

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
ÚSTAV MATEMATIKY
FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
INSTITUTE OF MATHEMATICS

OPTIMALIZACE INŽENÝRSKÉHO NÁVRHU OPTIMIZATION IN ENGINEERING DESIGN

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE
BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE
AUTHOR

DUŠAN HRABEC

VEDOUcí PRÁCE
SUPERVISOR

RNDr. PAVEL POPELA, Ph.D.

LICENČNÍ SMLOUVA
POSKYTOVANÁ K VÝKONU PRÁVA UŽÍT ŠKOLNÍ DÍLO
uzavřená mezi smluvními stranami:

1. Pan

Jméno a příjmení: Dušan Hrabec
Bytem: Březolupy 121, 68713, Březolupy
Narozen (datum a místo): 29. 3. 1986, Zlín

(dále jen autor)

a

2. Vysoké učení technické v Brně

Fakulta strojního inženýrství
se sídlem Technická 2896/2, 61669, Brno - Královo Pole
jejímž jménem jedná na základě písemného pověření děkanem fakulty:
doc. RNDr. Miroslav Doupovec, CSc.

(dále jen nabyvatel)

Čl. 1

Specifikace školního díla

1. Předmětem této smlouvy je vysokoškolská kvalifikační práce (VŠKP):

- disertační práce
- diplomová práce
- bakalářská práce
- jiná práce, jejíž druh je specifikován jako

(dále jen VŠKP nebo dílo)

Název VŠKP: Optimalizace inženýrského návrhu

Vedoucí/ školitel VŠKP: RNDr. Pavel Popela, Ph.D.

Ústav: Ústav matematiky

Datum obhajoby VŠKP: 23. 6. 2009

VŠKP odevzdal autor nabyvateli v¹:

- tištěné formě — počet exemplářů 2
- elektronické formě — počet exemplářů 1

2. Autor prohlašuje, že vytvořil samostatnou vlastní tvůrčí činností dílo shora popsané a specifikované. Autor dále prohlašuje, že při zpracovávání díla se sám nedostal do rozporu s autorským zákonem a předpisy souvisejícími a že je dílo dílem původním.

3. Dílo je chráněno jako dílo dle autorského zákona v platném znění.

4. Autor potvrzuje, že listinná a elektronická verze díla je identická.

¹hodící se zaškrtněte

Čl. 2 Udělení licenčního oprávnění

1. Autor touto smlouvou poskytuje nabyvateli oprávnění (licenci) k výkonu práva uvedené dílo nevýdělečně užít, archivovat a zpřístupnit ke studijním, výukovým a výzkumným účelům včetně pořizování výpisů, opisů a rozmnoženin.
2. Licence je poskytována celosvětově, pro celou dobu trvání autorských a majetkových práv k dílu.
3. Autor souhlasí se zveřejněním díla v databázi přístupné v mezinárodní síti
 - ihned po uzavření této smlouvy
 - 1 rok po uzavření této smlouvy
 - 3 roky po uzavření této smlouvy
 - 5 let po uzavření této smlouvy
 - 10 let po uzavření této smlouvy(z důvodu utajení v něm obsažených informací)
4. Nevýdělečné zveřejňování díla nabyvatelem v souladu s ustanovením §47b zákona č. 111/1998 Sb., v platném znění, nevyžaduje licenci a nabyvatel je k němu povinen a oprávněn ze zákona.

Čl. 3 Závěrečná ustanovení

1. Smlouva je sepsána ve třech vyhotoveních s platností originálu, přičemž po jednom vyhotovení obdrží autor a nabyvatel, další vyhotovení je vloženo do VŠKP.
2. Vztahy mezi smluvními stranami vzniklé a neupravené touto smlouvou se řídí autorským zákonem, občanským zákoníkem, vysokoškolským zákonem, zákonem o archivnictví, v platném znění a popř. dalšími právními předpisy.
3. Licenční smlouva byla uzavřena na základě svobodné a pravé vůle smluvních stran, s plným porozuměním jejímu textu i důsledkům, nikoliv v tísní a za nápadně nevýhodných podmínek.
4. Licenční smlouva nabývá platnosti a účinnosti dnem jejího podpisu oběma smluvními stranami.

V Brně dne:

Nabyvatel

Autor

Abstrakt

Cílem práce je ukázat možnosti optimalizačního přístupu pro vybrané základní úlohy inženýrského návrhu, tyto diskutované modely implementovat v GAMSu a provést testovací výpočty. Tyto výpočty jsou provedeny na základě znalostí lineárního a nelineárního programování.

Summary

The aim of present work is to show possibilities of optimization for special basic examples of engineering design. The discussed models have been implemented in GAMS and the corresponding calculations have been performed. The knowledge of linear and non-linear programming is utilized.

Klíčová slova

Optimalizace, lineární programování, nelineární programování

Keywords

Optimization, linear programming, nonlinear programming

HRABEC, D. *Optimalizace inženýrského návrhu*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2009. 40 s. Vedoucí bakalářské práce RNDr. Pavel Popela, Ph.D.

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci *Optimalizace inženýrského návrhu* vypracoval samostatně pod vedením RNDr. Pavla Popely, Ph.D. s použitím materiálů uvedených v seznamu literatury.

Dušan Hrabec

Děkuji svému školiteli RNDr. Pavlu Popelovi, Ph.D. za vedení mé bakalářské práce. Také děkuji za ochotu a pomoc při řešení mnoha problémů ing. Janu Novotnému.

Dušan Hrabec

Obsah

1	Úvod	10
2	Optimalizační modely	11
2.1	Úlohy lineárního programování	12
2.2	Úlohy nelineárního programování	13
3	Základní vlastnosti optimalizačních úloh	14
4	Modelovací systém - GAMS	17
5	Řešené příklady	18
5.1	Optimalizace průřezu	18
5.2	Optimalizace průřezu - průhyb	21
5.3	Optimalizace průřezu - bezpečnost	22
5.4	Zavěšené těleso	24
5.5	Nosník	27
5.6	Nosník - nesymetrický	30
6	Závěr	33
A	Dodatek - Zdrojový kód příkladu 5.1 a 5.2	35
B	Dodatek - Zdrojový kód příkladu 5.3	36
C	Dodatek - Zdrojový kód příkladu 5.4	37
D	Dodatek - Zdrojový kód příkladu 5.5	38
E	Dodatek - Zdrojový kód příkladu 5.6	39

1 Úvod

První náznaky moderních optimalizačních metod se datují do první poloviny 19. století, kdy J. B. J. Fourier studoval podrobně soustavy lineárních rovnic. Svou prací inspiroval mnohé další matematiky, kteří na jeho poznatky navazovali a rozvíjeli tím nově vznikající problematiku teorie duality. V roce 1939 L. V. Kantorovich definoval efektivní algoritmus pro řešení úloh lineárního programování. V roce 1947 jiný matematik G. B. Dantzig přišel s další takovou metodou zvanou simplexová metoda. Tato metoda je velmi používána a je stále cílem mnoha studií. Dodnes se simplexová metoda uvádí jako efektivní algoritmus pro řešení lineárních úloh.

Optimalizace se v průběhu let stala používanou disciplínou v řadě oborů, za zmínku stojí hlavně ekonomie, logistika, strojírenství a stavebnictví.

Tato práce se zabývá právě úlohami lineárního a nelineárního programování. V následujícím textu se nejprve seznámíme se základní teorií těchto úloh, dále jsou uvedeny základní použité matematické pojmy při jejich řešení, následuje krátké seznámení s programem GAMS, který je zde využíván jako pomocník při řešení, a poslední kapitolou jsou právě řešené příklady názorně seřazené podle náročnosti tak, aby byly zajímavé i pro čtenáře, který se s problematikou optimalizace v inženýrském návrhu setkává poprvé. Tyto příklady jsou volené tak, že obsahují postupně jedno zadání úlohy nelineárního programování řešenou třemi různými inženýrskými přístupy (viz příklady 5.1, 5.2 a 5.3), následuje jeden příklad na lineární programování (5.4) a nakonec jsou uvedeny dva složitější příklady opět na programování nelineární. Ty mají opět podobná zadání. Tedy zadání úlohy 5.6 je rozšířením úlohy 5.5.

Na závěr jsou v dodatku práce uvedeny zdrojové kódy všech zmíněných úloh v prostředí GAMS.

2 Optimalizační modely

Jednoduchým příkladem optimalizační úlohy je hledání maxima nebo minima dané reálné funkce a nalezení bodů v definičním oboru této funkce, pro které toto maximum či minimum nastává.

Optimalizační úloha bývá též označována jako úloha matematického programování či operačního výzkumu (např. [9]).

Úlohu matematického programování lze obecně formulovat v tomto tvaru:

$$\begin{array}{ll} \min & f(\mathbf{x}) \\ \text{za podmíněk} & g_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \end{array} \quad (2.1)$$

který budeme nadále nazývat standardním tvarem.

Funkci $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ nazýváme účelovou funkcí a funkce $g_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \dots, g_m : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ vystupují v tzv. omezeních.

Množina $X = \{\mathbf{x} \mid g_1(\mathbf{x}) \leq 0, \dots, g_m(\mathbf{x}) \leq 0\}$ se nazývá množinou přípustných řešení a bod $\mathbf{x} \in X$ se nazývá přípustným řešením.

Optimalizační úlohu formulovanou v jiném tvaru lze pomocí vhodných transformací převést na standardní tvar (2.1).

$$\begin{array}{lll} \text{Například omezení typu} & -g(\mathbf{x}) \geq 0 & \text{lze zapsat jako} & g(\mathbf{x}) \leq 0, \\ & g(\mathbf{x}) \leq c, & \text{kde } c \text{ je konstanta, jako} & g(\mathbf{x}) - c \leq 0, \\ & g(\mathbf{x}) = 0 & \text{jako} & g(\mathbf{x}) \leq 0 \wedge -g(\mathbf{x}) \leq 0. \end{array}$$

Tvar úlohy vzhledem k účelové funkci můžeme upravit následujícím způsobem:

$$\max(f) = -\min(-f).$$

Úlohy matematického programování lze rozdělit dle jejich matematických vlastností, tj. dle povahy účelové funkce f a funkcí g_i vystupujících v omezeních:

- jsou-li tedy funkce $f(\mathbf{x})$ i $g_i(\mathbf{x})$ lineární, hovoříme o úloze **lineárního programování** (viz [1], [4], [5], [6] a [15]).
- je-li alespoň jedna z těchto funkcí nelineární, hovoříme o úloze **nelineárního programování** (viz [2]).
- speciálním případem nelineárního programování je **konvexní programování** (viz [3]), kde funkce f i g_i jsou konvexní funkce (Věta 10).

2.1 Úlohy lineárního programování

Jak bylo řečeno, úloha lineárního programování (LP) je taková úloha matematického programování, kde účelová funkce je lineární a taktéž omezující podmínky jsou zadány ve tvaru lineárních rovnic či nerovnic (viz [15]). Konkrétně ji lze zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{za podmínek} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b} \leq 0, \end{aligned} \quad (2.2)$$

kde \mathbf{A} je matice typu $m \times n$ a tedy její složky a_{ij} , $i = 1, 2, \dots, m$ a $j = 1, 2, \dots, n$ jsou konstanty u x_j , $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ je sloupcový vektor s n řádky a $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_m)^T$ je sloupcový vektor, jehož složky jsou konstanty. Tvar úlohy (2.2) můžeme přepsat na následující tvar:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{za podmínek} \quad & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - b_i \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Úlohy LP se obvykle formulují tak, aby obsahovaly podmínky nezápornosti všech proměnných

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Vektor $\mathbf{x}^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)^T$ nazveme optimálním řešením nebo taky řešením úlohy (2.2), pokud má nejmenší funkční hodnotu ze všech vektorů splňujících omezující podmínky, nebo-li pro každé \mathbf{x} takové, že $g_1(\mathbf{x}) \leq 0, \dots, g_m(\mathbf{x}) \leq 0$ platí, že $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}^*)$.

Poznámka : O úloze LP tedy mluvíme tehdy, jsou-li účelová funkce f i omezující podmínky g_i , $i = 1, \dots, m$ lineární (odvození viz [15] a [3]), nebo-li pro každé $x, y \in \mathbb{R}^n$ a každé $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ platí

$$f(\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}) = \alpha f(\mathbf{x}) + \beta f(\mathbf{y}) \quad (2.4)$$

a zároveň

$$g_i(\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}) = \alpha g_i(\mathbf{x}) + \beta g_i(\mathbf{y}). \quad (2.5)$$

Rozlišujeme:

- *maximalizační* a *minimalizační* úlohu lineárního programování a to tak, řekneme-li, že chceme účelovou funkci $\sum_{j=1}^n c_j x_j$ maximalizovat nebo minimalizovat.

- úlohu lineárního programování *v rovnicovém tvaru*

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - b_i = 0.$$

- úlohu lineárního programování *v nerovnicovém tvaru*

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - b_i \leq 0.$$

Efektivním a zároveň univerzálním nástrojem k řešení lineárních rovnic je *simplexová metoda* (např. [4]), které se zde však podrobněji nevěnujeme.

Ukázka použití LP je řešení příkladu 5.4 v kapitole 5.

2.2 Úlohy nelineárního programování

Podobně jako u programování lineárního se formuluje úloha nelineárního programování (NLP). Taková úloha je tedy zadána účelovou funkcí a jednou nebo více omezujícími podmínkami (viz [2]):

$$\begin{array}{ll} \min & f(\mathbf{x}) \\ \text{za podmínek} & g_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m. \end{array} \quad (2.6)$$

Proměnné značíme $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$, dále $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je účelová funkce, $g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, kde $i = 1, 2, \dots, m$, jsou tzv. omezující podmínky.

Vektor $\mathbf{x}^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)^T$ nazveme optimálním řešením nebo taky řešením úlohy (2.6), pokud má nejmenší funkční hodnotu ze všech vektorů splňujících omezující podmínky, nebo-li pro každé \mathbf{x} takové, že $g_1(\mathbf{x}) \leq 0, \dots, g_m(\mathbf{x}) \leq 0$ platí, že $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}^*)$.

Poznámka: u těchto úloh stejně jako u úloh LP můžeme zadávat úlohy v rovnicovém i nerovnicovém tvaru (viz kapitola 2.1).

O úloze NLP tedy mluvíme, pokud účelová funkce nebo alespoň jedna omezující podmínka je nelineární (viz [3]).

Pro úlohy NLP neexistuje univerzální metoda jejich řešení. Nebo-li řešení jednoduše vypadajícího příkladu s několika málo proměnnými může být docela náročné. Nemluvě o případech s několika stovkami proměnných.

Používané algoritmy obvykle konvergují do lokálního extrému (Definice 3 a 4). V některých aplikacích je toto postačující, v jiných je naopak skutečně podstatné nalézt optimum globální (Definice 1 a 2).

Lokální optimalizace

Metody lokální optimalizace (viz [3]) mohou být z hlediska hledání řešení rychlé, mohou využívat diferencovatelnost účelové funkce a omezujících podmínek, jsou široce využívány v aplikacích (viz [2] a [3]), kde postačuje nalezení lokálního optima. Aplikovatelnost v inženýrských návrzích je například při zlepšování výkonnosti či efektivity konstrukce (např. [7]). Tyto metody vyžadují počáteční odhad řešení, a ten může podstatně ovlivnit získané lokální řešení. Řešení úlohy lokálního optima tedy zahrnuje výběr algoritmu řešení, nastavením parametrů algoritmu a volbu vhodného počátečního odhadu.

Globální optimalizace

Nalezení globálního optima představuje v obecnosti velmi obtížný úkol (viz [3]). Je-li však úloha konvexní, je zaručeno, že lokální optimum je zároveň optimem globálním (Věta 3). Použití metod pro lokální optimalizaci tedy poskytne globální řešení.

Aplikace a řešení úloh NLP jsou provedeny v příkladech 5.1, 5.2, 5.3, 5.5 a 5.6 v kapitole 5.

3 Základní vlastnosti optimalizačních úloh

Z předchozí kapitoly je zřejmé, že pro hledání optimálních řešení se předpokládá znalost teorie globálních, lokálních a vázaných extrémů. Základní definice a věty nezbytné pro řešení optimalizačních úloh jsou:

Definice 1 (Globální maximum). Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ má v $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ globální maximum, jestliže pro všechna $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ je $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0)$.

Definice 2 (Globální minimum). Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ má v $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ globální minimum, jestliže pro všechna $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ je $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0)$.

Definice 3 (Lokální maximum). Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ má v $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ lokální maximum, jestliže existuje okolí tohoto bodu $O(\mathbf{x}_0)$ tak, že pro všechna $\mathbf{x} \in O(\mathbf{x}_0)$ je $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0)$.

Definice 4 (Lokální minimum). Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ má v $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ lokální minimum, jestliže existuje okolí tohoto bodu $O(\mathbf{x}_0)$ tak, že pro všechna $\mathbf{x} \in O(\mathbf{x}_0)$ je $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0)$.

Definice 5 (Nutná podmínka lokálního extrému). Nutnou podmínkou lokálního extrému v bodě $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ rozumíme

$$f'_{x_1}(\mathbf{x}_0) = 0, \dots, f'_{x_n}(\mathbf{x}_0) = 0.$$

Body splňující tuto podmínku nazýváme stacionární body.

Definice 6 (Postačující podmínka lokálního extrému). Postačující podmínkou lokálního minima ve stacionárním bodě $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ je

$$d^2 f_{\mathbf{x}_0} > 0,$$

čímž rozumíme pozitivní definitnost kvadratické formy $d^2 f_{\mathbf{x}_0}$.

Postačující podmínkou lokálního minima ve stacionárním bodě $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ je také

$$df_{\mathbf{x}_0} = d^2 f_{\mathbf{x}_0} = \dots = d^{2n-1} f_{\mathbf{x}_0} = 0,$$

$$d^{2n} f_{\mathbf{x}_0} > 0, n \in \mathbb{N}.$$

Použité diferenciální značení viz [10].

Rozdíl mezi používáním lokálních a globálních metod byl popsán v předchozí kapitole o NLP.

Následuje definování extrémů vázaných. Použití této metody velmi usnadňuje řešení úloh, kde mimo účelovou funkci známe také omezující podmínky ve tvaru např. křivky nebo plochy, které dále nazýváme tzv. vazbami (viz [11]).

Definice 7 (Vázané extrémý). Necht' je $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$. Hledáme lokální extrémý funkce f na podmnožině \mathbb{R}^m určené rovnicemi

$$\begin{aligned} h_1(x_1, \dots, x_m) &= 0 \\ &\vdots \\ h_k(x_1, \dots, x_m) &= 0, \end{aligned}$$

kde h_1, \dots, h_k jsou tzv. vazby. Tyto hledané extrémý nazýváme vázané (lokální) extrémý. Sestrojíme Lagrangeovu funkci:

$$L = f(x_1, \dots, x_m) + \lambda_1 h_1(x_1, \dots, x_m) + \dots + \lambda_k h_k(x_1, \dots, x_m).$$

$L(x_1, \dots, x_m, \lambda_1, \dots, \lambda_k)$ je tedy funkcí $k + m$ proměnných. Dále najdeme stacionární bod Lagrangeovy funkce L . Stacionární bod označíme $(x_1^0, \dots, x_m^0, \lambda_1^0, \dots, \lambda_k^0)$. Pro tento stacionární bod sestrojíme novou funkci $L_{\lambda_1^0, \dots, \lambda_k^0}(x_1, \dots, x_m) = L(x_1, \dots, x_m, \lambda_1^0, \dots, \lambda_k^0)$. Má-li funkce $L_{\lambda_1^0, \dots, \lambda_k^0}(x_1, \dots, x_m)$ lokální extrém v bodě (x_1^0, \dots, x_m^0) , pak f má v tomto bodě vázaný extrém stejného typu.

Následující věty využíváme při určování existence a jednoznačnosti extrémů.

Věta 1 (1. Weierstrassova věta). *Funkce spojitá na uzavřeném intervalu je na tomto intervalu omezená.*

Věta 2 (2. Weierstrassova věta). *Funkce spojitá na uzavřeném intervalu nabývá na tomto intervalu svého maxima a minima.*

Definice 8 (Kompaktní množina). Množinu M nazveme kompaktní, jestliže každá posloupnost v M obsahuje konvergentní podposloupnost.

Věta 3 (O minimu konvexní funkce). *Necht' $C \subset \mathbb{R}^n$ je neprázdná konvexní množina a $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ je konvexní funkce na C . Je-li \mathbf{x}_{\min} bodem lokálního minima funkce f , potom je také bodem globálního minima f . Je-li f ryze konvexní, je toto minimum izolované a jediné.*

V případě konvexní účelové funkce f a konvexní množiny C hovoříme o úloze konvexního programování a věta říká, že pak nemusíme rozlišovat mezi lokálními a globálními extrémý. Význam konvexnosti v optimalizační úloze vyplývá z tvrzení Věty 3.

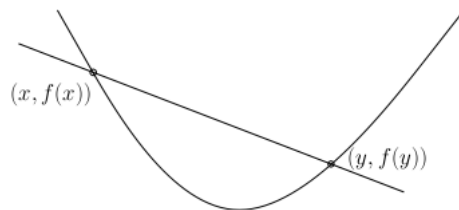
Definice 9 (Konvexní množina). Řekneme, že množina C je konvexní, pokud úsečka mezi dvěma libovolnými body této množiny C leží celá v C , nebo-li pokud $\forall x_1, x_2 \in C$ a $\forall \theta$ takové, že $0 \leq \theta \leq 1$ platí

$$\theta x_1 + (1 - \theta)x_2 \in C.$$

Definice 10 (Konvexní funkce). Řekneme, že funkce $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je konvexní, jestliže definičním oborem $\mathbf{Dom} f$ funkce f je konvexní množina a jestliže $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{Dom} f$ a θ tak, že $0 \leq \theta \leq 1$ platí

$$f(\theta \mathbf{x} + (1 - \theta)\mathbf{y}) \leq \theta f(\mathbf{x}) + (1 - \theta)f(\mathbf{y}).$$

Pokud platí ostrá nerovnost pro každé body \mathbf{x} , \mathbf{y} , které jsou různé, hovoříme o ryze konvexní funkci. Pokud platí opačná nerovnost \geq respektive $>$, hovoříme o konkávní, případně ryze konkávní funkci.



Obrázek 3.1: Geometrický význam Definice 10

Definice 11 (Regulární matice). Řekneme, že matice $A = \{a_{ij}\}$, $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, m$ je regulární, jestliže determinant této matice je různý od nuly.

Regularita matice vystupující v optimalizačním modelu je nezbytná např. pro řešení příkladu 5.4.

Věta 1 a 2, Definice 1 - 7 a 11 jsou čerpány z monografií [10] a [11], Věta 3 a Definice 8 a 9 z monografie [9].

4 Modelovací systém - GAMS

GAMS (The General Algebraic Modeling System) je program velmi využívaný v oblasti optimalizace a matematického programování (viz manuál [14]). S vývojem teorie optimalizace a operačního výzkumu a samozřejmě výpočetní techniky se začalo vyvíjet i programovací prostředí pro řešení těchto složitých optimalizačních úloh. Tento program je přizpůsoben pro rozsáhlé a komplexní modelování aplikací. Umožňuje uživateli vytvářet analyticky těžko řešitelné modely, které může posléze upravovat a které tak mohou být přizpůsobeny novým podmínkám. GAMS byl prvním algebraickým modelovacím jazykem (AML) a formálně je velmi podobný běžně používaným programovacím jazykům. Modely jsou popisovány stručnými algebraickými příkazy.

V této práci se GAMS využívá jako řešič pro lineární a nelineární úlohy. Ve zdrojovém kódu se definuje, který typ úlohy řešíme, zadávají se známé (skalární) hodnoty, proměnné (třeba i nezáporné, celočíselné atd.), parametry a samozřejmě také účelová funkce a omezující podmínky.

Velkou výhodou je, že můžeme vypisovat nalezené hodnoty do přehledného textového souboru.

Ukázkový zdrojový kód optimalizační úlohy v popisovaném prostředí je předveden na obrázku 4.1. Tato úloha je uvedena také jako řešení příklad 5.1.

```
option nlp=conopt
Scalars
R      /25/;
*Parameter

Variable
Jy polární moment;

Positive variables
b      šířka trámu
h      výška trámu;

Equations
ucel   ucelova funkce
omez1
;
ucel..  Jy*12 =e= b*h*h*h;
omez1..  sqr(b/2)+sqr(h/2) =e= sqr(R);

model tram /all/;

b.l= 10;
h.l=1;

solve tram using nlp maximizing Jy;

display b.l,h.l,Jy.l;

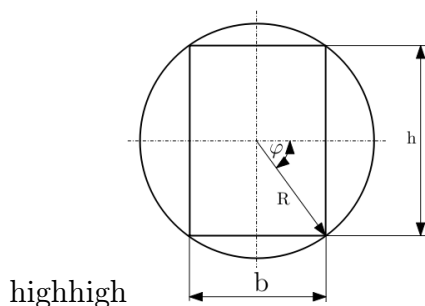
*file out/"out.txt"/;
*put out;
*put 'Výsledky'/;
*put/;
*put'      x1      x2      x3'/;
*put x1.l:8:2;
*put x2.l:8:2;
```

Obrázek 4.1: Ukázkový zdrojový kód v programu GAMS

5 Řešené příklady

5.1 Optimalizace průřezu

Uvažujme dlouhé válcové těleso. To si můžeme představit jako trám (krov) kruhového průřezu s daným průměrem D . Z něj chceme vyřezat však trám obdélníkového průřezu tak, abychom minimalizovali napětí, které vznikne zatížením trámu. Je tedy třeba navrhnout rozměry tohoto průřezu b a h , přičemž víme, že vrcholy obdélníkového průřezu leží na kružnici charakterizující původní kruhový průřez. Jinými slovy úhlopříčka vzniklého obdélníku je rovna průměru D .



Obrázek 5.1: Průřez optimalizovaného tělesa

Můžeme tedy vyjádřit:

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 = R^2. \quad (5.1)$$

Z rovnice pro výpočet napětí (viz [7]): $\sigma_{(z)} = \frac{M_o}{J_y}$, kde

$$J_y = \frac{bh^3}{12}, \quad (5.2)$$

vidíme, že úlohu minimalizace napětí můžeme převést na úlohu maximalizace kvadratického momentu obdélníkového průřezu J_y , protože moment M_o není závislý na navrhovaných parametrech b a h . Tuto úlohu lze řešit dvěma způsoby.

- První způsob řešení je pomocí parametrizace:

$$\frac{b}{2} = R \cos \varphi, \quad (5.3)$$

$$\frac{h}{2} = R \sin \varphi. \quad (5.4)$$

Dosazením (5.3) a (5.4) do (5.1) a (5.2) dostáváme:

$$R^2 = R^2 \cos^2 \varphi + R^2 \sin^2 \varphi, \quad (5.5)$$

$$J_y = \frac{2R^2 \cos \varphi \sin^3 \varphi}{12}, \quad (5.6)$$

odkud získáme zadání optimalizační úlohy. Protože chceme maximalizovat J_y , kde $\frac{R^2}{6}$ je konstanta, tak z rovnice (5.6) dostáváme účelovou funkci (5.7) a z vazební podmínky (5.5) omezení parametru (5.8). Standardní tvar úlohy tedy je:

$$\max \sin^3 \varphi \cos \varphi \quad (5.7)$$

$$\text{s podmínkou } 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}. \quad (5.8)$$

Maximum účelové funkce zjistíme, když položíme první derivaci účelové funkce rovnu nule (Definice 5):

$$\begin{aligned} y' &= 3 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi - \sin^4 \varphi = \sin^2 \varphi (3 \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) = \\ &= \sin^2 \varphi [3 \cos^2 \varphi - (1 - \cos^2 \varphi)] = \sin^2 \varphi (4 \cos^2 \varphi - 1) = 0 \\ &\Rightarrow 4 \cos^2 \varphi = 1 \Rightarrow \cos^2 \varphi = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

a protože platí (5.8), pak

$$\cos \varphi = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = 60^\circ.$$

Dosazením do (5.3) a (5.4) dostáváme hledané rozměry b a h :

$$\frac{b}{2} = R \cos 60 = \frac{1}{2}R \Rightarrow b = R,$$

$$\frac{h}{2} = R \sin 60 = \frac{\sqrt{3}}{2}R \Rightarrow h = \sqrt{3}R.$$

Platnost řešení ověříme dosazením do rovnice (5.1):

$$L = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}R^2 + \frac{3}{4}R^2 = R^2 = P.$$

V předchozím jsme využili také Vět 1, 2 a 3 uvedených v kapitole 2.

- Druhá možnost řešení je přes tzv. vázaný extrém. U této metody se využívá Lagrangeovy funkce (Definice 7).

Máme optimalizační úlohu

$$\max \frac{bh^3}{12} \quad (5.9)$$

$$\text{s podmínkou } \frac{b^2}{4} + \frac{h^2}{4} = R^2. \quad (5.10)$$

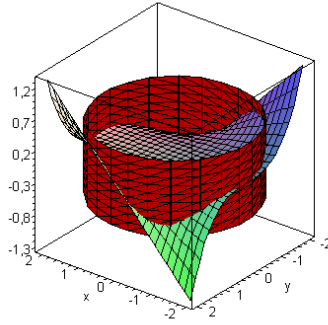
Zde opět uvažujeme podmínky nezápornosti parametrů:

$$b \geq 0, h \geq 0. \quad (5.11)$$

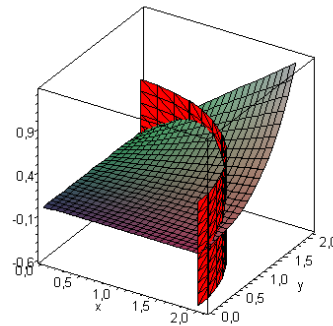
Na obrázku 5.2 je blíže vidět zadání úlohy při konkrétně zvoleném R .

Účelová funkce je zadána jako zakřivená plocha a podmínka jako válcová plocha. Hledané optimum lze definovat jako maximum z množiny společných bodů těchto dvou ploch.

Pokud zde zahrneme i podmínky nezápornosti b a h , tak dostaneme graf z obrázku 5.3.



Obrázek 5.2: Grafická podoba zadání úlohy



Obrázek 5.3: Grafická podoba zadání úlohy s uvážením podmínek nezápornosti

Tato úloha se dá tedy řešit pomocí Lagrangeovy funkce, kde (5.10) je tzv. vázaný extrém. Dosazením do této funkce dostáváme:

$$L = \frac{bh^3}{12} + \lambda\left(\frac{b^2}{4} + \frac{h^2}{4} - R^2\right).$$

Stacionární bod funkce L dostaneme zderivováním této funkce podle b , h , λ a položením těchto derivací rovných nule. Získáme následující soustavu tří rovnic:

$$\begin{aligned} L'_b &= \frac{h^3}{12} + \lambda \frac{b}{2} = 0, \\ L'_h &= \frac{bh^2}{4} + \lambda \frac{h}{2} = 0, \\ L'_\lambda &= \frac{b^2}{4} + \frac{h^2}{4} = R^2. \end{aligned}$$

Vyřešením této soustavy rovnic nacházíme řešení ve tvaru:

$$b = R,$$

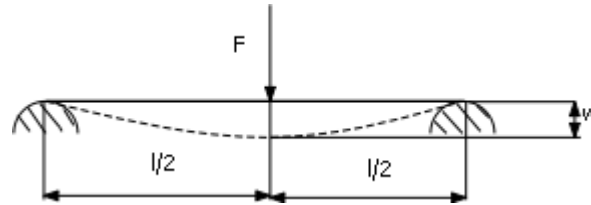
$$h = \sqrt{3}R.$$

Vidíme tedy, že toto nalezené řešení se shoduje s prvním řešením, které bylo spočítáno pomocí parametrizace.

Tento příklad umíme spočítat, resp. není náročné jej spočítat, analyticky. Pro názornost je však přiloženo řešení v programu GAMS (kapitola 4) a je prezentován také ukázkový zdrojový kód (Dodatek A).

5.2 Optimalizace průřezu - průhyb

Podobně se řeší také úloha, kde vezmeme stejné těleso délky l a kruhového průřezu o poloměru R , na obou koncích podepřeme podporou, zatížíme uprostřed silou F . Úkolem je opět navrhnout rozměry b a h tak, aby uprostřed tělesa v místě zatížení byl co nejmenší průhyb.



Obrázek 5.4: Těleso zatížené silou F

Rovnice pro průhyb vypadá následovně (viz [7] a [8]):

$$w_F = \frac{Fl^3}{48EJ_y},$$

kde w_F udává průhyb v místě zatížení. Dle zadání chceme tedy tento průhyb w_F minimalizovat, což jako u předchozího příkladu vede na maximalizaci kvadratického momentu obdélníkového průřezu J_y , protože právě tento moment J_y je zde jediná proměnná závislá na rozměrech b a h :

$$J_y = \frac{bh^3}{12}.$$

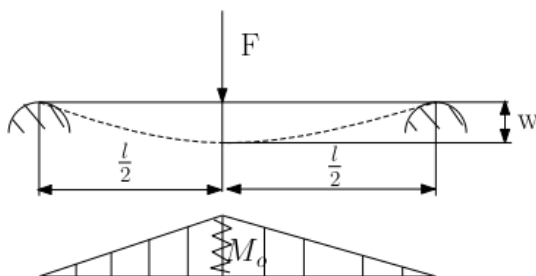
Dostáváme optimalizační úlohu:

$$\begin{aligned} & \max \quad \frac{bh^3}{12}, \\ & \text{s podmínkou} \quad R^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2, \\ & \text{kde} \quad b, h \geq 0. \end{aligned}$$

Srovnáním získané úlohy a úlohy z předchozího příkladu zadané pomocí (5.9), (5.10) a (5.11) je zřejmé, že řešení úlohy 5.2 bude vypadat stejně jako u úlohy 5.1.

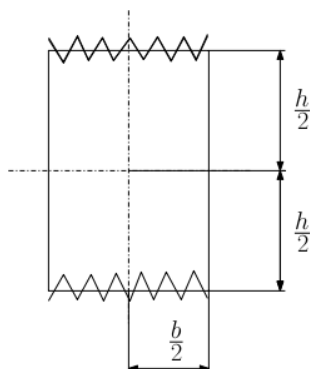
5.3 Optimalizace průřezu - bezpečnost

Pokud bychom chtěli předchozí úlohu řešit z hlediska bezpečnosti, tak musíme zřejmě formulovat zadání jako maximalizaci bezpečnosti [7]. Bezpečnost $k_k = \frac{\sigma_k}{\sigma_{max}}$, kde σ_k je dané smluvní napětí (konstanta). Čili se opět dá úloha převést na minimalizaci σ_{max} , kde $\sigma_{max} = \frac{M_o}{W_o}$. Zde opět vidíme, že ohybový moment M_o není funkcí proměnných b a h , kdežto modul průřezu W_o je. Tedy minimální hodnotu σ_{max} dostaneme nalezením maximální hodnoty W_o .



Obrázek 5.5: Těleso zatížené silou F a průběh napětí v něm

Napětí $\sigma = \frac{M_o}{J_y} z = \frac{M_o}{z} \frac{z}{J_y}$, kde z je vzdálenost kritického místa v průřezu od středu centrálního souřadnicového systému. Na obrázku 5.6 jsou tato místa naznačena.



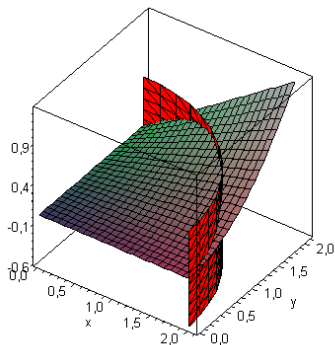
Obrázek 5.6: Kritická místa v průřezu

Tedy $z = \frac{h}{2}$. Víme taky, že platí: $\sigma_{max} = \frac{M_o}{W_o}$ Odtud je zřejmé, že $W_o = \frac{J_y}{\frac{h}{2}} = \frac{\frac{bh^3}{12}}{\frac{h}{2}} = \frac{bh^2}{6}$. Standardní tvar optimalizační úlohy bude ve tvaru (viz obrázek 5.7):

$$\max \quad \frac{bh^2}{6} \quad (5.12)$$

$$\text{s podmínkou} \quad \frac{b^2}{4} + \frac{h^2}{4} = R^2, \quad (5.13)$$

$$\text{kde} \quad b, h \geq 0. \quad (5.14)$$



Obrázek 5.7: Ukázka takto zadané úlohy

Opět máme dvě možnosti řešení. Tentokrát řešení provedeme už jen pomocí parametrizace:

$$\frac{b}{2} = R \cos \varphi, \quad (5.15)$$

$$\frac{h}{2} = R \sin \varphi. \quad (5.16)$$

Dosazením (5.15) a (5.16) do (5.12) a (5.13) a s uvažáním (5.14) dostaneme úlohu ve tvaru:

$$\max \quad \frac{4}{3} R^3 \cos \varphi \sin^2 \varphi \quad (5.17)$$

$$\text{s podmínkou } 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}. \quad (5.18)$$

Rovnici (5.17) zderivujeme a položíme rovnu nule (viz Definice 5):

$$-\frac{4}{3} R^3 \sin \varphi \sin^2 \varphi + \frac{4}{3} R^3 \cos \varphi 2 \sin \varphi \cos \varphi = \frac{4}{3} R^3 (2 \sin \varphi \cos^2 \varphi - \sin^3 \varphi) = \\ = \frac{4}{3} R^3 \sin \varphi (2 \cos^2 \varphi - 1 + \cos^2 \varphi) = 0 \Rightarrow 3 \cos^2 \varphi = 1.$$

Odtud s ohledem na podmínku (5.14) získáme:

$$\cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \varphi = 54^\circ 44'.$$

Zpětnou parametrizací nebo-li dosazením do (5.15) a (5.16) získáme hodnoty b a h :

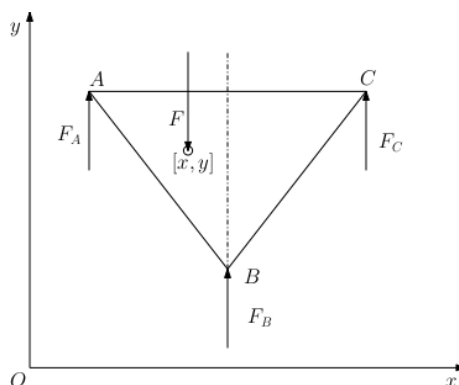
$$b = 2R \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad h = R \sqrt{\frac{8}{3}}.$$

Přestože tato úloha není opět náročná z hlediska analytického řešení, je přiloženo řešení implementované do GAMSu (kapitola 4) a zdrojový kód uveden v dodatku této práce (Dodatek B).

5.4 Zavěšené těleso

Předpokládejme těleso trojúhelníkového tvaru zavěšené na třech prutech ve svých třech vrcholech. Dále předpokládáme, že známe materiál i rozměry prutů, přičemž pruty mají různé rozměry. Toto těleso zatížíme silou F o známé velikosti. Naším úkolem bude navrhnout místo tohoto zatížení tak, aby bylo co nejdále od vrcholu A ve směru osy x . Hmotnost tělesa vzhledem k zatížení je zanedbatelná.

Jednotlivé pruty uvolníme a nahradíme silami dle obrázku 5.8.



Obrázek 5.8: Zavěšené těleso zatížené silou F

Nyní se pokusme sepsat zadání optimalizační úlohy. Nejprve tedy účelová funkce je:

$$\max x. \quad (5.19)$$

Dále je třeba definovat omezující podmínky. Ze zadání vidíme, že pruty jsou namáhány na tah [7]. Pro všechny pruty tedy můžeme sestavit tato omezení:

$$\frac{F_A}{S_A} \leq Re_A, \quad (5.20)$$

$$\frac{F_B}{S_B} \leq Re_B, \quad (5.21)$$

$$\frac{F_C}{S_C} \leq Re_C. \quad (5.22)$$

Pro řešení úlohy potřebujeme sestavit následující soustavu rovnic.

Jednu rovnici pro rovnováhu sil. Jednu proto, že všechny síly působí ve směru osy y . Tedy:

$$F_A + F_B + F_C = F. \quad (5.23)$$

Dále potřebujeme sestavit dvě rovnice momentové, za vztažný bod volíme hledaný bod zatížení o souřadnicích $[x, y]$:

$$F_A(x - A_x) + F_B(x - B_x) + F_C(x - C_x) = 0, \quad (5.24)$$

$$F_A(y - A_y) + F_B(y - B_y) + F_C(y - C_y) = 0. \quad (5.25)$$

Získáváme soustavu tří rovnic (5.23)-(5.25) pro tři neznámé F_A , F_B , F_C , pro kterou můžeme sestavit následující matici A :

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & F \\ x - A_x & x - B_x & x - C_x & 0 \\ y - A_y & y - B_y & y - C_y & 0 \end{array} \right)$$

Tato matice se dá vyřešit hned několika způsoby. My si zvolíme výpočet pomocí Cramerova pravidla. Matici A si přepíšeme do tvaru, kde se nevyskytují tzv. pravé strany.

$$B = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ x - A_x & x - B_x & x - C_x \\ y - A_y & y - B_y & y - C_y \end{array} \right)$$

Zde vyžadujeme pouze, aby matice B byla regulární (Věta 11).

Na následujícím postupu ukážeme výpočet pro sílu F_A , pro síly F_B , F_C je řešení analogické. První sloupec matice B , nebo-li sloupec, ve kterém se vyskytují koeficienty příslušné F_A , nahradíme čtvrtým sloupcem matice A , nebo-li sloupcem pravých stran. Tuto vzniklou matici typu 3×3 označíme B_1 .

$$B_1 = \left(\begin{array}{ccc} F & 1 & 1 \\ 0 & x - B_x & x - C_x \\ 0 & y - B_y & y - C_y \end{array} \right)$$

Podle Cramerova pravidla tedy můžeme sílu F_A vyjádřit jako:

$$F_A = \frac{\det B_1}{\det B}. \quad (5.26)$$

Potřebujeme spočítat determinanty matice B_1 a B .

$$\begin{aligned} \det B_1 &= \det \begin{vmatrix} F & 1 & 1 \\ 0 & x - B_x & x - C_x \\ 0 & y - B_y & y - C_y \end{vmatrix} = F(x - B_x)(y - C_y) - F(x - C_x)(y - B_y) = \\ &= F(B_x C_y + x B_y + y C_x - C_x B_y - y B_x - x C_y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det B &= \det \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x - A_x & x - B_x & x - C_x \\ y - A_y & y - B_y & y - C_y \end{vmatrix} = (x - B_x)(y - C_y) + (x - C_x)(y - A_y) + \\ &+ (x - A_x)(y - B_y) - (x - B_x)(y - A_y) - (x - C_x)(y - B_y) - (x - A_x)(y - C_y) = \\ &= A_x B_y + B_x C_y + C_x A_y - A_x C_y - B_x A_y - C_x B_y \end{aligned}$$

Zde vidíme, že $\det B$ je konstanta, protože všechny jeho členy vystupující ve výsledném výrazu jsou známe souřadnice bodů našeho tělesa. Označme tedy pro přehlednost

$$\det B = W.$$

Dosazením do (5.26) dostaneme:

$$F_A = \frac{F(B_x C_y + x B_y + y C_x - C_x B_y - y B_x - x C_y)}{W}. \quad (5.27)$$

Obdobně bychom spočítali i F_B a F_C :

$$F_B = \frac{F(C_x A_y + A_x y + x C_y - x A_y - y C_x - A_x C_y)}{W}, \quad (5.28)$$

$$F_C = \frac{F(A_x B_y + x A_y + y B_x - B_x A_y - y A_x - x B_y)}{W}. \quad (5.29)$$

Nyní tedy máme vyjádřeny síly F_A , F_B a F_C jako lineární funkce x . Z účelové funkce (5.19) a dosazením (5.27)-(5.29) do (5.20)-(5.22) můžeme již úplně definovat optimalizační úlohu:

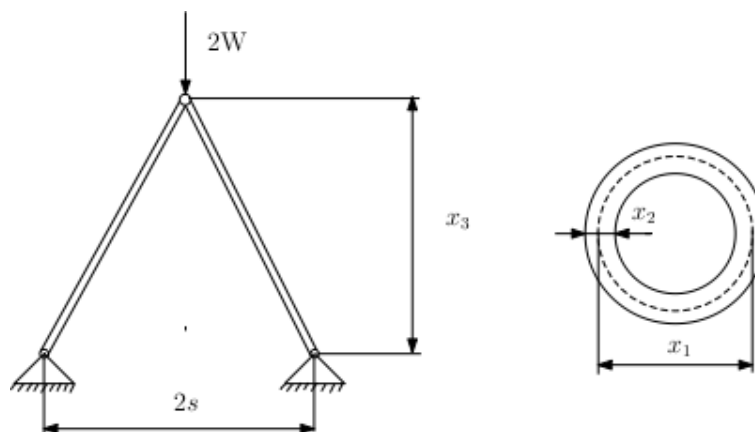
$$\max \quad x$$

$$\begin{aligned} \text{za podmíněk} \quad & x(B_y - C_y) + y(C_x - B_x) \leq \frac{Re_A S_A}{F} W - B_x C_y + C_x B_y, \\ & x(C_y - A_y) + y(A_x - C_x) \leq \frac{Re_B S_B}{F} W - C_x A_y + A_x C_y, \\ & x(A_y - B_y) + y(B_x - A_x) \leq \frac{Re_C S_C}{F} W - A_x B_y + B_x A_y, \\ & x, y \geq 0. \end{aligned}$$

Odtud vidíme, že x a y zde vystupují v lineárním tvaru a je tedy zřejmé, že úloha je definovaná jako úloha LP.

5.5 Nosník

Uvažujme nosník dle obrázku 5.9, který se skládá ze dvou ocelových tyčí. Ty jsou na jednom konci spojeny kloubovým spojem a na druhém konci jsou upevněny rotačními vazbami. Je třeba navrhnout rozměry nosníku - tj. výšku, tloušťku, střední průměr ocelové trubky a to tak, aby byl nosník zatížen silou $2W$ za podmínky jeho minimální přípustné hmotnosti. Označme tedy ve shodě s obrázkem 5.9 střední průměr tyče x_1 , tloušťku x_2 , výšku nosníku x_3 .



Obrázek 5.9: Nosník zatížený silou $2W$ a průřez jeho tyčemi

Za účelovou funkci volíme hmotnost m :

$$m = V\rho, \quad (5.30)$$

kde V je celkový objem nosníku. Tedy $V = 2Sl$, $l = \sqrt{s^2 + x_3^2}$,

$$S = \pi\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 - \pi\left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)^2 = \pi\left(\frac{x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2}{4} - \frac{x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2}{4}\right) = \pi x_1 x_2.$$

Dosazením do účelové funkce (5.30) dostáváme

$$m = 2\pi x_1 x_2 \rho \sqrt{s^2 + x_3^2}. \quad (5.31)$$

K řešení úlohy (5.31) však potřebujeme sestavit podmínky řešitelnosti:

1. Uvažujeme nezápornost rozměrů x_1 , x_2 , x_3 :

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0. \quad (5.32)$$

2. Dále předpokládáme, že prostor, ve kterém se nosník nachází, je omezený známou hodnotou (výškou)

$$x_3 \leq b_1. \quad (5.33)$$

3. Uvažujeme také podmínku, která udává závislost tloušťky na středním průměru tyče. Zamezí se tím např. extrémním případům. Omezení má tvar:

$$\frac{x_1}{x_2} \leq b_2, \quad (5.34)$$

kde tedy b_2 je známá hodnota.

4. Je třeba brát v úvahu také pevnostní vlastnosti nosníku [7]. $F \leq F_{krit}$, kde $F_{krit} = \frac{\pi^2 EJ}{L^2}$. E je modul pružnosti (známá konstanta), J moment setrvačnosti a L délka zatíženého tělesa.

$$J = \frac{\pi}{64}(D^4 - d^4) = \frac{\pi}{64}[(x_1 + x_2)^4 - (x_1 - x_2)^4] = \dots = \frac{\pi}{8}x_1x_2(x_1^2 + x_2^2).$$

$L = \sqrt{s^2 + x_3^2}$, po dosazení:

$$W \frac{\sqrt{s^2 + x_3^2}}{x_3} \leq \frac{\pi^3 E x_1 x_2 (x_1^2 + x_2^2)}{8(s^2 + x_3^2)}. \quad (5.35)$$

5. Nosník je namáhán tlakem [7]. Toto namáhání tedy nesmí dosáhnout určité meze, při které nastane trvalá deformace. Platí $\frac{F}{S} \leq Re$, kde Re je mez kluzu materiálu, tj. napětí, při kterém těleso mění své rozměry, aniž by se zvětšovalo zatížení. Do této rovnice dosadíme $F = W \frac{\sqrt{s^2 + x_3^2}}{x_3}$, což je průmět silového zatížení do směru osy tyče a $S = \pi x_1 x_2$. Po dosazení obdržíme:

$$\frac{W \frac{\sqrt{s^2 + x_3^2}}{x_3}}{\pi x_1 x_2} \leq Re. \quad (5.36)$$

Účelová funkce (5.31) a soustava nerovnic (5.33)-(5.36) zadává spolu s podmínkou nezápornosti proměnných (5.32) optimalizační úlohu ve tvaru:

$$\begin{array}{ll} \min & 2\pi x_1 x_2 \rho \sqrt{s^2 + x_3^2} \\ \text{za podmínek} & \begin{array}{l} x_3 \leq b_1 \\ \frac{x_1}{x_2} \leq b_2 \\ W \frac{\sqrt{s^2 + x_3^2}}{x_3} \leq \frac{\pi^3 E x_1 x_2 (x_1^2 + x_2^2)}{8(s^2 + x_3^2)} \\ \frac{W \frac{\sqrt{s^2 + x_3^2}}{x_3}}{\pi x_1 x_2} \leq Re, \end{array} \end{array}$$

což je minimalizační úloha NLP. Příklad je uveden v knize [2]. V této bakalářské práci je postup rozveden a řešení je přiloženo v programu GAMS (kapitola 4). Pokusme se nyní přiblížit sestavování zdrojového kódu tohoto příkladu.

Jak už bylo řečeno, jedná se o úlohu NLP. Proto musíme programu zadat, aby používal řešič pro tento typ úlohy.

```
option nlp=conopt;
```

Dále je třeba definovat program, co bude vystupovat jako známá hodnota (skalár), parametr nebo proměnná (popřípadě kladná nebo nezáporná). Pro ilustraci uveďme následující z nich.

Scalars

```
W          /25000/;
```

Parameter

```
b3;
```

```
b3=Re*pi;
```

Variable

```
m hmotnost;
```

Positive variables

```
x1          stredni prumer trubky;
```

Je třeba také zadat účelovou funkci a omezení úlohy.

Equations

```
ucel       ucelova funkce
```

```
omez1;
```

```
ucel..    m =e= x1*x2*sqrt(sqr(s)+sqr(x3));
```

```
omez1..   x3-b1 =l= 0;
```

Následující část zdrojového kódu postupně definuje počáteční hodnotu, se kterou program zahajuje algoritmus, dále že se řeší minimalizace hmotnosti m v úloze NLP a poslední část vytváří výpis optimálního řešení do textového souboru, který obsahuje optimální hodnoty x_1 , x_2 , x_3 a m .

```
x1.l= 10;
```

```
solve konstrukce using nlp minimizing m;
```

```
display x1.l,x2.l,x3.l,m.l;
```

```
file out/"out.txt"/;
```

```
put out;
```

```
put 'Výsledky' /;
```

```
put /;
```

```
put'      x1      x2      x3' /;
```

```
put x1.l:8:2;
```

```
put x2.l:8:2;
```

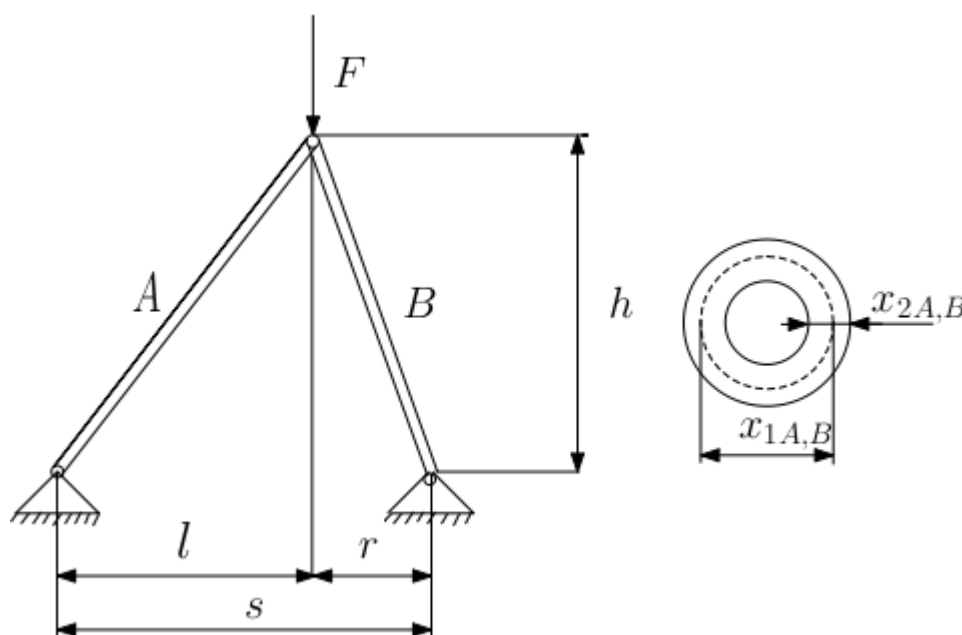
```
put x3.l:8:2;
```

Kompletní zdrojový kód je opět přiložen v dodatku (Dodatek D).

5.6 Nosník - nesymetrický

Nyní vezmeme zadání předchozí úlohy a pokusíme se ho rozšířit z hlediska hledaných parametrů. Uvažujme tedy podobné zadání jako v předchozím příkladu jen s několika následujícími rozdíly:

- silové zatížení není v x -ové složce stejně vzdálené od obou vazeb. Tzn. délky prutů nejsou stejné.
- označme pruty A a B . Každý z prutů může mít jiné průřezové vlastnosti, jsou však vázány stejnými vazebními podmínkami. Volba materiálu a tím konstanty E , Re , ρ jsou libovolné.



Obrázek 5.10: Nesymetrický nosník zatížený silou F a průřez jeho prvků

Účelová funkce optimalizační úlohy je stejná jako u předchozího příkladu (5.31) jen s tím rozdílem, že zde uvažujeme i možnost, že parametry x_1 a x_2 mohou být u prutů různé. Získáváme:

$$m = \pi x_{1A} x_{2A} \rho_A \sqrt{h^2 + l^2} + \pi x_{1B} x_{2B} \rho_B \sqrt{h^2 + r^2}. \quad (5.37)$$

I některá omezení budou stejná, přesněji analogicky odvozená:

$$x_{1A}, x_{2A}, x_{1B}, h, r, l \geq 0, \quad (5.38)$$

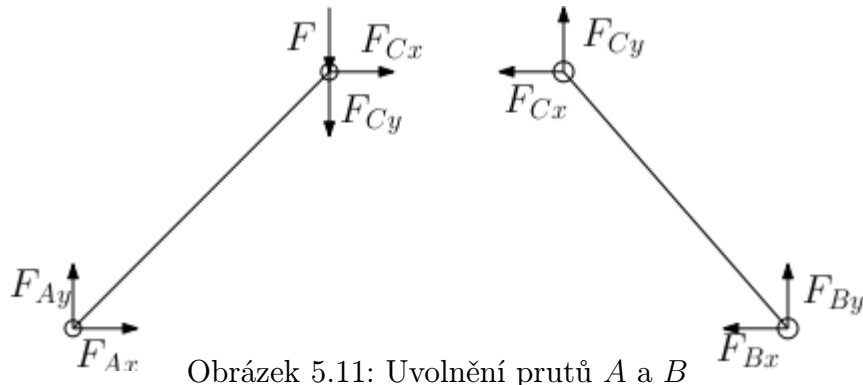
$$h \leq b_h, \quad (5.39)$$

$$\frac{x_{1A}}{x_{2A}} \leq b_s, \quad (5.40)$$

$$\frac{x_{1B}}{x_{2B}} \leq b_s, \quad (5.41)$$

kde (5.38) je podmínka nezápornosti jednotlivých rozměrů, (5.39) je omezení výšky známou konstantou b_h , (5.40) a (5.41) jsou omezení průřezových vlastností také známou konstantou b_s .

Další podmínka byla definována ve tvaru $F \leq F_{krit}$, kde síla F je síla působící v ose prutu [7]. K jejímu určení bude třeba uvolnit oba pruty a určit silové účinky.



Obrázek 5.11: Uvolnění prutů A a B

Z prutu A můžeme vyjádřit dvě rovnice silové (v ose x a v ose y) a jednu rovnici momentovou vztaženou k bodu C:

$$\begin{aligned} F_{Ax} + F_{Cx} &= 0, \\ F_{Ay} - F_{Cy} - \alpha F &= 0, \\ -F_{Ay}l + F_{Ax}h &= 0. \end{aligned}$$

Stejně tak u prutu B:

$$\begin{aligned} F_{Bx} + F_{Cx} &= 0, \\ F_{By} + F_{Cy} - (1 - \alpha)F &= 0, \\ F_{By}r - F_{Bx}h &= 0. \end{aligned}$$

Vyřešením soustavy těchto rovnic získáme

$$F_A = \sqrt{F_{Ax}^2 + F_{Ay}^2} = F \frac{r}{r+l} \sqrt{\left(\frac{l}{h}\right)^2 + 1}, \quad (5.42)$$

$$F_B = \sqrt{F_{Bx}^2 + F_{By}^2} = F \frac{l}{r+l} \sqrt{\left(\frac{r}{h}\right)^2 + 1}. \quad (5.43)$$

Odtud už můžeme zapsat další omezující podmínky:

$$F_A \leq \frac{\pi^2 E_A J_A}{\sqrt{h^2 + l^2}}, \quad (5.44)$$

$$F_B \leq \frac{\pi^2 E_B J_B}{\sqrt{h^2 + r^2}}. \quad (5.45)$$

Dosazením (5.42) do (5.44) a (5.43) do (5.45) obdržíme:

$$F \frac{r}{r+l} \sqrt{\left(\frac{l}{h}\right)^2 + 1} \leq \frac{\pi^3 E x_{1A} x_{2A} (x_{1A}^2 + x_{2A}^2)}{8(s^2 + h^2)}, \quad (5.46)$$

$$F \frac{l}{r+l} \sqrt{\left(\frac{r}{h}\right)^2 + 1} \leq \frac{\pi^3 E x_{1B} x_{2B} (x_{1B}^2 + x_{2B}^2)}{8(s^2 + h^2)}. \quad (5.47)$$

Dále požadujeme splnění napěťových podmínek v obou prutech [7]:

$$\frac{F_A}{S_A} \leq Re_A,$$

$$\frac{F_B}{S_B} \leq Re_B.$$

Neboli:

$$\frac{F \frac{r}{r+l} \sqrt{\left(\frac{l}{h}\right)^2 + 1}}{\pi x_{1A} x_{2A}} \leq Re_A, \quad (5.48)$$

$$\frac{F \frac{l}{r+l} \sqrt{\left(\frac{r}{h}\right)^2 + 1}}{\pi x_{1B} x_{2B}} \leq Re_B, \quad (5.49)$$

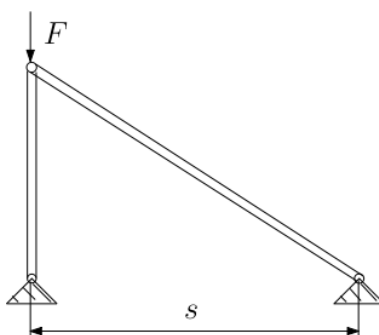
Poslední podmínka je ve tvaru:

$$l + r = s. \quad (5.50)$$

Optimalizační úloha je tedy úplně zadána účelovou funkcí (5.37) a omezujícími podmínkami (5.39)-(5.41), (5.46)-5.50) a podmínkou nezápornosti (5.38).

Protože zde opět dostáváme soustavu nelineárních rovnic, která by se řešila velmi pracně, je řešení přiloženo v GAMSu (kapitola 4) a zdrojový kód v dodatku této práce (Dodatek E).

Při bližším zkoumání nalezeného řešení je však vidět, že úloha má tendenci odbíhat ke krajním řešením, řekněme až nežádoucím. Jak takové řešení může vypadat je vidět na obrázku 5.12.



Obrázek 5.12: Nalezené řešení

Přesněji toto řešení se chová tak, že prut A dle obrázku 5.12 nabývá takových průřezových vlastností, aby sám udržel zatížení F, prut B naopak má průřezové vlastnosti zvoleny tak, aby jeho hmotnost byla minimální a byla tak minimální hmotnost, kterou "přispěje" k velikosti celkové hmotnosti. Neboli vzdálenosti jsou $l = 0$, $r = s$, $h = \frac{s}{2}$.

Je tedy zřejmé, že není vhodné zadávat úlohu s různými materiálovými a průřezovými vlastnostmi, a to jak z hlediska výrobního, tak z hlediska konstrukčního.

6 Závěr

V práci jsou diskutovány optimalizační úlohy řešené na základě znalostí lineárního a nelineárního programování. U jednoduchých úloh jsou provedeny výpočty analyticky i implementací v GAMSu, u úloh složitějších vzhledem k omezeným možnostem jenom již zmíněnou implementací.

Práce je strukturována tak, aby čtenář nejdříve nahlédl do základní problematiky optimalizačních metod, seznámil se s používanými větami a definicemi a také s prostředím GAMS, které je použito pro implementaci řešených úloh. Poté teprve následují řešené příklady a zdrojové kódy právě z programu GAMS. Zde je třeba zmínit, že znalost tohoto či jiného řešiče podobných úloh je nezbytná vzhledem k náročnosti reálných úloh.

Bakalářská práce je zahrnuta do řešení dílčích úkolů projektu MŠMT České republiky čís. 1M06047, projektu GA ČR reg. čís. 103/08/1658 a výzkumného záměru MŠMT České republiky čís. MSM0021630519.

Literatura

- [1] BAZARAA, M. S., JARVIS, J. J.: *Linear programming and network flows*, první vydání, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1977, ISBN 0-471-06015-1.
- [2] BAZARAA, M. S., SHERALI, H. D., SHETTY, C. M.: *Nonlinear programming - theory and algorithms*, druhé vydání, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1993.
- [3] BOYD, S., VANDENBERGHE, L.: *Convex optimization*, první vydání, Cambridge University Press, New York, 2004, ISBN 0 521 83378 7.
- [4] DANTZIG, G. B., THAPA, M. N.: *Linear programming 1: Introduction*, první vydání, Stanford University, Stanford, 1997, ISBN 0-387-94833-3.
- [5] DANTZIG, G. B., THAPA, M. N.: *Linear programming 1: Theory and Extensions*, první vydání, Stanford University, Stanford, 2003, ISBN 0-387-94833-3.
- [6] EISELT, H. A., SANDBLOM, C. L.: *Linear programming and its applications*, Dalhousie University, Halifax, 2003, ISBN 978-3-540-73670-7.
- [7] JANÍČEK, P., ONDRÁČEK, E., VRBKA, J., BURŠA, J.: *Mechanika těles - pružnost a pevnost I*, třetí vydání, Nakladatelství VUT, Brno, 2004, ISBN 80-214-2592-X.
- [8] JANÍČEK, P., ONDRÁČEK, E., VRBKA, J.: *Mechanika těles - pružnost a pevnost II*, první vydání, Nakladatelství VUT, Brno, 1988, ISBN 80-214-2592-X.
- [9] KLAPKA, J., DVOŘÁK J., POPELA, P.: *Metody operačního výzkumu*, druhé vydání, Nakladatelství VUTIUM, Brno, 2001.
- [10] KUREŠ, M.: *Matematická analýza I* [online]. ÚM FSI VUT v Brně, poslední revize 17. leden 2008.
<http://mathonline.fme.vutbr.cz/Matematicka-analyzanbspI/sc-1225/default.aspx>
- [11] KUREŠ, M.: *Matematická analýza II* [online]. ÚM FSI VUT v Brně, poslední revize 17. leden 2008.
<http://mathonline.fme.vutbr.cz/Matematicka-analyzanbspII/sc-1226/default.aspx>
- [12] MAREŠ, T.: *Konstrukční optimalizace*, ČVUT, Praha, 2007.
- [13] MAREŠ, T.: *Základy konstrukční optimalizace*. ČVUT, Praha, 2006.
- [14] ROSENTHAL, E., R.: *GAMS - A Users's guide*. GAMS Develpoment Corporation, Washington, DC, USA, 2008.
- [15] VANDERBEI, R., J.: *Linear programming: foundations and extensions*, Princeton University, New Jersey, 2001.

A Dodatek - Zdrojový kód příkladu 5.1 a 5.2

```
option nlp=conopt

Scalars
R /25/;

Variable
Jy polární moment;

Positive variables
b šířka trámu, h výška trámu;

Equations
ucel ucelova funkce, omez1;

ucel.. Jy*12 =e= b*h*h*h;
omez1.. sqr(b/2)+sqr(h/2) =e= sqr(R);

model tram /all/;
b.l= 10; h.l=1;

solve tram using nlp maximizing Jy;

display b.l,h.l,Jy.l;

file out/"out.txt"/;
put out;
put 'Výsledky'/;
put/;
put'    x1        x2        x3'/;
put x1.l:8:2; put x2.l:8:2; put x3.l:8:2;
```

B Dodatek - Zdrojový kód příkladu

5.3

```
option nlp=conopt

Scalars
R /25/;

Variable
Wo modul průřezu;

Positive variables
b šířka trámu, h výška trámu;

Equations
ucel celova funkce, omez1;

ucel..   Wo*6 =e= b*h*h;
omez1..  sqr(b/2)+sqr(h/2) =e= sqr(R);

model tram /all/;
b.l= 1; h.l=1;

solve tram using nlp maximizing Wo;

display b.l,h.l,Wo.l;

file out/"out.txt"/;
put out;
put 'Výsledky'/;
put/;
put'      x1      x2      x3'/;
put x1.l:8:2; put x2.l:8:2; put x3.l:8:2;
```

C Dodatek - Zdrojový kód příkladu 5.4

```
option lp=bdmlp;
```

```
Scalars
```

```
Ax /0/, Ay /0/, Bx /16/, By /0/, Cx /8/, Cy /13.856406/, ReA /310/,  
ReB /310/, ReC /310/, SA /10/, SB /10/, SC /10/, F /10000/;
```

```
Parameter
```

```
W; W=Ax*By+Bx*Cy+Cx*Ay-Ax*Cy-Bx*Ay-Cx*By;
```

```
Variable
```

```
x x-ova souradnice, y y-ova souradnice, v vzdalenost;
```

```
Equations
```

```
ucel ucelova funkce, omez1, omez2, omez3;
```

```
ucel.. v =e= x;
```

```
omez1.. x*(By-Cy)+y*(Cx-Bx) =l= (ReA*SA*W)/F-Bx*Cy+Cx*By;
```

```
omez2.. x*(Cy-Ay)+y*(Ax-Cx) =l= (ReB*SB*W)/F-Cx*Ay+Ax*Cy;
```

```
omez3.. x*(Ay-By)+y*(Bx-Ax) =l= (ReC*SC*W)/F-Ax*By+Bx*Ay;
```

```
model linearni /all/;
```

```
*x.l= 0;
```

```
*y.l= 0;
```

```
solve linearni using lp maximizing v;
```

```
display x.l,y.l;
```

```
file out/"out.txt"/;
```

```
put out;
```

```
put 'Výsledky'/;
```

```
put/;
```

```
put' x y'/;
```

```
put x.l:8:2; put y.l:8:2;
```

D Dodatek - Zdrojový kód příkladu 5.5

```
option nlp=conopt;

Scalars
W /25000/, s /500/, b1 /1500/, b2 /10/, pi /3.141592654/, E /2E5/, Re /310/;

Parameter
b3; b3=Re*pi;

Parameter
b4; b4=(pi**3/8)*E;

Variable
m hmotnost;

Positive variables
x1 stredni prumer trubky, x2 tloustka trubky, x3 vyska konstrukce;

Equations
ucel ucelova funkce, omez1, omez2, omez3, omez4, omez5;

ucel.. m =e= x1*x2*sqrt(sqr(s)+sqr(x3));
omez1.. x3-b1 =l= 0;
omez2.. x1-b2*x2 =l= 0;
omez3.. W*sqrt(sqr(s)+sqr(x3))-b3*x1*x2*x3 =l= 0;
omez4.. W*power(sqrt(sqr(s)+sqr(x3)),3)-b4*x1*x2*x3*(sqr(x1)+sqr(x2)) =l= 0;
omez5.. x1-x2 =g= 0;

model konstrukce /all/;

x1.l= 10; x2.l=1; x3.l=1;

*konstrukce.OPTFILE = 1;
*rtmaxv = 1.e13 ;

solve konstrukce using nlp minimizing m;

display x1.l,x2.l,x3.l,m.l;

file out/"out.txt"/;
put out;
put 'Výsledky' /;
put /;
put'      x1      x2      x3' /;
put x1.l:8:2; put x2.l:8:2; put x3.l:8:2;
```

E Dodatek - Zdrojový kód příkladu

5.6

```
option nlp=conopt;
```

```
Scalars
```

```
F /25000/, s /100/, bh /1500/, bS /10/, pi /3.141592654/, EA /2E5/, EB /2E5/,  
ReA /310/, ReB /310/, roA /12000/, roB /12000/;
```

```
Parameter
```

```
b4; b4=(pi**3/8)*EA;
```

```
Parameter
```

```
b5; b5=(pi**3/8)*EB;
```

```
Variables
```

```
m hmotnost, FAX sila Ax, FAY sila Ay, FBx sila Bx, FBy sila By, FCx sila Cx,  
FCy sila Cy;
```

```
Positive variables
```

```
x1A stredni prumer trubky A, x2A tloustka trubky A, x1B stredni prumer trubky B,  
x2B tloustka trubky B, h vyska konstrukce, r promenna sirky,  
l promenna sirky, w koeficient;
```

```
Equations
```

```
ucel ucelova funkce, omez1, omez2, omez3, omez4, omez5, omez6, omez7, omez8,  
omez9, omez10, omez11, omez12, omez13, omez14, omez15, omez16;
```

```
ucel.. m =e= pi*roA*x1A*x2A*(sqrt(sqr(h)+sqr(l)))+pi*roB*x1B*x2B*  
      (sqrt(sqr(h)+sqr(r)));  
omez1.. h-bh =l= 0;  
omez2.. x1A-bS*x2A =l= 0;  
omez3.. x1B-bS*x2B =l= 0;  
omez4.. (sqrt(sqr(FAx)+sqr(FAY)))*(sqrt(sqr(h)+sqr(l)))=l=b4*x1A*x2A*  
      (sqr(x1A)+sqr(x2A));  
omez5.. (sqrt(sqr(FBx)+sqr(FBy)))*(sqrt(sqr(h)+sqr(r)))=l=b5*x1B*x2B*  
      (sqr(x1B)+sqr(x2B));  
omez6.. (sqrt(sqr(FAx)+sqr(FAY))) =l= ReA*pi*x1A*x2A;  
omez7.. (sqrt(sqr(FBx)+sqr(FBy))) =l= ReB*pi*x1B*x2B;  
omez8.. l+r =e= s;  
omez9.. FAY-FCy-w*F =e= 0;  
omez10.. FAX+FCx =e= 0;  
omez11.. -FAY*l+FAX*h =e= 0;  
omez12.. FBx+FCx =e= 0;  
omez13.. FBy+FCy-(1-w)*F =e= 0;  
omez14.. FBy*r-FBx*h =e=0;  
omez15.. x1A-x2A =g= 0;  
omez16.. x1B-x2B =g= 0;
```



```
model konstrukce /all/;
w.l=0.01; x1A.l= 10; x2A.l=1; x1B.l= 10; x2B.l=1; h.l=1; r.l=0.1; l.l=0.1;

solve konstrukce using nlp minimizing m;

display x1A.l,x2A.l,x1B.l,x2B.l,h.l,r.l,l.l,w.l,m.l;

file out/"out.txt"/;
put out;
put 'Výsledky'/;
put/;
put'          x1A      x2A      x1B      X2B      h      r      l      w.l      m.l'/;
put x1A.l:8:2; put x2A.l:8:2; put x1B.l:8:2; put x2B.l:8:2; put h.l:8:2;
put r.l:8:2;
put l.l:8:2; put w.l:8:2; put m.l:8:2;
```