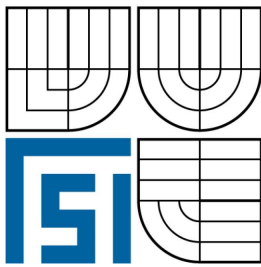


VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
ÚSTAV MATEMATIKY

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

MĚŘENÍ HAUSDORFFOVY DIMENZE REÁLNÝCH OBJEKTŮ

MEASUREMENT OF HAUSDORFF DIMENSION OF THE REAL OBJECTS

DISERTAČNÍ PRÁCE
DOCTORAL THESIS

AUTOR PRÁCE
AUTHOR

ING. JAN TOMÁŠ

VEDOUCÍ PRÁCE
SUPERVISOR

PROF. MILOSLAV DRUCKMÜLLER

BRNO 2009

ABSTRAKT

Cílem této práce je vytvoření chybějícího teoretického základu pro praktické aplikace měření fraktální dimenze reálných objektů, zejména vytvoření korektního přechodu od teoretických fraktálních množin k jejich konečným aproximacím. Dále se práce zabývá analýzou vlivů na odhad fraktální dimenze, které se v praktických aplikacích často vyskytují, a návrhem metod, jak tyto vlivy odstranit. V praktické části jsou na třech různých problémech demonstrovány výsledky dosažené v teoretické části.

Klíčová slova

Hausdorffova míra, Fraktální dimenze, Fraktální křivka, Fraktální plocha, Aproximace fraktální křivky, Aproximace fraktální plochy, Metoda Yard Stick, Metoda Box Counting, Zobecněná metoda Box Counting pro plochy

ABSTRACT

The main goal of this work is definition of the serious theoretical bases for practical application of a fractal dimension measurement of the real objects, mainly definition of a finite approximation of the real fractal objects. The theoretical part of the work also analyze various factors which impact fractal dimension estimation and methods how to minimize these factors are proposed in this work. The results of the theoretical part are used in the practical part of the work, where theoretical results are used for solution of three different practical problems.

Key words

Hausdorff Measure, Fractal Dimension, Fractal Curve, Fractal Surface, Approximation of Fractal Curve, Approximation of Fractal Surface, Yard Stick Method, Box Counting Method, Generalized Box Counting Method for Surfaces

BIBLIOGRAFICKÁ CITACE

TOMÁŠ, Jan, *Měření Hausdorffovy dimenze reálných objektů*, *Disertační práce*, Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2009. Vedoucí práce: Prof. RNDr. Miloslav Druckmüller, CSc.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem disertační práci na téma *Měření Hausdorffovy dimenze reálných objektů* vypracoval samostatně s použitím odborné literatury a pramenů, uvedených na seznamu, který tvoří přílohu této práce.

V Brně dne 23.3.2009

.....

Jan Tomáš

Poděkování

Děkuji tímto Prof. Miloslavu Druckmüllerovi z Fakulty Strojního Inženýrství za cenné připomínky a rady při řešení zvoleného tématu. Dále bych rád poděkoval Prof. Sergeji Nikolajeviči Kul'kovovi z Ruské akademie věd za jeho neocenitelnou pomoc při řešení praktických problémů z oblasti nauky o materiálu. V neposlední řadě bych také rád poděkoval své ženě a dětem za trpělivost a podporu po celou dobu mého postgraduálního studia.

Obsah

I	Teoretické základy	5
1	Základní pojmy	6
1.1	Metrické prostory	6
1.2	Teorie míry	7
1.3	Hausdorffova míra	10
1.4	Závěrečné shrnutí	13
2	Fraktály	14
2.1	Definice a některé vlastnosti fraktálů	14
2.2	Richardsonův vzorec	15
2.3	Brownův pohyb a stopa Brownova pohybu	16
2.4	Jednodimenzionální stopa Brownova pohybu	17
2.5	Zlomkové Brownovy Plochy v E_3	21
2.6	Závěrečné shrnutí	25
3	Aproximace fraktálních křivek a ploch	26
3.1	Aproximace fraktálních křivek	26
3.2	Aproximace fraktálních ploch	29
3.3	Závěrečné shrnutí	31
4	Metody měření fraktální dimenze fraktálních křivek a fraktálních ploch	32
4.1	Metody měření dimenze fraktálních křivek	32
4.1.1	Počítačová reprezentace aproximace fraktální křivky	32
4.1.2	Metoda „Yardstick“	33
4.1.3	Metoda „Box counting“	34
4.2	Metody měření dimenze fraktálních ploch	36
4.2.1	Počítačová reprezentace aproximace fraktální plochy	36
4.2.2	Metoda „Box Counting“ zobecněná pro plochy	37
4.2.3	Metoda řezů	39
4.3	Závěrečné shrnutí	41
5	Faktory ovlivňující odhad dimenze	43
5.1	Vliv aproximace fraktálu na odhad dimenze	43
5.2	Vliv měřítka na odhad dimenze	47
5.3	Vliv šumu v obraze a jeho filtrace na odhad dimenze	48
5.4	Závěrečné shrnutí	56

II	Aplikace fraktální dimenze	57
6	Analýza závislosti fraktální dimenze povrchů a koeficientu odolnosti proti tření	58
6.1	Popis vstupních dat	58
6.2	Faktory ovlivňující odhad fraktální dimenze	59
6.3	Změny fraktální dimenze v závislosti na zvětšení	62
6.4	Závislost fraktální dimenze a koeficientu odolnosti proti tření	64
6.5	Závěrečné shrnutí	66
7	Analýza závislosti mezi objemem pórů v keramice a fraktální dimenzí hranic pórů	67
7.1	Popis vstupních dat	67
7.2	Závislost mezi fraktální dimenzí hranic pórů a objemem pórů v keramice	69
7.3	Závěrečné shrnutí	70
8	Studium sluneční aktivity	71
8.1	Popis vstupních dat a konstrukce časové řady z naměřených dimenzí .	71
8.2	Analýza závislosti fraktální dimenze na čase	72
8.2.1	Hledání skrytých period	73
8.3	Porovnání nalezených period s periodami nalezenými jinými metodami	77
8.4	Sluneční skvrny, sluneční bouře a fraktální dimenze	78
8.5	Závěrečné shrnutí	80

Úvod

Tato práce se zabývá praktickými aplikacemi fraktální dimenze tak, aby byly korektní z matematického hlediska a výsledky byly postaveny na formálních a nikoli intuitivních základech. Hlavním motivem pro tento výzkum bylo to, že v inženýrské praxi je často využívána fraktální dimenze, ovšem obvykle velmi intuitivně. Odborná literatura na toto téma je většinou zaměřena na čistou matematickou teorii nebo naopak na praktické aplikace, ovšem přechod od teorie k praktickým aplikacím v podstatě chybí nebo zanedbává to, že fraktál je při praktických aplikacích obvykle reprezentován konečnou množinou bodů namísto původní fraktální množiny. V první části je zdefinován teoretický aparát, který je třeba ke korektním inženýrským aplikacím, v druhé části jsou pak tři praktické aplikace fraktální dimenze.

Úvodní kapitola teoretické části obsahuje přehled základních pojmů nezbytných k porozumění základům teorie míry a definuje Hausdorffovu míru a Hausdorffovu dimenzi množin – tato dimenze je v kapitole věnované fraktálním množinám využita pro definici fraktální množiny.

V kapitole věnované fraktálním množinám je většina prostoru věnována zlomkovým stopám Brownova pohybu a zlomkovým Brownovým stopám. Význam těchto útvarů pro tuto práci je v tom, že je známa jejich teoretická fraktální dimenze a lze je poměrně snadno sestrojít (respektive sestrojít jejich aproximaci). Z těchto důvodů jde o ideální objekty pro testy metod odhadu fraktální dimenze a pro analýzy různých vlivů na odhad fraktální dimenze.

Hlavním výsledkem teoretické části je formální definice aproximace fraktální křivky a fraktální plochy, které umožňují přechod od teoretických útvarů k reálným vstupním datům reprezentovaným konečnými množinami. Pro tyto aproximace byly poté popsány metody odhadu fraktální dimenze, které se obvykle vyskytují v praktických aplikacích. Tím se vytvořil potřebný přechod od teoretických útvarů k praktickému odhadu fraktální dimenze na základě konečné množiny, která reprezentuje fraktál v počítači.

Dalším důležitým výsledkem teoretické části je analýza faktorů vyskytujících se v praxi, které mohou výrazně ovlivnit odhady dimenze reálných objektů. V rámci práce byly tyto faktory popsány a byly navrženy metody, jak dopad těchto faktorů na odhad fraktální dimenze vyloučit nebo alespoň minimalizovat.

Praktická část obsahuje příklady tří aplikací fraktální dimenze pro různá vstupní data. Na těchto aplikacích byly demonstrovány závěry teoretické části, zejména potlačení faktorů, které mohou změnit odhad dimenze. První dvě praktické aplikace byly řešeny ve spolupráci s Ruskou akademií věd, Ústavem mechaniky a nauky o materiálu (Institute of Strength Physics and Materials Science, Siberian Division, Russian Academy of Sciences). Jde konkrétně o hledání závislosti mezi koeficientem odolnosti tření různých materiálů a fraktální dimenzí povrchů těchto materiálů opotřebovaných třením, dále pak o hledání závislosti mezi fraktální dimenzí hranic pórů

v keramice a objemem těchto pórů v keramice. Poslední aplikací, která je zde uvedena, je analýza sluneční aktivity a předpověď sluneční aktivity na základě fraktální dimenze spočtené z časové řady, která udává počet slunečních skvrn pozorovaných každý den již od roku 1820. Výsledky prvních dvou aplikací byly již publikovány, výsledek analýzy sluneční aktivity je momentálně posuzován odborníky z oboru astrofyziky a je připraven k publikování.

Introduction

This work focuses on the phenomenon of the practical application of fractal dimensions in engineering practice with the aim of reaching correct data based on proper mathematical methods and not on pure intuition. The main incentive for working up this thesis was the fact that fractal dimension is often used without heeding the correct theoretical basis. The primary literature related to these issues focuses mostly on the fractal theory, or on its practical application: nevertheless, it is only scarcely devoted to the overlapping of the two. Moreover, the problem of how to reach a finite approximation of the measured fractal set is often left unresolved. Therefore, the first part of the thesis comprises the essential theory necessary for practical application, while the second part presents three examples of how should the aforementioned problems be conducted.

The first chapter then elucidates the terms necessary for clarifying the measure theory, and it also comments on the definition of Hausdorff measure and Hausdorff dimension. This dimension is then in the chapter dedicated to fractal theory used for defining of fractal set and of fractal dimension.

The chapter dealing with fractal theory focuses mainly on one dimensional and two dimensional fractional Brownian traces. These sets are very important for the next part of the work: the reason for this being that the theoretical dimension of these sets is known, and therefore it is relatively simple to construct fractional Brownian traces. That is why these constructed sets are ideal for the analysis of factors which can influence the estimation of fractal dimension.

The main conclusion of the theoretical part is the definition of finite approximation of a fractal curve and a fractal surface. These definitions are very important for engineering applications because these approximations allow to define correct measurement methods based on finite approximation of real fractal objects. The analysis of factors which can change the estimation of a fractal dimension is also of particular scientific interest. During the course of the thesis, these factors are analyzed and several methods how to eliminate their outcomes were suggested.

The practical part comprises three instances of the application of the fractal dimension, with different data being entered for each of these. The applications are then used for the elucidation of the conclusion of the theoretical part of the thesis: mainly, on clarification of how can the factors capable of changing the estimated dimension be eliminated. The first two applications were solved in cooperation with the Russian Academy of Sciences, the Institute of Strength and Physics and Material Science. The aim of the first practical application was to find a relationship between wear resistance coefficient of different metal surfaces and fractal dimension of the surfaces which were worn out by friction.

The second application deals with the porosity of ceramic materials used for filters and implants, and with the fractal dimension of cavity boundaries. As a

result, a minimal volume of cavities in ceramic material with required boundary segmentation was found.

The last application analyzes the number of sun spots per day. This application covers the time period beginning in the 1820' and ending in the present day. The data were then subsequently used for the prediction of the sun activity for the near future. Results of the first two applications have already been published, while the last application is currently reviewed by solar physicists and will be soon ready to be printed.

Část I
Teoretické základy

Kapitola 1

Základní pojmy

V této kapitole jsou zdefinovány a popsány základní pojmy, které se používají v dalších částech této práce a jsou nezbytné pro správné porozumění hlavního textu.

1.1 Metrické prostory

Definice 1.1.1: Nechť X je libovolná množina a ϱ je zobrazení $\varrho : X \rightarrow \langle 0, \infty \rangle$ s následujícími vlastnostmi:

$$\begin{aligned}\varrho(x, y) &= 0 \Leftrightarrow x = y \\ \varrho(x, y) &= \varrho(y, x) \quad \forall x, y \in X \\ \varrho(x, z) &\leq \varrho(x, y) + \varrho(y, z) \quad \forall x, y, z \in X\end{aligned}$$

potom dvojici (X, ϱ) nazýváme *metrický prostor* a zobrazení ϱ nazýváme *metrika*.

Definice 1.1.2: Nechť M je metrický prostor s metrikou ϱ a t je zobrazení $t : M \rightarrow M$. Jestliže pro body $x, y \in M$ a jejich obrazy $t(x), t(y) \in M$ platí:

$$\varrho(t(x), t(y)) \leq k \cdot \varrho(x, y)$$

kde $0 < k < 1$, potom zobrazení t nazveme *kontraktivní zobrazení*.

Definice 1.1.3: Nechť M je metrický prostor s metrikou ϱ a $E \subseteq M$. *Průměrem množiny E* rozumíme číslo $\text{diam}E$,

$$\text{diam}E = \sup_{\forall x, y \in E} \varrho(x, y)$$

Definice 1.1.4: Nechť M je metrický prostor s metrikou ϱ a $E, F \subseteq M$. *Vzdálenost množin E a F* rozumíme číslo $\text{dist}(E, F)$,

$$\text{dist}(E, F) = \inf_{\forall x \in E, \forall y \in F} \varrho(x, y)$$

Definice 1.1.5: Necht M je metrický prostor s Euklidovskou metrikou a $E \subset M$. Bod uzávěru množiny E rozumíme takový bod $x \in M$, jehož libovolné δ -okolí ($\delta \rightarrow 0^+$) obsahuje alespoň jeden bod ležící v množině E , tj. průnik δ -okolí s množinou E je neprázdná množina:

$$E \cap \{\forall y \in M : \varrho(x, y) < \delta\} \neq \emptyset$$

Definice 1.1.6: Necht M je metrický prostor s Euklidovskou metrikou a $E \subset M$. Uzávěr množiny E (značíme \overline{E}) je sjednocení všech bodů uzávěru množiny E .

Definice 1.1.7: Necht M je metrický prostor s Euklidovskou metrikou a $E \subset M$. Hranicním bodem množiny E rozumíme takový bod $x \in M$, jehož libovolné δ -okolí ($\delta \rightarrow 0^+$) obsahuje alespoň jeden bod ležící v množině E , a alespoň jeden bod ležící mimo množinu E .

Definice 1.1.8: Necht M je metrický prostor s Euklidovskou metrikou a $E \subset M$. Hranicí množiny E (značíme ∂E) je sjednocení všech hranicních bodů množiny E .

Definice 1.1.9: Necht M je metrický prostor s Euklidovskou metrikou a $E \subset M$. Množinu E nazveme *souvislou*, pokud neexistuje rozklad množiny E na dvě části E_1 a E_2 pro něž by platilo:

$$(E_1 \cap \overline{E_2}) \cup (E_2 \cap \overline{E_1}) = \emptyset$$

1.2 Teorie míry

Definice 1.2.1: Rostoucí posloupností množin $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ nazveme takovou posloupnost, pro kterou platí:

$$E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \dots$$

Klesající posloupností množin $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ nazveme takovou posloupnost, pro kterou platí:

$$E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \dots$$

Definice 1.2.2: Dolní limitou posloupnosti množin $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ (označme ji $\varliminf_{i \rightarrow \infty} E_i$) rozumíme následující množinu bodů:

$$\varliminf_{i \rightarrow \infty} E_i = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{i=k}^{\infty} E_i$$

Horní limitou posloupnosti množin $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ (označme ji $\varlimsup_{i \rightarrow \infty} E_i$) rozumíme následující množinu bodů:

$$\varlimsup_{i \rightarrow \infty} E_i = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=k}^{\infty} E_i$$

Jestliže $\varinjlim E_i = \overline{\varinjlim E_i}$ (tj. obě množiny jsou totožné), potom tuto množinu nazveme *limitou* posloupnosti množin $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ a označíme ji $\lim_{i \rightarrow \infty} E_i$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} E_i = \varinjlim_{i \rightarrow \infty} E_i = \overline{\varinjlim_{i \rightarrow \infty} E_i}$$

Věta 1.2.1: Jestliže posloupnost množin $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ je rostoucí, nebo klesající, potom vždy existuje limita této posloupnosti, tj. platí:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} E_i = \varinjlim_{i \rightarrow \infty} E_i = \overline{\varinjlim_{i \rightarrow \infty} E_i}$$

Dále, pro rostoucí posloupnost platí:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} E_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$$

a pro klesající posloupnost platí:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} E_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i$$

Důkaz 1.2.1: Nejprve ukážeme platnost věty pro rostoucí posloupnost $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$, tj. pro posloupnost, která splňuje: $E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \dots$. Nejprve určíme dolní limitu této posloupnosti

$$\varinjlim_{i \rightarrow \infty} E_i = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{i=k}^{\infty} E_i = \bigcup_{k=1}^{\infty} (E_k \cap E_{k+1} \cap \dots)$$

protože $E_k \subset E_{k+1} \subset \dots$ je zřejmé, že $E_k \cap E_{k+1} \cap \dots = E_k$

$$\varinjlim_{i \rightarrow \infty} E_i = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{i=k}^{\infty} E_i = \bigcup_{k=1}^{\infty} (E_k \cap E_{k+1} \cap \dots) = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = E_1 \cup E_2 \cup \dots = E$$

Nyní určíme horní limitu této posloupnosti:

$$\overline{\varinjlim_{i \rightarrow \infty} E_i} = \overline{\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=k}^{\infty} E_i} = \overline{\bigcap_{k=1}^{\infty} (E_k \cup E_{k+1} \cup \dots)} = \bigcap_{k=1}^{\infty} E = E$$

Tedy:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} E_i = \varinjlim_{i \rightarrow \infty} E_i = \overline{\varinjlim_{i \rightarrow \infty} E_i} = E$$

kde $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$. Tím je věta dokázána pro rostoucí posloupnost. Nyní ukážeme, že platí i pro klesající posloupnost, tj. pro posloupnost, pro kterou platí: $E_1 \supset E_2 \supset \dots$. Určíme nejprve dolní limitu této posloupnosti:

$$\varinjlim_{i \rightarrow \infty} E_i = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{i=k}^{\infty} E_i = \bigcup_{k=1}^{\infty} (E_k \cap E_{k+1} \cap \dots)$$

Protože $E_k \supset E_{k+1} \supset \dots$, je zřejmé, že $(E_k \cap E_{k+1} \cap \dots) = E$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} E_i = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{i=k}^{\infty} E_i = \bigcup_{k=1}^{\infty} (E_k \cap E_{k+1} \cap \dots) = \bigcup_{k=1}^{\infty} E = E$$

Nyní určíme horní limitu:

$$\overline{\lim}_{i \rightarrow \infty} E_i = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=k}^{\infty} E_i = \bigcap_{k=1}^{\infty} (E_k \cup E_{k+1} \cup \dots) = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k = E$$

Tedy:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} E_i = \lim_{i \rightarrow \infty} E_i = \overline{\lim}_{i \rightarrow \infty} E_i = E$$

kde $E = \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i$. Tím je věta dokázána i pro klesající posloupnost. \square

Definice 1.2.3: Nechť X je libovolná množina. Neprázdný systém \mathcal{S} jejích podmnožin se nazývá σ -algebra, jestliže je uzavřený vzhledem k operaci doplňku¹ a spočetného sjednocení. Tj. platí:

$$\begin{aligned} E \in \mathcal{S} &\Rightarrow X/E \in \mathcal{S} \\ \{E_i\}_{i=1}^{\infty} \in \mathcal{S} &\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{S} \end{aligned}$$

Věta 1.2.2: Nechť X je libovolná množina a \mathcal{S} je σ -algebra na této množině. Potom platí, že: $X \in \mathcal{S}$ a $\emptyset \in \mathcal{S}$.

Důkaz 1.2.2: σ -algebra \mathcal{S} je neprázdný systém podmnožin, tudíž musí existovat alespoň jedna množina E , $E \subseteq X$ taková, že $E \in \mathcal{S}$. Protože \mathcal{S} je uzavřený k operaci doplňku, musí do \mathcal{S} patřit i její doplněk $X/E \in \mathcal{S}$. Protože \mathcal{S} je uzavřený vzhledem k operaci sjednocení, musí do \mathcal{S} patřit i $E \cup X/E = X$ a tedy i doplněk tohoto sjednocení, což je prázdná množina. \square

Definice 1.2.4: Nechť \mathcal{S} je σ -algebra a μ je zobrazení $\mu : \mathcal{S} \rightarrow \langle 0, \infty \rangle$, které má následující vlastnosti:

$$\begin{aligned} \mu(\emptyset) &= 0 \\ \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) &= \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) \end{aligned}$$

kde $\{E_i\}_{i=1}^{\infty} \in \mathcal{S}$ je posloupnost disjunktních množin. Zobrazení μ s těmito vlastnostmi nazveme *mírou na σ -algebře \mathcal{S}* .

¹Pro doplněk množiny E na množině X je v této práci používán symbol X/E .

Definice 1.2.5: Nechť X je libovolná množina, $P(X)$ systém všech podmnožin X a ν je zobrazení $\nu : P(X) \rightarrow \langle 0, \infty \rangle$, které má následující vlastnosti:

$$\begin{aligned}\nu(\emptyset) &= 0 \\ \nu(A) &\leq \nu(A'), \quad A \subset A' \\ \nu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \nu(A_i)\end{aligned}$$

pro libovolnou posloupnost $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ podmnožin X . Potom zobrazení ν nazýváme *vnější mírou na množině X* .

Definice 1.2.6: ν -měřitelná množina $E \subseteq X$ je taková množina, že pro libovolnou množinu $A \subset X$ platí následující vztah:

$$\nu(A) = \nu(A \cap E) + \nu(A/E)$$

Věta 1.2.3: Nechť ν je vnější míra. Systém \mathcal{M} ν -měřitelných množin je σ -algebra a zúžení ν na \mathcal{M} je míra.

Důkaz 1.2.3: Zřejmě $\emptyset \in \mathcal{M}$, tedy \mathcal{M} je neprázdná množina. Z definice 1.2.6 plyne, že $A \in \mathcal{M}$ právě tehdy, když $X/A \in \mathcal{M}$ – tedy systém \mathcal{M} je uzavřený vzhledem operaci doplňku. Dále je třeba dokázat, že \mathcal{M} je systém uzavřený i k operaci spočetného sjednocení. Myšlenka důkazu je následující: zvolíme množiny E_1, E_2, \dots a na tyto množiny a množinu A (o které předpokládáme, že je ν -měřitelná) aplikujeme vztah z definice 1.2.6. Podrobný důkaz lze nalézt např. v [3, strana 3-4]. \square

Definice 1.2.7: Nechť M je metrický prostor a ν vnější míra na M . Pokud pro $E, F \subseteq M$, $\text{dist}(E, F) > 0$ platí:

$$\nu(E \cup F) = \nu(E) + \nu(F)$$

potom míru ν nazýváme *vnější metrická míra*.

1.3 Hausdorffova míra

Definice 1.3.1: Nechť X je metrický prostor a $E \subset X$. Konečný nebo spočetný systém podmnožin $\{U_i\} \in X$, $\text{diam}(U_i) \leq \delta$, $0 < \delta < 1$, pro $\forall i$, se nazývá δ -pokrytí množiny E , pokud platí: $E \subseteq \bigcup_i U_i$.

Věta 1.3.1: Nechť X je metrický prostor, $E \subset X$, $s > 0$ a $\{U_i\} \in X$ je δ -pokrytí množiny E . Potom zobrazení $H_\delta^s(E) : P(X) \rightarrow \langle 0, \infty \rangle$

$$H_\delta^s(E) = \inf_{\{U_i\}} \sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam}(U_i))^s$$

je vnější míra na množině X (infimum ze všech možných δ -pokrytí $\{U_i\}$ množiny E , tj. v sumě se počítají průměry infimálního pokrytí).

Důkaz 1.3.1: Je třeba ukázat, že zobrazení $H_\delta^s(E)$ splňuje definici vnější míry 1.2.5. Důkaz prvních dvou vlastností vnější míry je zřejmý. Zbývá dokázat, že je splněna i třetí vlastnost z definice 1.2.5. Uvažujme libovolnou posloupnost $\{A_j\}_{j=1}^\infty$ podmnožin z X . Pokud je $H_\delta^s(E)$ vnější míra, potom musí platit:

$$H_\delta^s\left(\bigcup_{j=1}^\infty A_j\right) \leq \sum_{j=1}^\infty H_\delta^s(A_j)$$

Nechť U_{ij} je δ -pokrytí množiny A_j . Potom platí

$$\begin{aligned} H_\delta^s\left(\bigcup_{j=1}^\infty A_j\right) &= \inf_{\{U_i\}} \sum_{i=1}^\infty \left(\text{diam}\left(\bigcup_{j=1}^\infty U_{ij}\right)\right)^s \leq \\ &\leq \inf_{\{U_i\}} \sum_{i=1}^\infty \left(\sum_{j=1}^\infty \text{diam}(U_{ij})\right)^s \leq \inf_{\{U_i\}} \sum_{i=1}^\infty \sum_{j=1}^\infty (\text{diam}(U_{ij}))^s = \\ &= \sum_{j=1}^\infty \inf_{\{U_i\}} \sum_{i=1}^\infty (\text{diam}(U_{ij}))^s = \sum_{j=1}^\infty H_\delta^s(A_j) \end{aligned}$$

Tedy i třetí vlastnost z definice vnější míry je splněna a zobrazení $H_\delta^s(E)$ je skutečně vnější míra na množině X . \square

Definice 1.3.2: Nechť X je metrický prostor a $E \subset X$. Dále, zdefinujme následující zobrazení: $H^s(E) : P(X) \rightarrow \langle 0, \infty \rangle$

$$H^s(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} H_\delta^s(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \inf_{\{U_i\}} \sum_{i=1}^\infty (\text{diam}(U_i))^s$$

Kde $\{U_i\}_{i=1}^\infty$ je δ -pokrytí množiny E . Množina E se nazývá *H^s -měřitelná*, pokud platí: $0 < H^s(E) = K < \infty$ a zobrazení $H^s(E)$ se nazývá *Hausdorffova s -dimenzionální míra*.

Věta 1.3.2: Nechť X je metrický prostor a $E \subset X$. Dále, nechť $s > 0$ je libovolné reálné číslo a $\{U_i\} \in X$ je δ -pokrytí množiny E . Zobrazení $H^s(E) : P(X) \rightarrow \langle 0, \infty \rangle$,

$$H^s(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} H_\delta^s(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \inf_{\{U_i\}} \sum_{i=1}^\infty (\text{diam}(U_i))^s$$

je vnější metrická míra na množině X . Její zúžení na σ -algebru všech H^s měřitelných množin je míra (*Hausdorffova s -dimenzionální míra*).

Důkaz 1.3.2: Z věty 1.3.1 a jejího důkazu plyne, že $H^s(E)$ je vnější míra na množině X . Dále je třeba dokázat, že zobrazení $H^s(E)$ vyhovuje definici vnější metrické míry 1.2.7. Uvažujme dvě libovolné množiny $E, F \subseteq X$ takové, že platí $\text{dist}(E, F) > 0$. Potom pro libovolné $\delta < \text{dist}(E, F)$ nebude mít δ -pokrytí množiny E průnik s F a obráceně - to znamená, že $H_\delta^s(E \cup F) = H_\delta^s(E) + H_\delta^s(F)$. Tato vlastnost zůstane zachována i pro $\delta \rightarrow 0^+$. Důkaz druhé části věty plyne z věty 1.2.3 o zúžení vnější míry na systém měřitelných množin. \square

Lemma 1.3.1: Pro každá dvě nezáporná, reálná čísla s, t platí:

Pro $s < t$:

$$H_\delta^s(E) \geq \delta^{s-t} H_\delta^t(E)$$

a pro $s > t$:

$$H_\delta^s(E) \leq \delta^{s-t} H_\delta^t(E)$$

Důkaz 1.3.3: Nejprve dokážeme platnost první části lemmatu (tj. $s < t$). Funkce $F(\text{diam}(U_i)) = \text{diam}(U_i)^{s-t}$ musí být klesající pro libovolnou kombinaci s a t , která splňuje podmínku $s < t$, protože $s - t < 0$. Tato funkce nabývá své minimum pro maximální hodnotu $\text{diam}(U_i)$ – tj. pro $\text{diam}(U_i) = \delta$. Z této vlastnosti a z definice $H_\delta^s(E)$ plyne:

$$\begin{aligned} H_\delta^s(E) &= \inf_{\{U_i\}} \sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam}(U_i))^s = \inf_{\{U_i\}} \sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam}(U_i))^t (\text{diam}(U_i))^{s-t} \geq \\ &\geq \inf_{\{U_i\}} \sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam}(U_i))^t \delta^{s-t} = \delta^{s-t} H_\delta^t(E) \end{aligned}$$

Tím je první část lemmatu dokázána. Druhou část dokážeme obdobně. Funkce $F(\text{diam}(U_i)) = \text{diam}(U_i)^{s-t}$ musí být rostoucí pro libovolnou kombinaci s a t , která splňuje podmínku $s > t$, protože $s - t > 0$. Tato funkce nabývá své maximum pro maximální hodnotu $\text{diam}(U_i)$ – tj. pro $\text{diam}(U_i) = \delta$. Z této vlastnosti a z definice $H_\delta^s(E)$ plyne:

$$\begin{aligned} H_\delta^s(E) &= \inf_{\{U_i\}} \sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam}(U_i))^s = \inf_{\{U_i\}} \sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam}(U_i))^t (\text{diam}(U_i))^{s-t} \leq \\ &\leq \inf_{\{U_i\}} \sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam}(U_i))^t \delta^{s-t} = \delta^{s-t} H_\delta^t(E) \end{aligned}$$

Tím je dokázána i druhá část tohoto lemmatu. \square

Věta 1.3.3: Nechť množina $E \subset M$ je H^s -měřitelná a nechť M je metrický prostor. Existuje právě jedno reálné číslo $t \geq 0$, takové že, Hausdorffova míra je nenulová a konečná $0 < H^t(E) = K < \infty$. Dále, Hausdorffova míra $H^s(E) = 0$ pro libovolné reálné číslo $s, s > t$ a $H^r(E) = \infty$ pro libovolné reálné číslo $r, r < t$. Jinými slovy: Existuje jediné číslo t , pro které je Hausdorffova míra množiny E konečná a nenulová.

Důkaz 1.3.4: Množina E je H^s -měřitelná - podle definice pro nějaké konkrétní číslo t musí být $0 < H^t(E) = K < \infty$. Nyní uvažujme libovolná čísla s a r , taková, že platí: $s > t$ a $r < t$.

Z lemmatu 1.3.1 plyne:

$$H_\delta^s(E) \leq \delta^{s-t} H_\delta^t(E), \quad s > t$$

a po provedení limitního přechodu:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} H_\delta^s(E) \leq \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \delta^{s-t} H_\delta^t(E)$$

Podle definice δ -pokrytí platí $0 \leq \delta < 1$. Z toho, a z toho, že $s - t > 0$ plyne, že $\delta^{s-t} \rightarrow 0$ pro $\delta \rightarrow 0^+$. Dále $H^t(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} H_\delta^t(E) = K$ a tedy i limita

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \delta^{s-t} H_\delta^t(E) = 0$$

Z toho plyne, že i levá část nerovnosti musí být nulová: $H^s(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} H_\delta^s(E) = 0$ protože vnější míra $H_\delta^s(E)$ nemůže být záporná. Tím je dokázáno, že pro libovolné kladné číslo $s > t$ je Hausdorffova míra množiny E nulová.

Pro druhou část důkazu využijeme druhou část lemmatu 1.3.1. Podle tohoto lemmatu platí:

$$H_\delta^r(E) \geq \delta^{r-t} H_\delta^t(E), \quad r < t$$

a po provedení limitního přechodu:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} H_\delta^r(E) \geq \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \delta^{r-t} H_\delta^t(E)$$

Podle definice δ -pokrytí je $0 \leq \delta < 1$. Z toho, a z toho že $r - t < 0$, plyne $\delta^{r-t} \rightarrow \infty$ pro $\delta \rightarrow 0^+$. $H^t(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} H_\delta^t(E) = K$ a tedy i limita

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \delta^{r-t} H_\delta^t(E) = \infty$$

Z toho již plyne, že i levá strana musí být rovna nekonečnu $H^r(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} H_\delta^r(E) = \infty$. To, že číslo t je jediné, plyne z předchozí konstrukce. \square

1.4 Závěrečné shrnutí

V této kapitole byly zdefinovány základní pojmy z teorie míry. Většina vět a důkazů v této sekci je dobře známá a dostupná v odborné literatuře. Za zmínku stojí věta 1.3.3, která říká, že existuje jediné číslo s , takové, že Hausdorffova míra $H^s(E)$ množiny E je nenulová a zároveň konečná. Tato věta je hojně citovaná v literatuře, ale její důkaz se nepodařilo v dostupné literatuře nalézt a byla dokázána v rámci této práce na základě návodu z [3], kde byla poskytnuta bez důkazu polovina lemmatu 1.3.1. Přehled základních pojmů je zde uveden pro vyjasnění, co se rozumí pojmy dimenze, míra, atp. v této práci a pro objasnění základních vlastností Hausdorffovy míry a dimenze.

Kapitola 2

Fraktály

Tato kapitola podává definici pojmů fraktál a fraktální dimenze a popisuje některé vlastnosti fraktální dimenze. Dále se kapitola věnuje Richardsonovu vzorci – z tohoto vzorce je odvozený algoritmus odhadu fraktální dimenze křivky (Yard Stick Method), který je často používán v inženýrských aplikacích.

Hlavní část této kapitoly pojednává o zlomkové stopě Brownova pohybu a zlomkové Brownově ploše. Tyto útvary jsou důležité pro praktickou část této práce, neboť je lze vygenerovat, a protože jejich přesná fraktální dimenze je známá, mohou být využity k testům algoritmů, které měří fraktální dimenzi reálných objektů. Dále jsou tyto objekty využity k analýze vlivu numerických metod zpracování obrazu na výslednou fraktální dimenzi spočtenou ze zpracovaných obrazů.

2.1 Definice a některé vlastnosti fraktálů

Definice 2.1.1: Nechť $E \subset M$, kde M je metrický prostor, je H^s -měřitelná. Potom číslo s nazýváme *Hausdorffovou dimenzí* nebo též *fraktální dimenzí* množiny E . (Tato dimenze, narozdíl od dimenze topologické, nemusí být celočíselná.)

Definice 2.1.2: *Fraktálem* nazveme takovou množinu, která je H^s -měřitelná a jejíž Hausdorffova dimenze je neceločíselná.

Věta 2.1.1: Nechť $E \subset \mathbb{R}^n$ je H^s -měřitelná. Potom $0 \leq s \leq n$. (Tj. Hausdorffova dimenze množiny E může být nejvýše rovna dimenzi prostoru \mathbb{R}^n .)

Důkaz 2.1.1: Uvažujme jednotkovou krychli C , $C \in \mathbb{R}^n$. Rozdělíme – li každou hranu krychle C na k stejně dlouhých dílů, obdržíme k^n krychlí, pro jejichž průměr δ platí: $\delta \leq \frac{\sqrt[n]{n}}{k}$. Podle definice Hausdorffovy míry platí:

$$H_\delta^n(C) = \inf \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k^n \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt[n]{n}}{k} \right)^n = \lim_{k \rightarrow \infty} k^n \left(\frac{\sqrt[n]{n}}{k} \right)^n = \sqrt[n]{n^n}$$

Tedy $H_\delta^n(C) < \infty$. Z toho a z věty 1.3.3 plyne, že pro libovolné $s > n$ je $H_\delta^s(C) = 0$. Protože prostor \mathbb{R}^n lze vyjádřit sjednocením jednotkových krychlí, bude také $H_\delta^s(\mathbb{R}^n) = 0$ a také pro libovolnou podmnožinu tohoto prostoru $E \in \mathbb{R}^n$ je $H_\delta^s(E) = 0$. Z toho plyne, že $0 \leq \dim E \leq n$ pro libovolnou množinu E , $E \in \mathbb{R}^n$. \square

2.2 Richardsonův vzorec

Richardsonův vzorec empiricky odvodil Lewis Fry Richardson v roce 1961, když řešil problém délky různých pobřeží (Richardsonova experimentální data lze vidět např. v [7, strana 33]).

Tento problém není tak triviální jak se zdá. Přírodní pobřeží je členité se spoustou zálivů a výběžků. Zvolme pro měření například mapu pobřeží v měřítku 1:500 000. Zvolíme délku měřidla například jeden centimetr na mapě (tj. 5 kilometrů v terénu). S tímto měřidlem obdržíme jeden výsledek. Dejme tomu, že budeme měření chtít zpřesnit a pořídíme si mapu stejného pobřeží, ovšem v měřítku 1:50 000. Na této mapě se objeví malé zátoky a výběžky, které na předchozí mapě nebyly. S měřidlem délky jeden centimetr (tj. 500 metrů v terénu) naměříme podstatně větší délku pobřeží než s předchozí mapou. Na mapě s měřítkem 1:5 000 se objeví další drobné zálivy a mysy pobřeží. S měřidlem délky jeden centimetr (tj. 50 metrů) naměříme opět větší vzdálenost než v předchozím. Můžeme říci, že pro přírodní, člověkem neupravené pobřeží jeho délka poroste se skrácujícím se měřidlem k nekonečnu. Jinými slovy, mohu si naměřit tak dlouhé pobřeží, jak potřebuji, stačí vybrat vhodnou délku měřidla, nebo z jiného úhlu pohledu – všechna pobřeží na světě jsou stejně dlouhá a to nekonečně dlouhá.

Je zřejmé, že délku pobřeží nemůžeme použít pro porovnávání dvou různých pobřeží. Lewis Fry Richardson při své práci z naměřených dat odvodil následující vzorec:

$$L(\varepsilon) = K\varepsilon^{1-D}$$

kde $L(\varepsilon)$ je délka pobřeží určená měřidlem délky ε , D a K jsou nenulové, konečné konstanty, nezávislé na délce použitého měřidla. Tedy, tyto dvě konstanty by mohly sloužit za parametry, které odlišují různá pobřeží.

Poznámka 2.2.1: Je třeba poznamenat, že pro reálná data neplatí rovnost, ale lze jimi proložit výše uvedenou funkci, kde K a D obdržíme metodami lineární regrese.

Hlavní význam Richardsonova vzorce a výše popsané úvahy je její obecná platnost. Nemusíme se omezovat jen na pobřeží, ale můžeme takto postupovat u všech přírodních křivek, které vykazují vysokou míru členitosti (například profily lomů různých materiálů, kde fraktální dimenze slouží k rozlišení lomových mechanismů, které proběhly v materiálu).

Lze dokázat, že konstanta K v Richardsonově vzorci je Hausdorffova dimenze měřené křivky a konstanta D z tohoto vzorce je její fraktální dimenze. Richardsonův vzorec nám tedy přímo dává návod jak spočítat fraktální dimenzi členité křivky – na jeho základě je možné odvodit jednu metodu měření fraktální dimenze (viz podkapitola 4.1.2).

Věta 2.2.1: Jestliže pro křivku platí Richardsonův vzorec, tj. naměřená délka $L(\varepsilon)$ křivky roste se zmenšující se délkou měřidla ε podle vzorce:

$$L(\varepsilon) = K\varepsilon^{1-D}$$

potom D je fraktální dimenze této křivky a K její Hausdorffova dimenze.

Důkaz 2.2.1: Označme $P(\varepsilon)$ počet „položení“ měřidla ε na měřenou křivku. Potom zřejmě platí:

$$L(\varepsilon) = P(\varepsilon)\varepsilon$$

Levou stranu rovnice nahradíme Richardsonovým vzorcem a obdržíme:

$$K\varepsilon^{1-D} = P(\varepsilon)\varepsilon$$

vyjádříme $P(\varepsilon)$:

$$P(\varepsilon) = \frac{K\varepsilon^{1-D}}{\varepsilon} = K\varepsilon^{-D}$$

Předpokládejme nyní, že D je Hausdorffova dimenze měřené křivky. Jestliže je tomu tak, Hausdorffova míra této křivky musí vyjít nenulová a konečná.

$$H^D(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \inf_{\{U_i\}} \sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam}(U_i))^D, \quad \text{diam}(U_i) \leq \delta$$

Zvolme pokrytí čtverci o průměru $\delta = \varepsilon$.

$$H^D(E) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \inf_{\{U_i\}} \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^D$$

Jestliže ze všech možných pokrytí vybereme infimální pokrytí, počet čtverců tohoto pokrytí bude roven $P(\varepsilon)$. Dostáváme tedy:

$$H^D(E) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} P(\varepsilon) \cdot \varepsilon^D$$

Nyní dosadíme za $P(\varepsilon)$.

$$H^D(E) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} K\varepsilon^{-D}\varepsilon^D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} K = K$$

Vidíme, že Hausdorffova míra je rovna K . Protože K je nenulová kladná konstanta (předpoklad odvození Richardsonova vzorce) je D Hausdorffova dimenze měřené křivky a K je skutečně její Hausdorffova míra. \square

2.3 Brownův pohyb a stopa Brownova pohybu

Regulární Brownův pohyb je pojmenován po skotském botanikovi Robertu Brownu. Robert Brown pozoroval mikroskopem pilová zrnka ve vodě. Všiml si, že se chaoticky pohybují. Stejný chaotický pohyb pozoroval i u dalších malých částecích různého původu a správně usoudil, že tento pohyb je fyzikálního původu.

Diskrétní aproximaci Brownova pohybu lze sestavit, pokud je zaznamenávána poloha částice v různých časech - tj. pro čas t_i je zaznamenána poloha částice $[x_i, y_i]$ a všechny zaznamenané polohy jsou poté propojeny čarou.

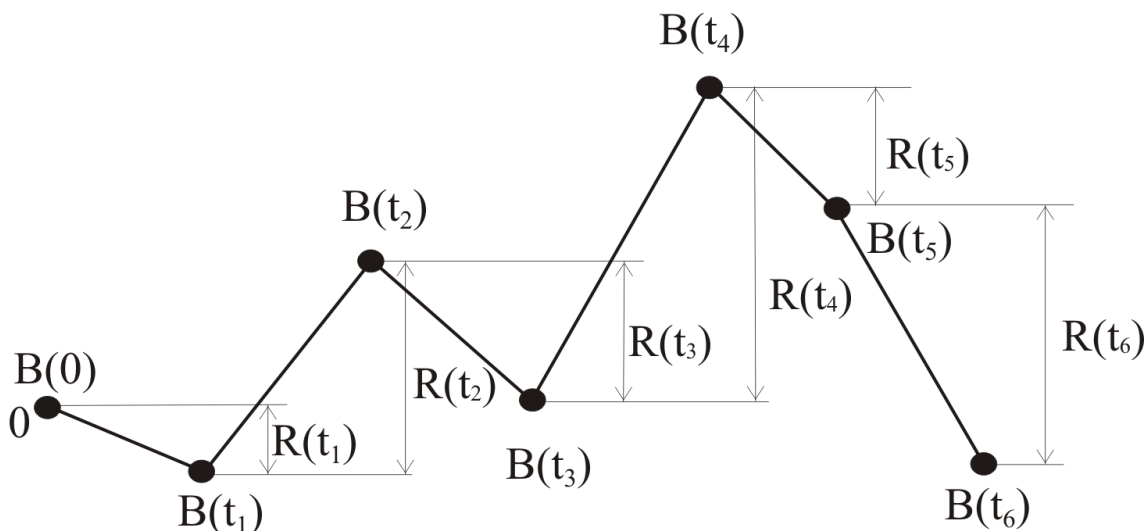
Pokud časový krok záznamu pozice částice je konstantní ($\delta t = t_{i+1} - t_i = \text{konst}$, $i = 1 \dots n$), potom rozdíl poloh souřadnic jednotlivých poloh je náhodná veličina s Gaussovým rozdělením pravděpodobnosti: $\Delta x^i = x_i - x_{i+1} \sim N(0, \sigma^2)$, $\Delta y^i = y_i - y_{i+1} \sim N(0, \sigma^2)$. Dále, také vzdálenost mezi dvěma po sobě jdoucími body má také Gaussovo rozdělení: $r_i = \sqrt{(\Delta x^i)^2 + (\Delta y^i)^2} \sim N(0, \sigma^2)$ (viz. [10, str. 54 - 55]).

Lze dokázat, že tato trajektorie má fraktální dimenzi 2 s pravděpodobností 1 v libovolném prostoru \mathbb{R}^n , $n \geq 2$ (viz. [3, str. 147 - 148]).

2.4 Jednodimenzionální stopa Brownova pohybu

Pro účely této práce bude mnohem důležitější takzvaná stopa regulárního Brownova pohybu ve směru jedné souřadnice (time trace of regular Brownian motion) $B(t)$ a stopa zlomkového Brownova pohybu (time trace of fractional Brownian motion) $B_H(t)$, protože tyto konstrukce budou využity v praktické části ke studiu vlastností metod měření fraktální dimenze ploch.

Stopa regulárního Brownova pohybu $B(t)$ je záznam jedné souřadnice Regulárního Brownova pohybu v čase. Diskrétní aproximaci stopy Brownova pohybu v časech $t_i = i\Delta t$ lze sestavit jako součet diskrétních změn $R(t_j)$ polohy ve směru vybrané souřadnice. Tyto přírůstky $R(t_j)$ mají Gaussovo rozdělení $N(0, \sigma^2)$. Poznamenejme, že σ je konstantní, pokud Δt je konstantní. Diskrétní aproximace stopy Brownova pohybu v čase $t_i = i\Delta t$ jsou hodnoty $B(t_i)$, $B(t_i) = \sum_{j=1}^i R(t_j)$, $R(t_0) = 0$ (viz obr. 2.1).



Obrázek 2.1: Diskrétní aproximace stopy Brownova pohybu.

Diskrétní aproximace se jeví při vhodném rozlišení jako fraktální množina, pokud se však rozlišení přiblíží k velikosti Δt , křivka se přestane jevit jako fraktální, ale bude vypadat jako lomená čára. Spojitou stopu Brownova pohybu lze popsat následující definicí.

Definice 2.4.1: Nechť spojitá, ohraničená funkce $B(t)$ definovaná na intervalu $(0, \infty)$ splňuje následující podmínky:

- $B(0) = 0$
- pro libovolné dvě hodnoty $t_1, t_2 \in (0, \infty)$, $\Delta t = t_2 - t_1$:

$$B(t_2) - B(t_1) \sim N(0, \sigma^2)$$

- a dále $\sigma \propto (\Delta t)^{1/2}$ (kde symbol \propto znamená, že σ je přímo úměrná $(\Delta t)^{1/2}$).

Potom funkci $B(t)$ nazveme *regulární stopa Brownova pohybu*.

Regulární stopa Brownova pohybu je „záznam“ všech pozic Brownova regulárního pohybu ve směru jedné souřadné osy. Hodnota $B(t)$ je nezávislá na předchozí hodnotě, je závislá pouze na aktuálním čase t .

Předchozí definici regulární stopy Brownova pohybu lze zobecnit pro případy, kdy rozpyl neodpovídá $(\Delta t)^{1/2}$, ale obecně koresponduje s $(\Delta t)^H$, kde H je libovolné číslo od nuly do jedné.

Definice 2.4.2: Funkce $B_H(t)$ na definičním intervalu $\langle 0, T \rangle$ s následujícími vlastnostmi pro libovolnou dvojici $t_1, t_2 \in (0, T)$, $\Delta t = t_2 - t_1$:

- $B_H(t)$ je spojitá v celém definičním oboru
- Pro libovolné 2 body z definičního oboru platí, že $B_H(t_1) - B_H(t_2)$ má normální rozdělení $N(0, \sigma^2)$
- pro libovolné 2 body z definičního oboru, které jsou od sebe vzdáleny o $\Delta t = |t_1 - t_2|$, je $\sigma \propto (\Delta t)^H$, kde H je reálné číslo $H \in (0, 1)$

nazveme *stopa zlomkového Brownova pohybu* a číslo H nazveme *Hurstův koeficient*.

Jinými slovy, stopa zlomkového Brownova pohybu je záznam polohy ve směru jedné souřadnice, pro takový pohyb, kde rozptyl rozdílu poloh v čase je úměrný $(\Delta t)^H$. Regulární Brownův pohyb je speciálním případem zlomkového Brownova pohybu – pokud $H = 1/2$, získáme regulární (viz [7, str. 252 - 255] nebo [10, str. 54 - 65]).

Věta 2.4.1: Stopa zlomkového Brownova pohybu je fraktální množina a její fraktální dimenze D je závislá na Hurstovu koeficientu podle následujícího vztahu:

$$D = 2 - H$$

Důkaz 2.4.1: Uvažujme stopu zlomkového Brownova pohybu $B_H(t)$ definovanou na intervalu $\langle 0, T \rangle$. Na tomto intervalu sestrojíme čtvercové δ -pokrytí. Zvolíme $\delta = \frac{T}{n}$, (n zvolíme dostatečně velké, aby byla splněna definice δ -pokrytí 1.3.1, tj. $\frac{T}{n} < 1$, jinými slovy – definiční obor rozdělíme na n dílů. Na libovolném intervalu $\langle t_1, t_1 + \frac{T}{n} \rangle \subset \langle 0, T \rangle$ platí, že $B_H(t_1 + \frac{T}{n}) - B_H(t_1) \sim N(0, \sigma^2)$, kde $\sigma \propto (\frac{T}{n})^H$, $0 < H < 1$ a zřejmě tedy obdélník o stranách $\frac{T}{n}$ a $(\frac{T}{n})^H$ pokryje část stopy zlomkového Brownova pohybu. Pokud tento nový obdélník pokryjeme čtverci δ -pokrytí $\delta = \frac{T}{n}$, jejich minimální počet potřebný k pokrytí stopy zlomkového Brownova pohybu na daném subintervalu bude roven:

$$\frac{(\frac{T}{n})^H}{\frac{T}{n}} = \frac{T^{H-1}}{n^{H-1}}$$

Celkový počet čtverců potřebných k infimálnímu pokrytí stopy zlomkového Brownova pohybu při daném $\delta = \frac{T}{n}$ je:

$$n \frac{T^{H-1}}{n^{H-1}} = \frac{T^{H-1}}{n^{H-2}}$$

Z definice Hausdorffovy míry plyne:

$$H^s(B_H(t)) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} H_\delta^s(B_H(t)) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \inf_{\{U_i\}} \sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam}(U_i))^s = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{\{U_i\}} \sum_{i=1}^n \left(\frac{T}{n}\right)^s$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T^{H-1}}{n^{H-2}} \left(\frac{T}{n}\right)^s = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T^{H-1+s}}{n^{H-2+s}} = T^{H-1+s} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{H-2+s}}$$

Aby limita byla nenulová a zároveň konečná, je zřejmé, že musí být $H - 2 + s = 0$ a $s = 2 - H$. Podle definice 2.1.1 číslo s je Hausdorffova nebo také fraktální dimenze $B_H(t)$. \square

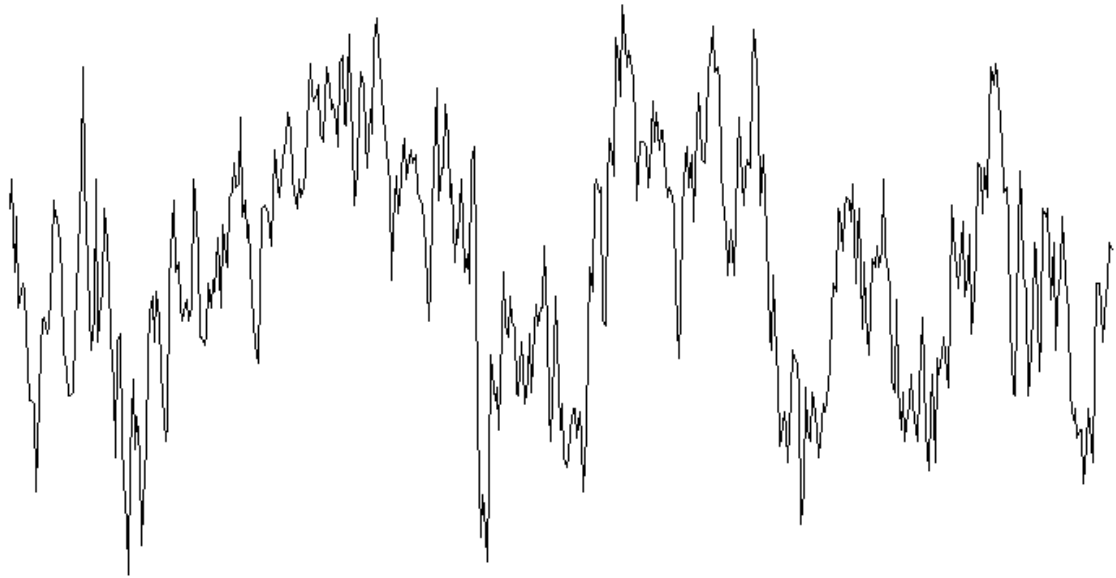
Amplitudové spektrum Fourierovy transformace stopy zlomkového Brownova pohybu $\mathcal{F}(B_H(t))$, má následující vlastnost:

$$\text{Amp}(\mathcal{F}(B_H(t))) \propto \frac{1}{f^\phi}$$

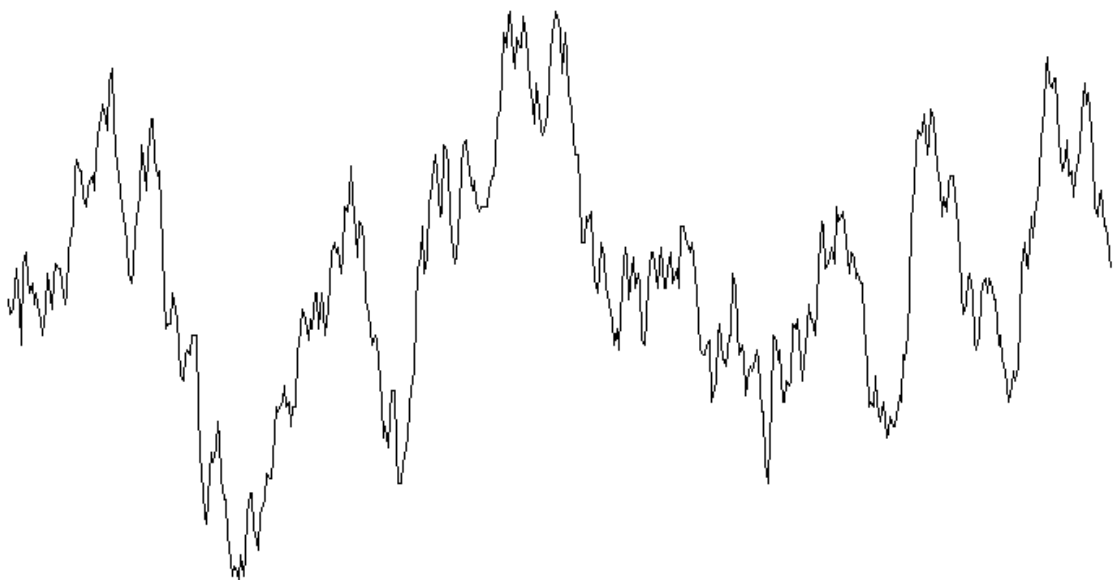
kde $\text{Amp}(\mathcal{F}(B_H(t)))$ označuje amplitudové spektrum, f je frekvence a $\phi = 1 + 2H$.

Této vlastnosti lze využít k vygenerování stopy s daným H - stačí vygenerovat takové spektrum, že pro něj platí výše popsaná závislost mezi frekvencí a amplitudovým spektrem a provést inverzní Fourierovu transformaci. Výsledná funkce bude stopa zlomkového Brownova pohybu s parametrem H , $H = \frac{\phi-1}{2}$. Při generování spektra volíme konstantu ϕ libovolně z intervalu $(1, 3)$ aby koeficient H ležel v intervalu $(0, 1)$ a splňoval podmínku definice 2.4.2.

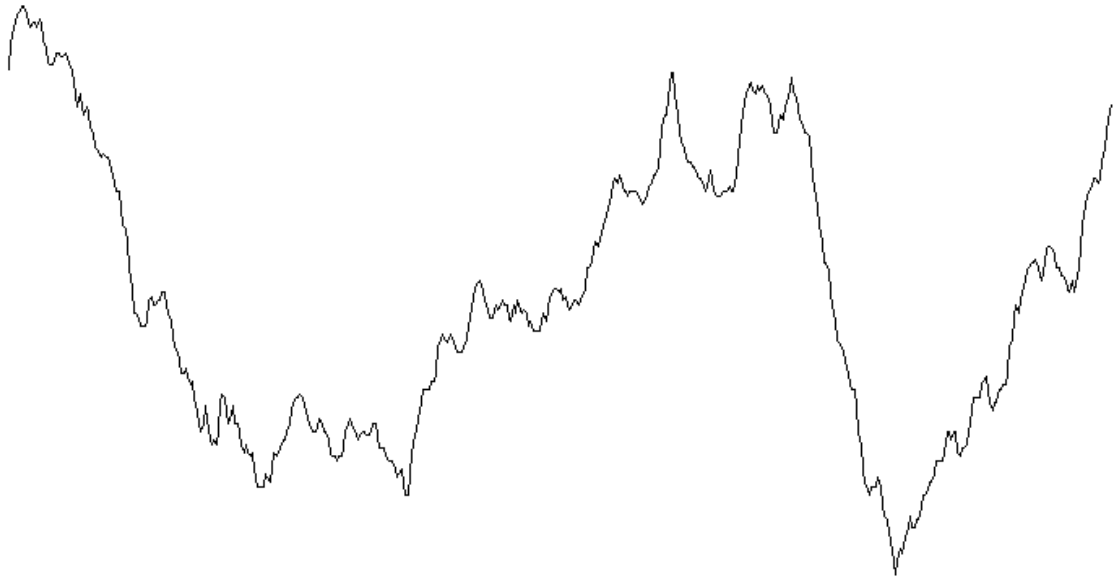
Následující obrázky 2.2, 2.3 a 2.4 ukazují stopy zlomkového Brownova pohybu sestavené zpětnou Fourierovou transformací vygenerovaného spektra, kde parametr ϕ byl postupně roven 1.4, 2 a 2.6 - tj. odpovídající koeficienty H nabývaly postupně hodnot 0.2, 0.5 a 0.8. Odpovídající fraktální dimenze byly potom 1.8, 1.5 a 1.2, čemuž skutečně odpovídá „členitost“ zobrazených stop - stopa na prvním obrázku je nejčlenitější, stopa na posledním obrázku je „nejméně členitá“. Zlomkové stopy Brownova pohybu s Hurstovým exponentem okolo 0.8 jsou často využívány k simulacím reálných přírodních povrchů, jako například zemský povrch, povrchy lomu kovů, atd. (viz [4]). Více detailů o Brownově pohybu a jeho generování lze najít například v [11, str. 446 - 466] nebo v [12, strana 49 a dále].



Obrázek 2.2: $B_H(t)$ spočtená zpětnou Fourierovou transformací z generovaného spektra, $H = 0.2$.



Obrázek 2.3: $B_H(t)$ spočtená zpětnou Fourierovou transformací z generovaného spektra, $H = 0.5$.



Obrázek 2.4: $B_H(t)$ spočtená zpětnou Fourierovou transformací z generovaného spektra, $H = 0.8$.

2.5 Zlomkové Brownovy Plochy v E_3

Předchozí konstrukce mohou být zobecněny a stopa Brownova pohybu může být definována pro n -dimenzionální Euklidovský prostor. Pro účely této práce je zejména důležité zobecnění do E_3 , protože stopa Brownova pohybu v E_3 je plocha (zlomková Brownova plocha - viz definice 2.5.1). To umožňuje generovat fraktální plochy o předem známé dimenzi a využít tyto generované plochy pro testování metod odhadu dimenze a vlivu různých faktorů na výslednou dimenzi.

Definice 2.5.1: Funkci $B_H(t_1, t_2)$, kde t_1, t_2 jsou nezávislé proměnné (nikoli čas), nazveme *zlomkovou Brownovou plochou* (Fractional Brownian Surface) v E_3 pokud má následující vlastnosti:

- $B_H(t_1, t_2)$ je spojitá v celém definičním oboru
- Pro libovolné 2 body z definičního oboru platí, že $B_H(t_1, t_2) - B_H(t'_1, t'_2)$ má normální rozdělení $N(0, \sigma^2)$
- pro libovolné 2 body z definičního oboru, které jsou od sebe vzdáleny o $T_s = \varrho(t, t')$, je $\sigma \propto T_s^H$, kde H je Hurstův koeficient $H \in (0, 1)$ a ϱ je metrika definovaná v E_2

Věta 2.5.1: Nechť $B_H(t_1, t_2)$ je zlomková Brownova plocha. Potom pro její fraktální dimenzi D platí:

$$D = 3 - H$$

Důkaz 2.5.1: Důkaz se provede obdobně jako důkaz věty 2.5.1. Pro zjednodušení omezíme definiční obor na jednotkový čtverec $\langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$ a uvažujme metriku $\varrho(t, t') = \max(|t_1 - t'_1|, |t_2 - t'_2|)$. Sestrojíme δ -pokrytí z krychlí o délce hrany $\delta = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Na libovolné podoblasti definičního oboru $\langle t_1, t_1 + \frac{1}{n} \rangle \times \langle t_2, t_2 + \frac{1}{n} \rangle$ platí, že $B_H(t_1, t_2) - B_H(t_1 + \frac{1}{n}, t_2 + \frac{1}{n})$ má normální rozdělení $N(0, \sigma^2)$ a $\sigma \propto \left(\frac{1}{n}\right)^H$. Z toho plyne, že nad danou podoblastí lze sestavit kvádr o délkách hran $\frac{1}{n} \times \frac{1}{n} \times \left(\frac{1}{n}\right)^H$. Minimální počet krychlí δ -pokrytí, který je třeba na pokrytí plochy nad danou podoblastí je potom $\frac{\left(\frac{1}{n}\right)^H}{\frac{1}{n}} = n^{1-H}$. Celkový počet krychlí potřebných k infimálnímu pokrytí plochy při daném $\delta = \frac{1}{n}$ je:

$$n \cdot n \cdot n^{1-H} = n^{3-H}$$

Z definice Hausdorffovy míry plyne:

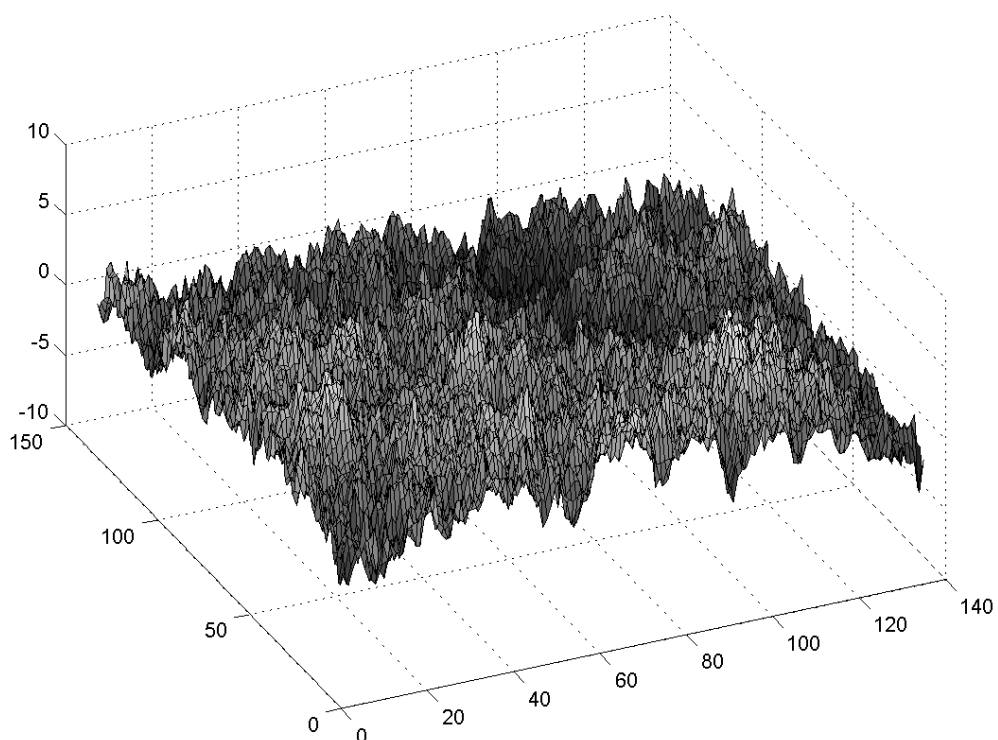
$$\begin{aligned} H^s(B_H(t_1, t_2)) &= \lim_{\delta \rightarrow 0^+} H_\delta^s(B_H(t_1, t_2)) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \inf_{\{U_i\}} \sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam}(U_i))^s = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{\{U_i\}} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{n}\right)^s = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{3-H} \left(\frac{1}{n}\right)^s = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{3-H-s} \end{aligned}$$

Aby limita byla nenulová a zároveň konečná, je zřejmé, že musí být $3 - H - s = 0$ a $s = H - 3$. Podle definice 2.1.1 je číslo s Hausdorffova nebo také fraktální dimenze $B_H(t_1, t_2)$. \square

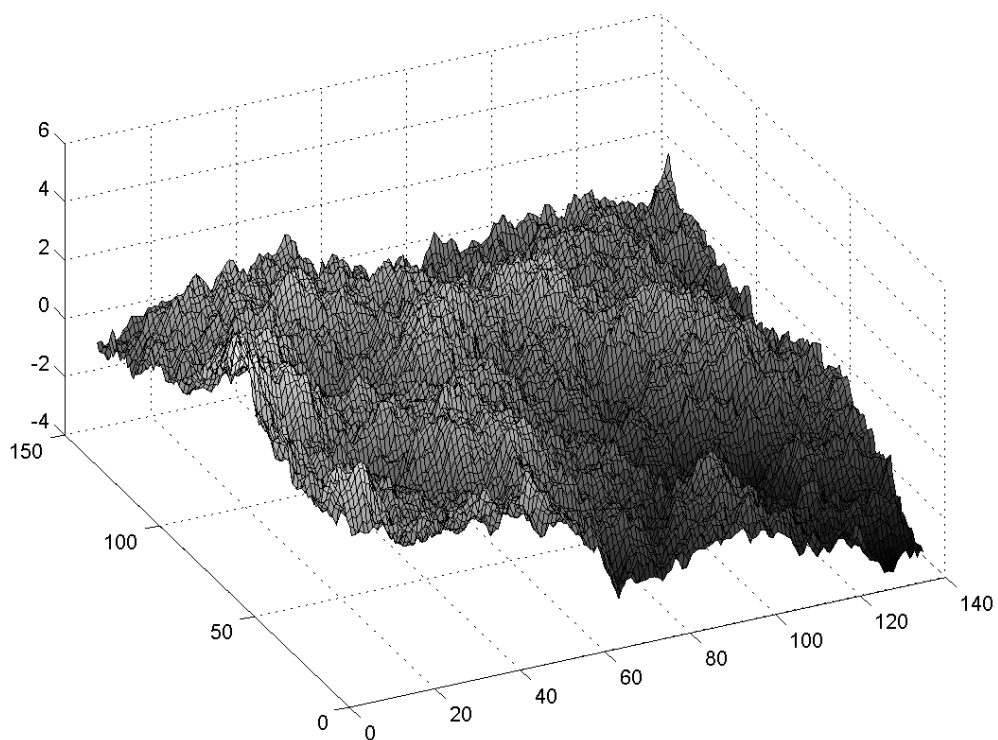
Pro zlomkovou Brownovu plochu platí, stejně jako pro zlomkovou stopu Brownova pohybu, že amplitudové spektrum Fourierovy transformace $\mathcal{F}(B_H(t_1, t_2))$ závisí na frekvenci podle následujícího vztahu:

$$\text{Amp}(\mathcal{F}(B_H(t_1, t_2))) \propto \frac{1}{f^\phi}$$

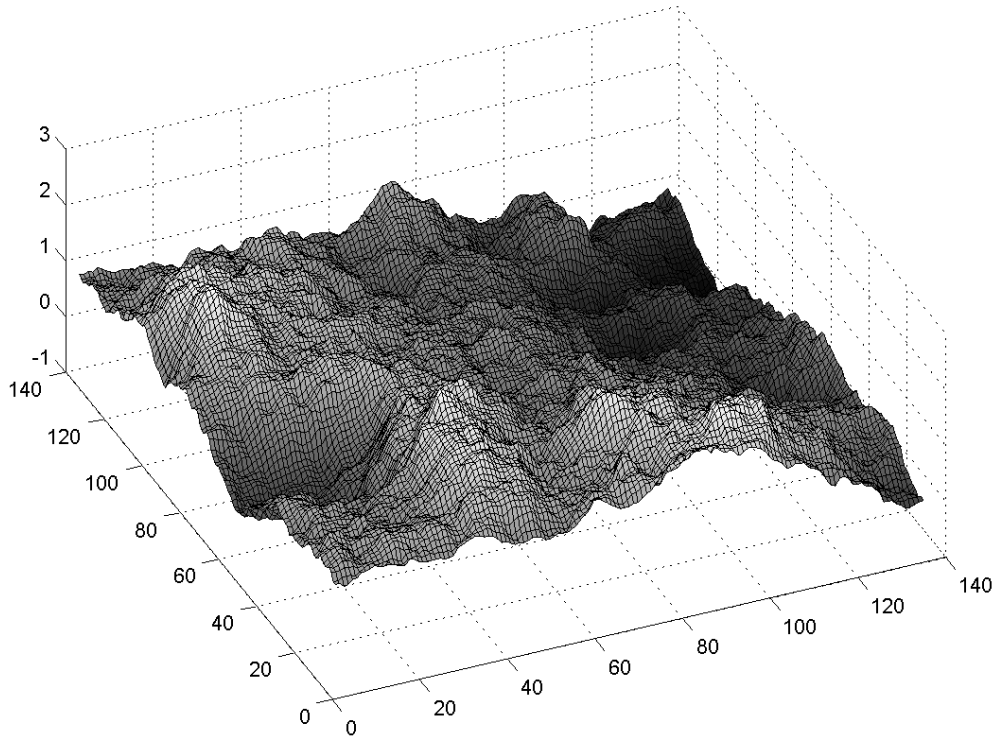
kde $\text{Amp}(\mathcal{F}(B_H(t_1, t_2)))$ označuje amplitudové spektrum, f je definováno jako $f = \sqrt{f_1^2 + f_2^2}$, kde f_1 a f_2 jsou prostorové frekvence, a $\phi = 1 + 2H$ (viz [4]). Zřejmě je tedy možné vygenerovat spektrum s požadovanými vlastnostmi a zpětnou Fourierovou transformací získat plochu s požadovaným Hurstovým koeficientem $H = \frac{\phi-1}{2}$, kde ϕ leží v intervalu $(1, 3)$ (aby Hurstův koeficient byl z intervalu $(0, 1)$). Pro více detailů o generování ploch viz například [9, strana 10]. Příklady vygenerovaných ploch jsou na obrázcích 2.7 až 2.5. Na obrázcích je dobře vidět jak s rostoucím koeficientem H klesá „členitost“ ploch, to odpovídá i snižování fraktální dimenze.



Obrázek 2.5: Část plochy $B_H(t_1, t_2)$ sestrojené zpětnou Fourierovou transformací generovaného spektra s Hurstovým koeficientem $H = 0.2$, $D = 2.8$.



Obrázek 2.6: Část plochy $B_H(t_1, t_2)$ sestrojené zpětnou Fourierovou transformací generovaného spektra s Hurstovým koeficientem $H = 0.5$, $D = 2.5$.



Obrázek 2.7: Část plochy $B_H(t_1, t_2)$ sestavené zpětnou Fourierovou transformací generovaného spektra s Hurstovým koeficientem $H = 0.8$, $D = 2.2$.

Věta 2.5.2: Průnik roviny kolmé k souřadné rovině (t_1, t_2) , která je rovnoběžná s osou t_1 nebo t_2 se zlomkovou Brownovou plochou $B_H(t_1, t_2)$ má fraktální dimenzi

$$D = 2 - H$$

Důkaz 2.5.2: Stačí dokázat, že tento průnik je zlomková stopa Brownova pohybu $B_H(t)$ – podle věty 2.4.1 pak musí platit $D = 2 - H$. Uvažujme průnik rovinou, která je rovnoběžná s osou t_1 a protíná osu t_2 v hodnotě $t_2 = C$. Zřejmě funkce $B_H(t_1, C)$ je spojitá, protože i $B_H(t_1, t_2)$ je spojitá – tím je splněn první bod definice zlomkové trajektorie Brownova pohybu. Dále, $B_H(t_1, C) - B_H(t'_1, C)$ bude mít normální rozdělení $N(0, \sigma^2)$, protože i $B_H(t_1, t_2) - B_H(t'_1, t'_2)$ má normální rozdělení $N(0, \sigma^2)$ – tím je splněn druhý bod definice zlomkové trajektorie Brownova pohybu. Zbývá dokázat, že $\sigma \propto (\Delta t)^H$, kde Δt je definována jako $|t_1 - t'_1|$. Z definice zlomkové plochy plyne, že pro $\Delta t = \varrho([t_1, C], [t'_1, C])$ je $\sigma \propto (\Delta t)^H$. Pro účely této práce stačí dokázat větu pro dvě metriky, které jsou dále používány. Jde o Euklidovskou metriku $\varrho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$ a maximální metriku $\varrho(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$. Dosadíme nejprve do Euklidovské metriky:

$$\varrho([t_1, C], [t'_1, C]) = \sqrt{(t_1 - t'_1)^2 + (C - C)^2} = |t_1 - t'_1|$$

tedy pro tuto metriku je splněna i třetí podmínka definice zlomkové trajektorie Brownova pohybu. Pro maximální metriku dostaneme:

$$\varrho([t_1, C], [t'_1, C]) = \max\{|t_1 - t'_1|, |C - C|\} = |t_1 - t'_1|$$

tedy třetí podmínka definice zlomkové trajektorie Brownova pohybu je splněna i pro maximální metriku. Analogicky by se dokázalo, že funkce $B_H(C, t_2)$ splňuje definici zlomkové trajektorie Brownova pohybu. \square

2.6 Závěrečné shrnutí

V této kapitole byla podána definice fraktálu a fraktální dimenze. Dále zde byl analyzován Richardsonův vzorec, zejména byly objasněny podmínky za kterých platí, že koeficient D v Richardsonově vzorci je fraktální dimenzí měřeného objektu (viz věta 2.2.1). Tato část je důležitá, protože Richardsonův vzorec je často využíván k odhadu fraktální dimenze různých křivek, aniž by se bralo v potaz, že jde o empiricky odvozený vzorec, který nemusí být použitelný pro každou křivku. V zásadě platí, že Richardsonův vzorec lze použít pro odhad fraktální dimenze křivky, pouze když naměřená data vypadají podobně jako původní Richardsonova data. Věta 2.2.1 byla v rámci práce dokázána.

Stěžejní část kapitoly se zabývala stopami Brownova pohybu a zlomkovými Brownovými plochami. Důkaz věty 2.4.1 uvedený v [10] byl v rámci práce modifikován, aby byl konzistentní s již zavedenou terminologií a poté byl zobecněn pro větu 2.5.1. Z literatury převzatá věta 2.5.2 o dimenzi řezu zlomkové Brownovy plochy byla v rámci této práce dokázána. V kapitole 5 je tato věta využita při analýze vlivu měřítka na odhad fraktální dimenze.

Pro praktické aplikace – zejména testování metod měření fraktální dimenze a vlivu numerických úprav obrazu na naměřenou dimenzi – bylo třeba vygenerovat křivky a plochy s předem známou fraktální dimenzí. Konstrukce zlomkových stop Brownova pohybu a zlomkových ploch byly provedeny zpětnou Fourierovou transformací vygenerovaného spektra, které mělo vlastnost $\text{Amp}(B_H(t)) \propto \frac{1}{f^\phi}$. U takto vygenerovaných ploch je známa fraktální dimenze, protože platí $H = \frac{\phi-1}{2}$. Tato část teorie spojená se spektrálními vlastnostmi křivek a ploch nebyla v rámci práce formalizována, byla pouze zmíněna bez důkazu jako fakt. V dostupné literatuře byla tato metoda často používána, nicméně formalizovaná nebyla. Detailní matematická analýza a formalizace této teorie je nad rámec této práce a může být předmětem dalšího výzkumu.

Kapitola 3

Aproximace fraktálních křivek a ploch

Tato kapitola se zabývá aproximací fraktální křivky a fraktální plochy (definice pojmů viz níže) nějakou jinou množinou, která se skládá z konečného počtu základních geometrických obrazců – konkrétně konečný počet úseček je použit k aproximaci fraktální křivky, konečný počet trojúhelníků je použit k aproximaci fraktální plochy. Tyto konečné aproximace jsou pro praxi velmi důležité, protože počítačové algoritmy, které odhadují fraktální dimenzi objektů z digitálních obrazů, pracují s diskrétní množinou obrazových bodů a ne s opravdovou fraktální množinou. Tento přechod – od fraktální množiny ke konečné množině základních geometrických prvků – je ve většině inženýrských aplikací opomíjen, stejně jako vliv této „diskretizace“ na odhad dimenze. Přitom ve většině aplikací se fraktální dimenze počítá z digitálních obrazů reálných objektů, tedy z konečné množiny bodů reprezentovaných obrazovou maticí.

3.1 Aproximace fraktálních křivek

Definice 3.1.1: Souvislou množinu bodů $E \subset \mathbb{R}^2$, takovou, že platí $E = \partial E$, která se odebráním libovolného bodu této množiny rozpadne nejvýše na dvě souvislé množiny, nazveme *primitivní F-křivka*.

Definice 3.1.2: *Koncovými body* primitivní F-křivky nazveme takové body, jejichž odebráním se primitivní F-křivka nerozpadne na dvě souvislé množiny, ale zůstane jedinou souvislou množinou.

Definice 3.1.3: Souvislou množinu bodů $E \subset \mathbb{R}^2$, takovou, že platí $E = \partial E$, která se odebráním dvou libovolných, navzájem různých, bodů této množiny rozpadne na dvě souvislé množiny, nazveme *uzavřená F-křivka*.

Definice 3.1.4: Množinu, která vyhovuje definici primitivní nebo uzavřené F-křivky, budeme označovat stručně *F-křivka*.

Definice 3.1.5: *Fraktální křivka* je taková F-křivka, jejíž Hausdorffova dimenze je ostře větší než jedna.

Definice 3.1.6: Nechť $E \in \mathbb{R}^2$ je fraktální křivka, pro kterou platí: $H^s(E) = K < \infty$. Dále pro její průměr platí: $\text{diam}(E) < \infty$. Vybereme z této křivky podmnožinu bodů tak, aby tato podmnožina splňovala následující podmínky.

Ve vybrané podmnožině bodů musí být koncové body primitivní F-křivky. Označme x_0 jeden z koncových bodů a x_n druhý z koncových bodů primitivní F-křivky. Pro uzavřenou F-křivku zvolíme bod x_0 libovolně a položíme $x_0 = x_n$. Dále, vybíráme body na F-křivce tak, aby platilo, $0 < \varrho(x_i, x_{i+1}) \leq \varepsilon$, kde bod x_i je poslední vybraný bod a bod x_{i+1} je právě vybíraný bod. Dále, bod x_{i+1} vybíráme tak, aby $H^s(C_{i+1}) < H^s(C_i)$, kde C_i je úsek F-křivky mezi bodem x_i a bodem x_n . (Tato podmínka nám zaručuje, že se výběrem bodů přibližujeme konci F-křivky.) Startovním bodem x_0 výběru je jeden z koncových bodů F-křivky pro primitivní F-křivku, pro uzavřenou F-křivku je to libovolný bod F-křivky. Body vybíráme tak dlouho, dokud není splněna podmínka, že $\varrho(x_i, x_n) \leq \varepsilon$, Každou dvojici bodů x_i, x_{i+1} spojíme úsečkou l_i . Množinu A , $A = \bigcup_{i=0}^{n-1} l_i$ nazveme ε - *aproximací*, nebo stručně *aproximací* fraktální křivky E .

Z definice je zřejmé, že délka jednotlivých úseček nepřekročí předem zvolenou hodnotu ε , ovšem definice nic neříká o počtu těchto úseček. Aby aproximace fraktální křivky byla použitelná pro zobrazení fraktální křivky, počet těchto úseček musí být konečný. Definice nám také neříká nic o existenci aproximace fraktální křivky. Tyto dvě důležité informace jsou obsaženy v následující větě.

Věta 3.1.1: Pro každou fraktální křivku E , pro kterou platí: $H^s(E) = K < \infty$ a $\text{diam}(E) < \infty$, existuje nekonečně mnoho aproximací pro libovolné $\varepsilon > 0$. Každá z těchto aproximací může být zkonstruována konečným počtem úseček.

Důkaz 3.1.1: Uvažujme libovolnou fraktální křivku E . Tuto fraktální křivku pokryjeme čtvercovou sítí, kde každý čtverec má průměr roven $\varepsilon < \text{diam}(E)$. Určitě existují čtverce, jejichž hrany mají průsečíky s fraktální křivkou E . (Takové čtverce musí existovat, protože $\varepsilon < \text{diam}(E)$.) Jestliže hrany některého čtverce mají nekonečně mnoho průsečíků s fraktální křivkou, vybereme konečný počet průsečíků. Všechny vybrané průsečíky mohou být body aproximace fraktální křivky. Protože čtverců je konečný počet a na hranách každého čtverce je konečný počet průsečíků, celkový počet bodů aproximace je také konečný. (Počet čtverců musí být konečný, protože E má konečný průměr a lze ji tedy opsat čtverec se stranou konečné délky, který je možné rozdělit na konečný počet čtverců s průměrem ε .)

Takto vybrané body je nyní potřeba oindexovat a pospojovat úsečkami. Bod x_0 zvolíme jako jeden z koncových bodů primitivní F-křivky. Pokud není v množině vybraných bodů, může být do množiny vybraných bodů přidán. Taktéž přidáme druhý koncový bod primitivní F-křivky x_n . Pro uzavřenou F-křivku vybereme libovolně jeden z průsečíků jako bod x_0 . Máme tedy nyní konečnou množinu $Y = \{y_0, y_1, \dots, y_n\}$, body jsou zatím až na bod $y_0 = x_0$ (počáteční bod F-křivky) oindexovány libovolně.

Bod x_0 musí ležet na hraně nebo uvnitř některého čtverce. Fraktální křivku E můžeme rozdělit na části $C_1, C_2 \dots C_n$, kde C_i je část fraktální křivky mezi body y_0 a y_i . Jako následující bod po $x_0 = y_0$ vybereme takový bod y_i , pro který platí, že Hausdorffova míra úseku C_i je minimální, tj. $H^s(C_i)$ je minimální. Dále, je zřejmé, že křivka musela někde protnout hranici čtverce, ve kterém leží bod x_0 , proto uvažujeme jen ty průsečíky y_i , které leží na hraně tohoto čtverce. Pokud bod x_0 ležel na hraně čtverce, vybíráme pouze z bodů, které leží na hranách čtverců s původní hranou

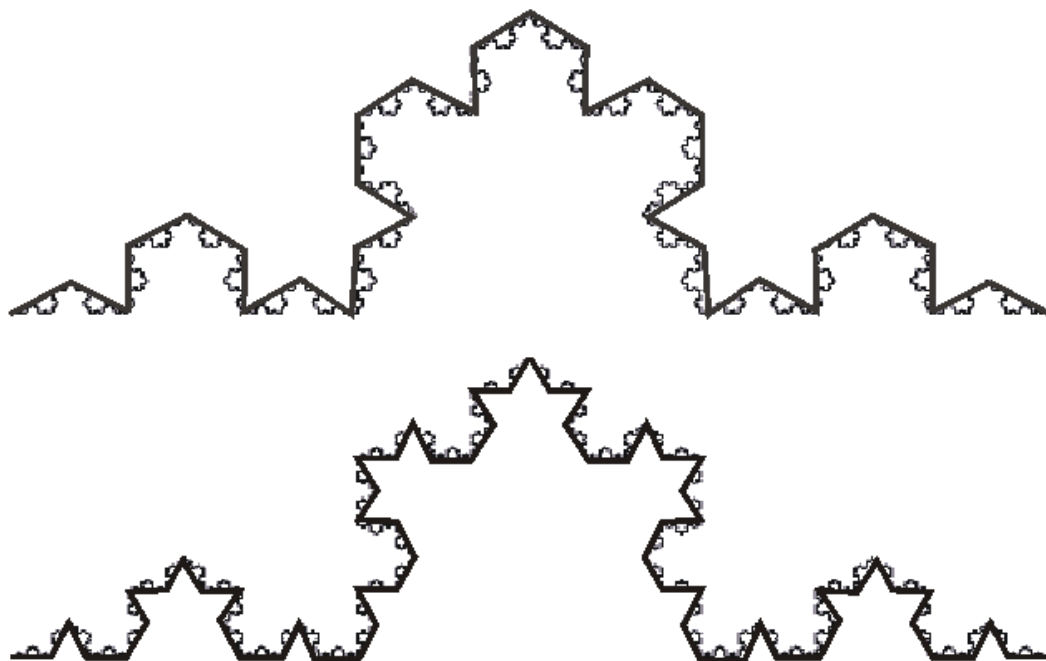
sousedících. Takto nalezený bod označíme jako bod x_1 a odebereme ho z množiny Y .

Dostáváme novou množinu $Y_1 = Y - \{y_i\}$. Pokračujeme stejným způsobem pro bod x_1 . Budeme hledat bod y_j , který leží na hraně sousedících čtverců a splňuje podmínku $H^s(C_j)$ je minimální, kde C_j je část křivky mezi bodem x_1 a y_j . Nalezený bod opět odebereme z množiny Y_1 a obdržíme novou množinu $Y_2 = Y_1 - \{y_j\}$. Pokračujeme tak dlouho, dokud správně neindexujeme všechny body. Body x_0, \dots, x_n poté spojíme úsečkami.

Aby sjednocení úseček l_i (úsečka mezi body x_i a x_{i+1}) bylo skutečně aproximací fraktální křivky E , musí platit $\text{diam}(l_i) \leq \varepsilon$. Z algoritmu oindexování bodů je zřejmé, že tato podmínka je splněna, protože následující bod po x_i byl vybírán pouze z bodů, které ležely na hranách okolních čtverců, jejichž průměr byl roven ε . Také platnost podmínky $H^s(C_{i+1}) < H^s(C_i)$ je touto konstrukcí zajištěna, množina A tedy splňuje definici 3.1.6 aproximace fraktální křivky.

Tímto způsobem lze vždy najít množinu, která aproximuje fraktální křivku konečným počtem úseček. Aproximace závisí na volbě pozice sítě čtverců vůči fraktální křivce. Protože těchto pozic je nekonečně mnoho, lze také obdržet nekonečně mnoho aproximací jediné fraktální křivky. \square

Tato věta nám sice zaručuje, že je možné sestavit aproximaci libovolné fraktální křivky konečným počtem úseček – jinými slovy, lze nakreslit aproximaci fraktální křivky, ale o „kvalitě“ této aproximace nemáme žádné informace. Kvalita aproximace zřejmě závisí na výběru bodů z původní množiny. Příklad dvou různých aproximací Kochovy křivky¹ je na obrázku 3.1.



Obrázek 3.1: Dvě možné aproximace Kochovy křivky.

¹Tato křivka bývá občas označována jako křivka Kochové a autorství je připisováno matematicce Helge von Koch. Nicméně pravým autorem byl švédský matematik Niels Fabian Helge von Koch.

Definice 3.1.7: Označme F_i konečný počet fraktálních křivek a \tilde{F}_i libovolné aproximace těchto křivek, $i = 1 \dots n$. Dále, necht' průnik fraktálních křivek F_i je prázdná množina: $\bigcap_{i=1}^n F_i = \emptyset$ a taktéž necht' $\bigcap_{i=1}^n \tilde{F}_i = \emptyset$. Potom množinu F , $F = \bigcup_{i=1}^n F_i$ nazveme *sjednocením fraktálních křivek* a množinu $\tilde{F} = \bigcup_{i=1}^n \tilde{F}_i$ nazveme *sjednocení aproximací fraktálních křivek*.

3.2 Aproximace fraktálních ploch

Definice 3.2.1: Necht' $E \subset \mathbb{R}^3$ a P je zobrazení $P : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definované pro $X \in \mathbb{R}^3$ takto:

$$X = [x_1, x_2, x_3]$$

$$P(X) = [x_1, x_2]$$

Průmětem množiny E do roviny (x, y) budeme rozumět následující podmnožinu E' roviny (x, y) :

$$E' = \bigcup_{X \in E} \{P(X)\}$$

Průmět množiny E bude dále taktéž označovat $P(E)$.

Definice 3.2.2: Necht' $E \subset \mathbb{R}^3$. Necht' je v \mathbb{R}^3 zaveden kartézský systém souřadnic. Dále necht' řez libovolnou rovinou kolmou na rovinu (x, y) takový, že je různý od libovolné hranice množiny E , rozdělí množinu E na právě dvě souvislé množiny a fraktální dimenze množiny E je větší nebo rovna dvěma. Necht' libovolná přímka kolmá na rovinu (x, y) , pro jejíž průsečík N s rovinou (x, y) platí $N \in E'$, má s množinou E právě jeden společný bod. Množinu E nazýváme *plochou vůči rovině (x, y)* , jestliže splňuje všechny výše popsané podmínky.

Plocha vůči rovině (x, y) je množina, kde se z libovolného bodu této množiny lze dostat, aniž by bylo třeba množinu opustit a nemá žádné převisy ve směru osy z . Podmínka na právě jeden průsečík s přímkou zakazuje nejen převisy, ale i díry v ploše. Definice by šla upravit i pro „děravé“ plochy, ale tato úprava není potřebná pro účely této práce.

Definice 3.2.3: *Plocha* je taková množina $E \subset \mathbb{R}^3$, že jestliže všechny její body podrobíme stejné, konečné posloupnosti operací rotace a translace, výsledná množina E' bude plochou vůči rovině (x, y) . (Tj. jestliže tuto množinu vhodně natočíme, bude splňovat všechny podmínky předchozí definice).

Definice 3.2.4: *Fraktální plocha* je taková plocha, jejíž Hausdorffova dimenze je ostře větší než 2.

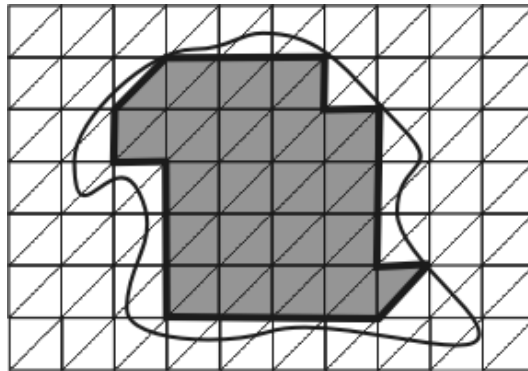
Definice 3.2.5: Necht' množina E je fraktální plocha² vůči rovině (x, y) . Dále, pokryjeme rovinu (x, y) čtvercovou sítí, označme délku strany jednoho čtverce ε ,

²Každou fraktální plochu lze podrobit konečnému počtu rotací a translací, po kterých bude plochou vůči rovině (x, y) . Tudíž lze učinit požadavek, aby E byla plocha vůči rovině (x, y) , bez újmy na obecnosti.

$0 < \varepsilon < \text{diam}(E)$. Ze čtvercové sítě vytvoříme trojúhelníkovou síť tak, že do každého čtverce přidáme jednu úhlopříčku. Strany čtverce a úhlopříčka vytváří dva trojúhelníky, které jsou součástí trojúhelníkové sítě. Množinu všech vrcholů trojúhelníků, které tvoří síť označme T_0 a $T_0 \cap P(E) = T$. *Aproximace fraktální plochy* je sjednocení všech trojúhelníků, jejichž vrcholy tvoří body na původní ploše E , jejichž průměty leží v T . (Viz ilustrativní obrázek 3.2).

Věta 3.2.1: Pro každou plochu E vůči rovině (x, y) existuje aproximace, která se skládá z konečného počtu trojúhelníků.

Důkaz 3.2.1: Důkaz plyne přímo z definice. \square



Obrázek 3.2: Průmět plochy do roviny (x, y) , pokrytí plochy trojúhelníkovou sítí (trojúhelníky vybarvené šedě) a hranice aproximace plochy (silná, lomená čára ohraňující šedé trojúhelníky).

Poznámka 3.2.1: Trojúhelníková síť, která definuje aproximaci fraktální plochy by mohla být vytvořena i jinak. Zvolená definice nejlépe vyhovuje potřebám praktické části, kde se zpracovávají snímky ploch pořízené elektronovým mikroskopem. Obrazová matice pak reprezentuje přímo aproximaci fraktální plochy dle výše uvedené definice.

Věta 3.2.2: Průnik fraktální plochy vůči rovině (x, y) , jejíž průmět do roviny (x, y) je konvexní množina, s rovinou kolmou na rovinu (x, y) je primitivní F-křivka. Tento průnik bude dále také nazýván *řez fraktální plochy*.

Důkaz 3.2.2: Protože průmět plochy do roviny (x, y) je konvexní množina (předpoklad věty), je průmět průniku plochy s rovinou kolmou na (x, y) úsečka (díky zmíněnému předpokladu věty se průnik plochy s rovinou nemůže rozpadnout na více částí). Definice fraktální plochy říká, že kolmice vedená z libovolného bodu této úsečky protíná plochu právě v jednom bodě a také, že plocha je souvislá množina. Z kombinace těchto dvou vlastností plyne, že i průnik roviny s plochou je souvislá množina. Dále každá kolmice v rovině, která protíná plochu, má s plochou právě jeden společný bod. Z toho plyne, že odebráním libovolného bodu průniku (mimo

body průniku, které leží na hranici plochy) se průnik rozpadne na dvě souvislé množiny a tedy průnik roviny kolmé na (x, y) s fraktální plochou vůči (x, y) splňuje definici 3.1.1 primitivní F-křivky. \square

3.3 Závěrečné shrnutí

Tato kapitola je významnou částí této práce, protože v odborné literatuře chybí přechod od teoretické definice fraktálních množin a fraktální dimenze k praktické realizaci výpočtu fraktální dimenze z digitální reprezentace fraktálu v počítači. Toto „šedé“ místo vede občas k nesprávným postupům při výpočtech, nebo v lepším případě k nedostatečnému nebo nekorektnímu vysvětlení použitých metod odhadu fraktální dimenze.

V této kapitole byly nadefinovány pojmy aproximace fraktální křivky, sjednocení aproximací fraktálních křivek a aproximace fraktální plochy a dokázány věty o existenci těchto aproximací. Jsou to důležité pojmy pro praktickou část práce, neboť umožňují přechod od fraktálních křivek (případně jejich sjednocení, která se v inženýrských aplikacích často vyskytují) a ploch ke konečným množinám úseček a trojúhelníků, které mohou být zobrazeny v počítači a pro které mohou být korektně zdefinovány metody odhadu fraktální dimenze aproximovaného útvaru.

Dalším důležitým výsledkem této kapitoly je věta 3.2.2. Tato věta umožní korektně definovat metodu řezů (viz podkapitola 4.2.3) pro charakterizaci fraktální dimenze plochy. Výsledek věty, že řez fraktální plochy je F-křivka by zřejmě šel ještě zpřesnit – dá se předpokládat, že průnik fraktální plochy vůči rovině (x, y) , jejíž průmět je konvexní množina, s rovinou kolmou na (x, y) je fraktální křivka s výjimkou některých křivek, ovšem množina těchto křivek bude nejvýše spočetná). Nicméně dokázat nebo vyvrátit tuto hypotézu by překročilo rozsah této práce a podaný výsledek je pro praktické aplikace popsán dále dostačující.

Kapitola 4

Metody měření fraktální dimenze fraktálních křivek a fraktálních ploch

V této kapitole jsou popsány dvě základní metody měření fraktální dimenze fraktálních křivek – metoda „Yard Stick“ a metoda „Box Counting“, které jsou využity v této práci k odhadům dimenzí fraktálních křivek pro praktické aplikace. Je třeba si uvědomit, že fraktální křivky byly reprezentovány svými aproximacemi – tj. konečnými množinami úseček, které byly zobrazeny pomocí počítače obrazovou maticí o konečném počtu prvků $[m \times n]$. Změny odhadnuté dimenze od teoretické dimenze, způsobené tím, že se dimenze odhaduje z digitálního zobrazení aproximace fraktální křivky, jsou detailně popsány v podkapitole 5.1

Dále jsou zde popsány dva možné přístupy k odhadu fraktální dimenze fraktálních ploch. První metoda využívá zobecněný „Box Counting“ algoritmus, druhý přístup vychází z toho, že řezem fraktální plochou je fraktální křivka – díky tomu je možné usuzovat na „členitost“ fraktální plochy z vlastností řezů, které lze měřit metodami pro křivky.

4.1 Metody měření dimenze fraktálních křivek

4.1.1 Počítačová reprezentace aproximace fraktální křivky

Metody odhadu fraktální dimenze jsou obvykle prováděny z obrazových dat, která reprezentují fraktální křivku, respektive její aproximaci.

V kapitole 3.1 je popsána aproximace fraktální křivky v prostoru \mathbb{R}^2 jako sjednocení konečně mnoha úseček, tj. jako spojitá křivka s mohutností kontinua. Digitální obraz se skládá z konečného počtu bodů, je tedy třeba transformovat tuto křivku do konečného počtu bodů, které budou potom zobrazeny na monitoru počítače.

Obraz je v počítači reprezentován maticí přirozených čísel, která reprezentují barvu jednotlivých pixelů (nejmenší jednotka grafického výstupu počítače). Aby bylo možné pracovat s aproximací fraktální křivky v počítači, je třeba ji převést na matici, kterou je možno zobrazit. Každému prvku matice lze přiřadit souřadnice i, j , které odpovídají řádku a sloupci, ve kterém se prvek nachází. Body X_0, \dots, X_n aproximace fraktální křivky o souřadnicích $X_i = [x_i, y_i]$ lze transformovat do souřadnic matice

pomocí následujících transformačních vztahů:

$$\begin{aligned} i &= \text{Round} \left(\frac{x_i - x_{\min}}{x_{\max} - x_{\min}} m \right) \\ j &= n - \text{Round} \left(\frac{y_i - y_{\min}}{y_{\max} - y_{\min}} n \right) \end{aligned}$$

kde prvku o souřadnici $[i, j]$ je přiřazena hodnota barvy různá od barvy ostatních prvků matice (ty reprezentují pozadí). $\text{Round}(x)$ v předchozích vzorcích označuje operaci zaokrouhlení čísla x , proměnné s indexem max označují maximální hodnotu dané proměnné, proměnné s indexem min minimální hodnotu. Číslo m je počet sloupců matice, číslo n počet řádků.

Ztransformované body se spojí „úsečkami“, tj. aproximacemi těchto úseček sestavených z prvků matice. Metody jak sestavit digitální úsečku a podrobné informace o reprezentaci obrazů v počítači, lze najít např. v [8].

Poznámka 4.1.1: Zobrazení křivky závisí na konstantách m, n . (Parametry m, n odpovídají velikosti výsledného obrazu.) Aby deformace křivky byla minimální, musí platit:

$$\frac{\text{Round}(x_{\max} - x_{\min})}{\text{Round}(y_{\max} - y_{\min})} = \frac{m}{n}$$

pokud tato podmínka není splněna, křivka bude zdeformovaná a to může změnit hodnoty odhadu fraktální dimenze, proto při práci s digitalizovaným snímkem fraktální křivky, není vhodné měnit velikost vstupního obrazu, aby nedošlo ke změnám zobrazení křivky, které by vedly ke změně fraktální dimenze. Více o vlivu měřítka pojednává podkapitola 5.2

4.1.2 Metoda „Yardstick“

Tato metoda vychází z Richardsonova vzorce viz kapitola 2.2 a je určena pro odhady fraktální dimenze fraktálních křivek na základě zobrazené aproximace fraktální křivky. Richardsonův vzorec upravíme následovně:

$$\begin{aligned} L(\varepsilon) &= K\varepsilon^{1-D} \\ \ln L(\varepsilon) &= \ln K\varepsilon^{1-D} \\ \ln L(\varepsilon) &= \ln K + (1 - D) \ln \varepsilon \end{aligned}$$

Hlavní myšlenka odhadu fraktální dimenze touto metodou je následující. Změříme délku křivky $L(\varepsilon_i)$ různými měřidly délky ε_i . Obdržíme dvojice bodů $[\ln \varepsilon_i, \ln L(\varepsilon_i)]$. Tyto body by měly ležet na přímce (v logaritmických souřadnicích), jejíž směrnice je rovna $1 - D$ (viz předchozí úprava Richardsonova vzorce). Pro určení směrnice této přímky proložíme vypočtenými hodnotami přímku metodou nejmenších čtverců:

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n (\ln \varepsilon_i)^2 & \sum_{i=1}^n \ln \varepsilon_i \\ \sum_{i=1}^n \ln \varepsilon_i & n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \ln L(\varepsilon_i) \cdot \ln \varepsilon_i \\ \sum_{i=1}^n \ln L(\varepsilon_i) \end{pmatrix}$$

Směrnice této přímky c_1 je přibližně rovna $1 - D$. A tedy:

$$D \approx 1 - c_1$$

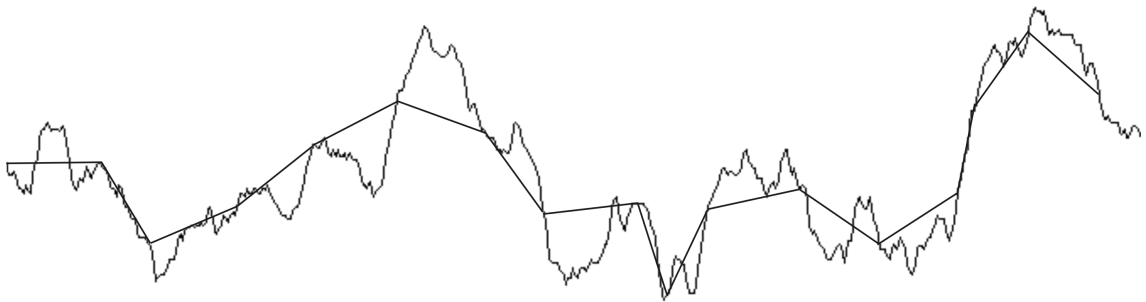
Konstanta c_2 je odhadem Hausdorffovy míry K , n je počet naměřených hodnot.

Při praktické realizaci je křivka reprezentovaná konečnou maticí čísel. To omezuje rozsah hodnot ε_i . Nelze použít velmi malá ε_i . Délka křivky by sice teoreticky měla pro velmi malá ε_i exponenciálně narůstat, ale protože je reprezentována konečným počtem bodů, které aproximují reálnou křivku, délka pro malá ε_i bude přibližně konstantní, což pokazí lineárnost trendu a sníží kvalitu odhadu. Také volba extrémně velkých hodnot ε_i způsobí „pokažení“ lineárnosti trendu a sníží přesnost odhadu fraktální dimenze.

Volba hodnot ε_i hraje významnou roli při odhadu fraktální dimenze fraktální křivky. Jestliže chceme porovnávat fraktální dimenze různých křivek, je nezbytné, aby jejich fraktální dimenze byly měřeny stejným počtem ε_i o stejných délkách. Jinak pak má takové porovnávání smysl, zejména u křivek, kde rozdíl mezi fraktálními dimenzemi je malý.

U praktických aplikací obvykle známe měřítko, tj. lze spočítat, kolik pixelů je například jeden mikrometr (nebo jakákoli jiná délková jednotka). V takovém případě lze zadávat délku měřidel ε_i v daných délkových jednotkách a délku $L(\varepsilon)$ měřit také v daných délkových jednotkách. Touto transformací se obraz převede na množinu bodů v E_2 , ve kterém byla definována aproximace fraktální křivky. Při volbě délky měřidel je třeba znát měřítko, zřejmě nemá smysl volit ε_i tak malé, že v obrazové matici bude jeho délka jen pár pixelů, nebo dokonce zdegraduje na jeden pixel.

Připomeňme, že použití této metody je možné jen pro křivky, kde se data „chovejí“ stejně jako Richardsonova data – tj. lineární závislost mezi $\ln L_i(\varepsilon_i)$ a $\ln \varepsilon_i$ musí být dostatečná – viz věta 2.2.1.



Obrázek 4.1: Pokrytí aproximace fraktální křivky měřidly délky ε při měření metodou „Yard Stick“.

4.1.3 Metoda „Box counting“

Tuto metodu lze odvodit přímo z definice Hausdorffovy míry a na rozdíl od „Yard Stick“ metody ji lze použít i pro odhady fraktální dimenze sjednocení fraktálních křivek ze zobrazeného sjednocení aproximací fraktálních křivek. Hausdorffova míra

je definována následovně:

$$H^D(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \inf \sum_{j=1}^{\infty} (\text{diam} U_j)^D$$

kde U_j jsou množiny δ – pokrytí. Položme $\delta = \frac{1}{k}$ a zvolme maximální metriku, tj. $\varrho(x, y) = \max_i |x_i - y_i|$. Fraktální křivku pokryjeme čtvercovou sítí, kde průměr čtverců je roven v dané metrice $\frac{1}{k}$. Počet čtverců, které obsahují část fraktální křivky označme $P(k)$. Potom zřejmě platí:

$$H^D(E) = \lim_{k \rightarrow \infty} P(k) \left(\frac{1}{k} \right)^D$$

Při praktické realizaci výpočtu fraktální dimenze se pracuje s konečnou maticí čísel typu $[m \times n]$, která reprezentuje danou fraktální křivku (případně sjednocení fraktálních křivek). Nejprve je třeba objasnit, jak chápat v tomto prostoru čtvercovou síť o průměru čtverců $\frac{1}{k}$.

Matici typu $[m \times n]$ lze doplnit na čtvercovou matici typu $h \times h$ tak, že se přidá potřebný počet řádků nebo sloupců s hodnotami barvy pozadí. Hodnota h je určena následovně:

$$h = \begin{cases} m, & m \geq n \\ n, & m < n \end{cases}$$

Hodnotu h rozdělíme na $k \in \mathbb{N}$ dílů. Jestliže h je s k nesoudělné, tj. délka dílů není celočíselná, volíme délku dílů $\text{Round}\left(\frac{h}{k}\right)$. Tak je možné vytvořit čtvercovou síť, kde každý čtverec obsahuje $\text{Round}\left(\frac{h}{k}\right) \times \text{Round}\left(\frac{h}{k}\right)$ prvků obrazové matice (díky zaokrouhlování při krajích matice vzniknou obdélníky a ne čtverce, ovšem na ně lze nahlížet jako na čtverce pokrytí, jejichž část už není zobrazena). Tyto čtverce nám reprezentují požadované δ – pokrytí v předchozím vzorci. Jinými slovy, předpokládá se, že obrazová matice odpovídá čtverci v prostoru \mathbb{R}^2 o délce strany jedna.

Dále, je zřejmé, že maximální počet dělení strany čtverce je h dílů, tj. každý čtverec je pak reprezentován jedním pixelem. Limita $k \rightarrow \infty$ je v obrazové matici nemožná a pozbývá smyslu. Musíme se spokojit s následující aproximací:

$$H^D(E) \approx P(k) \left(\frac{1}{k} \right)^D$$

Z této aproximace vyjádříme D .

$$\begin{aligned} H^D(E) &\approx P(k) \left(\frac{1}{k} \right)^D \\ \ln H^D(E) &\approx \ln \left(P(k) \left(\frac{1}{k} \right)^D \right) \\ \ln H^D(E) &\approx \ln P(k) + \ln \left(\frac{1}{k} \right)^D \\ -\ln P(k) &\approx \ln \left(\frac{1}{k} \right)^D - \ln H^D(E) \\ \ln P(k) &\approx -D \ln \frac{1}{k} + \ln H^D(E) \end{aligned}$$

Při praktické realizaci zvolíme různé hodnoty k_i , pokryjeme měřenou množinu daným čtvercovým pokrytím a spočteme pro dané k_i počet čtverců $P(k_i)$, které obsahují části měřené množiny. Těmito naměřenými hodnotami proložíme metodou nejmenších čtverců přímku (v logaritmických souřadnicích):

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n (\ln P(k_i))^2 & \sum_{i=1}^n \ln \frac{1}{k_i} \\ \sum_{i=1}^n \ln \frac{1}{k_i} & n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \ln P(k_i) \cdot \ln \frac{1}{k_i} \\ \sum_{i=1}^n \ln P(k_i) \end{pmatrix}$$

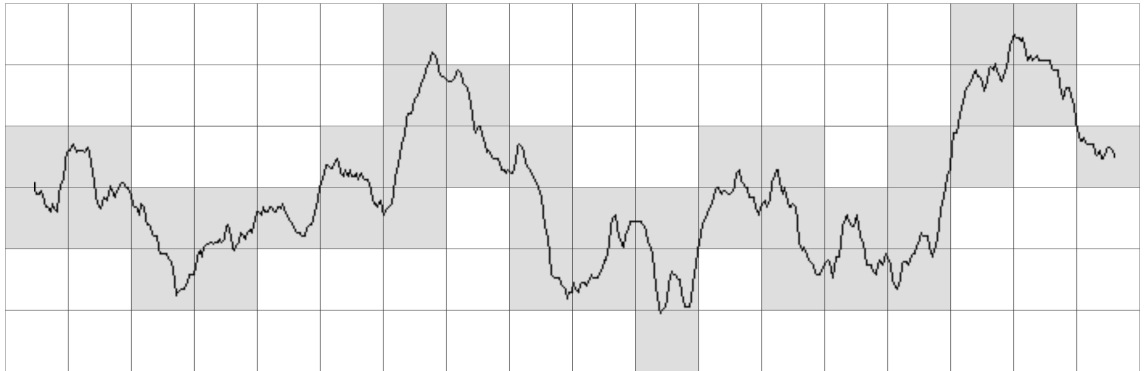
Hodnota směrnice přímky $c_1 = -D$ a konstanta $c_2 = H^D(E)$. Tedy, odhad fraktální dimenze D :

$$D = -c_1$$

Výpočet můžeme zpřesnit posouváním pokrytí pro dané k_i , tj. měníme polohu dělení stran výchozí čtvercové matice. Pro dané k máme právě k^2 možných pozic pokrytí obrazové matice, tj. za výchozí bod volíme bod z oblasti $\{0, 1, \dots, k\} \times \{0, 1, \dots, k\}$ obrazové matice. Tak obdržíme všechna možná pokrytí pro dané k .

Pro praktický výpočet je vhodné stanovit předem pevný počet pokrytí pro všechna k_i stejný a počáteční bod pokrytí volit náhodně z oblasti $\{0, 1, \dots, k\} \times \{0, 1, \dots, k\}$ obrazové matice.

Dalším možným zpřesněním je použití vah pro čtverce pokrytí, tj. čtverec pokrytí má přiřazenou váhu dle počtu pixelů, které reprezentují měřenou fraktální křivku nebo sjednocení fraktálních křivek. Toto zpřesnění nebylo v rámci této práce použito, výše popsaný algoritmus dával dostatečně dobré výsledky při praktické realizaci. Více detailů o zpřesnění metody viz [8].



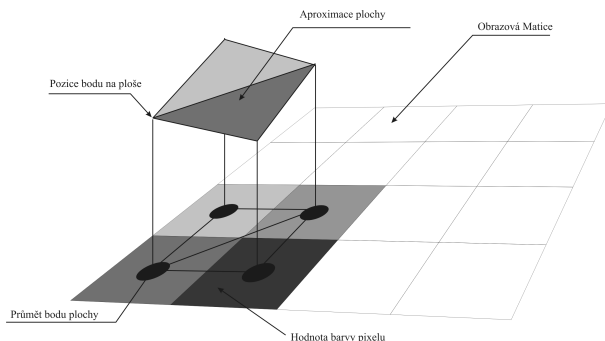
Obrázek 4.2: Pokrytí aproximace fraktální křivky čtvercovou sítí při měření metodou „Box Counting“.

4.2 Metody měření dimenze fraktálních ploch

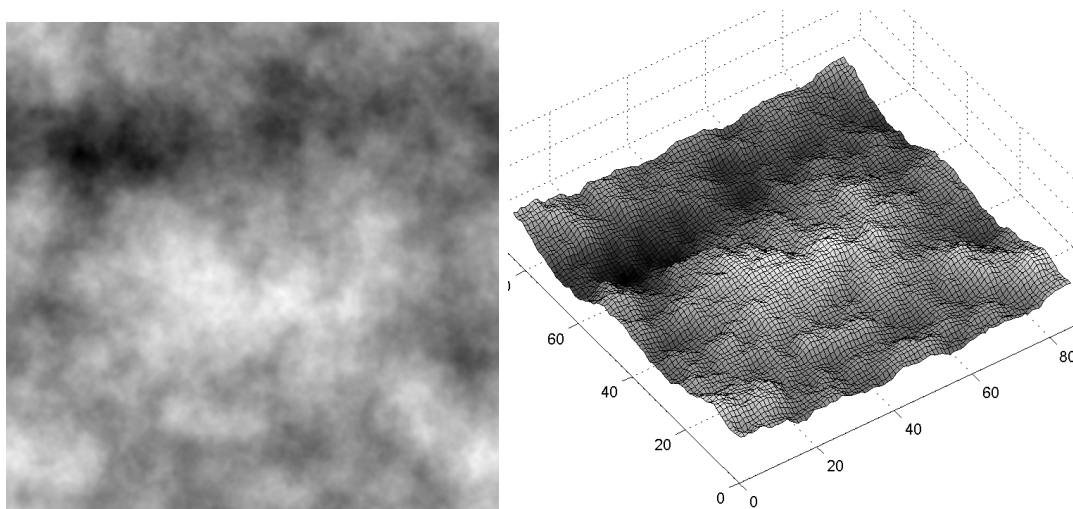
4.2.1 Počítačová reprezentace aproximace fraktální plochy

Při praktických realizacích popsaných v praktické části byly odhadovány dimenze ploch snímaných elektronovým mikroskopem. V tomto případě jsou tedy data reprezentovaná obrazovou maticí, kde hodnota barvy určuje výšku (plochy byly reprezentovány odstíny šedé) Každý bod obrazové matice může být interpretován jako bod

na snímané ploše, kde barva určuje souřadnici z a pozice v matici určuje souřadnice x, y . Tyto body interpretují konečnou podmnožinu bodů z původní snímané fraktální plochy a lze je využít ke konstrukci trojúhelníkové sítě, která splňuje definici aproximace plochy. Obrázek 4.3 ukazuje jak je plocha rekonstruována, obrázek 4.4 ukazuje obrazovou matici a její trojrozměrnou interpretaci.



Obrázek 4.3: Rekonstrukce aproximace plochy z obrazové matice.



Obrázek 4.4: Příklad obrazové matice a její trojrozměrná interpretace.

4.2.2 Metoda „Box Counting“ zobecněná pro plochy

Metodu „Box Counting“ lze odvodit pro plochy stejně jako pro křivky přímo z definice Hausdorffovy míry:

$$H^D(E) = \liminf_{\delta \rightarrow 0^+} \sum_{j=1}^{\infty} (\text{diam} U_j)^D$$

kde U_j jsou množiny δ – pokrytí. Položme $\delta = \varepsilon$ a zvolme maximální metriku, tj. $\varrho(x, y) = \max_i |x_i - y_i|$. Fraktální plochu pokryjeme sítí krychlí, kde průměr krychlí je roven v dané metrice ε . Počet krychlí, které obsahují část fraktální plochy označme $P(\varepsilon)$. Potom zřejmě platí:

$$H^D(E) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} P(\varepsilon) (\varepsilon)^D$$

Při praktické realizaci výpočtu fraktální dimenze pracujeme s konečnou maticí čísel typu $[m \times n]$ (m počet řádků, n počet sloupců), která reprezentuje aproximaci fraktální plochy. Barva každého pixelu matice určuje výškovou souřadnici, pozice v matici určuje souřadnici x a y . Při praktické realizaci máme obvykle ke snímkům ploch k dispozici měřítko, takže lze spočítat kolik pixelů reprezentuje např. jeden mikrometr, a jaký je převod škály barev na výškovou souřadnici – a tedy lze převést souřadnice bodů zpět do E_3 , ve kterém byla definovaná aproximace fraktální plochy. Plochu uzavřeme do krychle, jejíž hrana má délku rovnou maximu ze všech tří rozměrů plochy a každou její hranu rozdělíme zvolenou délkou ε a vytvoříme pro dané ε síť krychlí. Odpovídající $P(\varepsilon)$ je počet krychlí, které obsahují nějakou část aproximace fraktální plochy.

Z hlediska programování algoritmu je výhodné nepřevádět body obrazové matice do E_3 a pracovat v E_3 . Naopak je výhodné upravit výšku z tak, aby zůstal zachován reálný poměr mezi rozměrem v ose x a y a výškou plochy z – tj. pouze změnit interpretaci barev ze skutečného rozsahu hodnot na nový rozsah hodnot, který zachová poměry stran. Transformace je následující:

$$R = \frac{n}{x_{max} - x_{min}}$$

$$z_{p_{i,j}} = R \cdot \left(z_{min} + (z_{max} - z_{min}) \frac{B_{i,j} - B_{min}}{B_{max} - B_{min}} \right)$$

Kde n je počet sloupců obrazové matice (tj. maximální počet prvků ve směru osy x), x_{max} a x_{min} je minimální a maximální hodnota reálných souřadnic ve směru osy x a R je poměr mezi reálnými souřadnicemi a velikostí matice¹. z_{min} a z_{max} je minimální a maximální výšková souřadnice na ploše, $B_{i,j}$ je barva bodu v matici na pozici i, j , B_{min} a B_{max} je minimální a maximální hodnota barvy v obrazové matici² a z_p je nová výška přiřazená bodu obrazové matice na pozici i, j . Trojúhelníky určené následujícími body jsou pak reprezentací původní aproximace fraktální plochy ztransformované do systému souřadnic obrazové matice při zachování poměru výšky ku délkovým rozměrům plochy:

$$T_{i+1,j} : \{[i, j, z_{p_{i,j}}], [i+1, j, z_{p_{i+1,j}}], [i+1, j+1, z_{p_{i+1,j+1}}]\}, i = 0 \dots n-2, j = 0 \dots m-2$$

$$T_{i,j+1} : \{[i, j, z_{p_{i,j}}], [i, j+1, z_{p_{i,j+1}}], [i+1, j+1, z_{p_{i+1,j+1}}]\}, i = 0 \dots n-2, j = 0 \dots m-2$$

Tyto transformované trojúhelníky aproximace fraktální plochy lze využít k odhadu fraktální dimenze, aniž by bylo třeba převádět body obrazové matice do E_3 . Když položíme $\varepsilon_k = \frac{1}{k}$, tj.

$$H^D(E) = \lim_{k \rightarrow \infty} P(k) \left(\frac{1}{k} \right)^D$$

¹Aby všechny vztahy byly platné, předpokládá se, že měřítko ve směru osy x a y je stejné. Tato podmínka je splněna při snímkování povrchů většinou obvyklých metod.

²Tento vztah platí za předpokladu, že minimální hodnota barvy odpovídá minimální výšce na ploše. V opačném případě lze například transformovat barvy na ploše vztahem $\tilde{B}_{i,j} = \left(1 - \frac{B_{i,j} - B_{min}}{B_{max} - B_{min}} \right) \cdot (B_{max} - B_{min}) + B_{min}$. Tato transformace převede obrazovou matici na novou obrazovou matici, kde již barvy $\tilde{B}_{i,j}$ lze dosadit do transformačního vztahu.

lze odvodit stejný výsledek jako pro křivku:

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n (\ln P(k_i))^2 & \sum_{i=1}^n \ln \frac{1}{k_i} \\ \sum_{i=1}^n \ln \frac{1}{k_i} & n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \ln P(k_i) \cdot \ln \frac{1}{k_i} \\ \sum_{i=1}^n \ln P(k_i) \end{pmatrix}$$

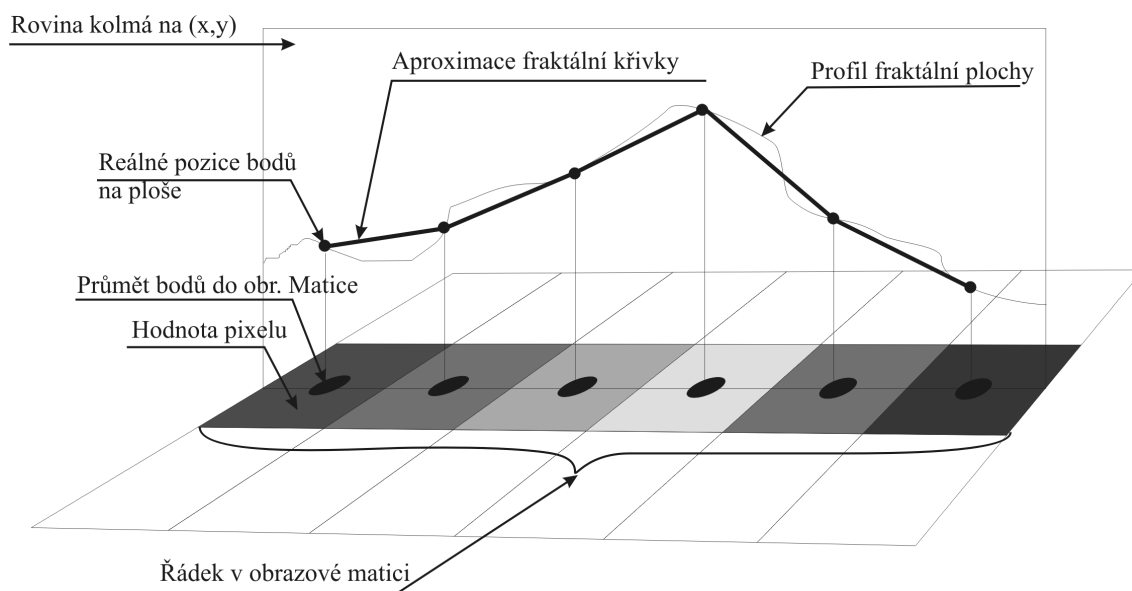
Tedy, odhad fraktální dimenze D :

$$D = -c_1$$

Síť krychlí bude sestrojena tak, že delší stranu obrazové matice rozdělíme na k dílů. V závislosti na délce strany obdržíme délku hrany krychle. Druhou stranu obrazové matice rozdělíme na díly o stejné délce (počtu pixelů) jako delší stranu³. Nad vzniklou čtvercovou sítí se setrojí síť krychlí. Hodnota $P(k)$ je počet krychlí, které obsahují alespoň část kteréhokoli trojúhelníka $T_{i+1,j}$ nebo $T_{i,j+1}$.

4.2.3 Metoda řezů

Řez fraktální plochou vůči rovině (x, y) rovinou kolmou na (x, y) je primitivní F-křivka – viz věta 3.2.2. Teoreticky se může stát, že její fraktální dimenze bude rovna jedné, ale obecně lze předpokládat, že její dimenze bude větší než jedna. Na řádek (sloupec) obrazové matice lze nahlížet jako na reprezentaci řezu plochy rovinou kolmou na (x, y) a rovnoběžnou s osou x (y). Řádek (sloupec) obrazové matice je množina konečného počtu bodů, které leží v rovině řezu a pokud je propojíme úsečkami, získáme aproximaci fraktální křivky. Hodnota barvy udává výšku, ve které daný bod leží, viz ilustrativní obrázek 4.5.



Obrázek 4.5: Rekonstrukce aproximace fraktální křivky z obrazové matice reprezentující fraktální plochu.

³Pokud je délka kratší strany nesoudělná s délkou hrany krychle, poslední krychle v řadě bude „přechýlená“ z obrazové matice. To není problém, a tyto krychle mohou být použité k pokrytí, protože stále obsahují část plochy.

Pro korektní odhad dimenze takto zkonstruované aproximace křivky je třeba aproximaci křivky korektně zobrazit – to znamená, že musí být zachován poměr mezi výškou a délkou křivky. Aby bylo možné zachovat poměr mezi délkou a výškou musí být známé měřítko, tj. kolik pixelů reprezentuje jednu délkovou jednotku a transformace barev na výšku. Výchozí souřadnice bodu je tedy dána indexem i , který určuje pozici bodu v řádku (sloupci) obrazové matice a barvou B_i , která určuje souřadnici z . Souřadnice bodu v E_2 se spočtou následovně:

$$x_i = x_{min} + \frac{i}{n-1} \cdot (x_{max} - x_{min}), \quad i = 0 \dots n-1$$

$$z_i = z_{min} + (z_{max} - z_{min}) \frac{B_i - B_{min}}{B_{max} - B_{min}}, \quad i = 0 \dots n-1$$

kde x_{min} a x_{max} je minimální a maximální hodnota souřadnice x v E_2 , z_{min} a z_{max} je minimální a maximální výška na křivce v E_2 , B_{min} a B_{max} je minimální hodnota barvy, která reprezentuje výšku a n je počet prvků na řádku (ve sloupci) obrazové matice.

Úsečky určené body $[x_i, z_i]$, $[x_{i+1}, z_{i+1}]$, $i = 0 \dots n-2$ jsou aproximace fraktální křivky, která vznikla jako průnik fraktální plochy s rovinou řezu. Tyto úsečky lze zobrazit v obrazové matici - souřadnice bodů $[i, j]$ v obrazové matici se spočtou následovně:

$$i = \text{Round} \left(\frac{x_i - x_{min}}{x_{max} - x_{min}} \cdot K \right)$$

$$j = \text{Round} \left(\frac{z_i - z_{min}}{z_{max} - z_{min}} \cdot L \right)$$

Výsledná obrazová matice bude mít rozměry $K \times L$, ($K, L \in \mathbb{N}$). Aby nedocházelo k „deformaci“ křivky, musí platit následující vztah:

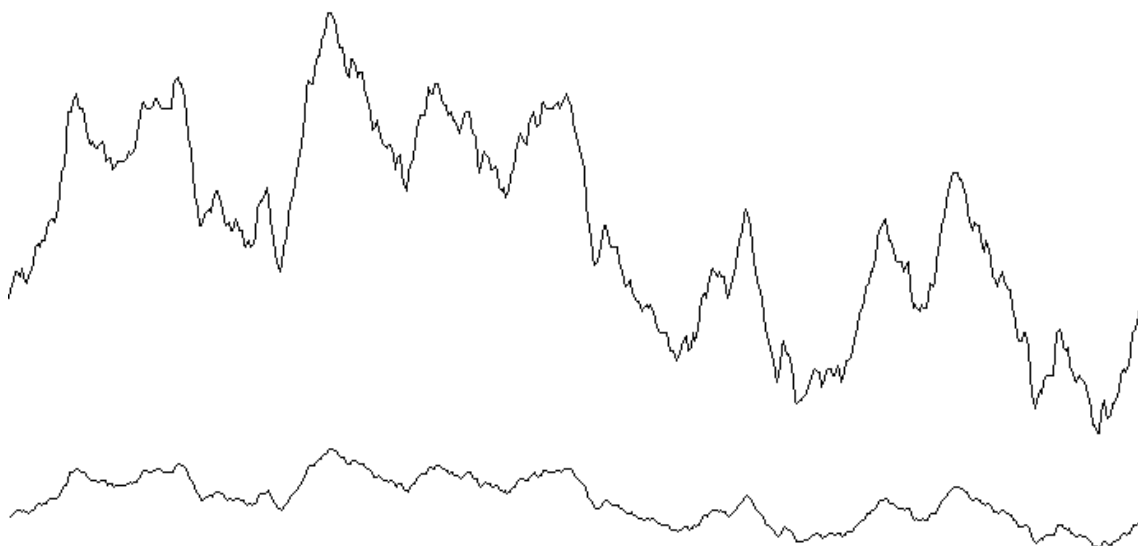
$$\frac{x_{max} - x_{min}}{z_{max} - z_{min}} \approx \frac{K}{L}$$

tj. poměr výšky křivky ku délce křivky musí být velmi podobný jako délka obrazové matice ku šířce obrazové matice. Pokud tento poměr není zachován, dojde k deformaci křivky a to může vést k chybnému odhadu dimenze. Z obrázku 4.6 je zřejmé, že při hrubém porušení pravidla o zachování poměru mezi výškou a délkou může dojít ke ztrátě detailů a odhadovaná dimenze bude výrazně menší.

Jestliže obrazová matice reprezentující plochu měla rozměry $m \times n$, lze sestavit m aproximací fraktálních křivek ve směru osy x a n aproximací fraktálních křivek ve směru osy y , jejichž dimenzi lze změřit metodami popsanými v podkapitole 4.1.

Definice 4.2.1: Nechť fraktální plochou E vůči rovině (x, y) , jejíž průmět do roviny (x, y) je konvexní množina, prochází n různých rovin kolmých na (x, y) . Průnik těchto rovin s fraktální plochou E tvoří podle věty 3.2.2 n fraktálních křivek, označme je f_i , $i = 1 \dots n$. Potom číslo definované následujícím vztahem nazýváme *plošná dimenze fraktální plochy E* nebo zkráceně *plošná dimenze* a značíme $D_P(E)$.

$$D_P(E) = \frac{\sum_{i=1}^n H^D(f_i) \cdot D(f_i)}{\sum_{i=1}^n H^D(f_i)}$$



Obrázek 4.6: Stejná aproximace fraktální křivky obdržená jako průnik fraktální plochy a roviny kolmé na (x, y) zobrazená s různým poměrem $\frac{K}{L}$. Křivka nahoře splňovala zachování poměru výšky a délky, druhá křivka byla zobrazena bez zachování tohoto poměru.

kde $H^D(f_i)$ je Hausdorffova míra fraktální křivky f_i a $D(f_i)$ je fraktální dimenze křivky f_i .

Číslo D_P je vlastně vážený průměr dimenzí fraktálních křivek ležících v rovinách řezu. Váhami jsou v tomto případě Hausdorffovy míry křivek, protože délka fraktálních křivek je nekonečná. Z definice je zřejmé, že číslo D_P není určeno jednoznačně a v závislosti na volbě rovin řezu bude obvykle vycházet různé, nicméně pokud je charakter plochy podobný v celé oblasti, pak se číslo D_P nebude příliš lišit pro různé roviny řezu. Vyjímkou můžou být případy, kdy má plocha výrazně jinou strukturu v jednom směru – potom roviny řezu kolmé na tuto strukturu mohou dávat výrazně odlišné výsledky než roviny rovnoběžné s touto strukturou. I v takovém případě může být číslo D_P použito při praktických měřeních, je ovšem třeba tuto vlastnost D_P zohlednit při návrhu měření a experimentu.

V praxi číslo D_P obvykle odhadneme tak, že sestrojíme z obrazové matice plochy všechny aproximace křivek ve směru jedné osy a spočteme odhady fraktální dimenze D_i , $i = 0, \dots, m-1$ odpovídajících fraktálních křivek. Obě metody, „Box Counting“ i „Yard Stick“, lze použít nejen k odhadu dimenze, ale i Hausdorffovy míry, tudíž odhad čísla D_F lze spočítat přímo z definice. Pokud mají fraktální křivky stejnou nebo hodně podobnou Hausdorffovu míru, lze odhad D_P zjednodušit následujícím způsobem:

$$D_P \approx \frac{\sum_{i=0}^{m-1} D_i}{m}$$

4.3 Závěrečné shrnutí

V této kapitole byl podán přehled nejčastěji používaných metod pro měření fraktálních dimenzí křivek a ploch. Zejména metody pro odhady fraktální dimenze křivek jsou v odborné literatuře dobře popsány. Hlavním přínosem této práce je definování

těchto metod pro aproximaci fraktální křivky. Mnoho odborných textů naprosto pomíjí fakt, že v počítači nepracujeme s opravdovým fraktálem, ale s jeho digitální aproximací. Světlou výjimkou je v tomto směru [8], odkud bylo čerpáno zejména při popisu metody „Box Counting“.

Dále byla v rámci práce detailně popsána zobecněná metoda „Box Counting“ pro odhad fraktální dimenze fraktální plochy, její popis se nepodařilo nalézt v dostupné odborné literatuře a proto byl formulován teoretický popis metody v rámci této práce. Dále byl zdefinován pojem plošná dimenze a popsán odhad plošné dimenze na základě obrazové matice. V inženýrských aplikacích je často používána průměrná dimenze křivek, které jsou obdrženy jako řez plochou. Nicméně používání tohoto průměru je obvykle spíše intuitivní. Použití této metody bylo v rámci práce zpřesněno a zformalizováno.

Všechny metody odhadu fraktální dimenze (ať už fraktální křivky nebo fraktální plochy) byly implementovány v prostředí Borland Delphi a použity v praktických aplikacích.

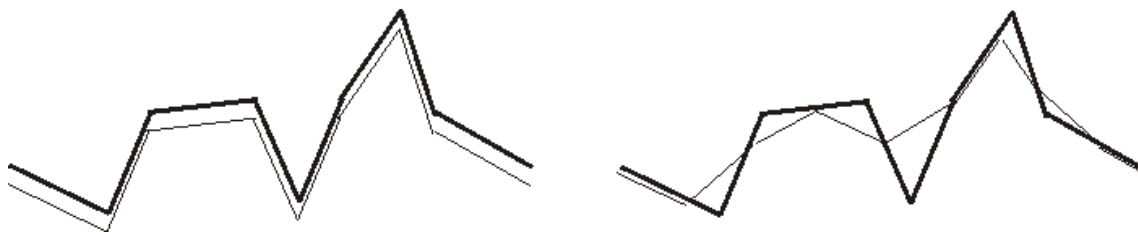
Kapitola 5

Faktory ovlivňující odhad dimenze

Tato kapitola se zabývá vlivem různých faktorů na odhad fraktální dimenze metodami popsány v kapitole 4. Tyto faktory je vždy třeba uvážit před samotným výpočtem, protože v některých případech mohou mít zásadní vliv na výslednou dimenzi a mohou zkreslit výsledek natolik, že výsledky již nelze použít. V této kapitole jsou rozebrány tři hlavní faktory: Aproximace křivky/plochy, použité měřítko a aditivní šum v obrazové matici.

5.1 Vliv aproximace fraktálu na odhad dimenze

V kapitole 3 byly definovány pojmy aproximace fraktální křivky a aproximace fraktální plochy jako konečná množina úseček a konečná množina trojúhelníků. Uvažujme nejprve vliv ε -aproximace fraktální křivky na výsledky měření metodou „Yard Stick“. Metoda „Yard Stick“ je založena na měření aproximace křivky různými měřidly délky ε_i , pro každé měřidlo obrátíme naměřenou délku $L(\varepsilon_i)$. Teoreticky by naměřená délka $L(\varepsilon_i)$ měla exponenciálně narůstat se zkracujícím se měřidlem. V praxi máme k dispozici pouze ε -aproximaci fraktální křivky, tj. konečnou množinu n úseček délky ε . Je tedy zřejmé, že pokud délka použitého měřidla ε_i je menší nebo rovna ε , exponenciální trend růstu vzdálenosti se zastaví a hodnota naměřené délky pro $\varepsilon_i = \varepsilon$ bude $L(\varepsilon_i) = n \times \varepsilon$, protože „pokládané“ měřidlo bude identické s úsečkami aproximace, a pro $\varepsilon_i \leq \varepsilon$ bude $L(\varepsilon_i) \leq n \times \varepsilon$, protože kratší měřidlo může „vynechat“ některé špice na aproximaci křivky, tj. měřidlo spojí dva body na sousedních úsečkách aproximace přímo a nikoli přes vrchol (přímá cesta je vždy kratší) – viz ilustrativní obrázek 5.1, kde silná čára znázorňuje aproximaci fraktální křivky a slabá čára je použité měřidlo.



Obrázek 5.1: Levá část znázorňuje měření měřidlem stejné délky jako jsou dlouhé úsečky aproximace křivky. Pravá část obrázku znázorňuje měření měřidly, která jsou kratší než délka úseček aproximace.

Ve výše popsané úvaze se předpokládalo, že všechny úsečky ε -aproximace fraktální křivky jsou stejně dlouhé. Obecně to nemusí být pravda, z definice pouze víme, že jich je konečný počet a pro jejich délky platí $|l_i| \leq \varepsilon$. Následující věta zobecňuje a formalizuje předchozí úvahy o vlivu aproximace fraktální křivky na měření metodou „Yard Stick“.

Věta 5.1.1: Nechť množina $A = \bigcup_{i=0}^{n-1} l_i$ je ε -aproximace fraktální křivky. Dále, označme $\varepsilon_{min} = \min_{i=0..n-1} \{|l_i|\}$ minimální délku úsečky z množiny A . Potom pro naměřenou délku aproximace fraktální křivky $L(\delta)$ změřenou měřidlem o délce $\delta \leq \varepsilon_{min}$ metodou „Yard Stick“ platí:

$$L(\delta) \leq \sum_{i=0}^{n-1} |l_i|$$

kde $|l_i|$ je délka úsečky l_i .

Důkaz 5.1.1: Při pokládání měřidla délky $\delta \leq \varepsilon_{min}$ mohou nastat 2 případy:

- Pro některé délky úseček může platit $|l_i| = k_i \cdot \delta$, kde k_i je přirozené číslo. V tomto případě se celá délka úsečky l_i započte do měřené vzdálenosti $L(\delta)$. Pokud všechny úsečky mají tuto vlastnost, tj. jejich délky jsou celočíselné násobky δ , potom zřejmě nastává rovnost:

$$L(\delta) = \sum_{i=0}^{n-1} |l_i| = \sum_{i=0}^{n-1} k_i \delta$$

- Pro úsečky z množiny A , pro které nelze nalézt žádné k přirozené, aby platilo $|l_i| = k_i \cdot \delta$, dojde k tomu, že při pokládání měřidla δ skončí koncový bod měřidla na úsečce l_i , označme tento bod y_i , ve vzdálenosti od konce menší než δ , tj. nedosáhne koncového bodu x_{i+1} úsečky l_i . Při hledání pokračování měření délky metodou „Yard Stick“ bude koncový bod dalšího „položeného“ měřidla na úsečce l_{i+1} , protože podle předpokladu věty platí $\delta \leq \varepsilon_{min}$, označme tento bod y_{i+1} . Z trojúhelníkové nerovnosti plyne:

$$\varrho(y_i, y_{i+1}) \leq \varrho(y_i, x_{i+1}) + \varrho(x_{i+1}, y_{i+1})$$

tedy v naměřené délce křivky nám chybí vzdálenost z bodu y_i do koncového bodu úsečky x_{i+1} a z koncového bodu úsečky x_{i+1} do dalšího bodu měření y_{i+1} .

Zkombinujeme-li oba případy dohromady, je zřejmé, že naměřená délka $L(\delta)$ může být nejvýše rovna součtu všech délek úseček, ale nikdy nemůže tento součet překročit. \square

Zřejmě tedy při měření délky aproximace fraktální křivky existuje kritická délka měřidla taková, že pro měřidla, která jsou delší než kritická délka bude naměřená délka narůstat se zkracováním měřidla, zatímco pro měřidla, která jsou kratší než kritická délka měřidla, se délka nebude příliš lišit od součtu délek úseček aproximace fraktální křivky. To může silně ovlivnit odhad fraktální dimenze metodou Yard stick, protože ta předpokládá, že naměřená délka exponenciálně roste pro zkracující se měřidlo.

Pro ilustraci uvažujme fraktální křivku, která splňuje předpoklady Richardsonova vzorce, tj. lze pro odhad její dimenze použít metodu „Yard Stick“ a má parametry $K = 1$, $D = 1.2$, tj. její Hausdorffova míra je 1 a její fraktální dimenze je 1.2. Dále, předpokládejme, že máme k dispozici ε -aproximaci takovou, že minimální délka ε_{min} je rovna 0.5. Předpokládejme, že pro měření délek $L(\varepsilon_i)$ byly použity následující hodnoty: $\varepsilon_1 = 4$, $\varepsilon_2 = 2$, $\varepsilon_4 = 1.0$, $\varepsilon_5 = 0.5$. Potom, (v ideálním případě) je pro hodnoty $L(\varepsilon_i)$ přesně platný Richardsonův vzorec $L(\varepsilon) = K\varepsilon^{1-D}$ a délky $L(\varepsilon_i)$ postupně nabývají následujících hodnot: $L(4) = 0.7579$, $L(2) = 0.8706$, $L(1) = 1$, $L(0.5) = 1.1487$ (ideální hodnoty dle Richardsonova vzorce). Pokud odhadneme fraktální dimenzi metodou nejmenších čtverců (viz podkapitola 4.1.2), obdržíme $c_1 = -0.2$ a odhadnutá dimenze je potom rovna 1.2. Pokud soubor měřidel ε_i rozšíříme ještě o hodnoty menší než minimální hodnota $\varepsilon_{min} = 0.5$, např. o $\varepsilon_5 = 0.25$ a $\varepsilon_6 = 0.1$. S ohledem na předcházející větu budou hodnoty $L(0.25) = L(0.1) \leq 1.1487$ (pro výpočet uvažujme 1.1487). Metodou nejmenších čtverců popsanou v podkapitole 4.1.2 obdržíme $c_1 = -0.1179$ a odhad dimenze bude potom 1.1179. Čím více hodnot ε_i bude menších než ε_{min} , tím bude odhad dimenze nepřesnější.

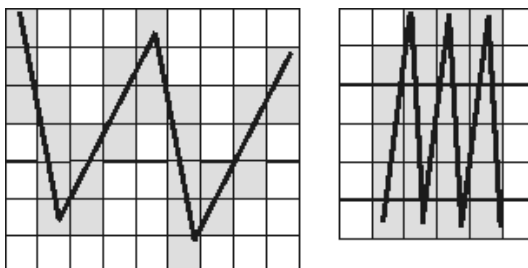
Další metodou měření dimenze, která se využívá v rámci této práce, je metoda „Box Counting“. Metoda je odvozena přímo z definice Hausdorffovy dimenze a je založená na pokrytí fraktální křivky čtvercovou sítí, a spočítání čtverců, které obsahují nějakou část křivky. Výpočet dimenze je odvozen ze vztahu $H^D(E) \approx P(k) \left(\frac{1}{k}\right)^D$, tj. závislost počtu čtverců pokrytí, které obsahují část fraktální křivky, na k je následující:

$$P(k) \approx H^D(E) \cdot k^D$$

Čím bude pokrytí jemnější, tím více bude pokrytí odpovídat pokrytí lomené čáry, tj. výsledek pokrytí bude spíše korespondovat s pokrytím konečného sjednocení úseček, než s ideálním pokrytím původní množiny, tj. reálná hodnota $P(k)$ bude spíše rovna následující hodnotě:

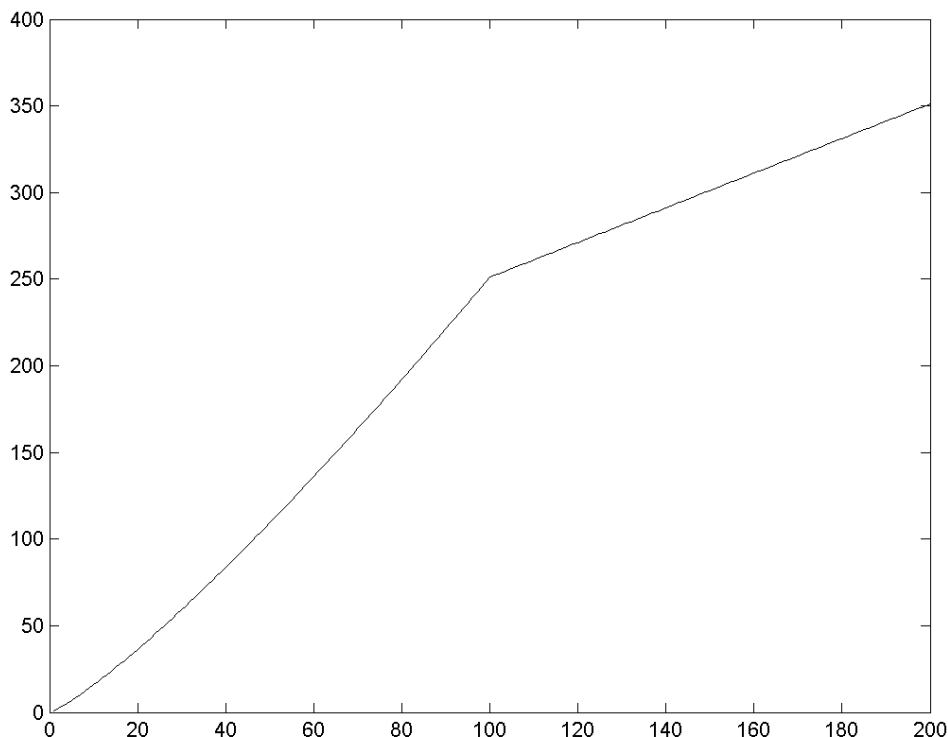
$$P(k) \approx H^D(E) \cdot k$$

Nalezení kritické hodnoty k není tak snadné jako pro metodu „Yard Stick“, protože kritická hodnota k nezávisí jen na minimální délce úsečky z ε -aproximace křivky, ale i na tvaru křivky. Zřejmě pro křivky, kde koncové body úseček jsou k sobě blíže než je minimální délka úsečky, bude kritická hodnota k vyšší, než pro křivky, které jsou více „roztažené“ – viz obrázek 5.2, na kterém jsou aproximace dvou křivek se stejnou délkou úseček a pokryté stejnou sítí.



Obrázek 5.2: Příklad dvou aproximací křivek se stejnou délkou úseček a pokryté stejnou čtvercovou sítí. Zatímco pokrytí křivky vlevo se blíží pokrytí množiny úseček, křivka vpravo stále vykazuje pokrytí, které může být použito k odhadu fraktální dimenze.

Kritickou hodnotu k lze odhadnout. Metodu objasníme na následujícím příkladu. Uvažujme křivku o míře $H^D(E) = 1$ a $D = 1.2$. A řekněme, že kritická hodnota, kdy pokrytí se mění z pokrytí fraktální křivky na pokrytí množiny úseček, je pro $k = 100$. Potom závislost $P(k)$ na k bude mít přibližně průběh jaký je uveden na obrázku 5.3.



Obrázek 5.3: Průběh závislosti $P(k)$ v závislosti na k a změna trendu růstu $P(k)$ ve chvíli, kdy se začíná pokrytím spíše měřit dimenze úseček tvořících aproximaci než dimenze aproximované fraktální množiny.

Z tohoto (idealizovaného) trendu je zřejmé, že ve chvíli, kdy výsledky pokrytí přestávají korespondovat s původní fraktální množinou, ale začínají spíše popisovat aproximaci křivky, přírůstek hodnot $P(k)$ se zmírňuje. Při reálné aplikaci nebude změna tak prudká, nicméně růst $P(k)$ se postupně zastaví úplně – ve chvíli, kdy velikost pokrývajících čtverců bude blízká velikosti jednoho pixelu. Nalezením hodnoty k , pro kterou trend růstu $P(k)$ poklesne, lze odhadnout kritickou hodnotu k pro danou aproximaci křivky.

Výsledek pro metodu „Box Counting“ lze zobecnit i pro měření dimenze ploch zobrazenou metodou „Box Counting“. Veškeré úvahy zůstávají platné i pro aproximaci plochy trojúhelníky – i zde se pro dostatečně malé krychle pokrytí začíná prosazovat trend kousků rovin, tj. opět dochází k poklesu trendu růstu hodnot $P(k)$.

Metoda řezů je založena na výpočtu dimenzí aproximací křivek, které jsou získány jako průniky rovin kolmých na rovinu (x, y) s fraktální plochou. Pro výpočet dimenze získaných aproximací fraktálních křivek lze použít jak metodu „Yard Stick“ tak „Box Counting“. Vliv aproximace křivky popsany výše zůstává platný i pro aproximace fraktálních křivek, které jsou obdrženy jako řez aproximace fraktální

plochy.

5.2 Vliv měřítka na odhad dimenze

Vliv měřítka na odhad dimenze je významný zejména pro fraktální plochy sestojené z obrazových matic, ať už se odhad dimenze provádí přímo zobecněnou metodou „Box Counting“ nebo metodou řezů. Důvod je ten, že když se zpracovávají přímo snímky křivek, jsou obvykle zobrazeny v reálném poměru výšky a šířky a tudíž není třeba tyto poměry upravovat. V případě, že aproximace fraktální plochy je reprezentována obrazovou maticí, kde indexy v matici určují souřadnice bodu x, y a barva určuje výškovou souřadnici z , je třeba před výpočtem dimenze kteroukoli metodou správně interpretovat výšku a indexy v matici.

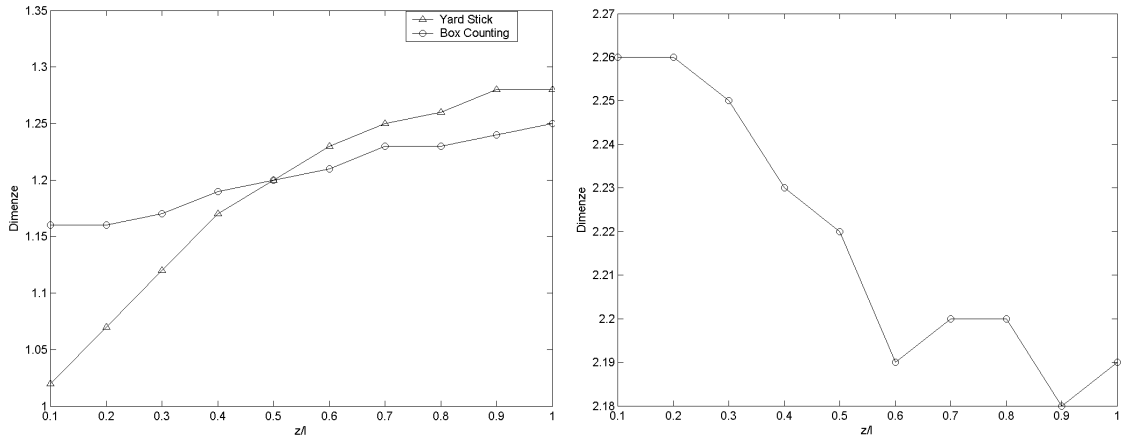
Pro transformaci indexů matice do reálných souřadnic je obvykle k dispozici měřítko, ve kterém byl obraz snímán, a proto je snadné správně přepočíst indexy bodů v obrazové matici na reálné souřadnice bodů. Pro některé metody snímání ploch může být problém zjistit absolutní hodnoty výšky, například pro snímky ploch elektronovým mikroskopem je známo pouze relativní rozložení výšek, tj. lze rozlišit, které body leží níže a výše, ale chybí konkrétní údaj o výšce bodu. Proto se v této podkapitole zaměříme na analýzu situace, kdy délkové rozměry se nemění, a mění se výškové rozměry.

Pro účely analýzy měřítka byla sestrojena zlomková Brownova plocha o teoretické dimenzi 2.2. Podle věty 2.5.2 budou mít řezy ve směru osy x a y teoretickou fraktální dimenzi 1.2. Metoda řezů k odhadu tzv. plošné dimenze je založena na výpočtu průměrné dimenze řezů – tj. tato metoda nám poskytuje statistický soubor dimenzí řezů, který lze využít k analýze vlivu měřítka nejen na odhad plošné dimenze, ale i vliv měřítka na přesnost metod „Yard Stick“ a „Box Counting“. Pro test vlivu změny měřítka byl využit stejný software, jako pro zpracovávání reálných ploch v praktické části této práce. Tento software vyžaduje zadání délkového měřítka a umožňuje měnit poměr mezi výškou a délkou hrany obrazu (vstupní obrazové matice byly čtvercové o rozměru 512×512). V rámci analýzy vlivu měřítka byly postupně měřeny plošné dimenze metodou řezů (s využitím metody „Yard Stick“ a „Box Counting“ pro odhad dimenzí jednotlivých křivek) a zobecněné metody „Box Counting“ pro odhad dimenze plochy. Délkové měřítko bylo nastaveno následovně: 3 pixely = 1 mikrometr. Poměr výšky z ku délce hrany l se měnil v rozsahu 0.1 až 1.0 s přírůstkem 0.1. Následující tabulka 5.1 ukazuje závislost odhadnuté dimenze řezů a plochy na volbě poměru výšky ku délce $\frac{z}{l}$, závislost je vykreslena na obrázku 5.4.

z/l	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
Box Counting	1.16	1.16	1.17	1.19	1.20	1.21	1.23	1.23	1.24	1.25
Yard Stick	1.02	1.07	1.12	1.17	1.20	1.23	1.25	1.26	1.28	1.28
Zobec. Box Counting	2.26	2.26	2.25	2.23	2.22	2.19	2.20	2.20	2.16	2.19

Tabulka 5.1: Vliv změny poměru $\frac{z}{l}$ na odhad dimenze třemi různými metodami pro zlomkovou Brownovu plochu o teoretické dimenzi 2.2.

Z tabulky a obrázků plyne, že změna měřítka ovlivňuje odhady dimenzí provedené libovolnou metodou. Dále je zřejmé, že metoda „Yard Stick“ je na změnu měřítka nejvíce citlivá – rozsah odhadnuté dimenze se měnil od 1.02 po 1.28 – tj.



Obrázek 5.4: Změna dimenze odhadnutá metodou řezů (vlevo) a změna dimenze odhadnutá zobecněnou metodou „Box Counting“ (vpravo).

v řádu desetin, zatímco rozsah odhadnuté dimenze metodou „Box Counting“ i zobecněnou metodou „Box Counting“ se měnil jen v řádu setin (od 1.16 do 1.25 a od 2.26 do 2.16). Ze získaných výsledků je zřejmé, že nejlepší odhad dostáváme pro poměr 0.5 – při tomto poměru obě metody – „Yard Stick“ i „Box Counting“ naměřily stejnou dimenzi 1.2 a zobecněná metoda „Box Counting“ naměřila dimenzi 2.22. Pokud je poměr výšky a délky pro reálnou plochu neznámý, tato vlastnost může být využita k přibližnému odhadu poměru výšky ku délce – vyzkouší se několik poměrů a ten, pro který je rozdíl dimenze odhadnuté metodou „Box Counting“ a „Yard Stick“ minimální, použijeme pro danou plochu. Tato metoda byla otestována na snímku reálné plochy povrchu kovu (měď) opotřebovaného třením. Tabulka 5.2 ukazuje naměřené hodnoty pro různé poměry z/l . Navíc je v tabulce hodnota 0.267, která byla odhadnuta jinou metodou (viz kapitola 6). Z hodnot v tabulce bychom na základě výše popsané metody zřejmě vybrali hodnotu 0.2 nebo 0.25 pro které byl minimální rozdíl mezi odhadnutými dimenzemi. To dobře koresponduje s hodnotou 0.267, která byla odhadnuta jinou metodou, která je přímo spojena s procesem vzniku fraktálního povrchu v tomto konkrétním případě.

z/l	0.1	0.15	0.2	0.25	0.267	0.3	0.35	0.4
Box Counting	1.37	1.37	1.36	1.39	1.39	1.38	1.39	1.39
Yard Stick	1.19	1.31	1.37	1.40	1.40	1.40	1.41	1.42
Rozdíl	0.18	0.06	0.01	0.01	0.01	0.02	0.02	0.03

Tabulka 5.2: Závislost odhadu fraktální dimenze povrchu mědi opotřebovaného třením měřená pro různé poměry $\frac{z}{l}$. Hodnota 0.267 byla odhadnuta z fyzikálních vlastností povrchu metodou popsanou v kapitole 6.

5.3 Vliv šumu v obraze a jeho filtrace na odhad dimenze

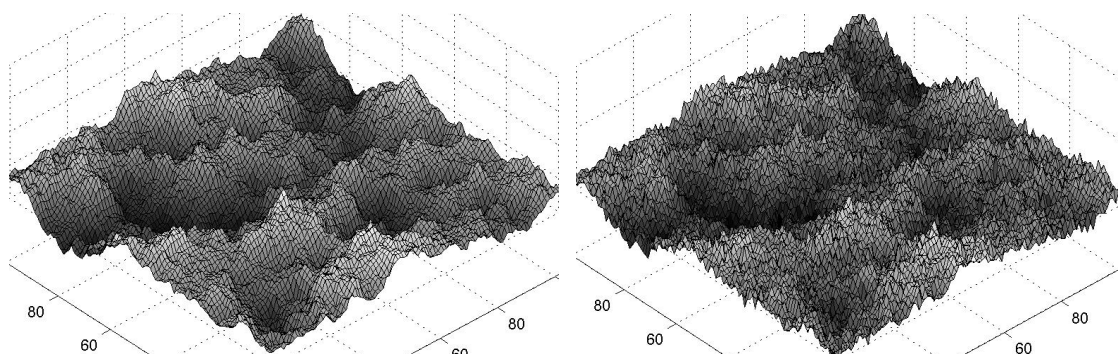
Vliv šumu na odhady fraktální dimenze byl analyzován pro fraktální plochy, ať už jsou měřeny metodou řezů, nebo zobecněnou metodou „Box Counting“. Fraktální plochy bývají v praktických aplikacích často reprezentovány obrazovou maticí.

Při snímání ploch běžnými metodami je takřka nemožné pořídit snímky ploch takové, aby neobsahovaly šum. V praktické části této práce byly zpracovávány snímky ploch z elektronového mikroskopu. Tyto snímky obsahovaly vysokou míru aditivního šumu, který může být modelován následovně:

$$G = A + S$$

kde G je výsledná obrazová matice, A je ideální matice, která obsahuje přesnou informaci o výšce bodů plochy, které jsou poté využity k sestrojení aproximace plochy a matice S reprezentuje aditivní šum – pro každý prvek $s_{i,j}$ matice S platí, že má normální rozdělení $s_{i,j} \sim N(0, \sigma^2)$.

Pro analýzu vlivu šumu na odhad fraktální dimenze byly generovány Brownovy zlomkové plochy (viz podkapitola 2.5) a k nim byla přičtena matice náhodně generovaných hodnot S . Na obrázku 5.5 je vidět jak se změní aproximace plochy, pokud je sestrojena z matice G namísto matice A , obrázek 5.6 ukazuje řez sestrojěný z ideální matice A a obrázek 5.7 řez sestrojěný z matice G .

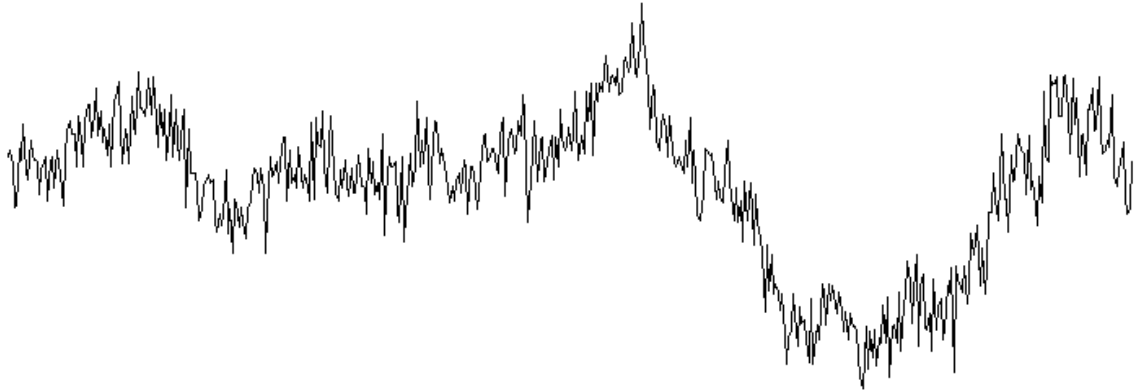


Obrázek 5.5: Příklad ideální Brownovy zlomkové plochy (vlevo) a stejné plochy sestrojěné z obrazové matice s vysokou mírou aditivního šumu (vpravo).



Obrázek 5.6: Příklad řezu předchozí plochou, řez byl sestrojěn z původní plochy.

Z těchto obrázků je patrné, že šum v obrazové matici pozmění charakter jak plochy, tak i řezů – obecně se stávají členitější, což zřejmě povede k nárůstu fraktální dimenze odhadované z ploch nebo řezů sestrojěných z obrazových matic se šumem, kde šum nebyl potlačen. Je zřejmé, že při vyšší míře šumu nebudou odhadnuté dimenze příliš korespondovat s původní dimenzí plochy, ale spíše budou korespondovat



Obrázek 5.7: Příklad řezu předchozí plochou, zkonstruovaný z obrazové matice se šumem.

s členitostí, kterou do vstupních dat vnáší aditivní šum, proto je třeba míru šumu ve vstupní obrazové matici potlačit.

Aditivní šum lze obecně potlačit konvolučními filtry typu dolní propust, které potlačují v obraze vysoké frekvence. Při potlačování šumu ve vstupní obrazové matici je třeba dát pozor na přílišnou filtraci, ta by zřejmě vedla nejen k odstranění šumu v obraze, ale i k degradaci detailů na ploše, což by vedlo ke snížení odhadované dimenze. V rámci této práce byl analyzován vliv následujících filtrů pro odstranění šumu na výslednou dimenzi:

$$\begin{aligned}
 F_1 &= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} & F_3 &= \frac{1}{4.8976} \begin{pmatrix} 0.3679 & 0.6065 & 0.3679 \\ 0.6065 & 1.0000 & 0.6065 \\ 0.3679 & 0.6065 & 0.3679 \end{pmatrix} \\
 F_2 &= \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} & F_4 &= \frac{1}{6.1689} \begin{pmatrix} 0.0183 & 0.0821 & 0.1353 & 0.0821 & 0.0183 \\ 0.0821 & 0.3679 & 0.6065 & 0.3679 & 0.0821 \\ 0.1353 & 0.6065 & 1.0000 & 0.6065 & 0.1353 \\ 0.0821 & 0.3679 & 0.6065 & 0.3679 & 0.0821 \\ 0.0183 & 0.0821 & 0.1353 & 0.0821 & 0.0183 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Zřejmě filtry F_1 a F_2 reprezentují nejjednodušší filtr typu dolní propust. Hodnoty ve filtrech F_3 a F_4 byly zpočteny následujícím vztahem:

$$f_{i,j} = e^{-\frac{x^2+y^2}{2\cdot\sigma^2}}$$

kde $x = i - (k + 1)$, $y = j - (k + 1)$ pro $i, j = 1 \dots 2 \cdot k + 1$ ($k = 1$ pro F_3 , $k = 2$ pro F_4) a $\sigma = 1$. Teoretická hodnota $\frac{1}{2\pi\sigma^2}$, kterou je třeba násobit hodnoty $f_{i,j}$ aby šlo o dvojrozměrné Gaussovo rozdělení, byla nahrazena hodnotou $\frac{1}{\sum_{i=1}^{2k+1} \sum_{j=1}^{2k+1} f_{i,j}}$.

Zřejmě tedy filtry F_3 a F_4 reprezentují filtry s Gaussovým jádrem. Vliv šumu a filtrace šumu byl analyzován experimentálně. Byly vygenerovány plochy o teoretické dimenzi 1.2, 1.4 a 1.6 (při praktických aplikacích popsanych v této práci, se dimenze ploch pohybovala obvykle do 1.4). Pro každou hodnotu dimenze bylo vygenerováno 10 různých ploch, změřena jejich dimenze bez šumu, poté se šumem a s různou filtrací zobecněnou metodou „Box Counting“ a metodou řezů, kde dimenze řezů byla

odhadována metodou „Yard Stick“ a metodou „Box Counting“. Rozptyl přičteného šumu byl $0.03 \times z$, kde z je rozdíl mezi minimální a maximální výškou na vygenerované ploše¹. Vygenerované obrazové matice reprezentující plochu měly tozměr 512×512 pixelů. Pro odhady fraktální dimenze byl použit stejný software, jako byl použit k odhadům dimenze v praktických aplikacích. Tento software vyžaduje nastavení měřítka, pro výpočet bylo zvoleno následující měřítko:

- 1 mikrometr = 3 pixely
- Rozsah barev byl interpretován jako $0 = 0$ mikrometrů, $255 = 85.3$ mikrometrů (tj. poměr mezi délkovým a výškovým rozměrem byl nastaven na 0.5).

Poznamenejme, že toto nastavení neodpovídá přesně výškovým hodnotám původní plochy, nicméně je dobře nastavené zejména pro plochy s nižší fraktální dimenzí, které se v praktických aplikacích vyskytují častěji. Nastavit parametry úplně přesně by bylo složité, protože plochy byly získány z generovaného Fourierova spektra. Hodnota 0.5 je odhadnuta pro Brownovu zlomkovou plochu o dimenzi 1.2 metodou popsanou v podkapitole 5.2. Následující tabulky obsahují vypočtené hodnoty pro obrazovou matici reprezentující vygenerovanou plochu, matici se šumem a hodnoty získané z matice se šumem, která byla filtrována konvolucí obrazové matice a filtrů F_1 až F_4 . Symbol \bar{x}_D označuje v tabulkách průměrnou naměřenou dimenzi pro danou metodu výpočtu dimenze a vstupní data, s_D označuje směrodatnou odchylku. Index D označuje teoretickou plošnou dimenzi plochy².

Teoretická plošná dimenze 1.2						
	Yard Stick		Box Counting		Zobec. Box Counting	
Vstupní data	$\bar{x}_{1.2}$	$s_{1.2}$	$\bar{x}_{1.2}$	$s_{1.2}$	$\bar{x}_{1.2}$	$s_{1.2}$
Plocha	1.1873	0.0247	1.1935	0.0122	2.2191	0.0432
Plocha + šum	1.7045	0.0299	1.3753	0.0134	2.3305	0.0288
Filtr F_1	1.1991	0.0140	1.2018	0.0089	2.2238	0.0409
Filtr F_2	1.1534	0.0170	1.1601	0.0087	2.1995	0.0396
Filtr F_3	1.2114	0.0163	1.2096	0.0074	2.2294	0.0392
Filtr F_4	1.1834	0.0172	1.1872	0.0067	2.2186	0.0424

Tabulka 5.3: Hodnoty spočtené z odhadu dimenzí deseti ploch, které měly teoretickou dimenzi 1.2. $\bar{x}_{1.2}$ označuje průměr, $s_{1.2}$ směrodatnou odchylku.

Pro každou metodu odhadu fraktální dimenze byly testovány následující hypotézy na hladině významnosti 0.05:

1. Hodnota $\bar{x}_{1.2} = \bar{x}_{1.4}$ a $\bar{x}_{1.4} = \bar{x}_{1.6}$ pro ideální vstupní data bez šumu
2. Hodnota $\bar{x}_{1.2} = \bar{x}_{1.4}$ a $\bar{x}_{1.4} = \bar{x}_{1.6}$ pro obrazovou matici se šumem
3. Hodnota $\bar{x}_{1.2} = \bar{x}_{1.4}$ a $\bar{x}_{1.4} = \bar{x}_{1.6}$ pro obrazovou matici se šumem, filtrovanou filtrem F_1

¹Plocha byla zobrazena v odstínech šedé od 0 do 255, tj. minimální hodnota výšky byla zobrazena jako 0, maximální hodnota výšky byla zobrazena jako 255. To znamená, že pro libovolnou plochu byla jasová úroveň šumu $0.03 \times 255 = 7.65$. Jinými slovy, rozptyl v jasové hodnotě byl zhruba 8 pro libovolnou plochu.

²Dimenze odvozená metodou řezů je pro zlomkové Brownovy plochy $B_H(t_1, t_2)$ podle věty 2.5.2 rovna $D = 2 - H$. To znamená, že pokud teoretická dimenze plochy je například 2.2 ($H = 0.8$), potom teoretický výsledek obdržení metodou řezů bude 1.2.

Teoretická plošná dimenze 1.4						
	Yard Stick		Box Counting		Zobec. Box Counting	
Vstupní data	$\bar{x}_{1.4}$	$s_{1.4}$	$\bar{x}_{1.4}$	$s_{1.4}$	$\bar{x}_{1.4}$	$s_{1.4}$
Plocha	1.3423	0.0190	1.2781	0.0072	2.3143	0.0247
Plocha + šum	1.7142	0.0144	1.3893	0.0084	2.3800	0.0169
Filtr F_1	1.2924	0.0122	1.2477	0.0078	2.2997	0.0203
Filtr F_2	1.2274	0.0153	1.2007	0.0071	2.2710	0.0259
Filtr F_3	1.3021	0.0126	1.2559	0.0078	2.2933	0.0336
Filtr F_4	1.2700	0.0123	1.2293	0.0082	2.2913	0.0247

Tabulka 5.4: Hodnoty spočtené z odhadu dimenzí deseti ploch, které měly teoretickou dimenzi 1.4. $\bar{x}_{1.4}$ označuje průměr, $s_{1.4}$ směrodatnou odchylku.

Teoretická plošná dimenze 1.6						
	Yard Stick		Box Counting		Zobec. Box Counting	
Vstupní data	$\bar{x}_{1.6}$	$s_{1.6}$	$\bar{x}_{1.6}$	$s_{1.6}$	$\bar{x}_{1.6}$	$s_{1.6}$
Plocha	1.5239	0.0168	1.3643	0.0084	2.3893	0.0231
Plocha + šum	1.7303	0.0093	1.4282	0.0086	2.4231	0.0206
Filtr F_1	1.3780	0.0148	1.3021	0.0078	2.3493	0.0223
Filtr F_2	1.2931	0.0123	1.2523	0.0093	2.3128	0.0256
Filtr F_3	1.3975	0.0141	1.3150	0.0192	2.3543	0.0221
Filtr F_4	1.3544	0.0117	1.2882	0.0089	2.3391	0.0251

Tabulka 5.5: Hodnoty spočtené z odhadu dimenzí deseti ploch, které měly teoretickou dimenzi 1.6. $\bar{x}_{1.6}$ označuje průměr, $s_{1.6}$ směrodatnou odchylku.

4. Hodnota $\bar{x}_{1.2} = \bar{x}_{1.4}$ a $\bar{x}_{1.4} = \bar{x}_{1.6}$ pro obrazovou matici se šumem, filtrovanou filtrem F_2
5. Hodnota $\bar{x}_{1.2} = \bar{x}_{1.4}$ a $\bar{x}_{1.4} = \bar{x}_{1.6}$ pro obrazovou matici se šumem, filtrovanou filtrem F_3
6. Hodnota $\bar{x}_{1.2} = \bar{x}_{1.4}$ a $\bar{x}_{1.4} = \bar{x}_{1.6}$ pro obrazovou matici se šumem, filtrovanou filtrem F_4

Nezamítnutí některé z hypotéz na dané hladině významnosti pro některou z použitých metod znamená, že tato metoda není schopná rozlišit pro dané vstupní obrazové matice mezi dvěma plochami, jejichž teoretické dimenze se liší o 0.2. Jinými slovy, testem těchto hypotéz lze nalézt takové metody odhadu dimenze a filtry pro potlačení šumu, které dohromady mají dostatečně dobrou rozlišovací schopnost a mohou být použity k porovnávání členitosti různých ploch. Z tohoto důvodu nebyly testovány hypotézy $\bar{x}_{1.2} = \bar{x}_{1.4} = \bar{x}_{1.6}$, protože k zamítnutí této hypotézy by stačilo, aby neplatila alespoň jedna rovnost, tj. metoda by rozlišovala mezi plochami jen v omezeném rozsahu fraktální dimenze. Jde tedy o dvouvýběrové testy, kde jeden výběr je měření deseti obrazových matic se stejnou teoretickou dimenzí a stejnými úpravami měřené stejnou metodou a druhý výběr je měření deseti obrazových matic s jinou teoretickou dimenzí než první soubor, ale upravované a měřené stejnými metodami.

Nejprve bylo otestováno, zda můžeme na hladině významnosti $\alpha = 0.05$ předpokládat, že porovnávané datové soubory mají stejný rozptyl, protože dvouvýběrové

testy se liší v závislosti na tom, zda mají oba výběry stejný rozptyl nebo zda mají různý rozptyl. Hypotézu, že dva soubory naměřených hodnot mají stejný rozptyl nezamítáme, pokud platí:

$$F_{\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1) < \frac{s_{D_1}^2}{s_{D_2}^2} < F_{1-\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1)$$

kde n_1 a n_2 jsou počty prvků ve výběru (v tomto případě $n_1 = n_2 = 10$) a $F_\alpha(m, n)$ je α -kvantil Fischerova-Snedecorova rozdělení. Při konkrétní realizaci je: $F_{0.025}(9, 9) = 0.25$ a $F_{0.975}(9, 9) = 4.03$, hodnoty $\frac{s_{D_1}^2}{s_{D_2}^2}$ jsou v tabulce 5.6. Hodnoty zvýrazněné v tabulce tučně, neleží v požadovaném intervalu a hypotézu o stejném rozptylu výběrů zamítáme, jinými slovy, pro tyto případy je třeba použít dovuvýběrový test pro statistické soubory s různým rozptylem. Konkrétně se jedná o následující statistické soubory:

1. Plochy se šumem o teoretické dimenzi 1.2 a 1.4, měřené metodou „Yard Stick“
2. Plochy se šumem o teoretické dimenzi 1.2 a 1.4, filtrované filtrem F_1 , měřené zobecněnou metodou „Box Counting“
3. Plochy se šumem o teoretické dimenzi 1.4 a 1.6, filtrované filtrem F_3 , měřené metodou „Box Counting“

Testovací kritérium $\frac{s_{D_1}^2}{s_{D_2}^2}$						
	Yard Stick		Box Counting		Zobec. Box Counting	
Vstupní data	$s_{1.2}^2/s_{1.4}^2$	$s_{1.4}^2/s_{1.6}^2$	$s_{1.2}^2/s_{1.4}^2$	$s_{1.4}^2/s_{1.6}^2$	$s_{1.2}^2/s_{1.4}^2$	$s_{1.4}^2/s_{1.6}^2$
Plocha	1.687	1.281	2.852	0.733	3.049	1.149
Plocha + šum	4.319	2.385	2.555	0.957	2.890	0.672
Filtr F_1	0.827	0.685	1.287	1.000	4.063	0.827
Filtr F_2	1.239	1.544	1.509	0.575	2.335	1.026
Filtr F_3	0.884	0.800	0.884	0.166	1.358	2.319
Filtr F_4	1.945	0.760	0.660	0.853	2.943	0.972

Tabulka 5.6: Hodnoty testovacího kritéria $\frac{s_{D_1}^2}{s_{D_2}^2}$ pro různé metody a různé plochy.

Hypotézu H , že $\mu_{D_1} = \mu_{D_2}$, pro výběry kde nebyla zamítnuta hypotéza o stejném rozptylu, zamítneme na hladině významnosti α , pokud je splněna následující nerovnost:

$$\sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}} \frac{|\bar{x}_{D_1} - \bar{x}_{D_2}|}{\sqrt{(n_1 - 1)s_{D_1}^2 + (n_2 - 1)s_{D_2}^2}} \geq t_{1-\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2)$$

Hypotézu H , že $\mu_{D_1} = \mu_{D_2}$, pro výběry kde byla zamítnuta hypotéza o stejném rozptylu, zamítneme na hladině významnosti α , pokud je splněna následující nerovnost:

$$\frac{|\bar{x}_{D_1} - \bar{x}_{D_2}|}{\sqrt{s_{D_1}^2/n_1 + s_{D_2}^2/n_2}} \geq \frac{t_{1-\alpha/2}(n_1 - 1)s_{D_1}^2/n_1 + t_{1-\alpha/2}(n_2 - 1)s_{D_2}^2/n_2}{s_{D_1}^2/n_1 + s_{D_2}^2/n_2}$$

V obou vztazích jsou hodnoty n_1 a n_2 počty prvků ve výběrech (v tomto případě $n_1 = n_2 = 10$) a $t_\alpha(n)$ je α -kvantil Studentova rozdělení o n stupních volnosti.

Pro tuto konkrétní aplikaci dostáváme:

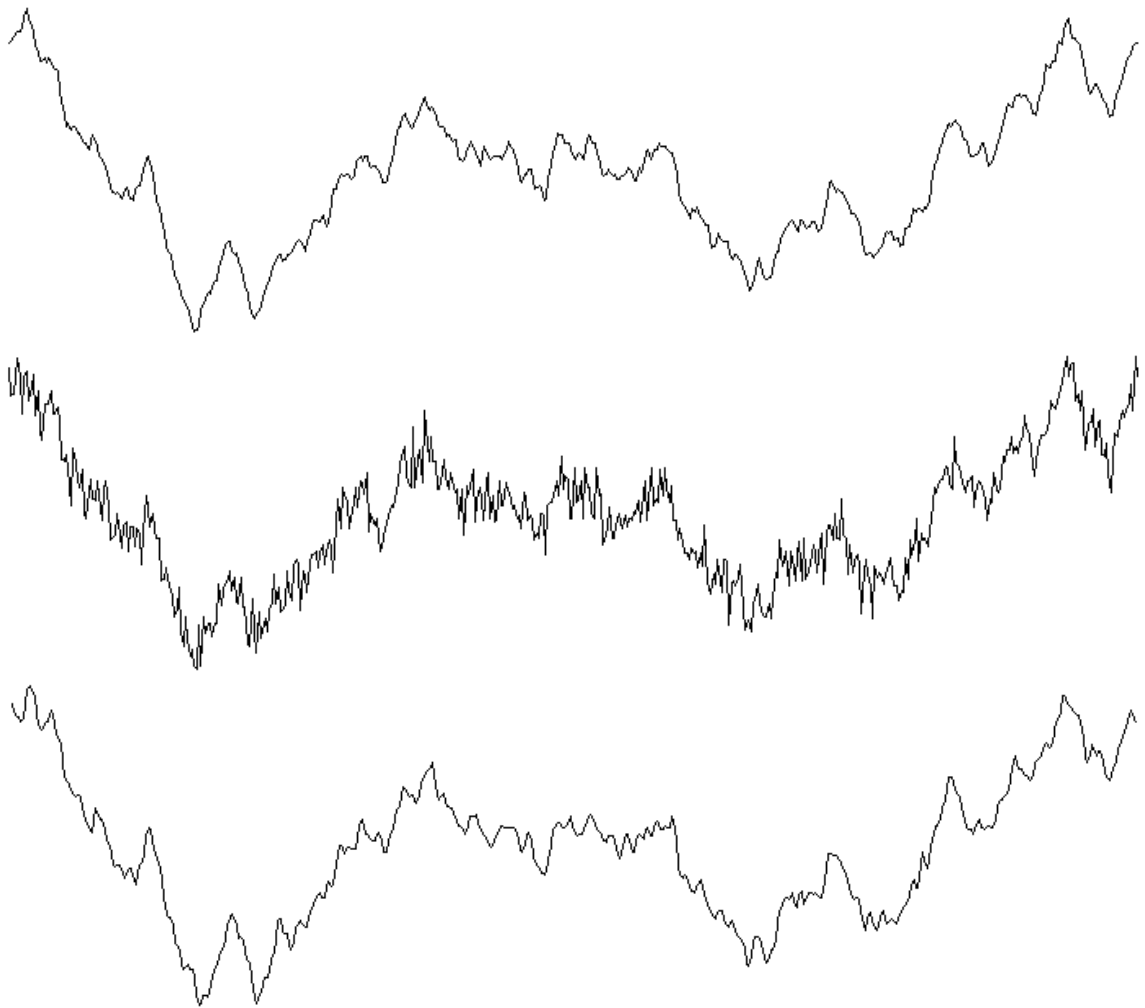
$$t_{0.975}(18) = 3.197$$

Hodnoty pravé strany nerovnosti pro výběry s různým rozptylem závisí na odhadu směrodatné odchylky a pro výše uvedené tři případy vychází hodnota pravé strany nerovnosti 3.25. Hodnoty levé strany nerovnosti spočtené podle příslušného vztahu v závislosti na tom, jestli považujeme rozptyl výběrů jako stejný nebo jako rozdílný jsou uvedeny v tabulce 5.7. Tučně zvýrazněné hodnoty jsou ty, pro které hypotézu H , tj. $\mu_{D_1} = \mu_{D_2}$ nezamítáme – neboli jde o případy, kdy nejsme schopni rozlišit, že jde o dvě plochy s různou teoretickou dimenzí.

Testovací kritérium pro test hypotézy H						
	Yard Stick		Box Counting		Zobec. Box Counting	
Vstupní data	$x_{1.2} = x_{1.4}$	$x_{1.4} = x_{1.6}$	$x_{1.2} = x_{1.4}$	$x_{1.4} = x_{1.6}$	$x_{1.2} = x_{1.4}$	$x_{1.4} = x_{1.6}$
Plocha	15.73	19.22	18.89	24.64	6.05	7.01
Plocha + šum	0.92	2.97	2.80	10.23	5.26	5.20
Filtr F_1	15.89	14.11	12.27	15.60	5.26	5.20
Filtr F_2	10.23	10.58	11.43	13.95	4.79	3.63
Filtr F_3	13.92	15.95	13.62	9.02	3.91	4.80
Filtr F_4	12.95	15.72	12.57	15.39	4.69	4.29

Tabulka 5.7: Hodnoty testovacího kritéria pro různé metody a různé plochy.

Z dat uvedených v tabulce je zřejmé, že výše popsané metody odhadu fraktální dimenze lze použít pro rozlišení ploch, které byly reprezentovány obrazovou maticí s aditivním šumem, pokud je šum odstraněn některým z filtrů F_1 až F_4 a metody nerozlišují mezi plochami s různou teoretickou dimenzí pouze v případě, že šum není nijak filtrován. Výjimkou je zobecněná metoda „Box Counting“. Při bližším pohledu na tabulky průměrných hodnot 5.3 až 5.5 je zřejmé, že kvalita odhadu všemi metodami (i pro ideální vstupní data bez šumu) klesá s roztoucí dimenzí vstupní plochy. Z pohledu „přiblížení se“ teoretické dimenzi se nejlépe jeví metoda „Yard Stick“ a filtrace filtrem F_3 (případně F_1), protože rozdíl mezi odhadnutou dimenzí a teoretickou dimenzí je nejmenší a rozsah odhadovaných dimenzí je největší, což poskytuje lepší rozlišení pro praktické aplikace. Obrázek 5.8 ilustruje vliv šumu a jeho filtrace filtrem F_3 na tvar profilu a tedy i odhad fraktální dimenze.



Obrázek 5.8: Příklad jednoho řezu zlomkovou Brownovou plochou, vrchní řez byl sestrojen z původní plochy, prostřední řez ze stejné plochy zkonstruované z obrazové matice se šumem a spodní řez byl sestrojen ze stejné obrazové matice upravené filtrem F_3 .

5.4 Závěrečné shrnutí

V rámci této práce byly analyzovány tři vlivy, které se často vyskytují v praktických aplikacích a jejichž dopad na odhady fraktální dimenze nebyl v dostupné odborné literatuře nalezen. Ukazuje se, že vlivy popsané v rámci této kapitoly nemohou být při praktických aplikacích ignorovány, ale že je třeba pro každou aplikaci zvážit, jaký dopad mohou mít na měření dimenze reálných útvarů z dostupných dat. Dále, pro každý popsaný faktor ovlivňující odhad fraktální dimenze byl v rámci práce navržen postup jak minimalizovat dopad tohoto faktoru na odhad fraktální dimenze.

Tato kapitola je důležitá pro praktické aplikace, které jsou součástí této práce, zejména pro analýzu závislosti koeficientu odolnosti proti opotřebení třením a fraktální dimenzí různých materiálů opotřebovaných třením, která je popsána v kapitole 6. V této praktické aplikaci bylo totiž třeba řešit všechny výše uvedené problémy. Potřebná analýza vlivů a návrh minimalizace jejich dopadů na odhad dimenze byl zpracován zcela v rámci této práce.

Část II

Aplikace fraktální dimenze

Kapitola 6

Analýza závislosti fraktální dimenze povrchů a koeficientu odolnosti proti tření








Koeficient odolnosti proti tření (wear resistance coefficient) kvantifikuje odolnost povrchu proti opotřebení třením. Nízká hodnota koeficientu znamená, že materiál se třením opotřebuje poměrně rychle a je snadné ho „poškrábat“, vysoká hodnota koeficientu znamená, že materiál je odolný proti tření a vhodný na plochy vystavené trvalému namáhání třením. Tento koeficient je znám pro některé kovy, ale určit ho pro nové slitiny je poměrně složité a drahé. V rámci této práce byla studována závislost mezi koeficientem odolnosti proti tření a fraktální dimenzí povrchu materiálu opotřebeného třením, která by na základě fraktální dimenze umožnila jednoduchý způsob odhadu koeficientu odolnosti proti tření. Taková metoda odhadu by byla výhodná pro rychlé a levné zjišťování koeficientu odolnosti proti tření u nových slitin. Tento problém byl řešen ve spolupráci s Ruskou akademií věd, Ústavem mechaniky a nauky o materiálu (Institute of Strength Physics and Materials Science, Siberian Division, Russian Academy of Sciences).

6.1 Popis vstupních dat

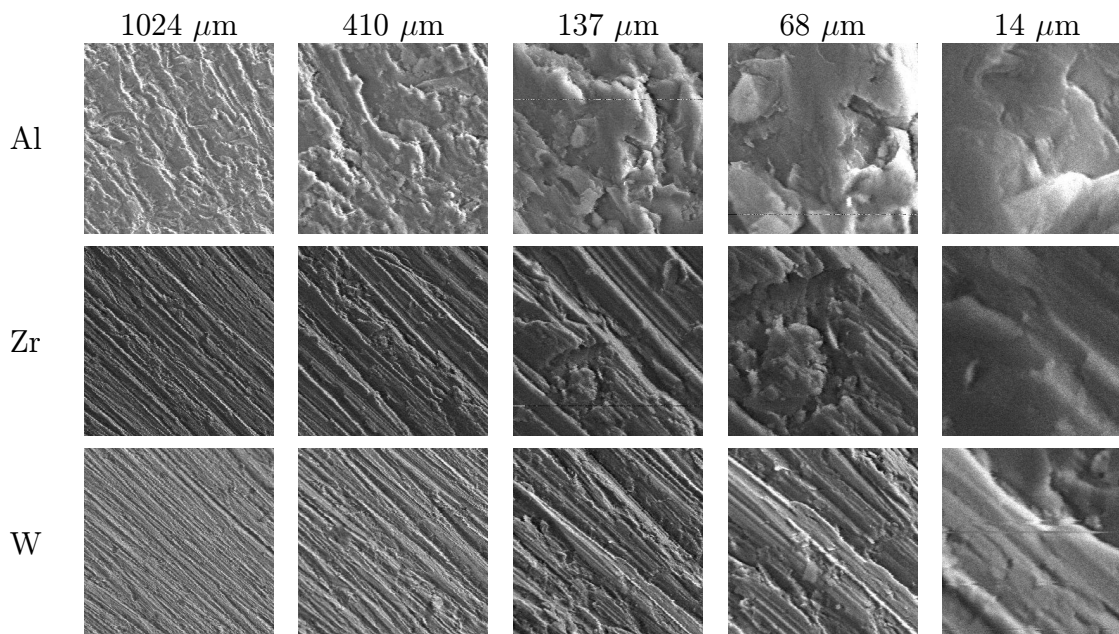
Vstupní data pro měření byly snímky ploch různých kovů, pro které je znám jejich koeficient odolnosti proti tření. Snímky byly pořízeny elektronovým mikroskopem v různém zvětšení. Rozlišení snímků z elektronového mikroskopu bylo 512×512 pixelů, snímky byly osmibitové v odstínech šedi, kde číslo 0 reprezentovalo černou barvu, číslo 255 barvu bílou. Snímané materiály byly: olovo (Pb), hliník (Al), měď (Cu), zirkon (Zr), kobalt (Co), titan (Ti) a Wolfram (W). Koeficienty odolnosti proti tření a příklady ploch daných materiálů opotřebených třením jsou v tabulce 6.1 (v tabulce je jen jedno zvětšení).

Plochy byly snímány v různém zvětšení, rozlišení 512×512 bylo zachováno pro všechna zvětšení. Délka hrany snímku byla postupně $14 \mu m$, $20 \mu m$, $41 \mu m$, $68 \mu m$, $102 \mu m$, $137 \mu m$, $205 \mu m$, $410 \mu m$, $682 \mu m$, $1024 \mu m$. Příklad, jak se liší snímky jednotlivých materiálů v různém rozlišení, je na obrázku 6.1. Z obrázku je zřejmé, že zatímco pro nízké rozlišení převládá pohled na množství škrábanců, při vysokém rozlišení je vidět detailní struktura jednotlivých škrábanců.

Z příkladu je také zřejmé, že pro vysoké a nízké rozlišení je struktura plochy

Materiál	Pb	Al	Cu	Zr	Co	Ti	W
Koeficient	1.5	5.3	9.4	14.7	21.0	33.5	58.0
Snímek plochy							

Tabulka 6.1: Ukázka snímků ploch, které byly použity pro analýzu závislosti koeficientu odolnosti proti tření a fraktální dimenze povrchů opotřebovaných třením.



Obrázek 6.1: Příklad tří materiálů s různou odolností proti tření, snímáných v různém rozlišení.

pro všechny materiály podobná a rozdíly v struktuře plochy jsou dobře patrné jen pro určitá zvětšení – z toho důvodu je třeba hledat závislost mezi fraktální dimenzí plochy a koeficientem odolnosti proti tření při stejném zvětšení všech vzorků a lze předpokládat, že závislost nebude platit pro libovolné zvětšení, ale pouze pro takové zvětšení, kde je patrný rozdíl ve struktuře ploch.

Plochy snímáných materiálů byly nejprve vyleštěny a poté posouvány po podložce s brusnými částicemi. Každý vzorek byl přitlačován k podložce stejnou silou a posouván stejnou rychlostí po stejně dlouhé dráze a poté byl snímán elektronovým mikroskopem. Pro více detailů o experimentu viz [13].

6.2 Faktory ovlivňující odhad fraktální dimenze

Odhad dimenze snímáných ploch byl zásadně ovlivněn dvěma faktory. Prvním faktorem byla vysoká míra aditivního šumu v obraze (více o vlivu šumu v podkapitole 5.3), druhým faktorem, který komplikoval odhad dimenze, byl fakt, že použitý elektronový mikroskop poskytuje pouze relativní informaci o výšce, tj. černá barva koresponduje s nejnižším bodem na ploše a bílá barva s nejvyšším bodem na ploše, ale absolutní údaj o výšce plochy je neznámý (více o vlivu poměru mezi délkou a výškou měřených objektů v podkapitole 5.2).

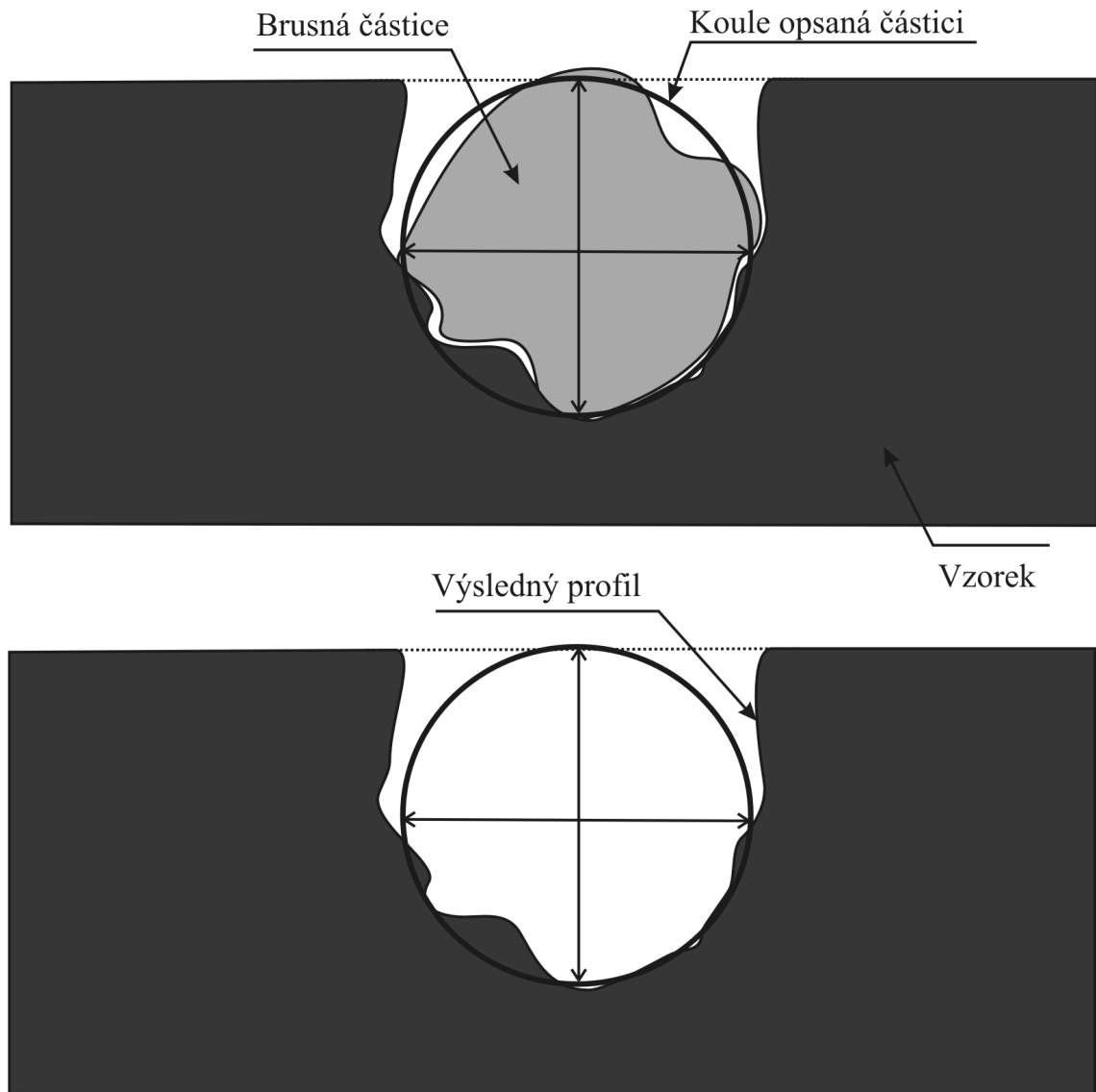
Pro snížení míry šumu v obraze byla použita konvoluce obrazové matice s násle-

dujícím low pass filtrem G :

$$G = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

V podkapitole 5.3 byl analyzován vliv filtrace na odhad dimenze. Gaussův filtr dával o něco málo lepší výsledky, nicméně rozdíl v hodnotách naměřených dat byl v řádu několik setin, proto je i výše uvedený low pass filtr použitelný pro praktické aplikace v případě, že se neočekává velmi vysoká fraktální dimenze plochy (což v tomto případě není pravděpodobné).

Po potlačení aditivního šumu v obraze bylo třeba odhadnout absolutní výšku plochy, tj. převést barvy na konkrétní hodnoty výšky v mikrometrech, tak, aby byl zachován poměr výšky a délky. Vzorky byly posouvány po podložce s brusnými částicemi přibližně kulového tvaru. Lze tedy předpokládat, že hloubka vrypů bude zhruba stejná jako jejich šířka (viz ilustrativní obrázek 6.2).



Obrázek 6.2: Vytvoření vrypu kulovou brusnou částicí.

Na základě předchozí úvahy lze odhadnout přibližný poměr mezi výškou a délkou plochy. Připomeňme, že na řádky obrazové matice lze nahlížet jako na reprezentaci

řezu fraktální plochy ve směru osy x , tj. jako na aproximaci F-křivky, kterou lze zkonstruovat, pokud zvolíme rozsah výšky řezu (tj. zvolíme poměr mezi výškou a šířkou). Na vykreslené křivce lze detekovat vrypy vzniklé posunem brusných částic a lze změřit poměr výšky vrypu a šířky vrypu při daném vykreslení (viz ilustrativní obrázek 6.3). Pokud jsme pro vykreslení zvolili správnou výšku, podíl výšky a šířky vrypu bude přibližně 1. Označme z zvolenou výšku řezu v mikrometrech, z' přesnou (prozatím neznámou) výšku řezu, d šířku detekovaného vrypu v mikrometrech, h výšku detekovaného vrypu v mikrometrech a h' přesnou (neznámou) výšku detekovaného vrypu v mikrometrech. Nyní lze odvodit správnou výšku řezu z' . Označme r poměr šířky ku výšce vrypu:

$$r = \frac{d}{h}$$

Při správném zobrazení by měl být poměr mezi výškou a šířkou 1, tj. $h' = d$ a $\frac{h'}{d} = 1$. Pokud za h' dosadíme $h \cdot r$, opravdu dostáváme že $h' = d$:

$$h' = h \cdot r = h \cdot \frac{d}{h} = d$$

Z toho plyne, že správnou výšku vrypu h' , lze spočíst z naměřené výšky h a vypočteného koeficientu r pomocí vztahu $h' = h \cdot r$. Dále musí platit následující rovnost:

$$\frac{z'}{z} = \frac{h'}{h}$$

Dosadíme za $h' = h \cdot r$ a dostáváme následující vztah:

$$\frac{z'}{z} = \frac{h \cdot r}{h} = r$$

a tedy:

$$z' = z \cdot r$$

Při praktické realizaci lze detekovat několik vrypů pro každý řádek obrazové matice. V ideálním případě by měl být poměr r pro všechny zdetekované vrypy stejný. V praxi se poměry budou lišit. Při řešení popsaného problému byl použit průměr všech spočtených koeficientů ze zdetekovaných vrypů.

Výše popsaný postup nevysvětluje, jak byla provedena detekce vrypů. Při praktické realizaci byly použity řezy ve směru osy x . Byl zvolen výškový rozsah z v mikrometrech a spočteny souřadnice bodů aproximace v E_2 následujícím způsobem:

$$x_i = \frac{i}{511} \cdot l, \quad i = 0 \dots 511$$

$$z_i = \frac{B_i}{255} \cdot z, \quad i = 0 \dots 511$$

kde i je pozice bodu v obrazové matici (pro zpracovávaná data měla matice rozměr 512×512), B_i je hodnota barvy ze škály 0 až 255, z je zvolený rozsah výšky v mikrometrech a l je délka řádku obrazové matice v mikrometrech. Poté byl vypočten průměr výškových hodnot \tilde{z} . Navržený algoritmus hledal lokální maxima a minima na aproximaci křivky taková, že minima ležela pod průměrnou výškou a maxima ležela nad průměrnou výškou. Ke každému lokálnímu minimu $z_{j_{min}}$ se našlo nejbližší lokální maximum ležící nalevo od lokálního minima $z_{j_{left_{max}}}$ a napravo od lokálního minima $z_{j_{right_{max}}}$ taková, že ležela nad průměrnou hodnotou \tilde{z} . Aby část křivky mezi

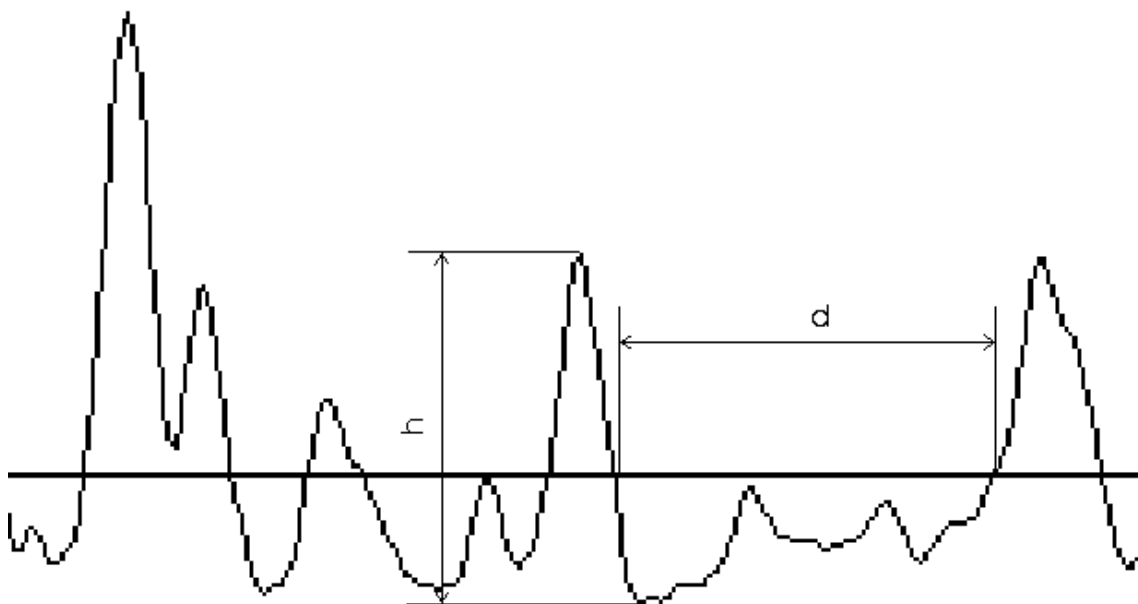
těmito lokálními maximy byla považována za vryp, který vytvořila kulová brusná částice, musí platit, že:

$$\left| 1 - \frac{z_{jleftmax}}{z_{jrightmax}} \right| \leq 0.15$$

tj. rozdíl ve výšce stěn vrypu nesmí překročit 15% aby byla oblast zahrnuta do výpočtu koeficientu r . Pro každou oblast j , nalezenou výše popsáním algoritmem byla stanovena hodnota d jako rozdíl x -ových souřadnic lokálních maxim $z_{jleftmax}$ a $z_{jrightmax}$. Hodnota h byla spočtena podle následujícího vzorce:

$$h = \left| \frac{z_{jleftmax} + z_{jrightmax}}{2} - z_{jmin} \right|$$

tj. jako rozdíl z průměrné výšky lokálních maxim a lokálního minima mezi nimi – viz obrázek 6.3.

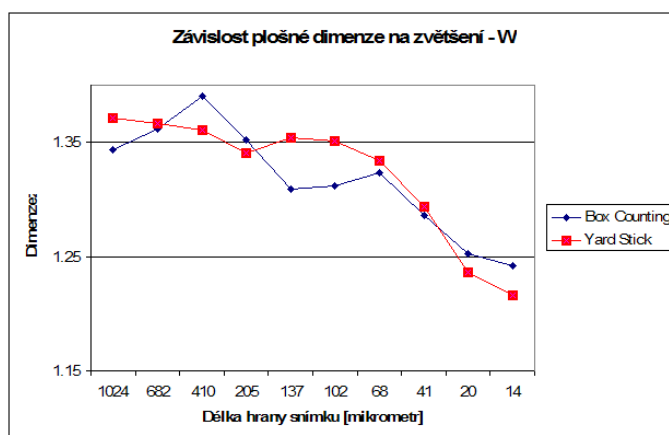
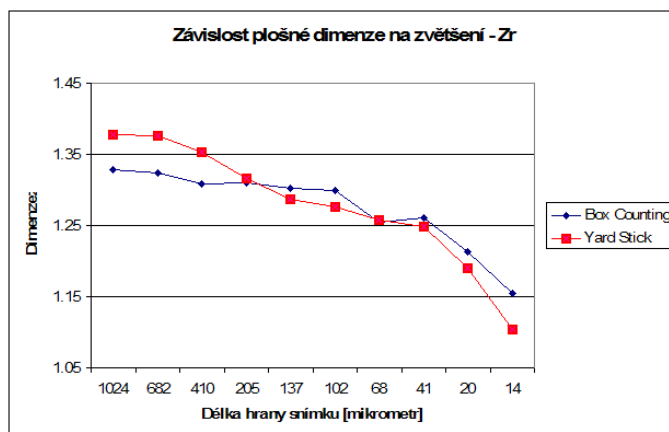
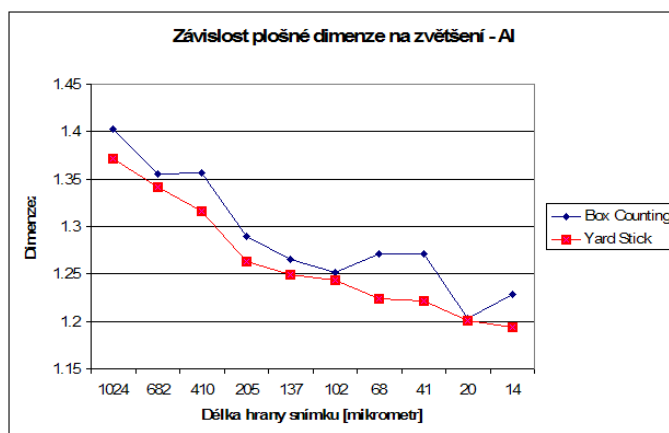


Obrázek 6.3: Detekce vrypu a měření délky a výšky vrypu pro výpočet koeficientu r . Řez je zobrazen se zvoleným rozsahem výšky z .

6.3 Změny fraktální dimenze v závislosti na zvětšení

Z obrázku 6.1 je zřejmé, že struktura povrchu je pro různá zvětšení jiná. Před hledáním závislosti mezi fraktální dimenzí a koeficientem odolnosti proti tření bylo třeba ověřit, jestli zvětšení hraje skutečně významnou roli, nebo lze porovnávat mezi sebou snímky s různým zvětšením.

Pro každý materiál byla změřena plošná dimenze (viz definice 4.2.1), tj. průměrná dimenze řezů plochy, pro každé zvětšení. Následující grafy ukazují chování plošné dimenze odhadnuté metodou „Yard Stick“ a „Box Counting“ pro různá zvětšení.

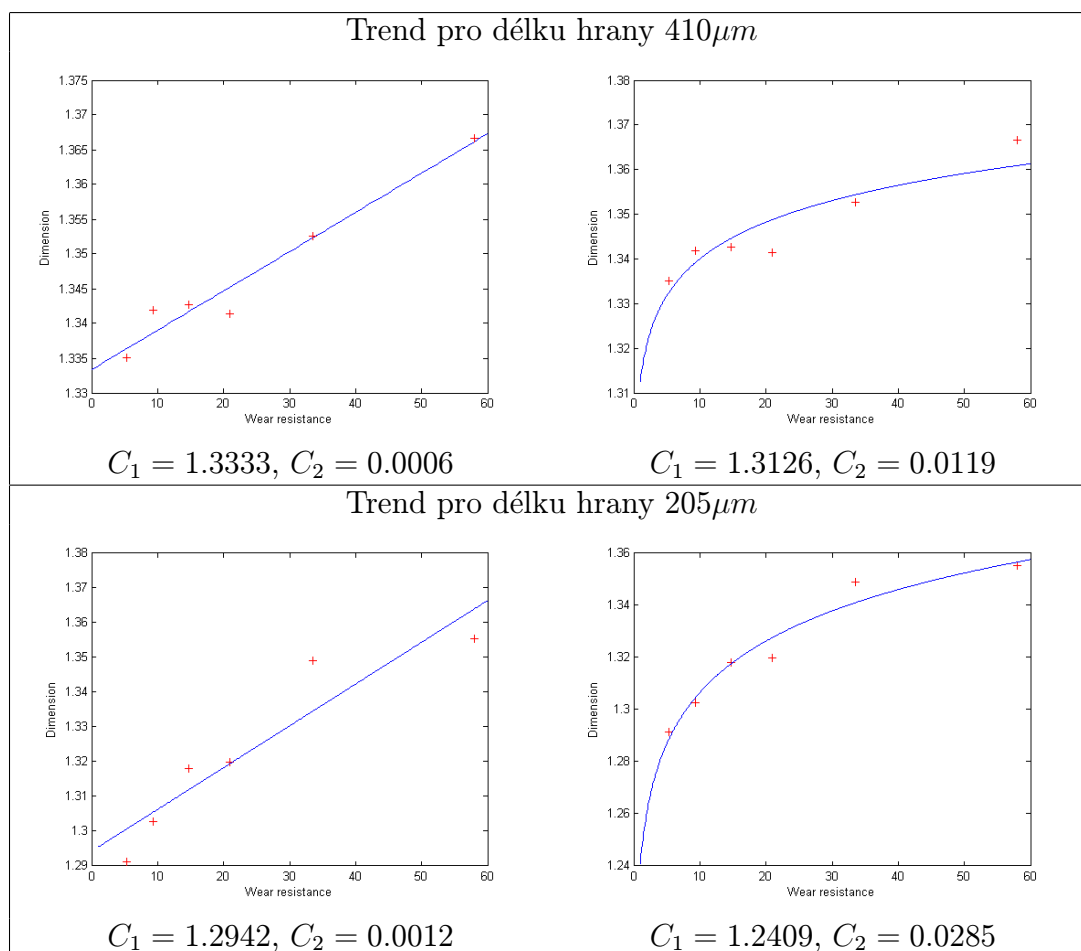


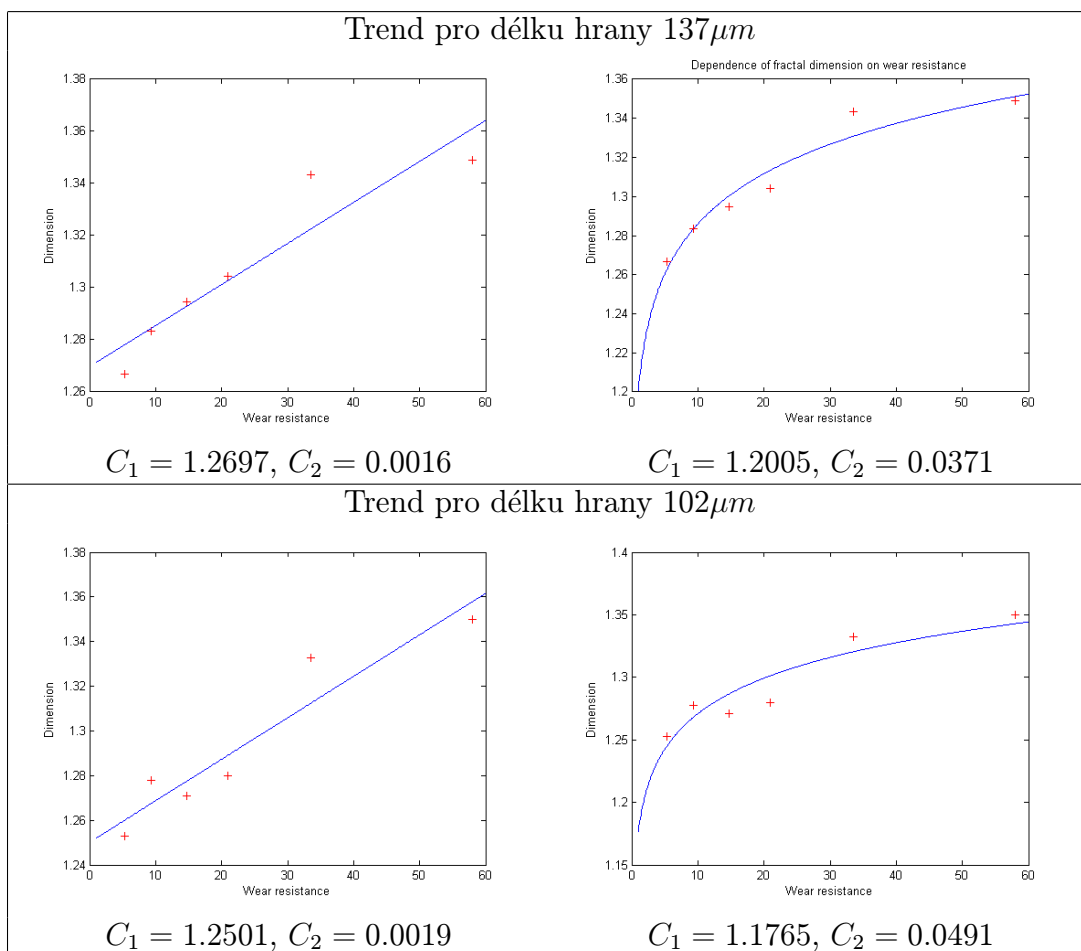
Z výše uvedených grafů je zřejmé, že plošná dimenze zkoumaných ploch klesá s tím, jak roste zvětšení. To koresponduje s obrázkem 6.1, ze kterého je patrné, že s rostoucím detailem jsou struktury na povrchu méně členité. O plochách opotřebovaných třením můžeme říci, že mají multifraktální charakter – tj. se změnou měřítka se mění dimenze. Příklad multifraktálního chování uvádí Mandelbrot v [7]: pokud se na klubko provázku díváme z veliké dálky, jeví se jako bod (dimenze 0), přiblížíme-li

se, jeví se jako koule (dimenze 3), přiblížíme-li se ještě více jeví se jako „smotaná“ křivka v E_3 (dimenze 1), při dalším přiblížení jako zohýbaný válec (dimenze 3), atd. Pozorované plochy vykazují podobné chování, je proto třeba porovnávat plošné dimenze těchto ploch pouze pro plochy snímané se stejným zvětšením.

6.4 Závislost fraktální dimenze a koeficientu odolnosti proti tření

Pro každý materiál bylo připraveno celkem 40 snímků – 4 pro každé zvětšení. Pro každý snímek plochy byla změřena plošná dimenze D_P metodou „Box Counting“ a metodou „Yard Stick“. Pro každé 4 snímky stejného materiálu snímaného při stejném zvětšení byla spočtena průměrná plošná dimenze, která byla použita pro hledání trendu mezi fraktální dimenzí a koeficientem odolnosti proti tření. Následující grafy ukazují možnou závislost fraktální dimenze (plošná dimenze, řezy měřeny metodou „Yard Stick“) na koeficientu odolnosti proti tření. Zpracovaná data ukázala, že lze nalézt závislost mezi plošnou dimenzí měřenou metodou „Yard Stick“ a koeficientem odolnosti proti tření v rozsahu zvětšení od zhruba $400\mu m$ do $100\mu m$ (Pro ostatní zvětšení nebyl trend nalezen). Možné trendy (lineární a logaritmický) jsou zobrazeny na následujících grafech. Trend byl hledán metodou nejmenších čtverců a to jako lineární a logaritmická funkce.





Následující funkce popisují závislost mezi plošnou dimenzí a koeficientem odolnosti proti tření (první vztah je pro lineární trend, druhý pro logaritmický):

$$D_P = C_2 \cdot W + C_1$$

$$D_P = C_2 \cdot \ln(W) + C_1$$

kde D_P je plošná dimenze, W je koeficient odolnosti proti tření, C_1 a C_2 jsou koeficienty spočtené metodou nejmenších čtverců (uvedeny vždy pod grafem pro dané zvětšení). Z těchto funkcí lze vyjádřit W :

$$W = \frac{(D_P - C_1)}{C_2}$$

$$W = e^{\frac{D_P - C_1}{C_2}}$$

Na základě analýzy dat bylo z měření vyloučeno olovo. Plošná dimenze olova vykazovala výrazně jiné chování než ostatní materiály a znemožňovala nalezení trendu. Pro danou aplikaci to bylo přijatelné, protože metoda se vyvíjela zejména pro hledání slitin odolných proti tření a olovo je kov s nejnižším koeficientem odolnosti proti tření ze všech zkoumaných vzorků. V případě, že by bylo třeba hledat materiál s velmi nízkou odolností proti tření, bylo by nezbytné nalézt další materiály s podobnými vlastnostmi jako olovo a zopakovat experiment s těmito vzorky.

6.5 Závěrečné shrnutí

V rámci práce byla vyvinuta metoda pro odhad koeficientu odolnosti proti tření v závislosti na fraktální dimenzi. Na základě teoretické části, byla analyzována vstupní data a určeny kritické faktory, které významně zkreslují odhady dimenze a byl vypracován postup, jak tyto faktory eliminovat. Dále byl v rámci práce vyvinut software pro výpočet fraktální dimenze ploch namáhaných třením a poté snímaných elektronovým mikroskopem.

Obrazová data poskytnutá Ruskou akademií věd byla zpracována a dimenze odhadnuta jak metodou řezů, tak přímo zobecněnou metodou „Box Counting“ pro plochy. Výsledná data ukázala, že nejvhodnější metoda pro daný problém je metoda řezů, přičemž dimenze řezů se odhadovala pomocí metody „Yard Stick“. Pro plošné dimenze odhadnuté metodou řezů, kde dimenze řezů byla měřena metodou „Yard Stick“ byl odvozen lineární a logaritmický trend pro rozsah délek snímané oblasti od cca $400\mu m$ do cca $100\mu m$. Snímky ležící mimo tento rozsah nevykazovaly žádný trend, nebo jen velmi slabé náznaky trendu.

Výsledky by se daly zlepšit, pokud by se podařilo nalézt vhodné materiály s koeficientem odolnosti proti tření mezi 21 až 58. V této oblasti byl pouze vzorek titanu (koeficient odolnosti proti tření 33). Doplnění měřených dat v této oblasti by napomohlo určit, zda je vhodnější lineární nebo logaritmický trend.

Tyto výsledky byly publikovány na konferenci „Fraktaly i příkladnaja sinergetika 2005“ v Moskvě.

Kapitola 7

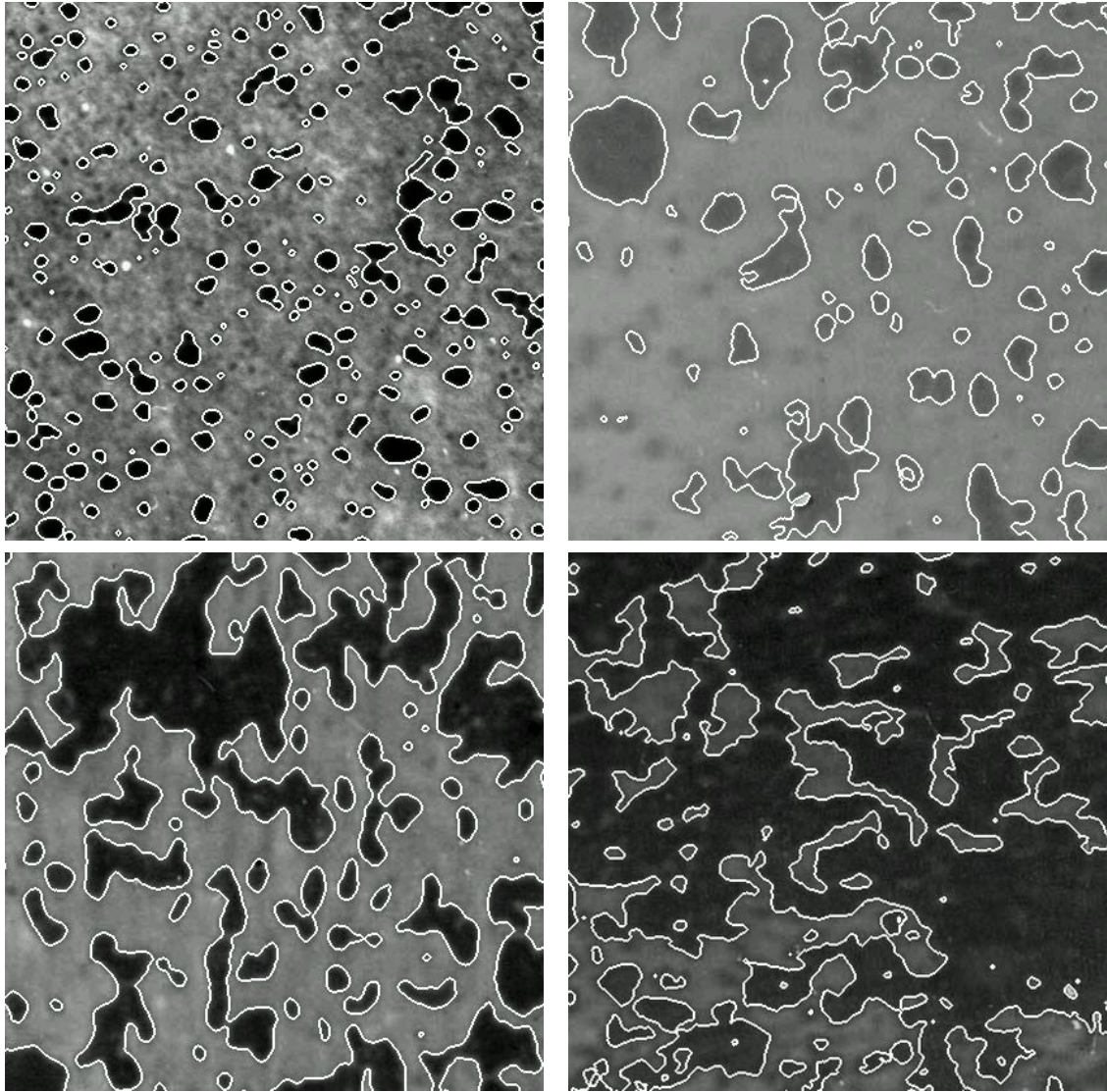
Analýza závislosti mezi objemem pórů v keramice a fraktální dimenzí hranic pórů

Tato kapitola se zabývá závislostí fraktální dimenze hranic pórů v pórovité keramice a objemem těchto pórů v keramice. Pórovitá keramika má velké uplatnění například v oblasti filtrů nebo kloubních náhrad. Pro tyto účely je třeba, aby keramika obsahovala co nejvíce pórů. Obvykle je pórovitá keramika velmi křehká, ale speciálním postupem přípravy lze její pevnost zvýšit (viz např. [6]). Nicméně i u takto připravené keramiky její křehkost roste s rostoucím objemem pórů. Pro výše zmíněné aplikace je třeba, aby póry měly dostatečně členité hranice. Je třeba nalézt minimální objem pórů, kdy materiál je ještě dostatečně pevný, ale množství pórů v materiálu je již dostatečné, aby jejich hranice byly členité. V rámci této práce byla analyzována závislost objemu pórů v materiálu a fraktální dimenze hranic těchto pórů. Tento problém byl řešen ve spolupráci s Ruskou akademií věd, Ústavem mechaniky a nauky o materiálu (Institute of Strength Physics and Materials Science, Siberian Division, Russian Academy of Sciences).

7.1 Popis vstupních dat

Vstupní data byly snímky pórovité keramiky z optického mikroskopu Neophot-21 se zvětšením $500\times$. Snímána byla keramika o různém objemovém procentu pórů (objemové procento pórů se dá poměrně přesně kontrolovat při výrobě, viz [6]). K dispozici byly snímky s následujícím objemem pórů (objem pórů uváděn v objemových procentech): 10%, 13%, 15%, 21%, 22%, 23%, 25%, 30%, 40%, 50%, 55% a 60%. Pro každý vzorek byly pořízeny 4 různé snímky. Snímky byly osmibitové v odstínech šedi, kde číslo 0 reprezentovalo černou barvu, číslo 255 barvu bílou. Rozlišení snímků bylo 837×627 pixelů. Na obrázku 7.1 je příklad čtyř snímků s různým objemem pórů (v obrazech je již zdetekována hranice pórů a je zvýrazněna bílou čarou).

Před samotným měřením dimenze hranic pórů bylo třeba hranice v obraze detekovat. Pro nalezení hranice byla využita metoda prahování, která je založena na tom, že oblasti pórů jsou zobrazeny převážně pixely s hodnotou barvy blízké nule, zatímco oblast pevného materiálu je zobrazena světlejší šedivou barvou, tj. barvami bližšími hodnotě 255. Z toho plyne, že histogram četnosti jasových hodnot v obraze



Obrázek 7.1: Čtyři vzorky pórovité keramiky o objemu pórů 15%, 20%, 40% a 60% s již detekovanou hranicí pórů.

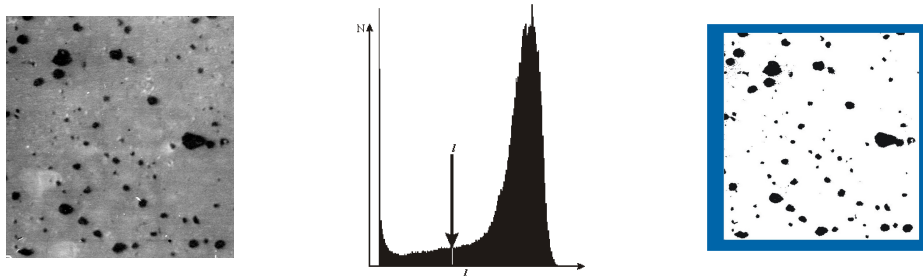
má dvě maxima – jedno blízko nuly a jedno v oblasti blízké bílé barvě. Pokud se zvolí jasová hodnota l mezi těmito dvěma maximy a všechny pixely, jejichž jasová hodnota leží nad prahovou hodnotou l , se obarví na bílo, zatímco všechny hodnoty pod úrovní prahové hodnoty se obarví na černo získáme černobílý obraz, ve kterém lze již snadno detekovat hranici mezi oblastí pórů a oblastí pevného materiálu viz obrázek 7.2.

Body hranice jsou takové pixely, které mají ve svém okolí jak body černé barvy tak body bílé barvy. Lze je například detekovat následujícím konvolučním filtrem:

$$G = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Body matice, která vznikne konvolucí černobílé obrazové matice s filtrem G , budou mít nenulovou hodnotu jen pro ty body, které ležely na hranici mezi černou a bílou. Tyto body zobrazíme bíle, ostatní černě a získáme hranici pórů v keramice.

Výše popsaným způsobem lze převést vstupní data na černobílé obrazy, ve kte-



Obrázek 7.2: Detekce oblasti pórů a pevného materiálu metodou prahování.

rých je bíle zobrazena hranice pórů a zbytek je černé pozadí. Snímek zachycuje několik reprezentací fraktálních křivek – pro každou hranici póru máme jednu fraktální křivku (uzavřenou, pokud celý pór ležel na snímku, primitivní, pokud byl pór zachycen na snímku jen částečně), tj. celkový obraz je sjednocením aproximací fraktálních křivek dle definice 3.1.7 a její dimenzi lze odhadnout metodou „Box Counting“.

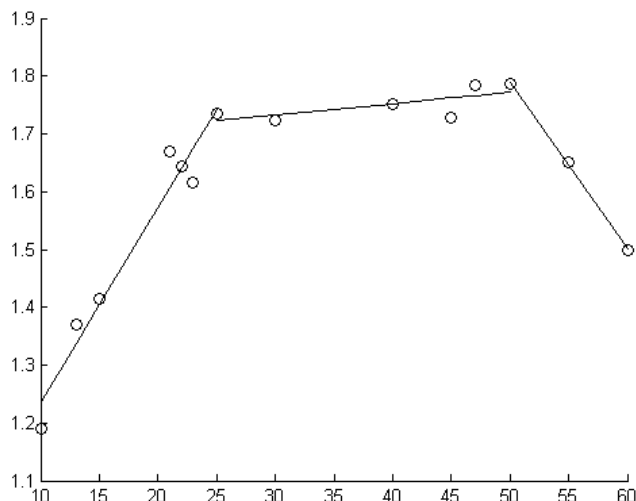
Dále, je zřejmé, že chybná detekce hranice povede ke zkreslení odhadnuté dimenze. Proto je vhodné provést kontrolu detekce hranice před samotným měřením dimenze, například tak, že hranice budou vykresleny do původního obrazu (viz obrázek 7.1) a bude provedena vizuální kontrola nakolik zdetekovaná hranice odpovídá skutečnosti. Taková kontrola byla provedena pro každý snímek před měřením dimenze, které je popsáno v následující podkapitole.

7.2 Závislost mezi fraktální dimenzí hranic pórů a objemem pórů v keramice

Sjednocení aproximací fraktálních křivek zdetekovaných výše popsaným způsobem bylo použito pro odhady fraktálních dimenzí. Jak již bylo zmíněno v podkapitole 4.1.3, k měření dimenze sjednocení fraktálních křivek je vhodné použít metodu „Box Counting“. Metoda „Yard Stick“ je ze své definice poměrně nevhodná – sice by ji bylo možné použít pro každou jednotlivou křivku sjednocení, ale pak by bylo potřeba definovat korektně zpracování těchto jednotlivých dimenzí, které se mohou pro jednotlivé hranice pórů dost lišit. I z hlediska naprogramování algoritmu by byl tento postup složitější – pro metodu „Box Counting“ stačí výše popsané zpracování vstupů, pro využití metody „Yard Stick“ by bylo třeba ještě jednoznačně určit každou křivku ze sjednocení, aby mohla být její dimenze změřena metodou „Yard Stick“.

Po vynesení hodnot fraktální dimenze do grafu v závislosti na objemovém procentu pórů bylo zjištěno, že data lze rozdělit do tří oblastí: oblast mezi 0% až 25%, 25% až 50% a 50% a více. V první oblasti fraktální dimenze s rostoucím objemem pórů poměrně prudce narůstá. V druhé oblasti se tento nárůst zastaví a dimenze se udržuje přibližně konstantní. V poslední oblasti dochází s rostoucím množstvím pórů k poklesu fraktální dimenze – viz obrázek 7.3.

V první oblasti fraktální dimenze roste, protože póry, které byly při malých procentech izolované a měly poměrně jednoduchý tvar, se začínají propojovat dohromady a jejich hranice se stává více a více členitou. Tento trend pokračuje až do určitého objemu, kdy přidávání dalších a dalších pórů již nijak zásadně neovlivňuje změny ve tvaru hranice. Naopak s rostoucím objemem pórů v materiálu se hranice s pevným materiálem začne vyhlazovat, což vede k poklesu fraktální dimenze ve třetí



Obrázek 7.3: Závislost fraktální dimenze na objemu pórů.

části grafu. Každou, výše zmíněnou, oblastí byla proložena metodou nejmenších čtverců přímka. Výsledné rovnice přímky pro každou oblast byly následující:

- Oblast 0% až 25%: $y=0.0339x+0.8963$
- Oblast 25% až 50%: $y=0.0020x+1.6740$
- Oblast 50% a více: $y=-0.0288x+3.2311$

7.3 Závěrečné shrnutí

V rámci této práce byla zpracována nasnímaná data, upravena známými algoritmy zpracování obrazu a poté byla změřena fraktální dimenze hranic pórů. Pro měření dimenze hranic pórů byl v teoretické části zadefinován pojem sjednocení fraktálních křivek a pojem sjednocení aproximací fraktálních křivek (viz definice 3.1.7), který umožnil korektně změřit závislost mezi fraktální dimenzí a objemem pórů v materiálu.

Na základě spočtených dat byly identifikovány 3 oblasti objemu pórů, pro které se fraktální dimenze chová různě. Pro praktické aplikace filtrů, kostních implantátů a podobně je nejzajímavější první oblast, protože materiál ještě není křehký natolik, aby se snadno lámal a lze zde dosáhnout poměrně velké členitosti hranic pórů. Dále je zřejmé, že další zvyšování objemu pórů nad 25% již příliš nemění fraktální dimenzi hranic pórů, tudíž nemá smysl zvyšovat dále hodnotu objemu pórů. Tento výsledek je obzvláště důležitý pro praktické aplikace a byl publikován v časopise *Technical Physics Letters*, 2006, Vol. 32, No. 1, pp. 73–75.

Jen pro zajímavost poznamenejme, že nalezené hraniční hodnoty objemu pórů (25% a 50%) korespondují s výsledky získanými na základě „percolation theory“. Pro více detailů o „percolation theory“ viz [14].

Kapitola 8

Studium sluneční aktivity

V této kapitole byla pomocí fraktální dimenze analyzována časová řada počtu slunečních skvrn. Zhruba od roku 1820 je pravidelně zaznamenáván počet skvrn na Slunci. Tato časová řada je dobře známa a byla již mnohokrát analyzována pomocí klasických metod pro zpracování časových řad. V této práci byl použit jiný přístup k analýze těchto dat. Místo aby byl „šum“ z dat odstraněn, byla změřena jeho fraktální dimenze v různých časových intervalech a z těchto dat byla sestavena nová časová řada. Ukázalo se, že vlastnosti „šumu“ se v čase mění, tj. změny v počtu pozorovaných skvrn jsou různé v různých časových intervalech.

8.1 Popis vstupních dat a konstrukce časové řady z naměřených dimenzí

Denní pozorování počtu slunečních skvrn byla získána z veřejně dostupného zdroje [17] a vykreslena jako funkce času. Měřená data lze pospojovat úsečkami a tudíž splňují definici aproximace fraktální křivky, a i když, přísně vzato, data fraktální křivka nejsou, lze z této aproximace odhadnout fraktální dimenzi.

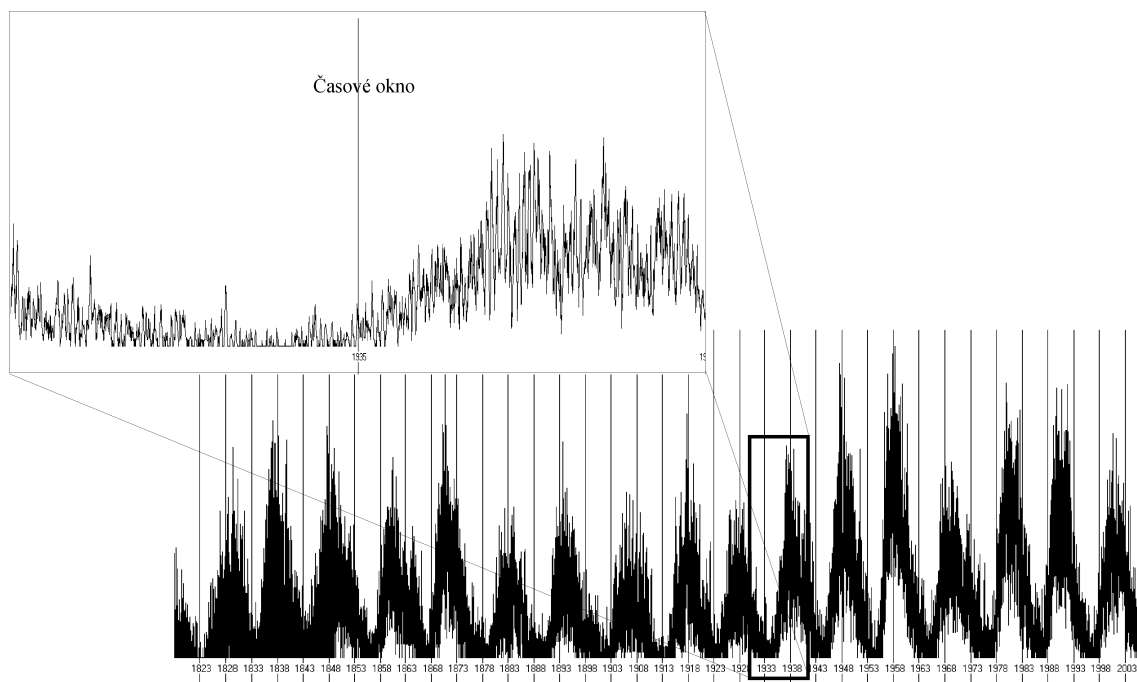
Jak bylo ukázáno dříve, pro výpočet dimenze je důležité, v jakém měřítku jsou data zobrazena. Pro zjištění změn fraktální dimenze v čase je třeba měnit délku časového okna, ve kterém je dimenze počítána. Pro výpočet byl vždy vykreslen jen měřený úsek. Dimenze v rámci časového okna byla měřena metodou „Yard Stick“. V rámci zvoleného časového úseku byla délka měřena takto:

$$d = \sqrt{(v - u)^2 + (h_v - h_u)^2}$$

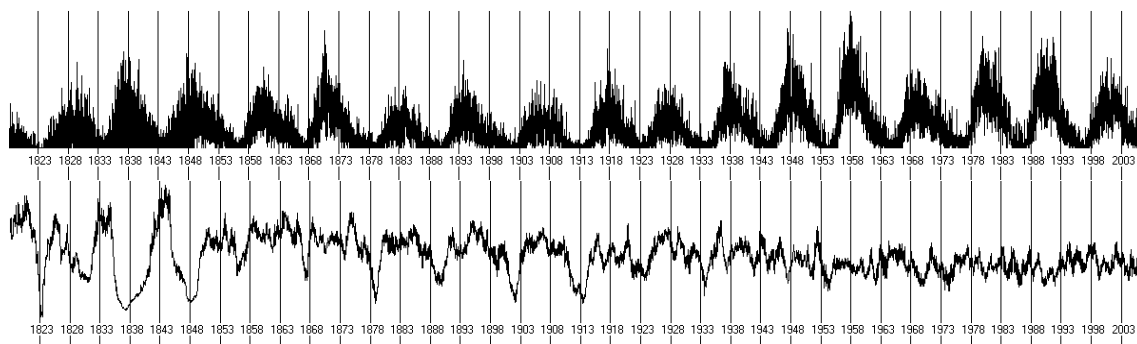
kde u a v jsou dny, h_u a h_v jsou počty skvrn. Metoda „Yard Stick“ byla implementována tak, že den u byl zafixován a den v byl postupně posouván tak dlouho, až byla splněna následující podmínka $d \geq \varepsilon_i$. Jakmile byla splněna tato podmínka, hodnota $L(\varepsilon_i)$ byla zvýšena a za nový výchozí den byl zvolen den v , přičemž výchozí den byl první den spadající do zvoleného časového okna. Postup se pro dané ε_i opakoval tak dlouho, až byl dosažen poslední den ve vybraném časovém okně. Takto se pro různá ε_i naměřily hodnoty $L(\varepsilon_i)$ a byla odhadnuta dimenze pro úsek spadající do daného časového okna. Z popsaného postupu je zřejmé, že délková (časová) jednotka je jeden den, a na ose y je to přímo počet skvrn v daném dni, který není nijak transformován. Pokud by bylo časové okno vykreslováno do obrazové matice o stejných rozměrech pro různá časová okna, docházelo by ke změnám ve směru časové osy, což

by pravděpodobně vneslo do měření chyby. Z tohoto důvodu se provádělo měření výše popsaným způsobem.

Zvolené časové okno bylo posouváno o konstantní časový krok (konkrétně střed posunutého časového okna ležel vzdálen o časový krok od středu předchozího časového okna), kde časový krok byl udáván ve dnech. Fraktální dimenze naměřená v daném časovém okně byla vztažena ke středu časového okna. Tyto nové hodnoty, tj. středy časových oken a příslušná fraktální dimenze vytvořila novou časovou řadu – viz ilustrativní obrázek 8.1.



Obrázek 8.1: Měření fraktální dimenze pomocí posunu časového okna. Časový krok je 7 dní, šířka okna je 365 dní.



Obrázek 8.2: Originální časová řada sestavená z počtu slunečních skvrn za den (horní časová řada) a jedna z možných časových řad fraktálních dimenzí sestavená s oknem a krokem použitým na obrázku 8.1.

8.2 Analýza závislosti fraktální dimenze na čase

Z původní časové řady počtu slunečních skvrn bylo sestaveno několik nových časových řad pro fraktální dimenzi. Byla použita následující časová okna: 365 dní, 730

dní a 1825 dní. Pro každé okno byly zvoleny následující časové kroky: 7 dní, 30 dní, 180 dní, 365 dní a 730 dní, tj. celkem bylo sestrojeno $3 \times 5 = 15$ různých časových řad.

Dále byla odhadnuta průměrná fraktální dimenze původní časové řady tak, že výše popsaným způsobem byla spočtena fraktální dimenze jediného časového okna od 1. ledna 1818 do 31. srpna 2006 (tj. šířka okna skoro 200 let). Fraktální dimenze celé časové řady byla 1.4050. Tato hodnota byla poté použita k porovnávání jestli fraktální dimenze ve vybraném období je vyšší než průměrná nebo nižší než průměrná. Jinou možností jak spočíst průměrnou fraktální dimenzi je udělat průměr ze všech fraktálních dimenzí spočtených pro dané časové okno a časový krok. Takto spočtená průměrná hodnota se odčítala od konkrétní časové řady fraktálních dimenzí při transformaci pro analýzu významných period. Tyto hodnoty jsou uvedeny v tabulce 8.1.

Průměrná dimenze			
Časový krok	Okno = 365 dní	Okno = 730 dní	Okno = 1825 dní
7	1.4829	1.4695	1.4611
30	1.4832	1.4694	1.4613
180	1.4837	1.4689	1.4618
365	1.4839	1.4696	1.4620
730	1.4836	1.4725	1.4617

Tabulka 8.1: Průměrná fraktální dimenze pro různé hodnoty časového okna a časového kroku.

Z tabulky 8.1 plyne, že průměrná fraktální dimenze se nemění na prvních dvou desetinných místech pro použité časové kroky (liší se až v řádu tisícín), pokud se zachová šířka časového okna. S rostoucí velikostí časového okna průměrná fraktální dimenze klesá, ale pokles není příliš výrazný – rozdíl mezi průměrnou fraktální dimenzí spočtenou časovým oknem o šířce 365 dní se liší pouze o 0.08 od průměrné dimenze spočtené z celého rozsahu (tj. časové okno o rozpětí takřka 200 let). Jestliže rozsah časového okna bude zkrácen z řádově stovek dní na několik dní, dojde k prudkému poklesu fraktální dimenze. Důvodem je, že pro několik málo dní dostáváme jen několik úseček a fraktální dimenze úsečky je 1.0 – tj. fraktální charakter dat se při takovémto rozlišení ztrácí.

8.2.1 Hledání skrytých period

Ve spočtených časových řadách pro fraktální dimenzi byly hledány významné periody pomocí tzv. periodogramu. Označme $F(t)$ časovou řadu fraktální dimenze. Funkce, která by aproximovala tuto časovou řadu byla hledaná ve tvaru:

$$F(t) \sim F_0 + \sum_{i=1}^u (a_i \sin(\bar{\lambda}_i t) + b_i \cos(\bar{\lambda}_i t))$$

Časová řada je složena z N hodnot fraktální dimenze $F(t_k)$ pro časy $t_0 \dots t_{N-1}$. Předpokádejme, že N je liché číslo ($N = 2m + 1$), pokud není, poslední člen časové řady může být vynechán a tím bude tato podmínka splněna. Časová řada $F(t)$ může být transformována na novou časovou řadu $\widetilde{F}(t)$ takovou, že $\widetilde{F}(t) = F(t) - F_0$, kde

F_0 je průměrná fraktální dimenze spočtená pro daný časový krok a časové okno:

$$F_0 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F(t_k).$$

Dále se spočtou hodnoty $I(\lambda_r)$:

$$I(\lambda_r) = \frac{1}{2\pi N} \left| \sum_{k=0}^{N-1} \widetilde{F}(t_k) \cdot e^{-i(k+1)\lambda_r} \right|^2$$

pro všechna $\lambda_r = \frac{2\pi r}{N}$, $r = 1 \dots m$. Hodnoty $I(\lambda_r)$ lze potom využít k nalezení významných frekvencí $\bar{\lambda}_i$, pomocí kterých lze sestavit aproximační funkci pro časovou řadu. Pokud v časové řadě není žádný periodický trend, tj. neexistují žádné významné frekvence, mají hodnoty $\widetilde{F}(t)$ normální rozdělení $N(0, \sigma^2)$. Významné frekvence $\bar{\lambda}_i$ lze nalézt s předem danou pravděpodobností následujícím postupem:

- Setřídíme hodnoty $I(\lambda_r)$ od maximální po minimální hodnotu:

$$V_1 = \max_{r=1, \dots, m} I(\lambda_r), \dots, V_m = \min_{r=1, \dots, m} I(\lambda_r)$$

- Pro hodnotu V_1 spočteme testovací kritérium $W = \frac{V_1}{\sum_{j=1}^m V_j}$
- Kritérium W porovnáme s $w(\alpha)$ (α je hladina významnosti). Pokud $W \geq w(\alpha)$ potom zamítáme pro dané α hypotézu, že hodnoty $\widetilde{F}(t)$ mají normální rozdělení a λ_r odpovídající hodnotě V_1 je považována za významnou frekvenci. Hodnotu V_1 odstraníme z množiny $\{V_i\}_{i=1}^m$ a postup opakujeme s novou množinou $\{V_i\}_{i=2}^m$ tak dlouho, až nenalezneme žádnou další významnou frekvenci λ .

Bližší detaily o periodogramu a testovacím kritériu lze nalézt například v [15] nebo [16].

Ve výše popsaném algoritmu byl časový krok roven jedné, ale při výpočtu časové řady pro fraktální dimenzi byl použit různě dlouhý časový krok v rozsahu od sedmi dnů až po 365 dnů, proto všechny nalezené významné frekvence musí být převedeny na nové frekvence $\bar{\lambda}_i$, $i = 1 \dots u$, které odpovídají použitému časovému kroku následovně:

$$\bar{\lambda}_i = \frac{\tilde{\lambda}_i}{T}$$

kde T je použitý časový krok. Významné frekvence mohou být potom převedeny na periody p_i :

$$p_i = \frac{2\pi}{\bar{\lambda}_i}$$

Nalezené periody pro různé délky časových kroků a různý rozsah časových oken jsou uvedeny pro všechny zkoumané časové řady postupně v tabulkách 8.2, 8.3, 8.4, 8.5 a 8.6. Periody jsou uvedeny v letech. Pokud některá buňka tabulky obsahuje písmeno N, potom to znamená, že pro danou kombinaci délky kroku a šířky okna nebyla nalezena odpovídající perioda.

Časový krok = 7 dní		
Okno 365 dní	Okno 730 dní	Okno 1825 dní
1.7069	N	N
2.5646	2.9042	N
3.5423	3.4985	N
4.5008	4.5008	4.7798
5.4866	5.5334	5.5521
7.5589	7.5589	7.7081
8.5923	8.5923	8.3939
9.6869	9.6869	9.6869
10.4870	10.4870	10.4870
11.4510	11.4510	11.4510
12.5850	12.5850	12.5850
13.4840	13.4840	13.4840
14.5210	N	14.5210
N	N	15.7310
17.1610	17.1610	17.1610
N	18.8770	18.8770
20.9740	20.9740	20.9740
N	26.9670	26.9670
31.4620	31.4620	31.4620
37.7540	37.7540	37.7540
47.1920	47.1920	47.1920
62.9230	62.9230	62.9230
94.3850	94.3850	94.3850
188.7700	188.7700	188.7700

Tabulka 8.2: Významné periody pro časový krok 7 dní a tři časová okna – 365, 730 a 1825 dní.

Časový krok = 30 dní		
Okno 365 dní	Okno 730 dní	Okno 1825 dní
2.7764	N	N
3.4785	N	N
4.4121	N	N
5.5184	5.5184	N
7.5598	7.5598	N
8.5934	8.5934	8.2085
9.6882	9.6882	N
10.4890	10.4890	10.4890
11.4530	11.4530	11.4530
12.5860	12.5860	12.5860
13.4850	13.4850	13.4850
17.1630	17.1630	17.1630
N	20.9770	20.9770
N	N	26.9710
N	N	31.4660
37.7590	37.7590	37.7590
47.1920	47.1990	47.1990
62.9320	62.9320	62.9320
N	N	94.3970
188.7900	188.7900	188.7900

Tabulka 8.3: Významné periody pro časový krok 30 dní a tři časová okna – 365, 730 a 1825 dní.

Časový krok = 180 dní		
Okno 365 dní	Okno 730 dní	Okno 1825 dní
8.2120	8.2120	N
10.4930	10.4930	10.4930
11.1180	11.1100	11.1100
12.5920	12.5920	12.5920
37.7750	37.7750	37.7750
N	N	47.2190
62.9590	62.9590	62.9320
N	N	94.3970
188.8800	188.7900	188.7900

Tabulka 8.4: Významné periody pro časový krok 180 dní a tři časová okna – 365, 730 a 1825 dní.

Časový krok = 365 dní		
Okno 365 dní	Okno 730 dní	Okno 1825 dní
10.5000	10.5000	10.5000
11.1180	11.1180	N
N	37.8000	37.8000
N	N	47.2500
N	N	63.0000
189.0000	189.0000	189.0000

Tabulka 8.5: Významné periody pro časový krok 365 dní a tři časová okna – 365, 730 a 1825 dní.

Časový krok = 730 dní		
Okno 365 dní	Okno 730 dní	Okno 1825 dní
10.5560	10.5560	N
N	N	38.0000
N	N	63.3330
190.0000	190.0000	190.0000

Tabulka 8.6: Významné periody pro časový krok 730 dní a tři časová okna – 365, 730 a 1825 dní.

Počet nalezených period klesá s prodlužujícím se časovým krokem – zejména prudce klesá počet krátkých period, pravděpodobně proto, že pro krok vyšší než cca půl roku jsou krátké periody „přeskočeny“ kvůli prodlužující se délce kroku. Vliv změny šířky časového okna nemá až tak zásadní vliv na počet nalezených period a při stejném časovém kroku jsou nalezeny podobné periody pro různá časová okna.

8.3 Porovnání nalezených period s periodami nalezenými jinými metodami

Všechny nalezené periody pro různě nastavené hodnoty časového kroku a časového okna byly zkombinovány dohromady a porovnány s periodami, které byly nalezeny jinými metodami z různých vstupních dat, nejen z počtu slunečních skvrn. Řádek „A“ v tabulce 8.7 obsahuje všechny periody nalezené analýzou časových řad fraktální dimenze, řádek „B“ obsahuje periody nalezené jinými metodami – u těchto period je vždy v tabulce uveden pramen, ve kterém byly nalezeny. Jednotkou pro periody je jeden rok.

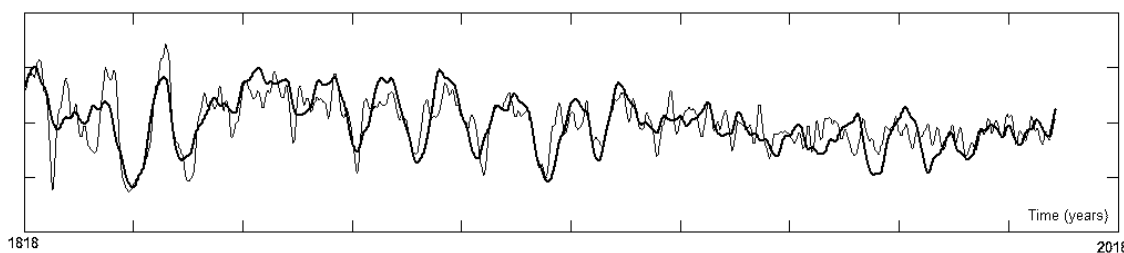
Ze všech nalezených period byla sestrojena aproximační funkce pro časovou řadu $\widetilde{F}(t)$:

$$\widetilde{F}(t) \sim y = \sum_{i=1}^u (a_i \sin(\overline{\lambda}_i t) + b_i \cos(\overline{\lambda}_i t))$$

kde koeficienty a_i a b_i byly nalezeny metodou nejmenších čtverců. Hodnoty $\widetilde{F}(t)$ byly vypočteny z časové řady s časovým krokem 7 dní a časovým oknem 365 dní. Výsledek této aproximace je na obrázku 8.3, kde tenkou čarou je vykreslena původní časová řada a silnou čarou vypočtená aproximační funkce.

Periody								
A	1.71	2.75	3.51	4.55	5.52	7.59	8.42	9.69
B	1.30 _[22]	N	3.50 _[18]	4.16 _[18]	5.40 _[18]	7.89 _[18]	8.99 _[18]	N
A	10.50	11.30	12.59	13.48	14.52	15.73	17.16	18.88
B	10.46 _[18]	11.10 _[20]	12.06 _[23]	N	N	N	N	18.33 _[19]
A	20.98	26.97	31.46	37.79	47.20	62.98	94.39	189.08
B	20.95 _[19]	N	N	43.40 ± 7.1 _[24]		65 _[20]	90 _[21]	N

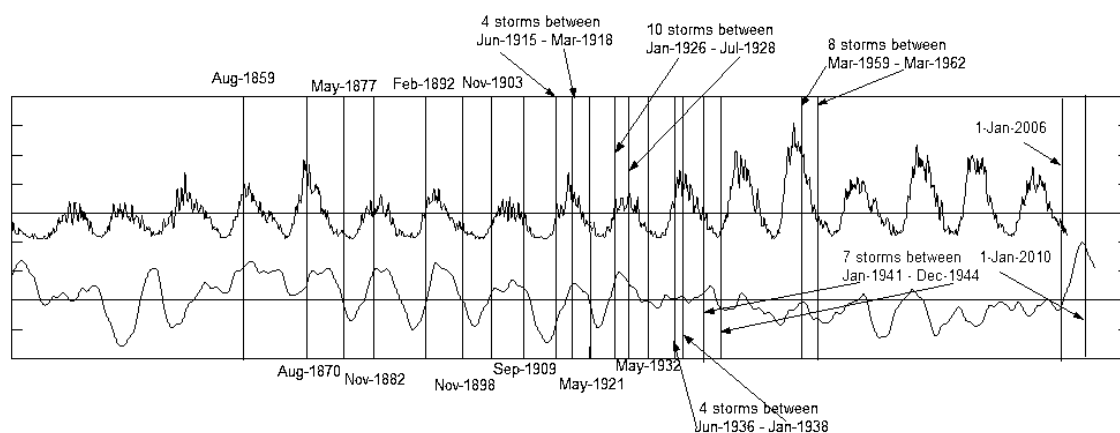
Tabulka 8.7: Porovnání nalezených period analýzou časových řad fraktální dimenze (označeno písmenem A) s periodami nalezenými jinými metodami (označeno písmenem B). Periody jsou uvedeny v letech.



Obrázek 8.3: Časová řada fraktální dimenze (tenká čára) a její aproximace nalezenou aproximační funkcí (silná čára).

8.4 Sluneční skvrny, sluneční bouře a fraktální dimenze

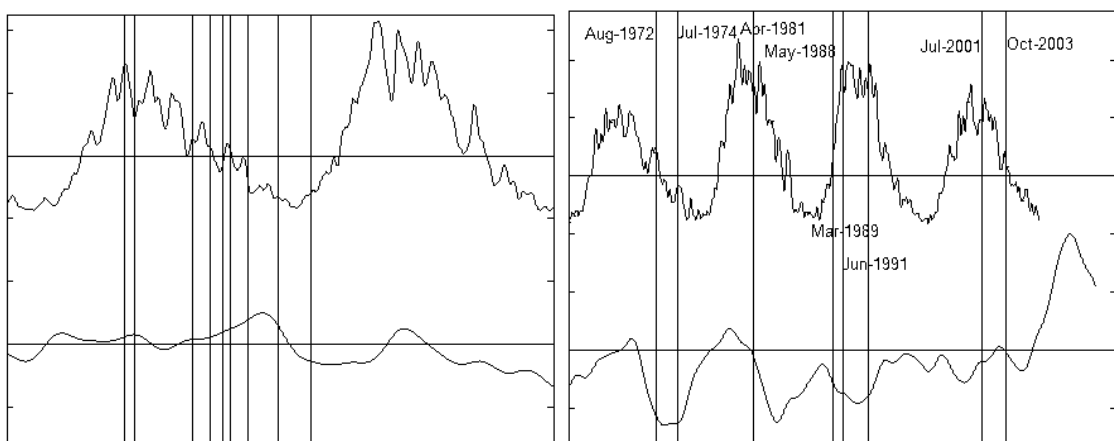
Aproximační funkce popsaná výše a originální časová řada počtu slunečních skvrn byla také porovnána s výskytem nejsilnějších slunečních bouří zaznamenaných mezi lety 1857 až 2003, které jsou uvedeny v [25]. Datумы těchto bouří byly porovnány s maximy slunečních skvrn a průběhem aproximační funkce pro fraktální dimenzi – viz obrázek 8.4. Poznámka – na obrázku nejsou pro přehlednost vyznačeny všechny bouře, ale hlavně ty, které přesně nespádají do žádného maxima počtu slunečních skvrn.



Obrázek 8.4: Počty slunečních skvrn (horní část obrázku) a průběh aproximační funkce fraktální dimenze. Svislé čáry označují datумы slunečních bouří, vodorovné čáry jsou průměrné hodnoty počtu slunečních skvrn a fraktální dimenze.

Více než 90 slunečních bouří je zmíněno v [25] mezi lety 1857 až 2003. 55 bouří proběhlo mezi lety 1857 až 1945, 25 bouří mezi lety 1945 až 1970 a pouze 8 opravdu silných bouří je zmíněno mezi lety 1970 až 2003. Pokud porovnáme rozložení slunečních bouří s výskytem maxim počtu slunečních skvrn, většina z nich se odehrála právě v době maxima, zajímavé ovšem je, že většina bouří spadá do let, kdy maxima počtu skvrn byla obvykle nižší než mezi lety 1970 až 2003, kdy sice maxima počtu skvrn byla vyšší, ale počet opravdu silných bouří byl nižší. Dále mezi lety 1941 až 1944 proběhlo 7 silných bouří, i když zrovna bylo období, kdy byl počet slunečních skvrn na svém minimu.

Pokud výskyt slunečních bouří porovnáme s průběhem fraktální dimenze, zjistíme, že skoro všechny bouře spadají do období, kdy fraktální dimenze byla nadprůměrná a tato maxima fraktální dimenze byla spíše z těch vyšších. Dále 7 výše zmíněných bouří mezi lety 1941 až 1944, které připadly na období, kdy byl minimální počet slunečních skvrn, připadá na období maxima fraktální dimenze. V letech 1970 až 2003, kde byl nižší výskyt slunečních bouří i když maxima počtu slunečních skvrn byla vysoká, byla hodnota fraktální dimenze spíše podprůměrná. Obrázek 8.5 ukazuje detailně rozložení slunečních bouří mezi roky 1937 až 1944 (levá část obrázku), první svislá čára je bouře ze srpna 1937, poslední čára je bouře z prosince 1944. a rozložení slunečních bouří v období mezi roky 1970 až 2003 (pravá část obrázku), první svislá čára je bouře z srpna 1972, poslední svislá čára je bouře z října 2003. Na levé části obrázku je dobře patrné rozložení bouří v období minima počtu slunečních skvrn, které spadá do období maxima fraktální dimenze (s výjimkou poslední bouře, kdy byla fraktální dimenze již podprůměrná). Pravá část zachycuje 8 silných bouří, které proběhly mezi lety 1970 až 2003, v tomto období je fraktální dimenze spíše podprůměrná. Zde není závislost mezi maximem fraktální dimenze a výskytem bouří tak patrná: 2 bouře spadají do lokálního maxima fraktální dimenze (2001 a 2003), 1 je blízko lokálního maxima (1981), 2 spadají do lokálního minima fraktální dimenze a zároveň do lokálního minima výskytu počtu slunečních skvrn (1972 a 1974) a 3 spadají do lokálního minima fraktální dimenze a do maxima výskytu počtu slunečních skvrn (1988, 1989 a 1991).



Obrázek 8.5: Levá část obrázku ukazuje rozložení slunečních bouří mezi roky 1937 až 1944 a průběh počtu skvrn a fraktální dimenze v těchto letech. Pravá část obrázku zachycuje období 1970 až 2003, ve kterém proběhlo jen 8 silných bouří.

8.5 Závěrečné shrnutí

V rámci práce byla analyzována známá data neobvyklým způsobem. Pro časovou řadu počtu slunečních skvrn byla vypočtena časová řada fraktální dimenze a porovnána s výskytem silných slunečních bouří. Ukázalo se, že zvýšená sluneční aktivita dobře odpovídá nadprůměrné fraktální dimenzi, což znamená, že v některých případech může být zvýšená sluneční aktivita zaznamenána i v období, kde je minimální počet slunečních skvrn, jako například mezi lety 1941 až 1944. To, že je fraktální dimenze vysoká, znamená, že se počet slunečních skvrn poměrně často mění v poměrně krátkém časovém intervalu, tj. průběh výchozí časové řady je poměrně členitý. Fraktální dimenze může být dobrý dodatečný nástroj k předpovědím zvýšené sluneční aktivity. S ohledem na vývoj funkce, která byla použita pro odhad fraktální dimenze, lze očekávat silnou magnetickou bouři (nebo několik bouří) v letech 2007 až 2010, protože fraktální dimenze začíná prudce růst v roce 2005. Poznamenejme, že na začátku roku 2005 se objevila na Slunci velká skvrna, která byla doprovázena silnou magnetickou bouří (viz [26]), tedy v době, kdy předpovídaný průběh fraktální dimenze začíná prudce růst vzhůru. Tato bouře spadá takřka přesně do lokálního minima počtu slunečních skvrn a do období, kdy se očekával spíše klid. Polární záře, která doprovázela tuto bouři, byla viditelná i z území České republiky.

Literatura

- [1] Alligood K.T., Sauer T., Yorke J.A., Chaos: An Introduction to Dynamical Systems, New York Springer, New York 1996
- [2] Čížek V., Diskrétní Fourierova transformace a její použití, Matematický seminář SNTL sv. 15, Praha 1981
- [3] Falconer, K.J., The geometry of fractal sets, Cambridge University Press, Cambridge 1985
- [4] Kilgour A., Kjelldahl L., Fast Generation and Surface Structuring Methods for Terrain and Other Natural Phenomena, Eurographics 92, Volume 11 (1992), number 3, pages 169 - 180, Blackwell Publishers, Eurographics Associations, 1992
- [5] Klíč A., Volka K., Dubcová M., Fourierova transformace příklady z infračervené spektroskopie, Ediční a audiovizuální centrum VŠCHT, Praha 1994
- [6] Kulkov S. N., Bujakova S. P., Maslovskij V. I., Ctruktura fazovij sostav i mehaničeskije svojstva keramik na osnově dioksida cirkonija
- [7] Mandelbrot B.B. THE FRACTAL GEOMETRY OF NATURE, W. H. Freeman and Company, New York, 1983
- [8] Martišek D., Matematické principy grafických systémů, PhDr. Karel Kovařík, nakladatelství Littera Brno, Brno 2002
- [9] Sahimi M., Heterogenous materials II, Nonlinear and Breakdown Properties and Atomistic Modeling, New York Springer, New York 2003
- [10] Addison P.S., Fractals and Chaos an Illustrated Course, Institute of Physics Publishing Bristol and Philadelphia, London 1997
- [11] Peitgen H., Jürgens H., Saupe D., Chaos and Fractals: New Frontiers of Science, Springer, 2004
- [12] Sheluhin O., Smolskiy S., Andrey V. O., Self-Similar Processes in Telecommunications, John Wiley and Sons, 2007
- [13] Kulkov, S. N., Proc. Int. Conf. "Tribotechnics in theory and practice", Praha, 1997, pp. 117 - 122
- [14] M. Sahimi, Application of Percolation Theory, Taylor & Francis, London, 1994
- [15] Fan J., Yao Q., Nonlinear Time Series: Nonparametric and Parametric Methods, Springer, 2005

- [16] Grenander U. Rosenblatt M., Statistical Analysis of Stationary Time Series, Chelsea Pub Co., 2nd edition, 1984
- [17] <http://solarscience.msfc.nasa.gov/SunspotCycle.shtml>
- [18] Krivova N. A., Solanki S. K., The 1.3-year and 156-day periodicities in sunspot data: Wavelet analysis suggests a common origin, *Astronomy & Astrophysics*, pp. 701 - 706, ESO, 2002
- [19] Meko D. M., Stockton C. W., Blasing T. J. , Periodicity in Three Rings from the Corn Belt, *Science* 26, July 1985, Vol. 229. no. 4711, pp. 381 - 384
- [20] Currie R. G., Fine Structure in the sunspot spektrum - 2 to 70 years, *Astrophysics and Space Science*, Volume 20, Number 2, pp. 509 - 518, Springer Netherlands, December 2004
- [21] Hathaway D. H., Wilson R. M., What the Sunspot Record Tell Us About Space Climate, *Solar Physics*, Volume 224, Numbers 1-2, SPringer Netherlands, October 2004
- [22] Richardson J.D., Paularena K. I., Belcher J. W., Lazarus A. J., Solar wind oscillation with 1.3 year period, *Geophysical Research Letters*, 1994, space.mid.edu
- [23] Castagnoli C., Bonino G., Provenzale A., The thermoluminescence profile of a recent sea sediment core and the solar variability, *Solar Physics*, Volume 117, Number 1, pp. 187-197, March 1988
- [24] Knaack R., Stenflo J. O., Berdyugina S. V., Periodic oscillations in the north-south asymmetry of the solar magnetic field, *Astronomy & Astrophysics*, pp. 418, ESO, 2004
- [25] <http://www.solarstorms.org/SRefStorms.html>
- [26] http://science.nasa.gov/headlines/y2005/10jun_newstorm.htm