VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

Fakulta elektroniky a komunikačních technologií

Ústav matematiky

Mgr. Štěpán Křehlík

STRUKTUROVANÉ MULTISYSTÉMY A MULTIAUTOMATY INDUKOVANÉ ČASOVÝMI PROCESY

STRUCTURED MULTISYSTEMS AND MULTIAUTOMATA INDUCED BY TIMES PROCESSES

zkrácená verze Ph.D. teze

Obor: Matematika v elektroinženýrství

Školitel: prof. RNDr. Jan Chvalina, DrSc.

Keywords

Modelling function, Linear differential operators, Hypergroups, Hyperstructure theory and automata, Join space, Cartesian composition of quasi–automata, Homogeneous product of quasi–automata, Heterogeneous product of quasi–automata, Generalization of quasi–automata, Quasi–multiautomata.

Klíčová slova

Modelovací funkce, Lineární diferenciální operátory, Hypergrupy, Teorie hyperstruktur a automatů, Spojnicový prostor, Kartézská kompozice kvazi–automatů, Homogenní produkt kvazi–automatů, Heterogení produkt kvazi–automatů, Zobecnění kvazi–automatů, Kvazi–multiautomaty.

Obsah

1 Úvod

Strukturované multisystémy a především multiautomaty jsou multistruktury, které jsou vhodným zobecněním klasických algebraických automatů, jenž se v minulosti považovaly za systémy pro přenos informací jistého typu.

Práce je motivovaná ideou profesora Otakara Borůvky, který ve svých publikacích o lineárních diferenciálních rovnicích využíval algebraizace a geometrizace studovaných objektů. Tyto algebraické pojmy mu byly vlastní z jeho dřívější práce. Díky těmto novým postupům objevoval mnohdy překvapivé skutečnosti a nové souvislosti. Ve smyslu této motivace je v tomto spisu použito algebraického přístupu, spočívajícího v použití polohypergrup a hypergrup, případně spojnicového prostoru, neboť tyto multistruktury představují zobecnění pologrup a grup.

Hlavním cílem této práce je zkoumání multistruktur, které jsou vytvářeny lineárními diferenciálními operátory, jenž jsou levými stranami homogenních diferenciálních rovnic uvažovaných především elektrotechnických obvodech. Tím je vytvářen teoretický potenciál k popisu vztahů a souvislostí mezi časovými funkcemi modelujícími různé děje probíhající v elektrotechnických a elektrických přístrojích.

V projektu této práce jsou tvořeny systémy vstup–výstup se strukturovanými vstupními a výstupními prostory opatřené algebraickými i analytickými multistrukturami a příslušnou kompatibilní přechodovou relací vstup-výstup. V souvislosti s multi–automaty uvažovanými jako akce binárních hyperstruktur na vhodných stavových prostorech (např. lineárních diferenciálních operátorech) by měly být konstruované struktury aplikovány na studium konkretních systémů a časových procesů.

Práce je věnována popisu hyperstruktur tvořených lineárními diferenciálními operátory druhého řádu a speciálně operátorům v Jacobiho tvaru pro konkrétní časové signály. Popis multistruktur, které nejsou Jacobiho tvaru, je dále zobecněn na řád n (kladné reálné číslo). Dále jsou zde zkoumány binární multistruktury, které jsou vytvářeny distributivními svazy, a je zde představena myšlenka rozšíření na n-ární operace. Tyto multistruktury jsou použity pro konstrukce multiautomatů, kvazi-multiautomatů a jistých součinů mezi těmito kvazi–multiautomaty, ve kterých je jako množna vstupů použit (polo-)okruh hladkých spojitých kladných funkcí případně (polo-)okruh vektorů, jejichž složky jsou reálná čísla nebo již řečené spojité kladné funkce a stavové množiny jsou tvořeny lineárními diferenciálními operátory n-tého řádu. Tyto kvazi-multiautomaty jsou používány pro přenos informací jistého typu, například pro konkrétní modelující časové funkce. Důležitým bodem práce je zobecnění součinů automatů zavedených Dörflerem [19] na případy kvazi–multiautomatů se vstupní hyperstrukturou lineárních diferenciálních operátorů n-tého řádu, jenž představuje jistý problém. Pro jeho řešení zavádíme dvě modifikace klasické definice kvazi–multiautomatu a tím se dostáváme k alternaci běžně používaných algebraických pojmů.

2 Základní poznatky

2.1 Signály a modelování

Matematické modelování je schopnost překladu z aplikační oblasti do oblasti matematicky zpracovatelné a vyšetřovatelné formulace umožňující teoretickou a numerickou analýzu problému. Cílem je proniknout do jeho podstaty, klást otázky, hledat odpovědi a získat užitečné a potřebné informace o zkoumaném problému.

V disertační práci uvažujeme matematické modelování v elektrotechnice, kde je běžné používat matematický aparát pro popis lineárních a nelineárních elektronických obvodů. Pro takovéto modelování elektronických obvodů je běžné pracovat se soustavou lineárních algebraických rovnic a manipulovat s těmito soustavami rovnic prostřednictvím maticového počtu. Dále v matematickém modelování můžeme užívat lineární diferenciální rovnice, které jsou formálně převáděny na algebraické prostřednictvím operátorového počtu.

2.2 Hyperstruktury

V současné době je předmětem zájmu využítí hyperstruktur jako účinného aparátu pro popis matematických modelů. Jsou zkoumány struktury (případně hyperstruktury), které vytváří vhodný potenciál k popisu vztahů a souvislostí v různých disciplínách.

Multistruktury nazývané také hyperstruktury patří k významné části moderní algebry. Zejména hypergrupy (dříve nazývané také multigrupy) jsou vhodným zobecněním grup. Teorie hyperstruktur a zejména teorie hypergrup je obsažena v několika oblastech matematiky. Uveďme některé z nich: geometrie (deskriptivní, sférická, projektivní) uvedené v [18], grafy a hypergrafy, binární relace, uspořádané množiny a zejména svazy, uspořádané algebraické struktury, automaty, kryptografie, kódy, obecné systémy, umělá inteligence, polygroupy (aplikované v kombinatorice), pravděpodobnost, fuzzy množiny a některé další aplikace a speciální konstrukce. Základní koncept teorie hyperstruktur, se kterým pracujeme v tomto spise můžeme nalézt v literatuře [8, 15, 17, 24, 35, 38, 44].

2.3 Multiautomaty

V algebraické teorii jsou zkoumány různé koncepce automatů. V minulosti se automaty považovaly za systémy, které mohou být použity pro přenos informací specifického typu. Automaty patří k systémům zahrnujícím modelování různých procesů. Tyto pojmy souvisí s pojmy jako akce pologrup nebo grup na množině. V těchto případech jsou užívané termíny jako kvazi–automaty, poloautomaty nebo jen jednoduché automaty bez výstupu, které jsou určitým zobecněním automatu Mealyho typu.

Definici, kterou nyní uvedeme, můžeme najít snad ve všech pracech o automatech, neboli akcích pologrup na neprázdné množině, jako např. [10, 21, 31].

Definice 2.1. *Automat bez výstupu, tedy kvazi–automat, je trojice $\mathbb{A} = (A, S, \delta)$, kde A je pologrupa, S je neprázdná množina a $\delta: A \times S \to S$ je přechodová funkce splňující následující podmínky:*

1) $\delta(e, s) = s$ pro všechna $s \in S$ a jednička $e \in A$, pokud existuje (podmínka identity), *2) $\delta(b, \delta(a,\ s)) = \delta(a \cdot b,\ s)$ pro všechna $a,\ b \in A,\ s \in S$ (podmínka smíšené asociativity -MAC).*

Množina S se nazývá stavová množina automatu $\mathbb{A}$, množina A se nazývá pologrupa vstupních symbolů automatu $\mathbb{A}$ a δ je přenosová funkce. Prvky množiny S se nazývají stavy, prvky množiny A se nazývají slova.

Zkoumání algebraických struktur zejména v nekomutativní algebře přirozeně vedlo k hyperstrukturám. Jedna z hlavních motivací pro tento zájem přišla z geometrie. Analýza geometrických struktur vedla k rozličným binárním hyperstrukturám, a to hlavně ke spojnicovému prostoru, který, jak jsme již zmiňovali výše, byl vyšetřován Waltrem Prenowitzem. Později společně s Jamesem Jantosciakem rozvinuli některé části geometrie. Více motivace pro zkoumání hyperstruktur můžeme najít v chemii nebo nukleární fyzice. Ve spojení s binárními hyperstrukturami je uveden pojem multiautomat, který je studován např. v práci [7, 11, 22, 39].

Definice 2.2. *Kvazi–multiautomat bez výstupu je trojice $\mathbb{M} = (H, S, \delta)$, kde $(H, \cdot)$ je polohypergrupa, S je neprázdná množina a $\delta :\ A \times S \to S$ je tranzitní funkce splňující podmínku:*

$$\delta(b, \delta(a,\ s)) \in \delta(a \cdot b,\ s) \tag{1}$$

pro všechna $a,\ b \in A,\ s \in S$ (podmínka zobecněné smíšené asociativity - GMAC (the Generalized Mixed Associativity Condition)). Množina S se nazývá stavová množina kvazi–multiautomatu $\mathbb{M}$, struktura $(H, \cdot)$ se nazývá vstupní (polo)–hypergrupa kvazi–automatu $\mathbb{M}$ a δ je tranzitní funkce. Prvky množiny S se nazývají stavy, prvky množiny A se nazývají vstupní symboly (nebo také slova).

2.4 Systémy

Slovo systém je jedním z nejpoužívanějších termínů nejen ve všech odvětvích vědy, ale i v běžném životě. Tento pojem lze chápat jako soubor prvků, které jsou vázány nějakým vztahem. Tato myšlenka inspirovala integrační vědní obor s názvem „teorie obecných systémů". Za zakladatele obecné teorie systémů je považován rakouský biolog Karel Ludwig von Bertalanffy. Jeho matematický model růstu organismu v čase byl publikován v roce 1934, s jistými obměnami se používá do dnes. Teorie systemů zaznamenala nebývalý rozvoj, a to zejména v posledních padesáti letech.

Vývoj této vědní disciplíny je pevně rozdělen do dvou hlavních směrů. První směr reprezentuje nároky ekonomie, biologie a dalších méně formalizovaných disciplín. Zatímco ve druhém směru, na základě teorie obvodů a teorie řízení, se snažil o vytvoření obecné teorie systémů jako deduktivního systému.

Mnohé pojmy teorie systémů lze definovat na základě koncepce obecného systému, přesto v konkrétních aplikacích je zapotřebí uvažovat vstupní a výstupní objekty opatřené některou speciálnější strukturou, např. strukturou vektorového prostoru nebo algebraickou strukturou případně hyperstrukturou. Následně pak přechodová relace systému by měla být kompatibilní s těmito strukturovanými objekty. Tak přicházíme k pojetí (abstraktního) úplného lineárního systému.

Nyní uvedeme definici lineárního systému:

Definice 2.3. *Nechť U, V jsou vektorové prostory nad tělesem komplexních čísel $\mathbb{C}$ a $S \subseteq U \times V$ neprázdná binární relace s těmito vlastnostmi:*

1. *Pro každé dvojice vektorů $[\vec{u}, \vec{v}] \in S$, $[\vec{u}', \vec{v}'] \in S$ platí $[\vec{u}, \vec{v}] + [\vec{u}', \vec{v}'] = [\vec{u} + \vec{u}', \vec{v} + \vec{v}'] \in S$.*

2. *Pro každou dvojici $[\vec{u}, \vec{v}] \in S$ a každé komplexní číslo $y \in \mathbb{C}$ platí $y[\vec{u}, \vec{v}] = [y\vec{u}, y\vec{v}] \in S$. Obecný systém (U, V, S) se nazývá úplný lineární systém.*

3 Současný stav

- **Modelovací časové funkce**

  Tato kapitola slouží především jako motivace pro zbytek disertační práce. Jsou zde vybrané některé typy modelujících časových procesů. Tyto časové funkce tvoří poměrně jednoduchý, přesto velmi důležitý aparát pro popis časových závislostí. Jednou z nejznámějších časových funkcí je funkce harmonických kmitů. Kmitavé pohyby zejména ve fyzice umožňují relativně jednoduše modelovat celou řadu fyzikálních jevů. Tento pohyb lze popsat funkcí

  $$y(t) = A \cdot \exp(-\lambda t) \cdot \sin(bt). \tag{2}$$

  V kompletní práci jsou uvedeny další modelující časové funkce, kterými lze popsat procesy v různých oblastech vědních disciplín. Představujeme, jak jsou využívány jednotlivé funkce pro popis konkrétních jevů.

- **Hyperstruktury**

  Od svého zrodu v roce 1938 zaznamenaly hyperstruktury velký rozvoj v řadě zemí po celém světě. Stejně tak je tato teorie provázaná s celou řadou matematických disciplín. Uvádíme jen tyto disciplíny právě proto, že jsou spojeny s tématem této práce.

  - *Automaty* (A.R. Ashrafi, J. Chvalina, L. Chvalinová, G. Massouros, J. Moučka),
  - *binární relace* (J. Chvalina, I.G. Rosenberg, P. Corsini, V. Leoreanu, B. Davvaz, I. Chajda, Š. Hošková, I. Cristea, M. De Salvo, G. Lo Faro),
  - *booleova algebra* (A.R. Ashrafi, M. Konstantinidou),
  - *geometrie* (W. Prenowitz, J. Jantosciak, G. Tallini),
  - *svazy a hypersvazy* (J.C. Varlet, T. Nakano, J. Mittas, A. Kehagias, M. Konstantinidou, k. Serafimidis, V. Leoreanu, I.G. Rosenberg, B. Davvaz, G. Calugareanu, G. Radu, A.R. Ashrafi),
  - *zobecněné dynamické systémy* (M.R. Molaei).

  Kompletní přehled všech odvětví je uveden v knize [17]. V disertační práci přímo navazujeme na výsledky A.R. Ashrafiho, J. Chvaliny, J.Moučky, J.C. Varleta a některých dalších.

V této kapitole disertační práce uvádíme jen nejnutnější definice a věty, které jsou nezbytné pro formulaci námi zkoumaných a studovaných problémů, přestože si uvědomujeme, že existuje mnoho prací s různými tématy o hyperstrukturách, které zasahují do dalších odvětví matematiky.

- **Kvazi–multiautomaty**

  Kvazi–multiautomaty jsou případy jistého zobecnění kvazi–automatů. Existuje několik variant přístupů jak zobecnit podmínku "MAC"uvedenou v Definici 2.1 na případ multi–automatů. Jeden z klasických přístupů představuje práce Chvaliny [7], kde poprvé uvedl zobecněnou podmínku GMAC.

  Jiný přístup ke zobecnění automatů na případy multiautomatů představuje práce A. R. Ashrafiho a A. Madanshekafa [1], kde v jejich pojetí není použit termín multiautomat. Namísto tohoto termínu autoři mluví o zobecnění akce hypergrupy na abstraktní neprázdné množině.

  V disertační práci vycházíme z výsledků Willibalda Dörflera, který zavedl různé součiny automatů a dále studoval jejich speciální vlastnosti. V kompletní práci jsou uvedeny tři typy součinů automatů, tj. **homogenní součin**, **heterogenní součin** a **kartézská kompozice**. Všechny typy součinů jsou představeny na konkrétních příkladech. Jedním z hlavních bodů disertační práce je zobecnění výše uvedených součinů na případy kvazi–multiautomatů. To v jisté podobě představuje problém, kde klasické konstrukce zavedené Chvalinou selhávají. Tedy následně navrhujeme dvě řešení v podobě modifikace podmínky GMAC.

- **Systémy vstup–výstup**

  Koncem čtyřicátých let dvacátého století dochází k bouřlivému rozvoji celé řady vědních disciplín, tedy expanduje i teorie systémů jako nová vědní disciplína a začíná se výrazně prosazovat. Stará historicko filozofická tradice vychází z toho, že systém má vlastnosti, které se liší od vlastností jeho konstrukčního elementu (některými autory označován jako prvek), a tyto vlastnosti se nerovnají souhrnu vlastností jeho konstrukčního elementu.

  Ve stručnosti zde představme hlavní dva přístupy, které jsou podrobněji rozebrány v plné verzi práce. V prvním přístupu rozebíráme výsledky Sadovského [40], kde formuluje možnost popisu vnitřních vazeb systému. Nejprve hledá pravidla transformace mezi vstupem a výstupem konstrukčního elementu (prvku) systému. Jestliže chce popsat vztahy mezi dvěma konstrukčními elementy, uvažuje matici vazby jako vhodný aparát pro takový popis. Pro úplný popis systému uvažuje maticovou strukturu systému, jejíž prvky jsou právě matice vazby.

  V druhém přístupu, který rozebíráme, je rozpracování obecné teorie systémů za použití aparátu teorie množin a teorie relací, ve kterém důležitý krok udělal M. Mesarović a jeho spolupracovníci. Společně pak rozpracovali základy konečného a účelového přístupu ve výzkumu systémů. Aparát teorie množin a teorie relací, který zvolil Mesarović za základ své varianty obecného systémů, postačuje na definování a zkoumání široké třídy systémových pojmů.

4 Cíle disertační práce

V projektu jsou zkoumány systémy vstup-výstup se strukturovanými vstupními a výstupními prostory opatřené algebraickými i analytickými multistrukturami a příslušnou kompatibilní přechodovou relací vstup-výstup. V souvislosti s multiautomaty uvažovanými jako akce binárních hyperstruktur na vhodných stavových prostorech, by měly být konstruované struktury aplikovány na studium konkrétních systémů a signálů ve spojitém čase.

4.1 Lineární operátory modelovacích časových signálů

Sestavit lineární diferenciální rovnice druhého řádu pro konkrétní časové procesy popisující různé typy technických jevů a stejně tak pro lineární diferenciální rovnice druhého řádu v Jacobiho tvaru. Popsat lineární diferenciální operátory, které jsou levými stranami těchto lineárních homogenních diferenciálních rovnic, které mohou být uvažovány v elektronických obvodech.

4.2 Hyperstruktury lineárních diferenciálních operátorů

Prostudovat vlastnosti hypterstruktur lineárních diferenciálních operátorů druhého řádu a vlastnosti hypterstruktur lineárních diferenciálních operátorů druhého řádu v Jacobiho tvaru s rozličnými binárními hyperoperacemi vytvořenými nejen pomocí „Ends Lemma”. Následně pak tyto struktury zobecnit na řád n. Dále zkoumat možnosti vytváření hypergrup z komutativní kvazi–uspořádané pologrupy, která není grupou.

4.3 Kvazi–multiautomaty

Zkonstruovat kvazi–multiautomaty, které jsou opatřeny vstupní (polo–)hypergrupou a množinou stavů, která je tvořena lineárními diferenciálními operátory. Formulovat konkrétní příklady kvazi–multiautomatů, které usnadní chápání takovýchto konstrukcí. Dále se pokusit vhodně zobecnit součiny automatů zavedené W. Dörflerem, tj. homogenní součin, heterogenní součin a kartézskou kompozici na případy kvazi–multiautomatů.

4.4 Systémy

Studium obecných systémů vstup–výstup s přechodovými relacemi mezi vstupními a výstupními prostory s multistrukturami tvořenými časovými funkcemi konkrétních signálů. Popsat souvislosti mezi obecnými systémy vstup–výstup v pojetí Mesarovice–Takahary pro konkrétní signály. Zkonstruovat tyto systémy z kvazi–multiautomatů lineárních diferenciálních operátorů časových procesů.

Neméně významným cílem práce je umožnit čtenáři snadnou orientaci v terminologii a problematice hyperstruktur a kvazi-multiautomatů, přitom podpořit pochopení těchto pojmů odpovídajícími příklady.

5 Vlastní výsledky

5.1 Lineární diferenciální operátory modelovacích časových signálů

V disertační práci popisujeme metodu získávání lineárních diferenciálních operátorů z diferenciálních rovnic, která vychází z práce profesora Otakara Borůvky. Ten ve svých studiích o diferenciálních rovnicích používal algebraizace a geometrizace studovaných objektů a objevuje mnohdy překvapivé výsledky.

Pro všechny uvedené časové modelovací funkce najdeme jejich první a druhé derivace. Sestavíme homogenní diferenciální rovnice jejichž řešením jsou právě uvedené časové funkce. Tímto postupem získáme diferenciální operátory. V této zkrácené verzi práce náš postup naznačíme pouze pro jednu vybranou funkci.

Nechť $y(t) = A \cdot \exp(-\lambda t) \cdot \sin(bt)$ je časová funkce tlumených kmitů a její první derivace je funkce daná předpisem

$$y'(t) = -A\lambda \exp(-\lambda t) \cdot \sin(bt) + A \cdot \exp(-\lambda t) \cdot \cos(bt)b,$$

pak druhá derivace je

$$y''(t) = A\lambda^2 \exp(-\lambda t) \cdot \sin(bt) - 2A\lambda \exp(-\lambda t) \cdot b\cos(bt) - A\exp(-\lambda t) \cdot b^2 \cdot \sin(bt).$$

Z první a druhé derivace jsme schopni sestavit homogenní diferenciální rovnici druhého řádu

$$y''(t) - 2\lambda y' + (b^2 + \lambda^2)y = 0.$$

Tímto postupem z modelovacích funkcí získáme diferenciální rovnice a de facto i lineární diferenciální operátory druhého řádu.

Příklad 5.1. *Pro modelující funkci tlumených kmitů máme lineární diferenciální rovnici druhého řádu $y'' - 2\lambda y' + (b^2 + \lambda^2)y = 0$. Pak množina lineárních diferenciálních operátoů je*

$$\mathbb{LA}_2(I) = \{L(-2\lambda^2, b^2 + \lambda^2);\ [\lambda, b] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\}.$$

Tyto operátory homogenních lineárních diferenciálních rovnic, které jsou levými stranami těchto rovnic, mohou být obsaženy v různých technických jevech.

5.2 Hyperstruktury lineárních diferenciálních operátorů

V současné době jsou zkoumány struktury vytvářené diferenciálními operátory, které jsou levými stranami homogenních diferenciálních rovnic uvažovaných v elektrických obvodech. Tím je vytvářen teoretický potenciál vhodný k popisu vztahů a souvislostí mezi časovými funkcemi modelujícími různé děje probíhající v elektrických a elektronických obvodech.

V této části práce jsou studovány základní algebraické vlastnosti hyperstruktur speciálních diferenciálních operátorů duhého řádu a diferenciálních operátorů druhého řádu v Jacobiho tvaru. Diferenciální rovnice z předchozí kapitoly a jejich operátory jsou zajímavou motivací pro studium vztahů mezi takto formovanými strukturami. Náš přístup s využitím hypergrup a spojnicového prostoru je zde veden především přes „koncové lemma", nebo lépe k zavádění hyperoperací je použito tohoto lemma. Vlastní důkazy jsou vedeny prostřednictvím základních definic, přesto ale v některých případech vycházíme z kvaziuspořádané grupy. Předmět zájmu pro tyto hyperstruktury konkrétních časových procesů s rozličnými vlastnostmi můžeme nalézt při popisu a studiích jistých zákonitostí časových modelů.

V této kapitole i stejně jako v následujících budeme dosažené výsledky prezentovat jen prostřednictvím námi zavedených definic, vět a lemmat. To vše bez důkazů a dalších komentářů.

Věta 5.2. *Nechť $I \subseteq \mathbb{R}$ je otevřený interval. Jestliže definujeme na množině $\mathbb{LA}_2(I)$ hyperoperaci předpisem*

$$L(p_1, q_2) * L(p_2, q_2) \;=\; \{L(p, q) \in \mathbb{LA}_2(I); p_1p_2 = p, p_1q_2 + q_1 \leq q\}, \tag{3}$$

pak $(\mathbb{LA}_2(I), *)$ je nekomutativní transpoziční hypergrupou, tj. nekomutativním spojnicovým prostorem.

Věta 5.3. *Hypergrupoidy $(\mathbb{L}_{11}\mathbb{A}_2(I), *)$ a $(\mathbb{L}_{C1}\mathbb{A}_2(I), *)$ jsou podhypergrupy hypergrupy $\mathbb{LA}_2(I)$. Dále platí*

$$\mathbb{L}_{11}\mathbb{A}_2(I) \lhd \mathbb{L}_{C1}\mathbb{A}_2(I) \lhd \mathbb{LA}_2(I)$$

a

$$\mathbb{L}_{11}\mathbb{A}_2(I) \lhd \mathbb{LA}_2(I).$$

Věta 5.4. *Hypergrupoidy $(\mathbb{JA}_2(I)_q, *_B), (\mathbb{J}_C\mathbb{A}_2(I)_q, *_C)$ jsou komutativní hypergrupy takové, že $(\mathbb{J}_C\mathbb{A}_2(I)_q, *_C)$ je normální podhypergrupa hypergrupy $(\mathbb{JA}_2(I)_q, *_B)$.*

Věta 5.5. *Nechť $I \subseteq \mathbb{R}$ je otevřený interval. Podhypergrupa $(\mathbb{J}_C\mathbb{A}_2(I), *_C)$ hypergrupy $(\mathbb{JA}_2(I), *_B)$ je uzavřená a reflexivní.*

Věta 5.6. *Hypergrupa $(\mathbb{JA}_2(I)_q, *_C)$ je invertibilní v hypergrupě $(\mathbb{JA}_2(I)_q, *_B)$ právě tehdy, když interval I je kompaktní.*

Hyperstruktury dimenzionálních vektorů

V této části disertační práce uvažujeme hypergrupy n-dimenzionálních vektorů a stejně tak n-dimenzionálních lineárních diferenciálních operátorů. V této krátké verzi především představíme výsledky pro lineární diferenciální operátory, kterým jsme se zde již věnovali. Ovšem je jednoduché ukázat námi formulované výsledky i pro vektory, jak je uvedeno v úplné verzi práce.

Definujme hyperoperaci „$*^d$"jako direktní součin na množině $\mathbb{LA}_n(T)$ následovně:

$$\begin{aligned} L(p_0, \dots, p_{n-1}) *^d L(g_0, \dots, g_{n-1}) = \\ \{L(\varphi_0 p_0, \dots, \varphi_{n-1}p_{n-1}); (\varphi_0, \dots, \varphi_{n-1}) \in [C(T)]^n\} \cup \\ \cup \{L(\psi_0 g_0, \dots, \psi_{n-1}g_{n-1}); (\psi_0, \dots, \psi_{n-1}) \in [C(T)]^n\}. \end{aligned} \tag{4}$$

V následující textu, pokud nebude uvedeno jinak, budeme používat toto značení:

$$\mathscr{L}(\vec{p}) = \{L(\varphi_0 p_0, \dots, \varphi_{n-1}p_{n-1}); (\varphi_0, \dots, \varphi_{n-1}) \in [C(T)]^n\}, \tag{5}$$

$$L(\vec{g}) = L(g_0, \dots, g_{n-1}). \tag{6}$$

Věta 5.7. *Předpokládejme, že* $\mathbb{LA}_n(T) = \{L(p_0, \ldots, p_{n-1}); p_k \in C(T), k = 0, ..., n-1\}$. *Pak hypergrupoid* $(\mathbb{LA}_n(T), *^d)$ *je komutativní hypergrupou.*

Věta 5.8. *Předpokládejme, že* $\mathbb{LA}_n(T) = \{L(p_0, \ldots, p_{n-1}); p_k \in C(T), k = 0, ..., n-1\}$. *Pak hypergrupoid* $(\mathbb{LA}_n(T), *^d)$ *je komutativní hypergrupou.*

Věta 5.9. *Nechť* $\mathbb{LA}_n(T)^{-0} = \{L(p_0, \ldots, p_{n-1}); p_k \in C(T), p_k \neq 0, k = 1, ..., n-1\}$. *Pak komutativní hypergrupa* $(\mathbb{LA}_n(T)^{-0}, *^d)$ *je spojnicový prostor.*

Věta 5.10. *Hypergrupoid* $(\mathbb{LA}_n(T), *^d)$ *je spojnicový prostor.*

Min-max hyperstruktury matic formované svazem

V této části práce využijeme spojení dvou algebraických přístupů, a to teorie hyperstruktur a poznatků z teorie svazů. Se základním konceptem a terminologií hyperstruktur jsme se již plně seznámili. V této krátké verzi není zcela zřejmé propojení výsledků Varleta s hyperstrukturami matic.

Prezentujeme zde pouze hlavní výsledky, tj. matematické věty, ve kterých jsou uvedeny hyperoperace. Díky nim vznikají různé typy hyperstruktur. Pro lepší pochopení problematiky a snadnější orientaci v dosažených výsledcích navrhujeme čtenáři prostudovat kompletní práci.

Označme $\mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S})$ množinu všech $m \times n$ matic. Jako prvky takovéto matice rozumějme prvky z množiny $\mathcal{S}$, tj.

$$\mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S}) = \{\mathbf{M} = [m_{i,j}]); m_{i,j} \in \mathcal{S}, i = \{1, \ldots, m\}, j = \{1, \ldots, n\}\}. \tag{7}$$

Na $\mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S})$ pro libovolnou dvojici matic $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S})$ definujme relaci $\leq_M$ pravidlem

$$\mathbf{A} \leq_M \mathbf{B}, \text{ když } a_{i,j} \leq_e b_{i,j} \text{ pro všechna } i = \{1, \ldots, m\}, j = \{1, \ldots, n\}, \tag{8}$$

kde $\leq_e$ je vhodná relace mezi prvky matic. Předpokládejme, že $(\mathcal{S}, \inf, \sup, \leq_e)$ je svaz a definujme *minimum matic* $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S})$ předpisem

$$\min\{\mathbf{A}, \mathbf{B}\} = \mathbf{C}, \text{ kde } \mathbf{C} \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S}) \text{ je takové, že } c_{i,j} = \inf\{a_{i,j}, b_{i,j}\} \tag{9}$$

pro každé $i \in \{1, \ldots, m\}, j \in \{1, \ldots, n\}$, takto definujeme *minimum* pro dvě matice, analogicky definujeme i v případě více matic; a dále *maximum matic* $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S})$ jako

$$\max\{\mathbf{A}, \mathbf{B}\} = \mathbf{D}, \text{ kde } \mathbf{D} \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S}) \text{ je takové, že } d_{i,j} = \sup\{a_{i,j}, b_{i,j}\} \tag{10}$$

pro každé $i \in \{1, \ldots, m\}, j \in \{1, \ldots, n\}$, takto definujeme *maximum* pro dvě matice, analogicky definujeme i v případě více matic.

Jestliže předpokládáme, že $(\mathcal{S}, \inf, \sup, \leq_e)$ je *svaz*, pak je zřejmé, že platí vztah (8) a operace (9) a (10) definovaná na $\mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S})$.

Lemma 5.11. *Operace* min *a* max *definované na* $\mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S})$ *předpisy* (9) *a* (10) *jsou idempotentní, komutativní a asociativní.* $(\mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S}), \leq_M)$ *je uspořádaná množina. Struktury* $(\mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S}), \min, \leq_M)$ *a* $(\mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S}), \max, \leq_M)$ *jsou uspořádané pologrupy.*

Lemma 5.13 nám umožňuje stavovit závěr pro strukturu $(\mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S}), \min, \max, \leq_M)$.

Věta 5.12. *Uspořádaná množina* $(\mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S}), \min, \max, \leq_M)$*, kde operace* min *a* max *jsou definovány předpisy* (9) *a* (10) *a relace* $\leq_M$ *je definována předpisem* (8)*, je svaz.*

Lemma 5.13. *Operace* min *a* max *definované na* $\mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S})$ *předpisy* (9) *a* (10) *jsou idempotentní, komutativní a asociativní.* $(\mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S}), \leq_M)$ *je uspořádaná množina. Struktury* $(\mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S}), \min, \leq_M)$ *a* $(\mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S}), \max, \leq_M)$ *jsou uspořádané pologrupy.*

Lemma 5.13 nám umožňuje stanovit závěr pro strukturu $(\mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S}), \min, \max, \leq_M)$.

Věta 5.14. *Uspořádaná množina* $(\mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S}), \min, \max, \leq_M)$*, kde operace* min *a* max *jsou definovány předpisy* (9) *a* (10) *a relace* $\leq_M$ *je definována předpisem* (8)*, je svaz.*

Nejprve pro libovolnou dvojici matic $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S})$ definujeme

$$\mathbf{A} \circ \mathbf{B} = \{\mathbf{C} \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S}); \min\{\mathbf{A}, \mathbf{B}\} \leq_M \mathbf{C}\}, \tag{11}$$

tj. pro všechny $i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, n\}$,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix} =$$

$$\left\{ \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & \dots & c_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S}); \inf\{a_{ij}, b_{ij}\} \leq_e c_{ij} \right\}$$

a duálně

$$\mathbf{A} \bullet \mathbf{B} = \{\mathbf{D} \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S}); \max\{\mathbf{A}, \mathbf{B}\} \geq_M \mathbf{D}\}, \tag{12}$$

tj. pro všechny $i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, n\}$,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix} =$$

$$\left\{ \begin{bmatrix} d_{11} & \dots & d_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ d_{m1} & \dots & d_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S}); \sup\{a_{ij}, b_{ij}\} \geq_e d_{ij} \right\}.$$

Věta 5.15. *Hypergrupoidy* $(\mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S}), \circ)$ *a* $(\mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S}), \bullet)$ *jsou spojnicové prostory.*

Nyní analogicky vztahům (11) a (12) pro matice $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S})$ definujeme

$$\mathbf{A} * \mathbf{B} = \{\mathbf{C} \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S}); \max\{\mathbf{A}, \mathbf{B}\} \leq_M \mathbf{C}\}, \tag{13}$$

tj. pro všechna $i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, n\}$,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix} =$$

$$\left\{ \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & \dots & c_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S}); \sup\{a_{ij}, b_{ij}\} \leq_e c_{ij} \right\}$$

a duálně

$$\mathbf{A} \star \mathbf{B} = \{\mathbf{D} \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S}); \min\{\mathbf{A}, \mathbf{B}\} \geq_M \mathbf{D}\}, \tag{14}$$

tj. pro všechna $i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, n\}$,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \star \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix} =$$

$$\left\{ \begin{bmatrix} d_{11} & \dots & d_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ d_{m1} & \dots & d_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S}); \inf\{a_{ij}, b_{ij}\} \geq_e d_{ij} \right\}.$$

Věta 5.16. *Hypergrupy* $(\mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S}), *)$ *a* $(\mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S}), \star)$ *jsou komutativní polohypergrupy.*

Věta 5.17. *Polohypergrupy* $(\mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S}), *)$ *a* $(\mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S}), \star)$ *splňují transpoziční axiom.*

Poznámka 5.18. *Poznamenejme, že transpoziční axiom je obvykle studován na hypergrupách. Jeho platnost ovšem není podmíněna reprodukčním zákonem. Transpoziční polohypergrupy, které nejsou hypergrupami, jsou studovány bratry Massourosovými v publikaci [29].*

Jedním z velmi základních pojmů teorie hyperstruktur je uvažovaný interval jako výsledek hyperoperace aplikovaný na jeho koncové body. Inspirováni touto úvahou definujeme pro dvě libovolné matice $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S})$ hyperoperaci „$\odot$"předpisem

$$\mathbf{A} \odot \mathbf{B} = \{\mathbf{C} \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S}); \min\{\mathbf{A}, \mathbf{B}\} \leq_M \mathbf{C} \leq_M \max\{\mathbf{A}, \mathbf{B}\}\}, \tag{15}$$

tj. pro všechna $i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, n\}$,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix} =$$

$$\left\{ \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & \dots & c_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S}); \inf\{a_{ij}, b_{ij}\} \leq_e c_{ij} \leq_e \sup\{a_{ij}, b_{ij}\} \right\}.$$

Důsledek 5.19. *Hypergrupa* $(\mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S}), \odot)$ *je spojnicový prostor právě tehdy, když svaz* $(\mathcal{S}, \inf, \sup)$ *je distributivní.*

Hypergrupy jako vstupní abecedy

V kapitole Kvazi–multiautomaty lineárních diferenciálních operátorů se zabýváme konstrukcemi kvazi–multiautomatů, kde jako vstupní abecedu uvažujeme (polo-)hypergrupy. Dále se pak zabýváme součiny kvazi–automatu definované W. Dörferem zobecněné na případy kvazi–multiautomatů. Na první pohled nepatrné rozdíly v níže konstruovaných strukturách mají pro toto zobecnění zásadní význam.

Lemma 5.20. *Nechť $\mathcal{R}_n$ je n–dimenzionální vektorový prostor reálných čísel s hyperoperací definovanou rovností*

$$(r_0, \ldots, r_{n-1}) \bullet (s_0, \ldots, s_{n-1}) = \{(t_0, \ldots, t_{n-1}), t_k \geq r_k s_k, k = 0, ..., n-1\}. \tag{16}$$

Pak $(\mathcal{R}_n, \bullet)$ je komutativní hypergrupa.

Dále budeme uvažovat strukturu $(\mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{R}^+), \circ)$, která je speciálním případem struktury $(\mathbb{M}_{m,n}(\mathcal{S}), \circ)$, kde $\mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{R}^+)$ je množina všech čtvercových matic typu $n \times n$, jejímiž prvky jsou reálná nezáporná čísla a hyperoperace je definovnána předpisem (11). Jak jsme již naznačili, tyto struktury jsou důležité pro následující konstrukce, ve kterých zobecňujeme GMAC na E-GMAC a SE-GMAC. Tedy ukážeme rozdílný aspekt při různém zobecnění, k tomuto účelu potřebujeme zavést důležitou podmnožinu $\mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{R}_1^+)$, která je podmnožinou množiny $\mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{R}^+)$.

$$\mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{R}_1^+) = \{\mathbf{M} \in \mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{R}^+); \mathbf{M} = (m_{ij}), m_{ij} \geq 1, i, j \in \mathbb{N}_n\} \tag{17}$$

Protože reálná čísla tvoří svaz, můžeme nyní formulovat následující větu.

Lemma 5.21. *Hypergrupoid $(\mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{R}^+), \circ)$ a $(\mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{R}_1^+), \circ)$ jsou spojnicové prostory.*

Pro kartézskou kompozici kvazi–multiautomatu budeme uvažovat dvě navzájem disjunktní struktury z Lemma 5.20 a Lemma 5.21, kde pro $n \leq 2$ splňují podmínku disjunktnosti, tj. jejich průnik je prázdná množina $\mathcal{R}_n \cap \mathbb{M}_n \neq \emptyset$. Při dalších úvahách je nezbytné sjednocení těchto množin, dále tedy budeme uvažovat $(\mathcal{R}_n \cup \mathbb{M}_n)$. Pak na takovéto množině definujeme binární hyperoperaci

$$\triangle : (\mathcal{R}_n \cup \mathbb{M}_n) \times (\mathcal{R}_n \cup \mathbb{M}_n) \to \mathcal{P}^*(\mathcal{R}_n \cup \mathbb{M}_n)$$

předpisem:

$$\begin{gathered}
\text{Když } X = \vec{r} \in \mathcal{R}_n, Y = \vec{s} \in \mathcal{R}_n, \text{ pak } X \triangle Y = \vec{r} \bullet \vec{s} \subset \mathcal{P}^*(\mathcal{R}_n). \\
\text{Když } X = A \in \mathbb{M}_n, Y = B \in \mathbb{M}_n, \text{ pak } X \triangle Y = A \circ B \subset \mathcal{P}^*(\mathbb{M}_n). \qquad (18) \\
\text{Když } X = \vec{r} \in \mathcal{R}_n, Y = A \in \mathbb{M}_n, \text{ pak } X \triangle Y = \{X, Y\} = \{\vec{r}, A\} = A \triangle \vec{r} = Y \triangle X.
\end{gathered}$$

Lemma 5.22. *Nechť $\mathcal{R}_n, \mathbb{M}_n$ jsou disjunktní množiny. Uvažujme strukturu $((\mathcal{R}_n \cup \mathbb{M}_n), \triangle)$ s binarní hyperoperací (18). Pak hypergrupoid je komutativní hypergrupou.*

5.3 Kvazi–multiautomaty

Věta 5.23. *Pro komutativní hypergrupu $(\mathcal{R}_n, \bullet)$ struktura $\mathbb{A}_1 = ((\mathcal{R}_n, \bullet), \mathbb{LA}_n(T), \delta_1)$ s tranzitní funkcí $\delta_1 : \mathcal{R}_n \times \mathbb{LA}_n(T) \to \mathbb{LA}_n(T)$ definovanou jako*

$$\delta_1(\vec{r}, L(\vec{p})) = (\vec{r} \cdot L(\vec{p})) = L(r_0 p_0, \ldots, r_{n-1} p_{n-1})$$

je kvazi–multiautomat s vstupní strukturou $(\mathcal{R}_n, \bullet)$ a stavovou množinou $\mathbb{LA}_n(T)$.

Věta 5.24. *Struktura* $\mathbb{A}_2 = ((\mathcal{R}_n, \bullet), \mathscr{R}_n^{\mathbb{F}}(\Omega), \delta_2)$*, kde zobrazení* $\delta_2 : \mathcal{R}_n \times \mathscr{R}_n^{\mathbb{F}}(\Omega) \to \mathscr{R}_n^{\mathbb{F}}(\Omega)$ *je definováno pravidlem*

$$\delta_2(\vec{r}, \vec{p}) = \vec{r} \cdot \vec{p} = (r_0 p_0, \ldots, r_{n-1} p_{n-1}),$$

je kvazi–multiautomat.

Věta 5.25. *Struktura* $\mathbb{A}_3 = ((\mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{R}_1^+), \circ), \mathscr{R}_n^{\mathbb{F}}(\Omega), \delta_3)$ *s přechodovou funkcí* $\delta_3 : (\mathbb{M}_n, \circ) \times \mathscr{R}_n^{\mathbb{F}}(\Omega) \to \mathscr{R}_n^{\mathbb{F}}(\Omega)$ *definovanou předpisem*

$$\delta_3(A, \vec{p}) = \vec{p} \cdot A = \vec{q},$$

kde

$$\vec{p} \cdot \mathbf{A} = (p_0, \ldots, p_{n-1}) \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} = (q_0, \ldots, q_{n-1}) = \vec{\varphi}$$

je kvazi–multiautomat se vstupní hypergrupou $(\mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{R}_1^+), \circ)$ *a stavovou množinou* $\mathscr{R}_n^{\mathbb{F}}(\Omega)$*.*

Věta 5.26. *Uvažujme kvazi–multiautomat* $\mathbb{A}_1 = ((\mathcal{R}_n, \bullet), \mathbb{LA}_n(T), \delta_1)$ *a kvazi–multiautomat* $\mathbb{A}_2 = ((\mathcal{R}_n, \bullet), \mathscr{R}_n^{\mathbb{F}}(\Omega), \delta_2)$ *se stejnou vstupní strukturou* $(\mathcal{R}_n, \bullet)$*. Definujme*

$$\mathbb{A}_{hm} = ((\mathcal{R}_n, \bullet), \mathbb{LA}_n(T) \times \mathscr{R}_n^{\mathbb{F}}(\Omega), \delta_1 \times \delta_2),$$

kde

$$(\delta_1 \times \delta_2)(\vec{r}, (L(\vec{p}), \vec{p})) = (\delta_1(\vec{r}, L(\vec{p})), \delta_2(\vec{r}, \vec{p}))$$

pro každé $L(\vec{p}) \in \mathbb{LA}_n(T), \vec{p} \in \mathscr{R}_n^{\mathbb{F}}(\Omega)$ *a* $\vec{r} \in \mathcal{R}_n$*. Pak* $\mathbb{A}_{hm}$ *je kvazi–multiautomat.*

Věta 5.27. *Uvažujme kvazi–multiautomat* $\mathbb{A}_1 = ((\mathcal{R}_n, \bullet), \mathbb{LA}_n(T), \delta_1)$ *a kvazi–multiautomat* $\mathbb{A}_3 = ((\mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{R}_1^+), \circ), \mathscr{R}_n^{\mathbb{F}}(\Omega), \delta_3)$ *s různými vstupními hypergrupami* $(\mathcal{R}_n, \bullet)$ *a* $(\mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{R}_1^+); \circ)$*. Definujme*

$$\mathbb{A}_{het} = ((\mathcal{R}_n, \bullet) \times (\mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{R}_1^+), \circ), \mathbb{LA}_n(T) \times \mathscr{R}_n^{\mathbb{F}}(\Omega), \delta_1 \otimes \delta_3),$$

kde

$$\begin{aligned} &\delta_1 \otimes \delta_3((\vec{r}, \mathbf{A}), (L(\vec{p}), \vec{q})) = \\ &\qquad = (\delta_1((r_0, \ldots, r_{n-1}), (p_0, \ldots, p_{n-1})), \delta_3((a_{ij}), (q_0, \ldots, q_{n-1}))) = \\ &\qquad\qquad = \left(L(\vec{r}\vec{p}), \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i1} q_{i1}, \ldots, \sum_{i=1}^{n} a_{in} q_{i1} \right) \right), \end{aligned}$$

pro všechna $L(\vec{p}) \in \mathbb{LA}_n(T), \vec{q} \in \mathscr{R}_n^{\mathbb{F}}(\Omega), \boldsymbol{A} \in \mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{R}_1^+)$ *a* $\vec{r} \in \mathcal{R}_n$*. Pak* $\mathbb{A}_{het}$ *je kvazi–multiautomat.*

K řešení problému, kdy podmínka (1) se stává neaplikovatelnou na případ kartézské kompozice, zavádíme dvě modifikace, jejichž terminologie se již v této práci vyskytly. Nyní si tedy představíme co chápeme pod pojmem E-GMCC a SE-GMAC. Pro úplnost poznamenejme, že „E”je odvozeno z anglického slova „extended”a „SE”je odvozeno ze sousloví „small extended”. Dále zaveďme úmluvu, že pro danou množinu I a stav s formulí $\delta(I, s)$ rozumíme množinu $\{\delta(a, s)$ pro všechna $a \in I\}$.

Definice 5.28. *Jestliže v Definici 2.2 změníme podmínku* (1) *na*

$$\delta(y,\delta(x,s)) \in \delta(x\cdot y,s)\cup\delta(I,s) \text{ pro všechna } x,y\in I, s\in S, \tag{19}$$

nazveme tuto podmínku E-GMAC a multiautomat $\mathbb{A}$ *e-kvazi-multiautomatem.*

Tradičně v konceptu multiautomatů nemusí být zahrnut „nulový stav”, který může, ale také nemusí vytvářet problémy v některých dalších úvahách. Protože nulové stavy jsou velmi důležité pro naše další úvahy, což je představeno v důkazu Věty 5.35, zavedeme následující definici.

Definice 5.29. *Jestliže v Definici 2.2 změníme stavovou množinu na* $S\cup\{0\}$ *a podmínku* (1) *na*

$$\delta(y,\delta(x,s)) \in \delta(x\cdot y,s)\cup\{\delta(x,s),\delta(y,s)\} \text{ pro všechna } x,y\in I, s\in S, \tag{20}$$

nazveme tuto podmínku SE-GMAC a multiautomat $\mathbb{A}$ *se-kvazi-multiautomatem.*

Lemma 5.30. *Každý kvazi-multiautomat je e-kvazi-multiautomatem. Jestliže je stavová množina rozšířena o „nulový stav”, pak každý kvazi-multiautomat je i se-kvazi-multiautomatem. Jednoduše platnost podmínky GMAC* (1) *implikuje platnost obou podmínek E-GMAC* (19) *a (po rozšíření stavové množiny o „nulový stav”) podmínky SE-GMAC* (20)*.*

Definice 5.31. *Nechť* $\mathbb{A}=(I,S,\delta)$ *a* $\mathbb{B}=(J,T,\sigma)$ *jsou e-kvazi-multiautomaty se vstupními hypergrupami* I,J *a s tranzitními zobrazeními* $\delta: I\times S\to S, \sigma: J\times T\to T$ *splňujícími podmínky*

$$\delta(y,\delta(x,s)) \in \delta(x\cdot y,s)\cup\delta(I,s) \text{ pro všechna } x,y\in I, s\in S, \tag{21}$$

$$\sigma(y,\sigma(x,t)) \in \sigma(x\cdot y,t)\cup\sigma(J,t) \text{ pro všechna } x,y\in I, t\in T. \tag{22}$$

Kartézskou kompozicí $\mathbb{A}$ *a* $\mathbb{B}$*, označenou jako* $\mathbb{A}\cdot_E\mathbb{B}$*, myslíme e-kvazi-multiautomat* $\mathbb{A}\cdot_E\mathbb{B}=(((I\cup J),\diamond),S\times T,\delta\cdot\sigma)$*, kde* $\delta\cdot\sigma$ *je pro všechna* $x\in I\cup J$*,* $s\in S$ *a* $t\in T$ *definovaná předpisem*

$$(\delta\cdot\sigma)(x,(s,t)) = \begin{cases}(\delta(x,s),t) & \text{když } x\in I,\\ (s,\sigma(x,t)) & \text{když } x\in J,\end{cases}$$

a $\diamond: (I\cup J)\times(I\cup J)\to\mathcal{P}^*(I\cup J)$ *je pro všechna* $x,y\in I\cup J$ *definovaná předpisem*

$$x\diamond y = \begin{cases} xy\subseteq I & \text{když } x,y\in I,\\ xy\subseteq J & \text{když } x,y\in J,\\ \{x,y\} & \text{když } x\in I, y\in J \text{ nebo } x\in J, y\in I\end{cases}$$

a $\delta\cdot\sigma: (I\cup J)\times(S\times T)\to(S\times T)$ *splňující podmínku:*

$$(\delta\cdot\sigma)(y,(\delta\cdot\sigma)(x,(s,t))) \in (\delta\cdot\sigma)(x\diamond y,(s,t))\cup\{\delta(I,s)\times\sigma(J,t)\}. \tag{23}$$

Definice 5.32. *Jestliže v Definici 5.31 uvažujeme dva se-kvazi-multiautomata a změníme podmínku* (23) *na*

$$(\delta\cdot\sigma)(y,(\delta\cdot\sigma)(x,(s,t))) \in (\delta\cdot\sigma)(x\diamond y,(s,t))\cup\{(\delta(x,s),\sigma(y,t)),(\delta(y,s),\sigma(x,t))\}, \tag{24}$$

nazveme výsledek se-kvazi-multiautomat kartézské kompozice se-kvazi-multiautomatů $\mathbb{A}$ *a* $\mathbb{B}$ *s označením* $\mathbb{A}\cdot_{SE}\mathbb{B}$*.*

Věta 5.33. *Jestliže ve Větě 5.25 uvažujeme* $(\mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{R}^+), \circ)$ *namísto hyperstruktury* $(\mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{R}_1^+), \circ)$*, pak* $\mathbb{A}_4 = ((\mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{R}^+), \circ), \mathscr{R}_n^{\mathbb{F}}(\Omega), \delta_4)$*, kde* $\delta_4 \equiv \delta_3$*, je e-kvazi-multiautomat.*

Věta 5.34. *Uvažujme e–kvazi–multiautomata* $\mathbb{A}_1$ *a* $\mathbb{A}_3$ *konstruovaných s použitím Věty 5.23 a Věty 5.33. Definujme*

$$(\delta_1 \cdot \delta_3) : (\mathcal{R}_n \cup \mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{R}^+)) \times (\mathbb{LA}_n(T) \times \mathscr{R}_n^{\mathbb{F}}(\Omega)) \to \mathbb{LA}_n(T) \times \mathscr{R}_n^{\mathbb{F}}(\Omega)$$

pravidlem

$$(\delta_1 \cdot \delta_3)(X, (L(\vec{p}), \vec{q})) = \begin{cases} (\delta_1(X, L(\vec{p})), \vec{q}) & \textit{když } X = \vec{r} \in \mathcal{R}_n, \\ (L(\vec{p}), \delta_3(X, \vec{q})) & \textit{když } X = \mathbf{A} \in \mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{R}^+). \end{cases} \tag{25}$$

Pak struktura $(((\mathcal{R}_n \cup \mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{R}^+)), \triangle), \mathbb{LA}_n(T) \times \mathscr{R}_n^{\mathbb{F}}(\Omega), \delta_1 \cdot \delta_3)$ *je kartezská kompozice* $\mathbb{A}_1 \cdot_E \mathbb{A}_3$.

Věta 5.35. *Uvažujme se-kvazi-multiautomaty* $\mathbb{A}_1$ *a* $\mathbb{A}_3$ *konstruované ve Větě 5.23 a Větě 5.25 v daném pořadí. Definujme*

$$(\delta_1 \cdot \delta_2) : (\mathcal{R}_n \cup \mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{R}_1^+)) \times (\mathbb{LA}_n(T) \times \mathscr{R}_n^{\mathbb{F}}(\Omega)) \to \mathbb{LA}_n(T) \times \mathscr{R}_n^{\mathbb{F}}(\Omega)$$

pravidlem

$$(\delta_1 \cdot \delta_2)(X, (L(\vec{p}), \vec{q})) = \begin{cases} (\delta_1(X, L(\vec{p})), \vec{q}) & \textit{if } X = \vec{r} \in \mathcal{R}_n, \\ (L(\vec{p}), \delta_2(X, \vec{q})) & \textit{if } X = \mathbf{A} \in \mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{R}_1^+), \\ \delta_1(X, L(\vec{p})) = 0 & \textit{if } X = \mathbf{A} \in \mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{R}_1^+), \\ \delta_2(X, \vec{q}) = 0 & \textit{if } X = \vec{r} \in \mathcal{R}_n. \end{cases} \tag{26}$$

Pak struktura $(((\mathcal{R}_n \cup \mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{R}_1^+)), \triangle_1), \mathbb{LA}_n(T) \times \mathscr{R}_n^{\mathbb{F}}(\Omega), \delta_1 \cdot \delta_2)$*, kde* $\triangle_1$ *je zúžení zobrazení* $\triangle$ (18) *na množinu* $\mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{R}_1^+)$*, je kartezská kompozice* $\mathbb{A}_1 \cdot_{SE} \mathbb{A}_2$.

5.4 Systémy tvořené kvazi–multiautomaty

Jak již bylo zmíněno výše, je známý fakt, že algebraická teorie automatů je velmi důležitá a použitelná disciplína v oblasti, ve které se používají různé modifikace automatů [2,6,19]. V případě automatů bez výstupu můžeme z volného monoidu nebo grupy získat akci na neprázdné množině. Tyto struktury stejně jako v případě kvazi–multiautomatů mohou tvořit základní kostru dynamických systémů typu vstup–výstup.

V minulosti se automaty považovaly za systémy, které sloužily pro přenos informací jistého typu. Tato kapitola je věnována systémům vstup–výstup, které jsou vytvářeny kvazi–multiautomaty, jež jsou zobecněním klasických algebraických automatů. Motivaci pro tyto speciální systémy nacházíme v práci profesora Borůvky, který ve svých studiích využíval algebraizace a geometrizace k řešení analytických problémů. Tedy v tomto smyslu zde formalizujeme systémy časových procesů.

V práci představujeme systémy, které jsou tvořené z kvazi–multiautomatů, které jsme konstruovali výše. Volíme oba přístupy s nimiž jsme se ve stručnosti seznámili v kapitole Současný stav.

6 Závěr

Disertační práce na téma Strukturované multisystémy a multiautomaty indukované časovými procesy je z jedné části věnována konstrukcím hyperstruktur lineárních diferenciálních operátorů, které tvoří levé strany diferenciálních rovnic motivovaných časovými procesy používanými často v technických oborech. Tyto struktury jsou následně vyšetřovány z hlediska klasických algebraických vlastností teorie multistruktur, kde jsme dosáhli zajímavých výsledků. Významnou tématikou z této oblasti, která přináší nové poznatky, je popis souvislostí mezi strukturami matic formovanými svazy a mezi hyperstrukturami. Ukázali jsme zde jak z kvazi–uspořádáné komutativní pologrupy, která není grupou, získat komutativní hypergrupu.

V další čásí studujeme kvazi–multiautomaty, které jsou opatřeny vstupní (polo-)hypergrupou lineárních diferenciálních operátorů. V kontextu hyperstruktur se zaměřujeme na konstrukce kvazi–multiautomatů, které jsou vhodným zobecněním klasických automatů bez výstupu. V práci se nám podařilo ukázat i jednoduché aplikace těchto multi–automatů, které by mohly sloužit pro popis nejednoznačných dějů v elektronických obvodech. Ve smyslu součinů automatů zavedených W. Dörfelrem se nám podařilo zobecnit tyto součiny na případy kvazi–multiautomatů. Pro speciální případ součinu nazývaný kartézská kompozice ovšem selhávaly klasické postupy, proto jsme představili dvě řešení, které umožňují použít kartézskou kompozici i pro případy kvazi–multiautomatů.

Na konci práce jsme se věnovali systémům vstup–výstup. V minulosti se automaty považovaly za systémy, které sloužily pro přenos informací specifického typu. Představili jsme koncepty, podle kterých lze z kvazi–multiautomatů a nebo právě z jejich součinů vytvořit systémy vstup-výstup s popisem vnitřních vazeb. Jako nejzajímavější konstrukce se jeví kaskádová konstrukce, pro kterou lze použít popis vnitřních vazeb, stejně jako množinově relační popis.

Práce je zaměřena především na zobecněné kvazi–multiautomaty a řada z nich je rozvíjena v rámci teorie hyperstruktur. Dále lze studovat homomorfismy uvedených struktur, zejména multi-automatů a vlastnosti pologrup endomorfismů multi-automatů a stejně tak vlastnosti grup automorfismů multi-automatů. Stejně tak by bylo užitečné vyjasnit vztahy mezi vlastnostmi homogenních a lineárních diferenciálních rovnic a algebraickými vlastnostmi hypergrup zkonstruovaných z lineárních diferenciálních operátorů vytvářejících levé strany těchto rovnic.

Reference

[1] ASHRAFI, A. R., MADANSHEKAF, A.: Generalized action of a hypergroup on a set, *Italian J. Pure and Appl. Math.*, 15(3) 1998, s. 127-135. ISSN: 2239-0227.

[2] BAVEL, Z.: The source as a tool in automata. *Information and Control.* 18: 1971, s.140-155. ISSN: 0019-9958.

[3] BERÁNEK, J., CHVALINA, J.: Invariantní podgrupy grup obyčejných lineárních diferenciálních operátorů druhého řádu, *Acta Mathematica 13*, Fac. Nat. Sci. Univ. Nitra 2010, s. 43-47. ISBN: 978-80-8094-781-1.

[4] BERÁNEK, J., CHVALINA, J.: On a certain group of linear second-order differential operators of the Hill-type. *In Acta Mathematica,* Nitra: Faculty of Natural Sci. Constantine the Philosopher University Nitra, 2014, s. 23-27. ISBN: 978-80-558-0613-6.

[5] BERÁNEK, J., CHVALINA, J.: Struktury a multistruktury vytvářené prostory řešení lineárních homogenních diferenciálních rovnic n-tého řádu. *In Acta Mathematica 12, Faculty of natural Sciences, Constantine the Philosopher University*, Nitra: Acta Mathematica 12, Faculty of natural Sciences, Constantine the Philosopher University, 2009, s. 25-32. ISBN: 978-80-8094-614-2.

[6] BIRKHOFF, G., LIPSON, J. D.: Heterogeneous Algebras, *Journal Combinatorial Theory*, 8 1970, s. 115-133. ISSN: 0097-3165.

[7] CHVALINA, J.: Infinite multiautomata with phase hypergroups of various operators. In *Proc. 10th International Congress on Algebraic Hyperstructures and Applications*, Hošková, Š., Ed.; University of Defense: Brno, 2009, s. 57-69. ISBN: 978-80-7231-688-5.

[8] CHVALINA, J.: *Functional Graphs, Quasi-ordered Sets and Commutative Hypergroups*, Masaryk University, Brno 1995, s. 205. ISBN: 80-210-1148-3.

[9] CHVALINA, J., CHVALINOVÁ, L.: Join space of linear ordinary differential operators of the second order, *Folia Fac. Sci. Nat. Univ. Masarykianae Brunesis, Mathematica*, 13 2003, s. 77-86 (Colloqium on Differential and Difference Equations, CDDE 2003). ISBN: 80-210-3149-2.

[10] CHVALINA, J., HOŠKOVÁ-MAYEROVÁ, Š., NEZHAD, A.D.: General actions of hyperstructures and some applications, *An. Şt. Univ. Ovidius Constanţa*, 21(1) (2013), 59-82. ISSN: 1224-1784.

[11] CHVALINA, J., MOUČKA, J.: Actions of join spaces of continuous functions on hypergroups of second-order linear differential operators, In *6th Workshop*, Fac. of Civil Engin. Brno University of Technology, Brno (2003), s. 9. ISBN: 80-214-2741- 8.

[12] CHVALINA, J., MOUČKA , J.: On a certain product of multiautomata induced by the cascade product of automata. *In Proc. of the XXXII. Internat. Colloquium, Univ. of Defence, Brno.*Brno: UNOB, 2014. s. 1-7. ISBN: 978-80-7231-958-9.

[13] CHVALINA, J., MOUČKA, J.: *Aplikované Struktury a Multistruktury pro Modelování Procesů.* Brno: UNOB, 2009. s. 1-133. ISBN: 978-80-7231-549- 9.

[14] CHVALINA, J., RAČKOVÁ, P.: Join spaces of smooth functions and their actions on transposition hypergroups of second order linear differential operators, In *Aplimat - Journal of Applied Math* (2008), No. 1, p. 55-63. ISBN 978-80-89313-03-7.

[15] CORSINI, P., LEOREANU, V.: *Applications of Hyperstructure Theory*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2003. ISBN: 1-4020-1222-5.

[16] CRISTEA, I.: Several aspects on the hypergroups associated with n-ary relations, An. Şt. Univ. Ovidius Constanta, **17**(3) (2009), 99-110. ISBN: 1224-1784.

[17] DAVVAZ, B.: *Polygroup Theory and Related Systems*. World Scientific, New Jersey - London - Singapore - Shanghai - Hong Kong 2013. ISBN: 978-9814425308.

[18] DAVVAZ, B., LEOREANU FOTEA, V.: *Hyperring Theory and Applications*. Hadronic Press, Palm Harbor, Fl. U.S.A 2008. ISBN: 978-80-7231-779.

[19] DÖRFLER, W.: The cartesian composition of automata, *Math. System Theory* 11 (1978), s. 239-257. ISSN: 1433-0490.

[20] DRESHER, M., ORE, O.: Theory of multigroups. *Amer. J. Math.* 60 (1938), p. 705 - 733.

[21] GÉCSEG, F., PEÁK, I.: *Algebraic Theory of Automata*, Budapest, Akadémia Kiadó, 1972.

[22] HOŠKOVÁ, Š., CHVALINA, J.: Discrete transformation hypergroups and transformation hypergroups with phase tolerance space, *Discrete Math.* 308(18) (2008), s. 4133-4143. ISSN: 0012-365X.

[23] Š. HOŠKOVÁ, Š., CHVALINA, J., RAČKOVÁ, P.: Transposition hypergroups of Fredholm integral operators and related hyperstructures. Part I, *Journal of Basic Science*, **4**(1) (2008), s. 43–54. ISSN: 1735-0611.

[24] JANTOSCIAK, J.: Transposition in hypergroups. *Sixt Internat. Congress on AHA*, 1996. Democritus Univ. of Thrace Press, Greece, p. 77 - 84. ISBN: 9608568714.

[25] LEOREANU-FOTEA, V., DAVVAZ, B., FENG, F., CHIPER, C.: Join spaces, soft join spaces and lattices, *An. Şt. Univ. Ovidius Constanţa*, **22**(1) (2014), s. 155-167. ISSN: 1224-1784.

[26] LEOREANU-FOTEA, V., ROSENBERG, I. G.: Hypergroupoids determined by lattices, *European J. Combin.* **31**(2010), s. 925–931. ISSN: 0195-6698.

[27] MALIK, D. S., MORDENSON, J. N., SEN, M. K.: The cartesian composition of fuzzy finite state machines, *Kybernetics*, 24 (1995), s. 98-110.

[28] MARTY, F.: Sur une généralization de la notion de groupe. *Huitie'me congre's des mathématiciens scandinaves*, Stockholm (1934), s. 45 - 49.

[29] MASSOUROS, Ch. G., MASSOUROS, G. G.: The transposition axiom in hypercompositional structures, *Ratio Mathematica*, **21** (2011), s. 75–90. ISSN: 2282-8214.

[30] MESAROVIĆ, M.D.– TAKAHARA, Y.: *General System Theory. A Mathematical Foundations*. Academic Press, New York 1975. ISBN: 0-12-491540-X.

[31] MORDENSON, J. N., MALIK, D. S.: *Fuzzy Automata and Languages – Theory and Applications*, Chapman & Hall CRC Press, 2002. ISBN: 978-158-48822-51.

[32] NEUMAN, F.: *Global Properties of Linear Ordinary Differential Equations*. Academia - Praha, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht /Boston / London, 1991. ISBN 80-200-0423-8.

[33] NEUMAN, F.: On a representations of linear differential equations. *Mathematical and Computer Modelling* Vol.52, (2010), s. 355 - 360. ISSN: 0895-7177.

[34] NOVÁK, M.: Potential of the "Ends lemma" to create ring-like hyper-structures from quasi-ordered (semi)hypergroups. *South Bohemia Math. Letters* Vol.17, No 1, (2009), p. 39 - 50. ISSN: 1804- 1450.

[35] NOVÁK, M.: Some basic properties of *EL*-hyperstructures. *European J. of Combinatorics* Vol.34, (2013), p. 446 - 459. ISSN: 0195- 6698.

[36] NOVÁK, M. On EL-semihypergroups, *European J. Combin.* 44 Part B (2015), s. 274–286. ISSN: 01956698.

[37] NOVÁK, M.: *n–ary hyperstructures constructed from binary quasi–ordered semigroups*, An. Şt. Univ. Ovidius Constanţa, **22**(3) (2014), s. 147-168. ISSN: 1224-1784.

[38] PRENOWITZ, W., JANTOSCIAK, J.: Geometries and join spaces. *J. Reine Angew. Math*, Vol.257, (1972), s. 100-128. Titel–Nr.3 10 9001 014. ISSN:1435-5345.

[39] RAČKOVÁ, P.: Properties of generalized multiautomata, In *12th International AHA Conference. Xanthi, 2014.* (Prijato)

[40] SADOVSKIJ, V. N.: *Základy Všeobecnej Teórie Systémov: Logicko-metodologická Analýza*, 1. vyd. Bratislava: Pravda, 1979.

[41] SUBRMANIYAN, S., RAJASEKAR, M.: Cartesian composition in bipolar fuzzy finite state machines, *International Journal of Computer Applications* 92(11) (2014), s. 1-7. ISSN: 0952-8091.

[42] VARLET, J. V.: *Remarks on distributive lattices*, Bull. de l'Acad. Polonnaise des Sciences, Serie des Sciences Math., Astr. et Phys., **23** (1975) 1143-1147.

[43] VOUGIOUKLIS, T.: Hypermatrix representations: The problem and open problems, in: 10^{th} *International Congress of Algebraic Hyperstructures and Applications, Proceedings of AHA 2008*, University of Defence, Brno, 2009, 17–31. ISBN: 978-80-7231-688-5.

[44] VOUGIOUKLIS, T.: *Hyperstructures and their Representations.* Monographs, Hadronic Press, Palm Harbor, Fl. U.S.A. 1994. ISBN 0-91176-86-X.

Životopis

Jméno:	Štěpán Křehlík
Narození:	4. březena, 1987
Země:	Česká Republika
Národnost:	Česká
Kontakt:	xkrehl02@stud.feec.vutbr.cz stepan.krehlik@gmail.com

Vzdělání

2009–2011	Masarykova Univerzita v Brně, Fakulta Pedagogická, obor Učitelství matematicky pro základní školy a učitelství technické a informační výchovy, udělen titul Mgr.
2011–2015	Vysoké Učení Technické v Brně, Fakulta Elektrotechniky a Komunikačních Technologií, obor Matematika v elektroinženýrství, studium Ph.D.

Jazyk

Čeština, Angličtina

Abstract

In the thesis we discuss binary hyperstructures of linear differential operators of the second order both in general and (inspired by models of specific time processes) in a special case of the Jacobi form. We also study binary hyperstructures constructed from distributive lattices and suggest transfer of this construction to n–ary hyperstructures.

We use these hyperstructures to construct multiautomata and quasi–multiautomata. The input sets of all these automata structures are constructed so that the transfer of information for certain specific modeling time functions is facilitated. For this reason we use smooth positive functions or vectors components of which are real numbers or smooth positive functions. The above hyperstructures are state-sets of these automata structures.

Finally, we investigate various types of compositions of the above multiautomata and quasi–multiautomata. In order to this we have to generalize the classical definitions of Dörfler. While some of the concepts can be transferred to the hyperstructure context rather easily, in the case of Cartesian composition the attempt to generalize it leads to some interesting results.

Abstrakt

V disertační práci diskutujeme binární hyperstruktury obecných lineárních diferenciálních operátorů druhého rádů a speciálně operátorů Jacobiho tvaru. Tyto operátory jsou motivovány modely specifických časových procesů. Také studujeme binární hyperstruktury konstruované z distributivních svazů a navrhujeme přechod těchto konstrukcí na n-ární hyperstruktury.

Používáme tyto hyperstruktury ke konstrukci multiautomatů a kvazi–multiautomatů. Vstupní množina těchto strukturovaných automatů je konstruována tak, že přenos informací speciálních časových funkcí je nenáročný. Z tohoto důvodu používáme hladké kladné funkce nebo vektory, jejichž složky jsou reálná čísla nebo hladké kladné funkce. Právě výše zmíněné hypergrupy jsou použity jako stavové množiny těchto kvazi–multiautomatů.

Nakonec zkoumáme různé typy součinů takovýchto multi–automatů a kvazi–multiautomatů. V tomto pojetí zobecňujeme klasické definice Dörfelra. U některých typů součinů je transfer na kontext hyperstruktur přirozeny, v případě kartézské kompozice toto zobecnění vede na zajímavé výsledky.