16} - \frac{p_{max}r_1^2 \ln(r_1) (1 + \mu)}{8} + \frac{C_4B(1 - \mu)}{r_1^2} \end{aligned} \quad (5.129)$$

$$C_3(\mu + 1) = -\frac{p_{max}r_1^2(5 + \mu)}{48B} + \frac{p_{max}r_1^2(3 + \mu)}{8B} + C_1(1 + \mu) \quad (5.130)$$

$$C_3 = -\frac{p_{max}r_1^2(\mu-1)}{8B} - \frac{p_{max}r_1^2 \ln(r_1)(1+\mu)}{4B} + \frac{2C_4(1-\mu)}{r_1^2} - \frac{p_{max}r_1^2(5+\mu)}{48B(\mu+1)} + \frac{p_{max}r_1^2((3+\mu)-(\mu-1))}{8B(\mu+1)} - \frac{p_{max}r_1^2 \ln(r_1)}{4B} + \frac{2C_4(1-\mu)}{r_1^2(\mu+1)} + C_1 \quad (5.131)$$

$$C_3 = \frac{-p_{max}r_1^2(5+\mu)}{48B(\mu+1)} + \frac{4p_{max}r_1^2}{8B(\mu+1)} - \frac{p_{max}r_1^2 \ln(r_1)}{4B} + \frac{2C_4(1-\mu)}{r_1^2(\mu+1)} + C_1 \quad (5.132)$$

$$C_3 = \frac{-p_{max}r_1^2(5+\mu)}{48B(\mu+1)} + \frac{p_{max}r_1^2}{2B(\mu+1)} - \frac{p_{max}r_1^2 \ln(r_1)}{4B} + \frac{2C_4(1-\mu)}{r_1^2(\mu+1)} + C_1 \quad (5.133)$$

A nakonec aplikace poslední OP tohoto modelu. Jedná se o OP z rovnice (5.122).

$$0 = \frac{p_{max}r_1^2}{8B} \ln(r_2)r_2 - \frac{p_{max}r_1^2}{16B} r_2 + C_3 \frac{r_2}{2} + C_4 \frac{1}{r_2} \quad (5.134)$$

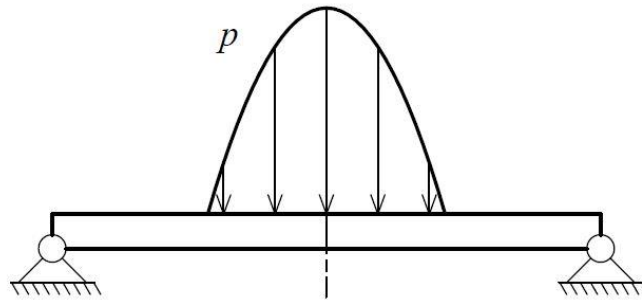
$$C_4 \frac{1}{r_2} = -\frac{p_{max}r_1^2}{8B} \ln(r_2)r_2 + \frac{p_{max}r_1^2}{16B} r_2 - C_3 \frac{r_2}{2} \quad (5.135)$$

$$C_4 = \frac{p_{max}r_1^2 r_2^2}{16B} - \frac{p_{max}r_1^2 r_2^2 \ln(r_2)}{8B} - C_3 \frac{r_2^2}{2} \quad (5.136)$$

Ve výsledku se jedná o soustavu tří lineárních rovnic o třech neznámých. Po vyřešení soustavy již bude možné vyčíslit hodnoty napětí.

### 5.3.2 Rotační vazba

Opět stojí za připomenutí, že veškerý výpočet rotační vazby je shodný s vetknutím a liší se pouze v jedné OP. Tudíž rovnice pro natočení a jednotlivé momenty prvního intervalu jsou stejné jako v rovnicích (5.98), (5.101) a (5.102). To samé platí i pro druhý interval, tudíž výchozí rovnice jsou rovnice (5.114), (5.117) a (5.118).



Obrázek 15: Deska uložená v rotační vazbě a zatížená parabolicky rozloženým spojitým zatížením

#### 5.3.2.1 Výpočet integračních konstant rotační vazby

Pomocí těchto vztahů a odpovídajících okrajových podmínek jsou určeny integrační konstanty  $C_1$  až  $C_4$ . Okrajové podmínky použity k výpočtům jsou uvedeny níže.

$$\vartheta_{1r}(r=0) = 0 \quad (5.137)$$

$$\vartheta_1(r=r_1) = \vartheta_2(r=r_1) \quad (5.138)$$

$$m_{r1}(r=r_1) = m_{r2}(r=r_1) \quad (5.139)$$

$$m_{r_2}(r = r_2) = 0 \quad (5.140)$$

Rovnice vyjadřující první tři OP jsou stejné, a tak i vyjádření jednotlivých konstant má stejný tvar. To ale neznamená, že mají stejnou hodnotu. Poslední OP je úplně jiná, a protože se jedná o systém rovnic, jsou jí ovlivněny i ostatní integrační konstanty. Aplikace první OP z rovnice (5.137) opět způsobí vynulování druhé integrační konstanty.

$$C_2 = 0 \quad (5.141)$$

Druhá i třetí OP z rovnic (5.138) a (5.139) vedou na stejné předpisy jako u vetknuté desky.

$$C_1 = \frac{p_{max}}{4B} \ln(r_1)r_1^2 - \frac{p_{max}}{24B} r_1^2 + C_{4r} \frac{1}{r_1^2} + C_{3r} \quad (5.142)$$

$$C_3 = \frac{-p_{max}r_1^2(5 + \mu)}{48B(\mu + 1)} + \frac{p_{max}r_1^2}{2B(\mu + 1)} - \frac{p_{max}r_1^2 \ln(r_1)}{4B} + \frac{2C_4(1 - \mu)}{r_1^2(\mu + 1)} + C_1 \quad (5.143)$$

Aplikace poslední OP z rovnice (5.140). Odvození předpisu pro poslední integrační konstantu je uvedeno v rovnicích (5.144) – (5.148).

$$0 = \frac{p_{max}r_1^2(\mu - 1)}{16} - \frac{p_{max}r_1^2 \ln(r_2)(1 + \mu)}{8} + \frac{C_4B(1 - \mu)}{r_2^2} - \frac{C_3B(\mu + 1)}{2} \quad (5.144)$$

$$\frac{C_4B(1 - \mu)}{r_2^2} = -\frac{p_{max}r_1^2(\mu - 1)}{16} + \frac{p_{max}r_1^2 \ln(r_2)(1 + \mu)}{8} + \frac{C_3B(\mu + 1)}{2} \quad (5.145)$$

$$\frac{C_4(1 - \mu)}{r_2^2} = \frac{p_{max}r_1^2(1 - \mu)}{16B} - \frac{p_{max}r_1^2 \ln(r_2)(-1 - \mu)}{8B} - \frac{C_3(-\mu - 1)}{2} \quad (5.146)$$

$$\frac{C_4}{r_2^2} = \frac{p_{max}r_1^2}{16B} - \frac{p_{max}r_1^2 \ln(r_2)(-1 - \mu)}{8B(1 - \mu)} - \frac{C_3(-\mu - 1)}{2(1 - \mu)} \quad (5.147)$$

$$C_4 = \frac{p_{max}r_1^2r_2^2}{16B} + \frac{p_{max}r_1^2r_2^2 \ln(r_2)(1 + \mu)}{8B(1 - \mu)} + \frac{C_3r_2^2(1 + \mu)}{2(1 - \mu)} \quad (5.148)$$

## 5.4 Lineární zatížení

Jako čtvrtý výpočtový model bylo použito lineárně klesající zatížení s maximem uprostřed desky.

Rovnice zátěžného obrazce má tvar přímky

$$p = ar + b \quad (5.149)$$

Pro určení koeficientů přímky byly použity dvě okrajové podmínky.

$$p(r = 0) = p_{max2} \quad (5.150)$$

$$p(r = r_2) = 0 \quad (5.151)$$

Po dosazení byly určeny hodnoty koeficientů.

$$a = -\frac{p_{max2}}{r_2} \quad (5.152)$$

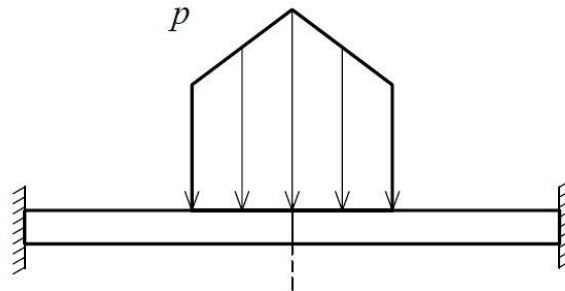
$$b = p_{max2} \quad (5.153)$$

Tudíž konečná podoba předpisu průběhu zatížení je uvedena v rovnici (5.154).

$$p(r) = -\frac{p_{max2}}{r_2}r + p_{max2} \quad (5.154)$$

### 5.4.1 Vetknutá deska

Postup řešení je shodný s druhým popsaným modelem (podkapitola 5.2), jednotlivé kroky se tedy liší pouze v odpovídajících předpisech. Situace je znázorněna na obrázku 16.



Obrázek 16: Vetknutá deska zatížená lineárně klesajícím spojitým zatížením

#### 5.4.1.1 Interval $0 < r < r_1$

Z rovnice (5.154) je možné vypočítat sílu (konečná podoba je v rovnici (5.157)) a tu použít k vyjádření silové rovnováhy v ose  $z$  a následně vyjádřit předpis vnitřního účinku liniové posouvající síly.

$$F = \int p(r) dr \quad (5.155)$$

$$F = \int_0^r \left( -\frac{p_{max2}}{r_2} r + p_{max2} \right) 2\pi r dr = \quad (5.156)$$

$$= \left[ -\frac{2\pi p_{max2}}{r_2} \frac{r^3}{3} + 2\pi p_{max2} \frac{r^2}{2} \right]_0^r$$

$$F_1 = -\frac{2\pi p_{max2}}{3r_2} r^3 + \pi p_{max2} r^2 \quad (5.157)$$

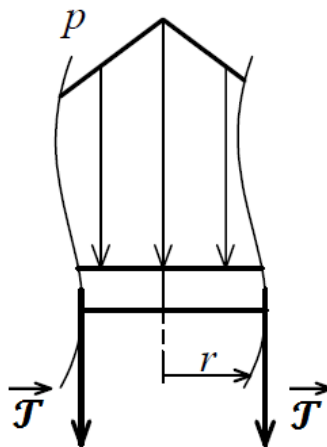
Podmínka silové rovnováhy i dosazení jsou uvedeny v rovnicích (5.158) a (5.159).

$$\sum F_z = 0 \quad (5.158)$$

$$F_1 + 2\pi r \mathcal{T}_1 = 0 \quad (5.159)$$

Po úpravách byla vyjádřená liniová posouvající síla.

$$\mathcal{T}_1 = \frac{p_{max2}}{3r_2} r^2 - \frac{p_{max2}}{2} r \quad (5.160)$$



Obrázek 17: Znázornění řezu pro výpočet předpisu liniové posouvající síly  $\mathcal{T}$

Odvození předpisu pro natočení  $\vartheta_1(r)$  je uvedeno v rovnicích (5.161) – (5.166).

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} \left( \frac{d}{dr} (r\vartheta) \right) \right) = -\frac{\mathcal{J}_1}{B} = -\frac{p_{max2}}{3Br_2} r^2 + \frac{p_{max2}}{2B} r \quad (5.161)$$

$$\int d \left( \frac{1}{r} \left( \frac{d}{dr} (r\vartheta) \right) \right) = \int \left( -\frac{p_{max2}}{3Br_2} r^2 + \frac{p_{max2}}{2B} r \right) dr \quad (5.162)$$

$$\frac{1}{r} \left( \frac{d}{dr} (r\vartheta) \right) = -\frac{p_{max2}}{3Br_2} \frac{r^3}{3} + \frac{p_{max2}}{2B} \frac{r^2}{2} + C_1 \quad (5.163)$$

$$\int d(r\vartheta) = \int \left( -\frac{p_{max2}}{9Br_2} r^4 + \frac{p_{max2}}{4B} r^3 + C_1 r \right) dr \quad (5.164)$$

$$r\vartheta = -\frac{p_{max2}}{9Br_2} \frac{r^5}{5} + \frac{p_{max2}}{4B} \frac{r^4}{4} + C_1 \frac{r^2}{2} + C_2 \quad (5.165)$$

$$\vartheta_1(r) = -\frac{p_{max2}}{45Br_2} r^4 + \frac{p_{max2}}{16B} r^3 + \frac{C_1}{2} r + \frac{C_2}{r} \quad (5.166)$$

Nyní byly pomocí známých vztahů z rovnic (4.7) a (4.8) odvozeny liniové ohybové momenty pro tento konkrétní případ. Podíl natočení a vzdálenosti a derivace natočení jsou uvedeny v rovnicích (5.167) a (5.168).

$$\frac{d\vartheta_1}{dr} = -\frac{4p_{max2}}{45Br_2} r^3 + \frac{3p_{max2}}{16B} r^2 + \frac{C_1}{2} - \frac{C_2}{r^2} \quad (5.167)$$

$$\frac{\vartheta_1}{r} = -\frac{p_{max2}}{45Br_2} r^3 + \frac{p_{max2}}{16B} r^2 + \frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{r^2} \quad (5.168)$$

Po vyřešení byly vyjádřeny předpisy pro jednotlivé momenty.

$$m_{r1}(r) = \frac{p_{max2} r^3 (4 + \mu)}{45r_2} - \frac{p_{max2} r^2 (3 + \mu)}{16} + \frac{C_2 B (1 - \mu)}{r^2} - \frac{C_1 B (1 + \mu)}{2} \quad (5.169)$$

$$m_{t1}(r) = \frac{p_{max2} r^3 (1 + 4\mu)}{45r_2} - \frac{p_{max2} r^2 (1 + 3\mu)}{16} + \frac{C_2 B (\mu - 1)}{r^2} - \frac{C_1 B (1 + \mu)}{2} \quad (5.170)$$

#### 5.4.1.2 Interval $r_1 < r < r_2$

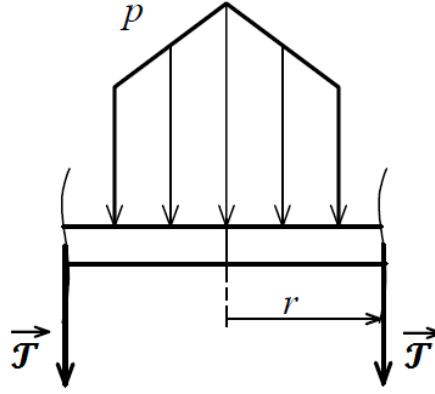
Opět se při výpočtu síly změnila pouze hodnota horní meze.

$$\begin{aligned} F &= \int_0^{r_1} \left( -\frac{2\pi p_{max2}}{r_2} r^2 + 2\pi p_{max2} r \right) dr = \\ &= \left[ -\frac{2\pi p_{max2}}{r_2} \frac{r^3}{3} + 2\pi p_{max2} \frac{r^2}{2} \right]_0^{r_1} \end{aligned} \quad (5.171)$$

$$F_{II} = -\frac{2\pi p_{max2}}{3r_2} r_1^3 + \pi p_{max2} r_1^2 \quad (5.172)$$

Z rovnice silové rovnováhy byla opět vyjádřena liniová posouvající síla, jejíž předpis má po úpravách následující tvar.

$$\mathcal{J}_2 = \frac{p_{max2} r_1^3}{3r_2} \frac{1}{r} - \frac{p_{max2} r_1^2}{2} \frac{1}{r} \quad (5.173)$$



Obrázek 18: Znázornění řezu pro výpočet předpisu liniové posouvající síly  $\mathcal{J}$

V následujícím kroku byl odvozen vztah pro natočení  $\vartheta_2(r)$  (rovnice (5.174) – (5.183)).

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} \left( \frac{d}{dr} (r\vartheta) \right) \right) = -\frac{\mathcal{J}_2}{B} = -\frac{p_{\max 2} r_1^3}{3Br_2} \frac{1}{r} + \frac{p_{\max 2} r_1^2}{2B} \frac{1}{r} \quad (5.174)$$

$$\int d \left( \frac{1}{r} \left( \frac{d}{dr} (r\vartheta) \right) \right) = \int \left( -\frac{p_{\max 2} r_1^3}{3Br_2} \frac{1}{r} + \frac{p_{\max 2} r_1^2}{2B} \frac{1}{r} \right) dr \quad (5.175)$$

$$\frac{1}{r} \left( \frac{d}{dr} (r\vartheta) \right) = -\frac{p_{\max 2} r_1^3}{3Br_2} \ln(r) + \frac{p_{\max 2} r_1^2}{2B} \ln(r) + C_1 \quad (5.176)$$

$$\int d(r\vartheta) = \int \left( -\frac{p_{\max 2} r_1^3}{3Br_2} \ln(r)r + \frac{p_{\max 2} r_1^2}{2B} \ln(r)r + C_1 \right) dr \quad (5.177)$$

$$r\vartheta = C_3 \frac{r^2}{2} + \left( \frac{p_{\max 2} r_1^2}{2} - \frac{p_{\max 2} r_1^3}{3r_2} \right) \frac{1}{B} \int (\ln(r)r) dr \quad (5.178)$$

Zde byla provedena substituce.

$$A = \frac{p_{\max 2} r_1^2}{2} - \frac{p_{\max 2} r_1^3}{3r_2} \quad (5.179)$$

Integrovaný výraz lze řešit například metodou *per partes*.

$$r\vartheta = C_3 \frac{r^2}{2} + \frac{A}{B} \left| \begin{array}{l} u = \ln(r) \quad u' = \frac{1}{r} \\ v' = r \quad v = \frac{r^2}{2} \end{array} \right| \quad (5.180)$$

$$r\vartheta = C_3 \frac{r^2}{2} + \frac{A}{B} \left( \ln(r) \frac{r^2}{2} - \int \frac{r^2}{2} \frac{1}{r} dr \right) \quad (5.181)$$

$$r\vartheta = C_3 \frac{r^2}{2} + \frac{A}{B} \left( \ln(r) \frac{r^2}{2} - \frac{r^2}{4} \right) + C_4 \quad (5.182)$$

$$\vartheta_2(r) = \frac{A}{2B} \ln(r)r - \frac{A}{4B} r + C_3 \frac{r}{2} + \frac{C_4}{r} \quad (5.183)$$

Aplikací již několikrát použitého postupu byly odvozeny předpisy pro jednotlivé ohybové momenty, a to pomocí derivace  $\vartheta_2(r)$  podle  $r$  a podílu těchto dvou.

$$\frac{d\vartheta_2}{dr} = \frac{A}{2B} \ln(r) + \frac{A}{4B} + \frac{C_3}{2} - \frac{C_4}{r^2} \quad (5.184)$$

$$\frac{\vartheta_2}{r} = \frac{A}{2B} \ln(r) - \frac{A}{4B} + \frac{C_3}{2} + \frac{C_4}{r^2} \quad (5.185)$$

Pomocí těchto dvou rovnic byly nakonec dopočítány předpisy jednotlivých momentů.

$$m_{r_2}(r) = \frac{A(-1-\mu)}{2} \ln(r) + \frac{A(\mu-1)}{4} - \frac{C_3 B(1+\mu)}{2} + \frac{C_4 B(1-\mu)}{r^2} \quad (5.186)$$

$$m_{t_2}(r) = \frac{A(-1-\mu)}{2} \ln(r) + \frac{A(1-\mu)}{4} - \frac{C_3 B(1+\mu)}{2} + \frac{C_4 B(\mu-1)}{r^2} \quad (5.187)$$

#### 5.4.2 Výpočet integračních konstant vetknutí

K výpočtu konkrétních hodnot  $C_1$  až  $C_4$  byly použity okrajové podmínky. Protože je charakter uložení stejný jako v případě parabolického zatížení, jsou stejné i okrajové podmínky.

$$\vartheta_1(r=0) = 0 \quad (5.188)$$

$$\vartheta_1(r=r_1) = \vartheta_2(r=r_1) \quad (5.189)$$

$$m_{r_1}(r=r_1) = m_{r_2}(r=r_1) \quad (5.190)$$

$$\vartheta_2(r=r_2) = 0 \quad (5.191)$$

Dosazování do první okrajové podmínky již není znova uvedeno, neboť se jedná o triviální rovnici.

$$C_2 = 0 \quad (5.192)$$

Aplikace druhé OP z rovnice (5.189) je uvedena v rovnicích (5.193) – (5.195).

$$-\frac{p_{max2}}{45Br_2} r_1^4 + \frac{p_{max2}}{16B} r_1^3 + \frac{C_1}{2} r_1 = \frac{A}{2B} \ln(r_1) r_1 - \frac{A}{4B} r_1 + C_3 \frac{r_1}{2} + \frac{C_4}{r_1^2} \quad (5.193)$$

$$\frac{C_1}{2} r_1 = \frac{A}{2B} \ln(r_1) r_1 - \frac{A}{4B} r_1 + C_3 \frac{r_1}{2} + \frac{C_4}{r_1} + \frac{p_{max2}}{45Br_2} r_1^4 - \frac{p_{max2}}{16B} r_1^3 \quad (5.194)$$

$$C_1 = \frac{A}{B} \ln(r_1) - \frac{A}{2B} + C_3 + \frac{2C_4}{r_1^2} + \frac{2p_{max2}}{45Br_2} r_1^3 - \frac{p_{max2}}{8B} r_1^2 \quad (5.195)$$

Třetí OP z rovnice (5.190) byla použita v rovnicích (5.196) – (5.199).

$$\begin{aligned} & \frac{p_{max2} r_1^3 (4+\mu)}{45r_2} - \frac{p_{max2} r_1^2 (3+\mu)}{16} - \frac{C_1 B(1+\mu)}{2} = \\ & = \frac{A(-1-\mu)}{2} \ln(r_1) + \frac{A(\mu-1)}{4} - \frac{C_3 B(1+\mu)}{2} + \frac{C_4 B(1-\mu)}{r_1^2} \end{aligned} \quad (5.196)$$

$$\begin{aligned} \frac{C_3 B(1+\mu)}{2} = & -\frac{p_{max2} r_1^3 (4+\mu)}{45r_2} + \frac{p_{max2} r_1^2 (3+\mu)}{16} + \frac{C_1 B(1+\mu)}{2} + \\ & + \frac{A(-1-\mu)}{2} \ln(r_1) + \frac{A(\mu-1)}{4} + \frac{C_4 B(1-\mu)}{r_1^2} \end{aligned} \quad (5.197)$$

$$\begin{aligned} \frac{C_3 B}{2} = & -\frac{p_{max2} r_1^3 (4+\mu)}{45r_2(1+\mu)} + \frac{p_{max2} r_1^2 (3+\mu)}{16(1+\mu)} + \frac{C_1 B}{2} - \frac{A}{2} \ln(r_1) + \frac{A(\mu-1)}{4(1+\mu)} + \\ & + \frac{C_4 B(1-\mu)}{r_1^2(1+\mu)} \end{aligned} \quad (5.198)$$

$$\begin{aligned} C_3 = & -\frac{2p_{max2} r_1^3 (4+\mu)}{45Br_2(1+\mu)} + \frac{p_{max2} r_1^2 (3+\mu)}{8B(1+\mu)} + C_1 - \frac{A}{B} \ln(r_1) + \frac{A(\mu-1)}{2B(1+\mu)} + \\ & + \frac{2C_4(1-\mu)}{r_1^2(1+\mu)} \end{aligned} \quad (5.199)$$

Aplikace poslední OP z rovnice (5.191).

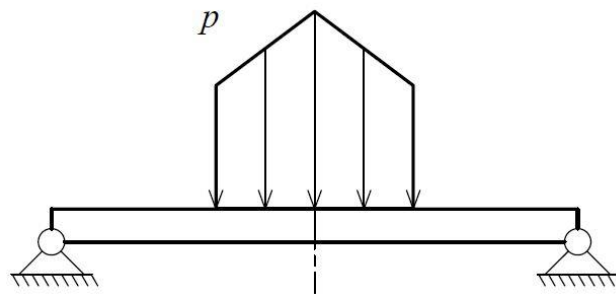
$$0 = \frac{A}{2B} \ln(r_2)r_2 - \frac{A}{4B} r_2 + C_3 \frac{r_2}{2} + \frac{C_4}{r_2} \quad (5.200)$$

$$\frac{C_4}{r_2} = -\frac{A}{2B} \ln(r_2)r_2 + \frac{A}{4B} r_2 - C_3 \frac{r_2}{2} \quad (5.201)$$

$$C_4 = \frac{A}{4B} r_2^2 - \frac{A}{2B} \ln(r_2)r_2^2 - \frac{C_3}{2} r_2^2 \quad (5.202)$$

### 5.4.3 Rotační vazba

Při řešení uložení v rotační vazbě (jak už bylo uvedeno v podkapitole 5.2 i 5.3) stejného zatížení se změní pouze jedna okrajová podmínka. Předpisy natočení, radiálního i tangenciálního liniového momentu pro oba intervaly tedy mají podobu již určenou rovnicemi (5.166), (5.169), (5.170), (5.183), (5.186) a (5.187).



Obrázek 19: Deska uložená v rotační vazbě a zatížená lineárně klesajícím spojitým zatížením

#### 5.4.3.1 Výpočet integračních konstant rotační vazby

Okrajové podmínky pro desku uloženou v rotační vazbě a řešenou na dvou intervalech představují podmínky nulového natočení na ose symetrie, podmínky spojitosti zatížení i natočení a konečně nulové hodnoty momentu v radiálním směru v samotné vazbě.

$$\vartheta_1(r = 0) = 0 \quad (5.203)$$

$$\vartheta_1(r = r_1) = \vartheta_2(r = r_1) \quad (5.204)$$

$$m_{r1}(r = r_1) = m_{r2}(r = r_1) \quad (5.205)$$

$$m_{r2}(r = r_2) = 0 \quad (5.206)$$

Protože jsou první tři OP stejné, jsou v rovnicích uvedeny pouze konečné podoby předpisů integračních konstant bez odvození. Poslední podmínka je jiná, a proto je uvedeno i odvození finálního tvaru.

Aplikace první OP z rovnice (5.203).

$$C_2 = 0 \quad (5.207)$$

Aplikace druhé OP z rovnice (5.204).

$$C_1 = \frac{A}{B} \ln(r_1) - \frac{A}{2B} + C_3 + \frac{2C_4}{r_1^2} + \frac{2p_{max2}}{45Br_2} r_1^3 - \frac{p_{max2}}{8B} r_1^2 \quad (5.208)$$

Aplikace třetí OP z rovnice (5.205).

$$C_3 = -\frac{2p_{max2}r_1^3(4+\mu)}{45Br_2(1+\mu)} + \frac{p_{max2}r_1^2(3+\mu)}{8B(1+\mu)} + C_1 - \frac{A}{B}\ln(r_1) + \frac{A(\mu-1)}{2B(1+\mu)} + \frac{2C_4(1-\mu)}{r_1^2(1+\mu)} \quad (5.209)$$

Aplikace poslední OP z rovnice (5.206) a následná úprava.

$$0 = \frac{A(-1-\mu)}{2}\ln(r_2) + \frac{A(\mu-1)}{4} - \frac{C_3B(1+\mu)}{2} + \frac{C_4B(1-\mu)}{r_2^2} \quad (5.210)$$

$$\frac{C_4B(1-\mu)}{r_2^2} = -\frac{A(-1-\mu)}{2}\ln(r_2) - \frac{A(\mu-1)}{4} + \frac{C_3B(1+\mu)}{2} \quad (5.211)$$

$$\frac{C_4B}{r_2^2} = -\frac{A(-1-\mu)}{2(1-\mu)}\ln(r_2) + \frac{A}{4} + \frac{C_3B(1+\mu)}{2(1-\mu)} \quad (5.212)$$

$$C_4 = \frac{A(1+\mu)}{2B(1-\mu)}\ln(r_2)r_2^2 + \frac{A}{4B}r_2^2 + \frac{C_3(1+\mu)}{2(1-\mu)}r_2^2 \quad (5.213)$$

## 5.5 Zkoumané materiály

Pro zhodnocení empirických vztahů a výpočtových modelů zpracovaných v této práci byly vybrány dva materiály, na kterých se SPT provádí. Prvním materiálem je slitina hliníku značená EN AW 2024-T351. Druhým vzorkem je nerezová ocel s označením 316L.

### 5.5.1 Hliníková slitina 2024-T351

Tato slitina se patří mezi superduraly, protože tři hlavní prvky, které ji tvoří, jsou hliník, měď a hořčík [28]. Vyskytují se v ní i stopová množství manganu, železa a titanu. Díky své nízké hustotě se tato slitina používá v leteckém průmyslu. Její hlavní nevýhodou je podléhavost korozi, a to hlavně na hranicích zrn. Dalším zajímavým využitím jsou veterinární aplikace [29].

### 5.5.2 Austenitická ocel AISI 316L

Jedná se o ocel s nízkým obsahem hliníku, ale s vysokým obsahem jiných legur [30]. Mezi legující prvky patří chrom a nikl (oba nad 10 %), dále v menším zastoupení např. molybden či mangan. Díky svému složení má tato ocel velmi užitečné vlastnosti. Velmi dobře odolává korozi, a to i za zvýšené teploty. *Creepové* vlastnosti této oceli jsou také její předností. Mezi oblastmi použití patří například výměníky tepla, součásti pecí, proudových motorů ale i různá potrubí v oblasti chemických procesů [31].

## 6. VYČÍSLENÍ ANALYTICKÉHO ŘEŠENÍ

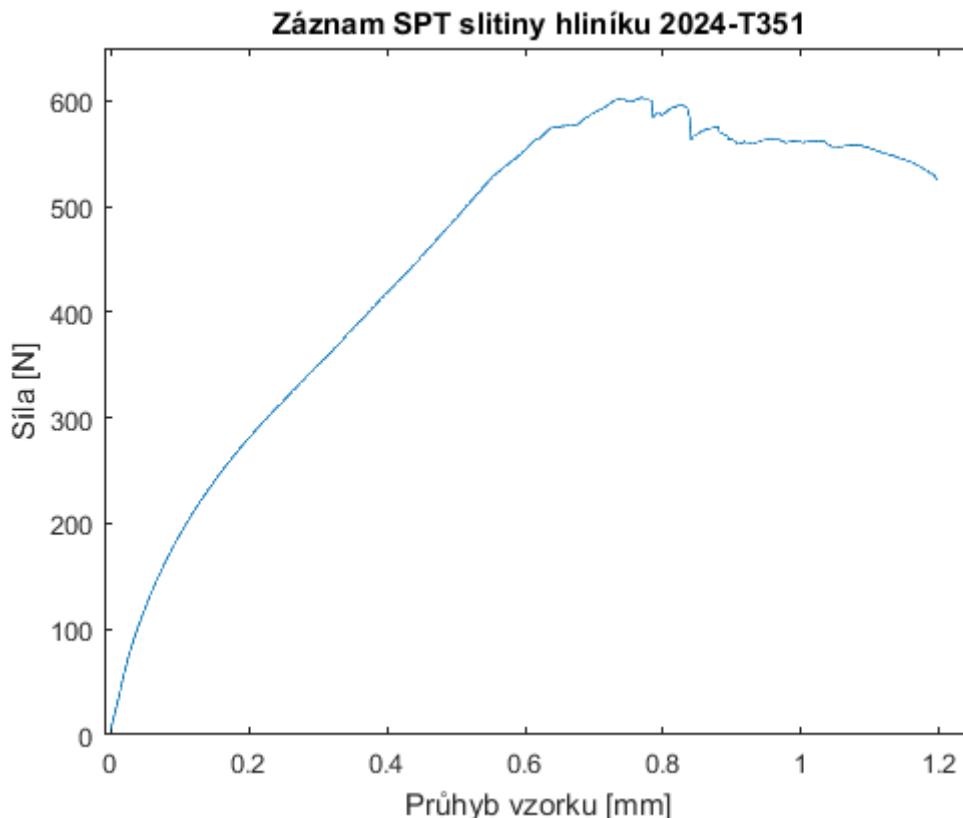
Mez kluzu byla vyčíslena pro každé zatížení a uložení. Pro každou ze situací se dá očekávat různá hodnota meze kluzu. Pro všechny případy byla použita stejná podmínka plasticity, aby bylo zachováno jakési vzájemné porovnání jednotlivých případů. Použitou podmínkou je Treskova podmínka  $max\tau$  [2]. Určení hodnot liniových momentů, které byly dosazeny do vztahů pro výpočet napětí, bylo provedeno vyčíslením v kritických bodech. Poté bylo ověřeno, jestli maximální hodnoty jsou skutečně v kritických bodech pomocí vykreslení grafů.

### 6.1 Hliníková slitina 2024-T351

Tato slitina je první ze dvou zvolených pro aplikaci výpočtových modelů. Pro tuhost desky z tohoto materiálu platí:

$$B = \frac{Eh^3}{12(1 - \mu^2)} = 818 \text{ Nmm} \quad (6.1)$$

Síla, která vyvolala v desce mez kluzu, byla stanovena podle záznamu, který je zobrazen v obrázku 20 [11]. Hodnota síly byla stanovena metodou odsazení (*offset*), a to na hodnotu 170 N.



Obrázek 20: Záznam SPT hliníkové slitiny [11]

#### 6.1.1 Zatížení osamělou silou v ose rotace

Pro výpočet napětí desek je potřeba znát hodnoty vnitřních účinků, a to konkrétně radiálního a tangenciálního momentu. Vztahy, ze kterých byly vypočteny hodnoty těchto vnitřních účinků, byly odvozeny již výše v rovnicích (5.15) a (5.16). Zatížení osamělou silou vyžadovalo řešení jen na jednom intervalu, a tudíž není zapotřebí vyčíslovat hodnoty integračních konstant.

Pro model síly bylo nutné vytvořit předpoklad dostatečné vzdálenosti od středu desky, protože z rovnic (5.15) a (5.16) je zřejmé, že pro střed desky by momenty (i napětí) nabývaly nekonečných hodnot. Za tuto vzdálenost byla v této práci určena ta hodnota poloměru, která odpovídá konci protlačovacího tělesa, tedy  $r_1$ .

### 6.1.1.1 Vetknutí

Pro vetknutí platí podle vztahů pro výpočet napětí následující hodnoty radiálního a tangenciálního napětí.

$$\sigma_r = \frac{6m_r}{h^2} = 178 \text{ MPa} \quad (6.2)$$

$$\sigma_t = \frac{6m_t}{h^2} = 395 \text{ MPa} \quad (6.3)$$

Určení meze kluzu vyplývá z rovnice pro určení bezpečnosti [2]:

$$k = \frac{R_e}{\sigma} \quad (6.4)$$

Meze kluzu je dosaženo právě tehdy, dosáhne-li bezpečnost hodnoty 1. Tudíž po převedení na druhou stranu:

$$R_e = \sigma \quad (6.5)$$

Hodnota napětí, kterou je nutno dosadit do vztahu dle rovnice (6.5), se určuje podle podmínky *max $\tau$* . Jak už bylo uvedeno dříve, radiální a tangenciální směr jsou směry hlavního souřadnicového systému. Když jsou seřazeny podle velikosti, je triviálním problémem určit  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  a  $\sigma_3$ . Protože zkoumané materiály jsou houževnatý, maximem je myšlena absolutní hodnota napětí. Podle Treskovy podmínky plasticity je mez kluzu takto zatížené desky uvedena v rovnici (6.6).

$$R_e = 395 \text{ MPa} \quad (6.6)$$

### 6.1.1.2 Rotační vazba

Následují hodnoty napětí pro desku uloženou v rotační vazbě.

$$\sigma_r = \frac{6m_r}{h^2} = 502 \text{ MPa} \quad (6.7)$$

$$\sigma_t = \frac{6m_t}{h^2} = 720 \text{ MPa} \quad (6.8)$$

Mez kluzu tohoto modelu je tedy hodnota tangenciálního napětí pro poloměr uvažované vazby.

$$R_e = 720 \text{ MPa} \quad (6.9)$$

## 6.1.2 Konstantní zatížení

Druhým výpočtovým modelem je deska, která je zatížena spojitým zatížením. Toto zatížení je konstantní.

### 6.1.2.1 Vetknutí

Neboť zatížení bylo rozložené po ploše, bylo řešení stanoveno na dvou intervalech. Kvůli tomu vznikla soustava 3 lineárních rovnic.

$$C_1 = -0,0393 \quad (6.10)$$

$$C_3 = -0,0301 \quad (6.11)$$

$$C_4 = 0,0065 \quad (6.12)$$

I pro tento případ připadají maximální hodnoty napětí na osu symetrie desky, tedy na hodnotu  $r = 0$ .

$$\sigma_r = \frac{6m_r}{h^2} = 513 \text{ MPa} \quad (6.13)$$

$$\sigma_t = \frac{6m_t}{h^2} = 513 \text{ MPa} \quad (6.14)$$

Tudíž mez kluzu vetknuté desky zatížené konstantním spojitým zatížením je následující.

$$R_e = 513 \text{ MPa} \quad (6.15)$$

### 6.1.2.2 Rotační vazba

Stejně jako tomu bylo u vetknuté desky i v případě desky uložené v rotační vazbě bylo nutné řešit soustavu tří rovnic.

$$C_1 = -0,0629 \quad (6.16)$$

$$C_3 = -0,0538 \quad (6.17)$$

$$C_4 = 0,0065 \quad (6.18)$$

I pro tuto variantu připadají nejvyšší hodnoty momentů na osu symetrie desky. Protože mezi momenty a napětími je pouze lineární závislost, připadají maximální hodnoty napětí také na tuto hodnotu  $r$ .

$$\sigma_r = \frac{6m_r}{h^2} = 822 \text{ MPa} \quad (6.19)$$

$$\sigma_t = \frac{6m_t}{h^2} = 822 \text{ MPa} \quad (6.20)$$

Mez kluzu desky zatížené konstantně rozloženým tlakem a uložené v rotační vazbě má hodnotu dle rovnice (6.21).

$$R_e = 822 \text{ MPa} \quad (6.21)$$

### 6.1.3 Parabolické zatížení

Třetí ze zpracovaných modelů řeší situaci, kdy je deska zatížena parabolicky rozloženým spojitým zatížením, a to jak pro vetknutou desku, tak pro desku uloženou v rotační vazbě.

#### 6.1.3.1 Vetknutí

Integrační konstanty vetknuté desky zatížené paraboloidem nabývají těchto hodnot.

$$C_1 = -0,0473 \quad (6.22)$$

$$C_3 = -0,0298 \quad (6.23)$$

$$C_4 = 0,0043 \quad (6.24)$$

Maximální hodnoty napětí, pro které rovněž platí, že je mezi jednotlivými hodnotami největší rozdíl připadají opět na osu rotace.

$$\sigma_r = \frac{6m_r}{h^2} = 617 \text{ MPa} \quad (6.25)$$

$$\sigma_t = \frac{6m_t}{h^2} = 617 \text{ MPa} \quad (6.26)$$

Maximální hodnota napětí pro vetknutou desku, jejímž zatěžujícím obrazcem je paraboloid, je uvedena v rovnici (6.27).

$$R_e = 617 \text{ MPa} \quad (6.27)$$

### 6.1.3.2 Rotační vazba

Po vyřešení soustavy rovnic byly opět získány hodnoty integračních konstant.

$$C_1 = -0,0713 \quad (6.28)$$

$$C_3 = -0,0539 \quad (6.29)$$

$$C_4 = 0,0043 \quad (6.30)$$

Pro tento model připadají maximální hodnoty momentů opět na střed desky. Na základě hodnot těchto momentů byly vyčísleny hodnoty radiálního a tangenciálního napětí.

$$\sigma_r = \frac{6m_r}{h^2} = 931 \text{ MPa} \quad (6.31)$$

$$\sigma_t = \frac{6m_t}{h^2} = 931 \text{ MPa} \quad (6.32)$$

Opět je řeč o hlavním ss a stejně jako v minulém modelu je i v tomto případě je použita podmínka plasticity  $max\tau$ .

$$R_e = 931 \text{ MPa} \quad (6.33)$$

### 6.1.4 Lineární klesající zatížení

Poslední zpracovaný model řeší tlakové rozložení, které má ve směru  $r$  lineárně klesající průběh do bodu poloměru protlačovací kuličky a poté už nulovou hodnotu.

#### 6.1.4.1 Vetknutí

Hodnoty integračních konstant jsou uvedeny v rovnicích (6.34), (6.35) a (6.36).

$$C_1 = -0,0407 \quad (6.34)$$

$$C_3 = -0,0301 \quad (6.35)$$

$$C_4 = 0,0061 \quad (6.36)$$

Pro tyto konkrétní hodnoty integračních konstant, které byly opět určeny pomocí MATLABu byly vypočítány maximální hodnoty napětí. Ty i v tomto případě připadají na osu symetrie desky.

$$\sigma_r = \frac{6m_r}{h^2} = 531 \text{ MPa} \quad (6.37)$$

$$\sigma_t = \frac{6m_t}{h^2} = 531 \text{ MPa} \quad (6.38)$$

I v tomto případě byla použita podmínka  $max\tau$  a byla vypočtena mez kluzu vzorku pro model lineárně klesajícího zatížení ve směru  $r$ .

$$R_e = 531 \text{ MPa} \quad (6.39)$$

#### 6.1.4.2 Rotační vazba

Vzniklá sestava byla opět vyřešena pomocí MATLABu a s konečnými hodnotami  $C_1$  až  $C_4$  (rovnice (6.40), (6.41) a (6.42)) byly dopočítány hodnoty napětí v kritických bodech pomocí známých vztahů.

$$C_1 = -0,0644 \quad (6.40)$$

$$C_3 = -0,0538 \quad (6.41)$$

$$C_4 = 0,0061 \quad (6.42)$$

I pro tento model připadá maximální hodnota napětí na střed desky. Průběhy napětí jsou takové, že i rozdíl jejich vzájemných hodnot nepřekročil hodnotu radiálního napětí pro střed desky.

$$\sigma_r = \frac{6m_r}{h^2} = 841 \text{ MPa} \quad (6.43)$$

$$\sigma_t = \frac{6m_t}{h^2} = 841 \text{ MPa} \quad (6.44)$$

A konečně určení meze kluzu, je-li deska zatížena lineárně klesajícím zatížením ve směru  $r$  a je uložena v rotační vazbě.

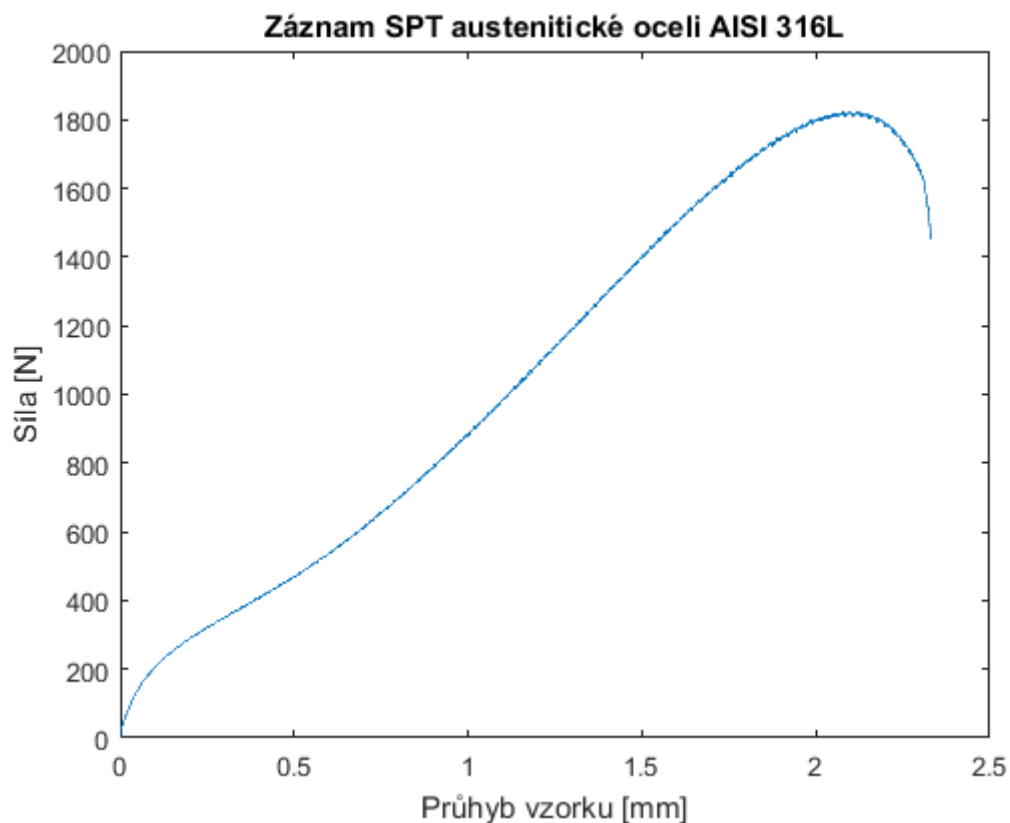
$$R_e = 841 \text{ MPa} \quad (6.45)$$

## 6.2 Austenitická ocel AISI 316L

Tuhost desky z austenitické oceli má tuto hodnotu.

$$B = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} = 2\,169 \text{ Nmm} \quad (6.46)$$

Protože je postup identický a jediná změna připadá na rozdílné hodnoty materiálových charakteristik, je tato podkapitola zkrácena. Jsou zde uvedeny jen potřebné hodnoty. I zde byla síla, která vyvolá mez kluzu určena ze záznamu zkoušky, který je na obrázku 21 [32]. Síla byla opět určena metodou odsazení, tentokrát na 230 N.



Obrázek 21: Záznam SPT austenitické oceli [32]

## 6.2.1 Zatížení osamělou silou v ose rotace

### 6.2.1.1 Vetknutí

Maximální napětí vetknuté desky bylo opět určeno na poloměru, který představuje konec protlačovacího tělesa.

$$\sigma_r = \frac{6m_r}{h^2} = 210 \text{ MPa} \quad (6.47)$$

$$\sigma_t = \frac{6m_t}{h^2} = 530 \text{ MPa} \quad (6.48)$$

Hodnota meze kluzu:

$$R_e = 530 \text{ MPa.} \quad (6.49)$$

### 6.2.1.2 Rotační vazba

Následují hodnoty napětí pro desku uloženou v rotační vazbě.

$$\sigma_r = \frac{6m_r}{h^2} = 649 \text{ MPa} \quad (6.50)$$

$$\sigma_t = \frac{6m_t}{h^2} = 970 \text{ MPa} \quad (6.51)$$

Mez kluzu tohoto modelu je uvedena v rovnici (6.52).

$$R_e = 970 \text{ MPa} \quad (6.52)$$

## 6.2.2 Konstantní zatížení

### 6.2.2.1 Vetknutí

Integrační konstanty:

$$C_1 = -0,0201 \quad (6.53)$$

$$C_3 = -0,0154 \quad (6.54)$$

$$C_4 = 0,0033 \quad (6.55)$$

Maximální napětí:

$$\sigma_r = \frac{6m_r}{h^2} = 663 \text{ MPa} \quad (6.56)$$

$$\sigma_t = \frac{6m_t}{h^2} = 663 \text{ MPa} \quad (6.57)$$

Hodnota meze kluzu:

$$R_e = 663 \text{ MPa} \quad (6.58)$$

### 6.2.2.2 Rotační vazba

Integrační konstanty:

$$C_1 = -0,0327 \quad (6.59)$$

$$C_3 = -0,0280 \quad (6.60)$$

$$C_4 = 0,0033 \quad (6.61)$$

Maximální napětí:

$$\sigma_r = \frac{6m_r}{h^2} = 1081 \text{ MPa} \quad (6.62)$$

$$\sigma_t = \frac{6m_t}{h^2} = 1081 \text{ MPa} \quad (6.63)$$

Hodnota meze kluzu:

$$R_e = 1081 \text{ MPa} \quad (6.64)$$

### 6.2.3 Parabolické zatížení

#### 6.2.3.1 Vetknutí

Integrační konstanty:

$$C_1 = -0,0241 \quad (6.65)$$

$$C_3 = -0,0152 \quad (6.66)$$

$$C_4 = 0,0022 \quad (6.67)$$

Maximální napětí:

$$\sigma_r = \frac{6m_r}{h^2} = 797 \text{ MPa} \quad (6.68)$$

$$\sigma_t = \frac{6m_t}{h^2} = 797 \text{ MPa} \quad (6.69)$$

Hodnota meze kluzu:

$$R_e = 797 \text{ MPa} \quad (6.70)$$

#### 6.2.3.2 Rotační vazba

Integrační konstanty:

$$C_1 = -0,0370 \quad (6.71)$$

$$C_3 = -0,0281 \quad (6.72)$$

$$C_4 = 0,0022 \quad (6.73)$$

Maximální napětí:

$$\sigma_r = \frac{6m_r}{h^2} = 1222 \text{ MPa} \quad (6.74)$$

$$\sigma_t = \frac{6m_t}{h^2} = 1222 \text{ MPa} \quad (6.75)$$

Hodnota meze kluzu:

$$R_e = 1222 \text{ MPa} \quad (6.76)$$

### 6.2.4 Lineární klesající zatížení

#### 6.2.4.1 Vetknutí

Integrační konstanty:

$$C_1 = -0,0208 \quad (6.77)$$

$$C_3 = -0,0154 \quad (6.78)$$

$$C_4 = 0,0031 \quad (6.79)$$

Maximální napětí:

$$\sigma_r = \frac{6m_r}{h^2} = 686 \text{ MPa} \quad (6.80)$$

$$\sigma_t = \frac{6m_t}{h^2} = 686 \text{ MPa} \quad (6.81)$$

Hodnota meze kluzu:

$$R_e = 686 \text{ MPa} \quad (6.82)$$

#### 6.2.4.2 Rotační vazba

Integrační konstanty:

$$C_1 = -0,0334 \quad (6.83)$$

$$C_3 = -0,0280 \quad (6.84)$$

$$C_4 = 0,0031 \quad (6.85)$$

Maximální napětí:

$$\sigma_r = \frac{6m_r}{h^2} = 1105 \text{ MPa} \quad (6.86)$$

$$\sigma_t = \frac{6m_t}{h^2} = 1105 \text{ MPa} \quad (6.87)$$

Hodnota meze kluzu:

$$R_e = 1105 \text{ MPa} \quad (6.88)$$

## 7. ZHODNOCENÍ VÝSLEDKŮ

Jak již bylo mnohokrát zmíněno, analytické řešení bylo provedeno pomocí Kirchhoffovy teorie, která má svá omezení. První podmínka se týká závislosti mezi poloměrem a tloušťkou desky. Pro řešení případ je do podmínky dosazeno v rovnici (7.1).

$$0,5 < 0,1r_2 = 0,4 \text{ mm} \quad (7.1)$$

Je zřejmé, že pro řešenou geometrii tato podmínka nebyla splněna. Při porušování podmínek této teorie dochází ke vzniku smykových napětí, která snižují hodnotu vypočítaných mezí kluzu. Porušení této podmínky má za následek i zvýšení hodnot integračních konstant, což se také projeví na hodnotách liniových momentů, a tím i na hodnotách napětí.

Druhá podmínka se týká průhybu. Určuje, jak velký může být maximální průhyb, aby byla teorie aplikovatelná. Dosazení do této podmínky je provedeno v rovnici (7.2).

$$w < 0,25h = 0,125 \text{ mm} \quad (7.2)$$

Při řešení tohoto problému byly integrovány všechny předpisy natočení. Protože integrované výrazy byly velmi podobné těm, které jsou v této práci uvedeny, je zde uvedena pouze tabulka 1, která zhodnocuje tuto podmínku. Maximální průhyb těchto modelů vždy připadal na střed desky. Jen v případě osamocené síly byl průhyb počítán na vzdálenosti  $r_1$ , aby vyhovoval předpokladu vyslovenému v podkapitole 6.1.1.

Tabulka 1: Hodnoty průhybů podle analytického řešení

Označení modelu	Maximální průhyb $w$ [mm]	
	Slitina hliníku	Austenitická ocel
Osamělá síla – vetknutí	0,045	0,023
Osamělá síla – rotační vazba	0,134	0,071
Konstantní spojitě zatížení – vetknutí	0,054	0,027
Konstantní spojitě zatížení – rotační vazba	0,148	0,078
Parabolické spojitě zatížení – vetknutí	0,057	0,029
Parabolické spojitě zatížení – rotační vazba	0,153	0,081
Lineární spojitě zatížení – vetknutí	0,054	0,028
Lineární spojitě zatížení – rotační vazba	0,149	0,078

Jak ukazuje tabulka, podmínka byla splněna ve většině případů. Pouze pro slitinu hliníků v modelech předpokládajících rotační vazbu byla podmínka porušena. Dále je z tabulky patrné, že pro modelování SPT je vhodnější uvažovat vetknutí, protože snižuje ve srovnání s vazbou rotační průhyb. Snižování průhybu samozřejmě zvyšuje pravděpodobnost dodržení druhé podmínky. Hodnoty průhybu jsou nižší pro ocel, protože se jedná o tužší materiál (hodnota tuhosti desky je vyšší).

### 7.1 Hliníková slitina

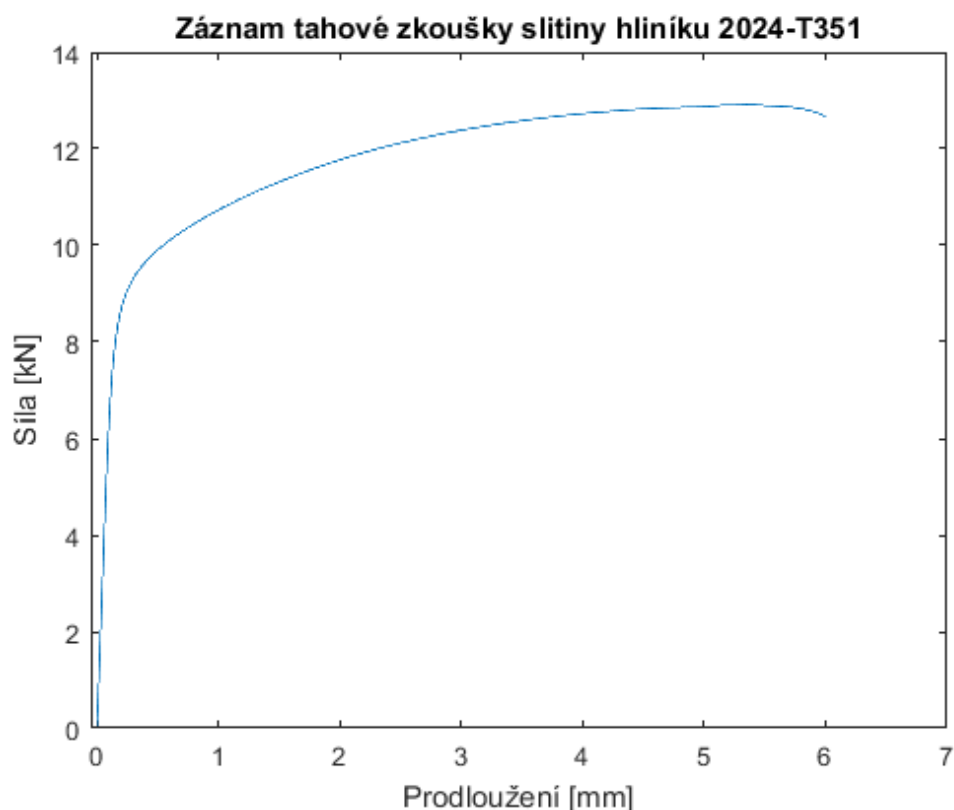
Empirické vztahy uvedené v podkapitole 3.1.1 byly aplikovány na hliníkovou slitinu 2024-T351. V následující tabulce 2 jsou uvedeny hodnoty pro meze kluzu a meze pevnosti vypočtené z daných vztahů.

Tabulka 2: Aplikace empirických vztahů na slitinu hliníku

Tvůrci vztahu	Mez kluzu $R_e$ [MPa]	Mez pevnosti $R_m$ [MPa]
Mao a Takahashi	245	632
Ruan	281	-
Finarelli	306	-
Cuesta a Alegre	294	-
Guan a Wang	351	306
Song a kolektiv	218	451
Norris a Parker	311	203
Garcia	235	571
Garcia (upravená)	-	554
Purmenský a Matocha	-	723
Matocha a Hurst	-	975

Hodnoty mezí kluzu podle empirických vztahů se k sobě přibližují více než hodnoty mezí pevnosti. Protože při výchozím záznamu SPT pro slitinu hliníku je dosaženo meze kluzu a meze pevnosti při relativně malém navýšení síly, jsou některé empirické vztahy nevhodné pro tento materiál. Materiál je totiž klíčový pro stanovení koeficientů  $\beta$  empirických vztahů a některé z nich nebyly vytvořeny za použití slitin hliníku.

Podle normované zkoušky tahem byla určena mez kluzu pomocí vztahu pro výpočet normálového napětí pro prut namáhaný tahem [2]. Její hodnota je uvedena v rovnici (7.3). Síla byla určena ze záznamu tahové zkoušky tohoto materiálu, a její hodnota odpovídá 8500 N. Zkušební vzorek měl průměr 3 mm. Výchozí záznam je vykreslen na obrázku 22 [16].



Obrázek 22: Záznam tahové zkoušky slitiny hliníku [16]

$$R_e = \frac{F}{S} = \frac{8500}{3^2\pi} = 301 \text{ MPa} \quad (7.3)$$

Tato hodnota je ovšem pouze smluvní (stejně tak i u austenitické oceli v rovnici (7.4)), protože hodnoty jsou vztaženy k nedeformované geometrii [1]. Skutečná mez kluzu by musela být vztažena k rozměru deformovaného vzorku.

V následující tabulce 3 jsou zhodnocena analytická řešení z kapitol 5. a 6. pro slitinu hliníku.

Tabulka 3: Analytické řešení slitiny hliníku

Označení modelu	Mez kluzu $R_e$ [MPa]
Osamělá síla – vetknutí	395
Osamělá síla – rotační vazba	720
Konstantní spojitě zatížení – vetknutí	513
Konstantní spojitě zatížení – rotační vazba	822
Parabolické spojitě zatížení – vetknutí	617
Parabolické spojitě zatížení – rotační vazba	931
Lineární spojitě zatížení – vetknutí	531
Lineární spojitě zatížení – rotační vazba	841

Hodnoty napětí ve středu desky závisí pouze na hodnotě integrační konstanty  $C_1$ , která je vyšší pro modely uvažující rotační vazbu. Kvůli tomu mají modely uvažující rotační vazbu vyšší vypočítané hodnoty, a to v průměru o 300 [MPa]. Modely spojitých zatížení mají shodný objem zatěžujícího obrazce (což je síla), ale kvůli způsobu rozložení zatížení těchto modelů v samotném středu desky vznikají různé reakční momenty. Trend zvýšené meze kluzu u rotační vazby lze pozorovat i v tabulce 5 pro austenitickou ocel.

## 7.2 Austenitická ocel

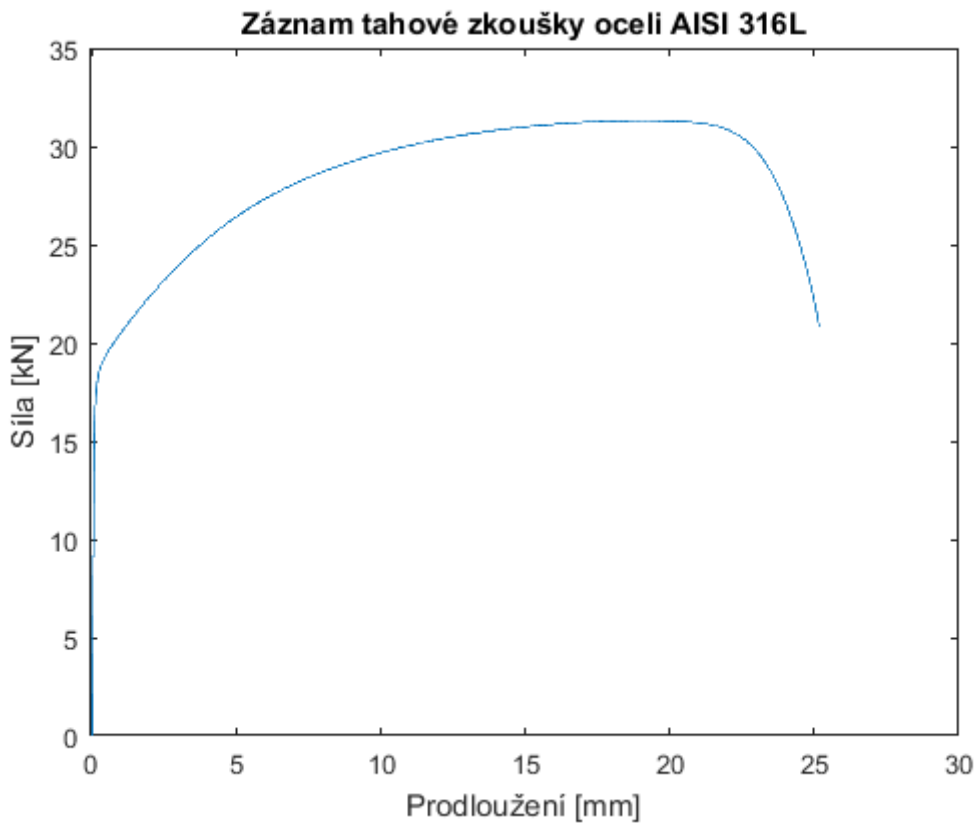
Tabulka 4 zpracovává aplikaci empirických vztahů na vzorek z austenitické oceli. Tak jako v tabulce 2 i zde jsou uvedeny jak odhadované hodnoty meze kluzu, tak hodnoty meze pevnosti.

Tabulka 4: Aplikace empirických vztahů na austenitickou ocel

Tvůrci vztahu	Mez kluzu $R_e$ [MPa]	Mez pevnosti $R_m$ [MPa]
Mao a Takahashi	331	1256
Ruan	380	-
Finarelli	414	-
Cuesta a Alegre	398	-
Guan a Wang	467	626
Song a kolektiv	276	630
Norris a Parker	420	609
Garcia	318	773
Garcia (upravená)	-	475
Purmenský a Matocha	-	623
Matocha a Hurst	-	848

Podobně jako v tabulce 2 je i zde vidět větší podobnost hodnot představujících meze kluzu. Empirické vztahy pro vyhodnocení meze pevnosti se až na dvě hodnoty pohybují v relativně malém rozptylu hodnot.

I pro austenitickou ocel byla provedena zkouška tahem. Vzorek měl kruhový průřez o poloměru 4 mm. Síla odpovídající mezi kluzu byla stanovena na 17000 N. Výchozí záznam je vykreslen na obrázku 23 [32].



Obrázek 23: Záznam tahové zkoušky austenitické oceli [32]

$$R_e = \frac{F}{S} = \frac{17000}{4^2\pi} = 338 \text{ MPa} \quad (7.4)$$

I pro austenitickou ocel byla vypracována tabulka 5, která zhodnocuje analytická řešení.

Tabulka 5: Analytické řešení austenitické oceli

Označení modelu	Mez kluzu $R_e$ [MPa]
Osamělá síla – vetknutí	530
Osamělá síla – rotační vazba	970
Konstantní spojitě zatížení – vetknutí	663
Konstantní spojitě zatížení – rotační vazba	1081
Parabolické spojitě zatížení – vetknutí	797
Parabolické spojitě zatížení – rotační vazba	1222
Lineární spojitě zatížení – vetknutí	686
Lineární spojitě zatížení – rotační vazba	1105

## 8. ZÁVĚR

Zkouška tahem představuje poměrně přesné odhadnutí meze kluzu daného materiálu. Odchytky empirických vztahů a výpočtových vztahů se tedy vztahují k hodnotě obdržené tahovou zkouškou.

Mez kluzu podle tahové zkoušky slitiny hliníku má hodnotu 301 MPa. Pro tuto slitinu se ukázal být nejpřesnější empirický vztah podle Finnareliho. A to s procentuální odchylkou méně než 2 %. Ze vztahů, které vycházejí z výpočtových modelů představených v této práci se hodnotě obdržené tahovou zkouškou přiblížil model vetknuté desky zatížené silou v ose symetrie. Hodnota meze kluzu analytického řešení je 395 MPa. Odchytky tohoto modelu je přibližně 31 %.

Austenitická ocel má podle tahové zkoušky mez kluzu rovnu 338 MPa. Empirický vztah, který se nejvíce přiblížil hodnotě meze kluzu z tahové zkoušky, je vztah Maa a Takahashiho s procentuální odchylkou těsně nad 2 %. Z výpočtových modelů opět nejlépe posloužil model vetknuté desky zatížené silou v ose rotace. Vypočítaná mez kluzu má hodnotu 530 MPa. Což procentuálně odpovídá přibližně 57 %.

Ze srovnání odchylek analytických modelů s empirickými vztahy plyne, že praktické využití empirických vztahů má svá opodstatnění. Jejich aplikace je snadná, a přestože se jedná pouze o odhad, je tento odhad v množství případů přesnější než aplikovaná teorie.

Nepřesnost výpočtových modelů vychází z porušení předpokladu použité teorie. Podmínka související s poloměrem desky měla za následek zvýšení integračních konstant a tím i vnitřních účinků a výsledných napětí. Obě podmínky musí být splněny, aby se při vyhodnocování daly zanedbat účinky smykových napětí, což v tomto případě z důvodů geometrie SPT splněno nebylo. Smyková napětí mají na výpočty redukováných napětí větší vliv než normálová napětí.

Poslední z možných důvodů větších odchylek výpočtových modelů je jejich vlastní nedokonalost. Tyto modely nepopisují ideálně silové a tlakové působení, které vzniká při provádění SPT. Kirchhoffova teorie tedy není příliš přesná při popisu napětí během SPT. Odhadování meze kluzu pomocí analytického řešení by mohlo být aplikovatelné, pokud by se zavedly korekční koeficienty. V případě obou vyhodnocovaných materiálů totiž všechny modely spojitěho zatížení nabývají přibližně dvojnásobku meze kluzu stanovené tahovou zkouškou.

## Seznam použité literatury

- [1] Mechanické vlastnosti a charakteristiky materiálu. *Ústav materiálového inženýrství* [online]. Brno: Vysoké učení technické, 2012 [cit. 2019-04-27]. Dostupné z: <http://ime.fme.vutbr.cz/images/umvi/vyuka/bum/prednasky/07-BUM%20-%20mechanicke%20vlastnosti%201.pdf>
- [2] JANÍČEK, P., J. VRBKA a J. BURŠA. *Mechanika těles: pružnost a pevnost I*. Vyd. 4., přeprac., V Akademickém nakladatelství CERM 2. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2004. ISBN 80-214-2592-X.
- [3] Mechanické vlastnosti a charakteristiky materiálu. *Ústav materiálového inženýrství* [online]. Brno: Vysoké učení technické, 2012 [cit. 2019-04-27]. Dostupné z: <http://ime.fme.vutbr.cz/images/umvi/vyuka/bum/prednasky/08-BUM%20-%20mechanicke%20vlastnosti%202.pdf>
- [4] JEČMÍNKA, M. *Využitelnost protlačovacích zkoušek na miniaturních discích (small punch test – SPT) pro stanovování materiálových charakteristik za vysokých teplot*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2013. 112 s. Vedoucí diplomové práce Ing. Petr Dymáček, Ph.D.
- [5] CWA 15627. Small Punch Test Method for Metallic Materials: CEN Workshop Agreement. Brusel: CEN, 2007, 70 s.
- [6] BRUCHHAUSEN, M., S. HOLMSTRÖM, I. SIMONOVSKI, T. AUSTIN, J.-M. LAPETITE, S. RIPPLINGER a F. DE HAAN. Recent developments in small punch testing: Tensile properties and DBTT. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*. 2016, **86**, 2-10. DOI: 10.1016/j.tafmec.2016.09.012. ISSN 01678442. Dostupné také z: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0167844216301677>
- [7] ONDRÁČEK, E., J. VRBKA, P. JANÍČEK a J. BURŠA. *Mechanika těles: pružnost a pevnost II*. Vyd. 4., přeprac., V Akademickém nakladatelství CERM 2. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2006. ISBN 80-214-3260-8.
- [8] ANDERSON, T.L. *Fracture mechanics: Fundamentals and Applications*. 2. Boca Raton (Florida): CRC Press, 1995. ISBN 0-8493-8974-7.
- [9] MAO, X. a H. TAKAHASHI. Development of a further-miniaturized specimen of 3 mm diameter for tem disk ( $\varnothing$  3 mm) small punch tests. *Journal of Nuclear Materials*. 1987, (150-1), 42-52.
- [10] MATOCHA, K., *Hodnocení mechanických vlastností konstrukčních ocelí pomocí penetračních testů*. Vyd. 1. Ostrava: Materiálový a metalurgický výzkum, 2010, 73 s., ISBN 978-80-248-2223-5.
- [11] ŠEBEK, F., N. PARK, P. KUBÍK, J. PETRUŠKA a J. ZAPLETAL. Ductile fracture predictions in small punch testing of cold-rolled aluminium alloy. *Engineering Fracture Mechanics*. 2019, **206**, 509-525. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2018.11.045. ISSN 00137944. Dostupné také z: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0013794418307653>

- [12] HURST, R.C. a K. MATOCHA. A renaissance in the use of the small punch testing technique. *Volume 1B: Codes and Standards*. ASME, 2015, 2015-7-19, V01BT01A048-. DOI: 10.1115/PVP2015-45095. ISBN 978-0-7918-5693-2. Dostupné také z: <http://proceedings.asmedigitalcollection.asme.org/proceeding.aspx?doi=10.1115/PVP2015-45095>
- [13] ZÁVODSKÝ, P. Small Punch Test – hodnocení možností metodiky a její omezení. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2014. 55 s. Vedoucí bakalářské práce Ing. Libor Válka, CSc.
- [14] CAMPITELLI, E.N., P. SPÄTIG, J. BERTSCH a C. HELLWIG. Assessment of irradiation-hardening on Eurofer97' and Zircaloy 2 with punch tests and finite-element modeling. *Materials Science and Engineering: A*. 2005, **400-401**, 386-392. DOI: 10.1016/j.msea.2005.02.088. ISSN 09215093. Dostupné také z: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0921509305002637>
- [15] ABENDROTH, M. FEM Analysis of small punch tests. *Key Engineering Materials*. 2017, **734**, 23-36. DOI: 10.4028/www.scientific.net/KEM.734.23. ISSN 1662-9795. Dostupné také z: <https://www.scientific.net/KEM.734.23>
- [16] ŠEBEK, F., P. KUBÍK a J. PETRUŠKA. Standard tensile test compared to the small punch test of aluminium alloy. In: *SVRATKA 2018 24th International Conference on Engineering mechanics*, 745-748. DOI: 10.21495/91-8-745. Dostupné také z: [http://www.engmech.cz/im/proceedings/show\\_p/2018/745](http://www.engmech.cz/im/proceedings/show_p/2018/745)
- [17] HŮLKA, J. Výpočtová predikce tvárného porušování. Brno, 2014. Disertační práce. Vysoké učení technické v Brně.
- [18] DOBEŠ, F., P. DYMÁČEK a M. BESTERCI. Estimation of the mechanical properties of aluminium and an aluminium composite after equal channel angular pressing by means of the small punch test. *Materials Science and Engineering: A*. 2015, **626**, 313-321. DOI: 10.1016/j.msea.2014.12.054. ISSN 09215093. Dostupné také z: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0921509314015548>
- [19] FINARELLI, D., F. CARSUGHI a P. JUNG. The small ball punch test at FZJ. *Journal of Nuclear Materials*. 2008, **377**(1), 65-71. DOI: 10.1016/j.jnucmat.2008.02.053. ISSN 00223115. Dostupné také z: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0022311508001177>
- [20] CUESTA, I.I. a J.M. ALEGRE. Hardening evaluation of stamped aluminium alloy components using the small punch Test. *Engineering Failure Analysis*. 2012, **26**, 240-246. DOI: 10.1016/j.engfailanal.2012.06.004. ISSN 13506307. Dostupné také z: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S135063071200146X>
- [21] BÁRTKOVÁ, D., J. LANGER, P. DYMÁČEK a L.VÁLKA. Determination of mechanical properties of magnesium alloys and composites by small punch testing. *Applied Mechanics and Materials*. 2016, **821**, 435-441. DOI:

10.4028/www.scientific.net/AMM.821.435. ISSN 1662-7482. Dostupné také z: <https://www.scientific.net/AMM.821.435>

- [22] SONG, M., K. GUAN, W. QIN a J. A. SZPUNAR. Comparison of mechanical properties in conventional and small punch tests of fractured anisotropic A350 alloy forging flange. *Nuclear Engineering and Design*. 2012, **247**, 58-65. DOI: 10.1016/j.nucengdes.2012.03.023. ISSN 00295493. Dostupné také z: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0029549312001550>
- [23] NORRIS, S. D. a J. D. PARKER. Deformation processes during disc bend loading. *Materials Science and Technology*. 2013, **12**(2), 163-170. DOI: 10.1179/mst.1996.12.2.163. ISSN 0267-0836. Dostupné také z: <http://www.tandfonline.com/doi/full/10.1179/mst.1996.12.2.163>
- [24] J. Purmanský and K. Matocha, Small Sample Testing in Physical Metallurgy. In: Metal (2001).
- [25] DOBEŠ, F., P. DYMÁČEK a M. BESTERCI. Estimation of the mechanical properties of aluminium and an aluminium composite after equal channel angular pressing by means of the small punch test. *Materials Science and Engineering: A*. 2015, **626**, 313-321. DOI: 10.1016/j.msea.2014.12.054. ISSN 09215093. Dostupné také z: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0921509314015548>
- [26] GARCÍA, T.E., C. RODRÍGUEZ, F. J BELZUNCE a C.SUÁREZ, Estimation of the mechanical properties of metallic materials by means of the small punch test. *J. Alloy Compd.*, 582, (2014), 708–717.
- [27] CALAF CHICA, J., P. BRAVO DÍEZ a M. PRECIADO CALZADA. A new prediction method for the ultimate tensile strength of steel alloys with small punch test. *Materials*. 2018, **11**(9). DOI: 10.3390/ma11091491. ISSN 1996-1944. Dostupné také z: <http://www.mdpi.com/1996-1944/11/9/1491>
- [28] LARIGNON, C., J. ALEXIS, E. ANDRIEU, G. ODEMER a C. BLANC. Propagation of intergranular corrosion defects in AA 2024-T351 evaluated by a decrease in mechanical resistance. *Journal of The Electrochemical Society*. 2014, **161**(6), C339-C348. DOI: 10.1149/2.090406jes. ISSN 0013-4651. Dostupné také z: <http://jes.ecsdl.org/lookup/doi/10.1149/2.090406jes>
- [29] Stainless 316, 316L, 317, 317L. *United performance metals* [online]. Ohio (Cleveland), 2017 [cit. 2019-05-01]. Dostupné z: <https://www.upmet.com/sites/default/files/datasheets/316-316l.pdf>
- [30] Aluminium / Aluminum 2024 Alloy (UNS A92024). *AZO Materials* [online]. 13.11.2012 [cit. 2019-04-06]. Dostupné z: <https://www.azom.com/article.aspx?ArticleID=6615>
- [31] Type 316 and 316L Stainless Steels: Compare the two types of stainless steels. *The Balance* [online]. 2.4.2019 [cit. 2019-04-06]. Dostupné z: <https://www.thebalance.com/type-316-and-316l-stainless-steel-2340262>

- [32] KUBÍK, P., F. ŠEBEK, J. PETRUŠKA, J. HŮLKA, N. PARK a H. HUH. Comparative investigation of ductile fracture with 316L austenitic stainless steel in small punch tests: Experiments and simulations. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*. 2018, **98**, 186-198. DOI: 10.1016/j.tafmec.2018.10.005. ISSN 01678442. Dostupné také z: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0167844218303872>

## Seznam fyzikálních veličin

Symbol	Jednotka	Význam
$\sigma_{x,y,z,r,z}$	[MPa]	Normálové napětí v daném směru
$\sigma_{1,2,3}$	[MPa]	Hlavní napětí
$\tau_{ij}$	[MPa]	Smykové napětí
$R_e$	[MPa]	Mez kluzu
$R_m$	[MPa]	Mez pevnosti
$E$	[GPa]	Youngův modul pružnosti v tahu
$\varepsilon_{x,y,z}$	[-]	Přetvoření v daném směru
$\gamma_{ij}$	[-]	Zkosení
$t_{50\%}$	[°C]	Tranzitní teplota odpovídající 50 % křehkého lomu
$K_{IC}$	[Mpa $\times$ m <sup>0,5</sup> ]	Lomová houževnatost
$F$	[N]	Síla
$F_e$	[N]	Síla, která vyvolá napětí odpovídající mezi kluzu
$F_m$	[N]	Síla, která vyvolá napětí odpovídající mezi pevnosti
$t, h$	[mm]	Tloušťka vzorku
$\vartheta$	[-]	Natočení vůči nedeformované střednicové ploše
$u, w$	[mm]	Průhyb vzorku
$T$	[N/mm]	Liniová posouvající síla
$m_{r,t}$	[Nmm/mm]	Liniový radiální (tangenciální) moment
$\mu$	[-]	Poissonův poměr
$r$	[mm]	Vzdálenost od osy symetrie v rovině řezu kolmého na střednicovou plochu
$p$	[Pa]	Tlak