



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV MATEMATIKY

INSTITUTE OF MATHEMATICS

DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE SYSTÉMŮ S ÚZKÝMI MÍSTY

DIFFERENTIAL EQUATIONS FOR SYSTEMS INVOLVING BOTTLENECKS

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Kateřina Šimečková

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Ing. Tomáš Kisela, Ph.D.

BRNO 2016

Zadání bakalářské práce

Ústav:	Ústav matematiky
Studentka:	Kateřina Šimečková
Studijní program:	Aplikované vědy v inženýrství
Studijní obor:	Matematické inženýrství
Vedoucí práce:	Ing. Tomáš Kisela, Ph.D.
Akademický rok:	2015/16

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Diferenciální rovnice systémů s úzkými místy

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Úzká místa představují velmi aktuální téma, neboť je s nimi úzce spjata problematika front a zpoždění. Ať už je uvažovaným systémem městská doprava nebo výrobní linka, podstatou problému je vždy nedostatečná kapacita nějaké součásti systému. Ačkoli jde o téma, kde se v široké míře uplatňují počítačové simulace, popis pomocí diferenciálních rovnic a s tím spojená diskuze řešení není bez zajímavosti nejen z teoretického hlediska.

Cíle bakalářské práce:

Odvodit a sestavit vhodnou soustavu diferenciálních rovnic, která bude dobře popisovat chování vybraných systémů obsahujících úzká místa a s tím spojené fronty. Pro některé speciální případy tuto soustavu vyřešit či doplnit alespoň kvalitativní informace o řešení.

Seznam literatury:

- Čermák, J., Ženíšek, A.: Matematika III, Brno, 2001.
- Treiber, M., Kesting, A.: Traffic Flow Dynamics, Berlin, 2013.
- Hartman, P.: Ordinary differential equations, New York, 1964.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2015/16

V Brně, dne

L. S.

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc.
ředitel ústavu

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.
děkan fakulty

Abstrakt

Tato bakalářská práce se zabývá analýzou diferenciálních rovnic popisujících systémy s úzkými místy. Studovaný model soustavy je odvozen na základě hydrodynamické analogie. Dále jsou odvozeny podmínky a algoritmy popisující udržitelnost systému, tedy stav, kdy fronta v žádném úzkém místě nepřesáhne dovolenou úroveň. Vše je doplněno ilustrativními příklady.

Summary

The thesis deals with an analysis of differential equations for systems involving bottlenecks. The employed mathematical model originates from a hydrodynamical analogy. Further, the notion of sustainability, i.e. a situation when queues in bottlenecks do not exceed allowed limits, is discussed. In particular, conditions and algorithms enabling to describe sustainability properties of a given system are provided. The results are illustrated on several examples.

Klíčová slova

úzká místa, diferenciální rovnice, hydrodynamický model

Keywords

bottlenecks, differential equations, hydrodynamical model

ŠIMEČKOVÁ, K. *Diferenciální rovnice systémů s úzkými místy*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2016. 27 s. Vedoucí Ing. Tomáš Kisela, Ph.D.

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci *Diferenciální rovnice systémů s úzkými místy* vypracovala samostatně pod vedením Ing. Tomáše Kisely, Ph.D. a s použitím materiálů uvedených v seznamu literatury.

Kateřina Šimečková

Děkuji svému vedoucímu Ing. Tomášovi Kiselovi, Ph.D. za odborné vedení, cenné rady a připomínky při zpracování mé bakalářské práce.

Kateřina Šimečková

Obsah

1	Úvod	3
2	Použitý aparát	4
2.1	Diferenciální rovnice	4
2.2	Hydromechanický základ	5
3	Sestavení modelu	6
3.1	Hydrodynamická analogie	6
3.2	Model soustavy pracovišť	8
4	Udržitelnost systémů s konstantním zdrojem	11
4.1	Odvození	11
4.2	Příklady	12
4.2.1	System 4 pracovišť	12
4.2.2	System 6 pracovišť	14
5	Udržitelnost systémů s periodickým zdrojem	16
5.1	Odvození	16
5.2	Příklady	19
5.2.1	System 4 pracovišť	19
5.2.2	System 6 pracovišť	21
6	Závěr	25
7	Seznam použitých zkratk a symbolů	27

1. Úvod

Obyčejné diferenciální rovnice hrají význačnou roli při řešení problémů mnoha technických odvětví. Tato práce je zaměřena na aplikaci diferenciálních rovnic pro řešení systémů s úzkými místy. Úzké místo je v určitém ohledu limitujícím a rizikovým prvkem systému, což je úzce spjato s problematikou vzniku front a zpoždění. Toto je vždy způsobeno nedostatečnou kapacitou některé z částí systému. Pomocí diferenciálních rovnic lze vytvořit model, který lze využít jak v technické oblasti, například pro výrobní proces, tak také v městské dopravě či při popisu toku kapaliny zásobníkem. Ve výrobním či procesním pojetí úzká místa způsobují, že výrobní či jiný proces je pouze tak rychlý, jak rychlý je jeho nejpomalejší úsek, nacházející se právě v tomto úzkém místě.

Za účelem vhodně popsat situaci ve výrobním procesu či v dopravě již vzniklo mnoho modelů. Je vhodné zmínit, že modely lze klasifikovat podle různých kritérií. Podle [5] je nejběžnější rozdělení na makroskopické, mesoskopické a mikroskopické. Makroskopické modelování připodobňuje chování systémů k pohybu kapaliny či plynu. Mikroskopické modelování sleduje pohyb každé jednotlivé součásti systému. Makroskopické modelování tedy přistupuje k chodu systému spojitě, kdežto mikroskopické modelování diskrétně. Mesoskopické modelování kombinuje oba dva tyto přístupy. Tato práce se věnuje makroskopickým modelům, které někteří autoři označují také jako modely hydrodynamické. Právě z hydrodynamického hlediska k problematice modelování výrobního procesu přistupuje i tato práce.

Práce se zabývá popisem soustavy několika pracovišť. V první kapitole jsou uvedeny základní matematické a hydromechanické pojmy a vlastnosti, které budou v práci využity. Poté je pomocí hydrodynamické analogie sestaven model soustavy pracovišť. V další části se postupně zabýváme udržitelností systému s konstantním a periodickým zdrojem. Pro systém s konstantním zdrojem budeme hledat množství práce, kterou můžeme do systému vložit ke zpracování bez toho, aby se začala hromadit a zapříčinila následný vznik front. Pro systém s periodickým zdrojem připustíme vznik front a budeme hledat, která z pracovišť množství dodávané práce jako první nezvládnou a dojde na nich k přehlcení. V souvislosti s tím určíme maximální čas, po který můžeme systém zahlcovat prací, než fronta přeroste nad určitou hranici.

2. Použitý aparát

Tato kapitola zahrnuje nezbytný teoretický aparát použitý v této práci. V první části uvedeme matematický aparát, který zahrnuje základní definice týkající se diferenciálních rovnic. V další části objasníme nejdůležitější vztahy z hydromechaniky.

2.1. Diferenciální rovnice

Nyní si uvedeme základní definice a vlastnosti diferenciálních rovnic použité v této práci. Více informací o této problematice lze najít např. v [1] a [2]. Následující Definice 1 až Definice 3 jsou převzaty z [2].

Definice 1. Buď G podmnožina euklidovského prostoru \mathbb{R}^2 a f reálná funkce definovaná na G . Rovnice

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = f(t, y) \quad (2.1)$$

se nazývá *diferenciální rovnice 1. řádu*.

Definice 2. *Řešením* rovnice (2.1) se rozumí funkce y , která je diferencovatelná v nějakém intervalu J a splňuje podmínky

$$[t, y(t)] \in G \quad \text{a} \quad \dot{y} = f(t, y) \quad \forall t \in J.$$

Definice 3. Buď $[t_0, y_0]$ libovolný bod v G . Úloha určit řešení rovnice (2.1), které splňuje *počáteční podmínku*

$$y(t_0) = y_0,$$

se nazývá *počáteční úloha (počáteční problém)*.

V inženýrské praxi se ovšem setkáváme především se soustavami diferenciálních rovnic. Další definice budou věnovány jim. Následující definice jsou převzaty z [1].

Definice 4. Soustavu n diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= f_1(t, y_1, \dots, y_n), \\ \dot{y}_2 &= f_2(t, y_1, \dots, y_n), \\ &\vdots \\ \dot{y}_n &= f_n(t, y_1, \dots, y_n), \end{aligned} \quad (2.2)$$

kde funkce f_k ($k = 1, \dots, n$) jsou definovány na $(n + 1)$ -rozměrné oblasti $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$, nazýváme *normální soustavou diferenciálních rovnic prvního řádu*.

Definice 5. *Řešením* normální soustavy (2.2) nazýváme každou skupinu n funkcí

$$y_1, y_2, \dots, y_n,$$

kteřé jsou spojitě diferencovatelné v nějakém intervalu J a pro všechny body $t \in J$ vyhovují dané soustavě (2.2).

Definice 6. Úlohu určit řešení soustavy (2.2), které vyhovuje n počátečním podmínkám

$$y_1(t_0) = b_1, y_2(t_0) = b_2, \dots, y_n(t_0) = b_n,$$

kde $(t_0, b_1, \dots, b_n) \in G$ je libovolný, ale pevně daný bod, nazýváme *počátečním problémem*.

Definice 7. Soustava lineárních obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu je tvaru

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= a_{11}(t)y_1 + a_{12}(t)y_2 + \dots + a_{1n}(t)y_n + f_1(t), \\ \dot{y}_2 &= a_{21}(t)y_1 + a_{22}(t)y_2 + \dots + a_{2n}(t)y_n + f_2(t), \\ &\vdots \\ \dot{y}_n &= a_{n1}(t)y_1 + a_{n2}(t)y_2 + \dots + a_{nn}(t)y_n + f_n(t), \end{aligned}$$

kde všechny koeficienty $a_{ij}(t)$ a funkce $f_k(t)$ jsou spojité na intervalu J .

2.2. Hydromechanický základ

V této kapitole si odvodíme nezbytné vztahy používané pro vyjádření průtoku nádobou. Při proudění kapalin musí platit zákon zachování energie a zákon zachování hmotnosti. Tyto dva zákony jsou vyjádřeny pomocí Bernoulliho rovnice a rovnice kontinuity. Podrobnější informace lze najít například v [3] a [4].

Uvedeme Bernoulliho rovnici pro ideální kapalinu. Tato definice je převzata z [3]. Pro jednorozměrné ustálené proudění v potrubí a pro nestlačitelnou ideální kapalinu platí tato rovnice:

$$\frac{1}{2}v^2 + \frac{p}{\rho} + gh = c, \quad (2.3)$$

kde c je reálná konstanta, v je rychlost, p je tlak, ρ je hustota kapaliny, g je tíhové zrychlení a h je výška hladiny. Zároveň pro tyto členy platí, že $\frac{1}{2}v^2$ je měrná kinetická energie, p/ρ měrná tlaková energie a třetí člen gh je měrná polohová (potenciální) energie. Součet jednotlivých energií představuje celkovou mechanickou energii kapaliny. Tato rovnice tedy vyjadřuje zákon zachování energie.

Pro aplikaci na konkrétní příklady se používá následující tvar Bernoulliho rovnice:

$$\frac{1}{2}v_1^2 + \frac{p_1}{\rho} + gh_1 = \frac{1}{2}v_2^2 + \frac{p_2}{\rho} + gh_2.$$

V této rovnici jsou zvoleny 2 libovolné body, ve kterých je popsán průtok nádobou.

Dále při proudění kapalin musí platit zákon zachování hmoty, který je vyjádřen rovnicí kontinuity. Definice je převzata z [4]. Tato rovnice udává, že průtok všemi průřezy nádoby musí být stejný. Zjednodušená rovnice kontinuity je definovaná pro jednorozměrné ustálené proudění ideální, tedy nestlačitelné a neviskózní, kapaliny. Dále předpokládáme, že $\rho = konst.$ Pro tyto kapaliny tedy platí:

$$Q = Sv = c, \quad (2.4)$$

kde c je reálná konstanta, Q objem kapaliny, který proteče nádobou za jednotku času, S je průřez nádoby a v rychlost kapaliny.

3. Sestavení modelu

V této kapitole vytvoříme model, který popisuje činnost výrobního procesu. Pro tuto práci jsme vybrali hydromechanický model proudění kapaliny nádobami, ve kterém budeme hledat podobnost s výrobním procesem. Hydromechanické veličiny vhodně nahradíme technickými, které popisují vlastnosti pracovišť ve výrobním procesu.

3.1. Hydrodynamická analogie

V předchozí kapitole jsou mimo jiné uvedeny vztahy nezbytné pro popis průtoku kapaliny nádobou. Obecně můžeme průtok jednou nádobou popsat pomocí změny objemu v nádobě, která závisí pouze na přítoku kapaliny do nádoby a jejím výtoku. Toto lze popsat následující rovnicí:

$$\dot{V} = Q^p - Q^v, \quad (3.1)$$

kde Q^p je přítok a Q^v je výtok. V modelu průtoku kapaliny nádobou je možné najít analogii s výrobním procesem. V tomto modelu nádoba zastupuje jedno pracoviště. Vyjdeme z rovnice (3.1) a vysvětlíme si, jakým způsobem můžeme hydromechanické veličiny připodobnit k vlastnostem pracoviště ve výrobním procesu. Tok nádobou si lze představit jako výkon pracoviště. V rovnici (3.1) jsou toky označeny Q^p a Q^v . Tok Q^p je v hydromechanice přítok kapaliny do nádoby, tedy v souvislosti s výrobním procesem bude představovat vstupní výkon. Tento výkon se v elektrotechnice označuje jako příkon a toto označení si v této práci vypůjčíme také. Veličina Q^v popisuje výtok kapaliny z nádoby, což bude u pracoviště představovat jeho okamžitý výkon. Okamžitý objem kapaliny V bude reprezentovat práci, která čeká na zpracování. Tuto práci můžeme považovat za frontu čekající na stanovišti.

Dále se budeme zabývat tím, jakých hodnot nabývá výkon na pracovišti. V souvislosti s tím zavedeme novou veličinu Q^* , která představuje maximální možný výkon pracoviště a je vlastností tohoto pracoviště. Pokud je tedy na pracovišti nějaké množství práce ke zpracování, pracuje pracoviště na svůj maximální možný výkon. V opačném případě, tedy pokud na pracovišti žádná práce nečeká na zpracování, záleží výkon na množství práce přicházející ke zpracování. Pokud je příkon menší než maximální výkon pracoviště, pracuje pracoviště pouze na tento příkon. Nemůže zpracovávat více práce než mu dodáváme. Pokud je příkon větší nebo roven maximálnímu výkonu, pracuje pracoviště pouze na svůj maximální výkon, více mu jeho vlastnosti nedovolují. To lze popsat následujícím vztahem (3.2).

$$Q_i^v(t) = \begin{cases} Q^*, & \text{jestliže } V > 0, \\ Q^p(t), & \text{jestliže } V = 0, \end{cases} \quad (3.2)$$

kde Q^p je příkon, Q^v je výkon, V je okamžité množství práce čekající na zpracování a Q^* je maximální výkon.

V důsledku (3.2) musí vždy platit, že pracoviště nepodává větší výkon než je jeho maximální výkon. Odvedená práce není větší než jsou možnosti tohoto pracoviště, tedy:

$$Q^v(t) \leq Q^*.$$

Při plném vytížení budeme předpokládat konstantní výkon pracoviště, který nezáleží na délce fronty. Pokud by výkon konstantní nebyl, závisel by na množství dodávané práce. Při průtoku kapaliny válcovou nádobou je známo, že s rostoucím množstvím kapaliny v nádobě také roste výtoková rychlost. Pokusíme se tedy najít, jaký tvar by měla nádoba splňující podmínku konstantní výtokové rychlosti. Budeme hledat vztah pro obsah průřezu nádoby v závislosti na výšce. Pro odvození vyjdeme z Bernoulliho rovnice a rovnice kontinuity. Základní tvar Bernoulliho rovnice popisuje vztah (2.3).

Budeme předpokládat, že kolem nádoby je ve všech místech stejný tlak a také hustota kapaliny je ve všech místech stejná. Nádobu umístíme do počátku souřadné soustavy. Za těchto podmínek má Bernoulliho rovnice následující tvar:

$$\frac{1}{2}v^2 + gh = \frac{1}{2}v_1^2,$$

kde v je rychlost poklesu hladiny, h výška hladiny v nádobě a v_1 výtoková rychlost.

Dále využijeme rovnici kontinuity, kterou lze obecně zapsat jako rovnici (2.4).

Přítoková rychlost v odpovídá změně výšky v nádobě \dot{h} . Z Bernoulliho rovnice odvodíme následující vztah pro změnu výšky kapaliny v nádobě:

$$\dot{h} = v = \sqrt{v_1^2 - 2gh}.$$

Pro změnu výšky z rovnice kontinuity zároveň vyplývá tento vztah:

$$\dot{h} = v = \frac{S_1 v_1}{S},$$

tyto vztahy dáme do rovnosti, tedy

$$\sqrt{v_1^2 - 2gh} = \frac{S_1 v_1}{S}.$$

Dalšími úpravami získáme předpis pro obsah nádoby v průřezu v závislosti na výšce.

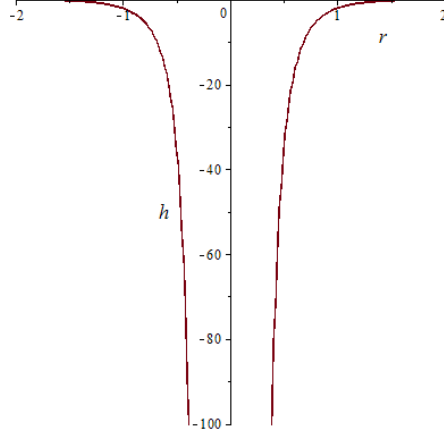
$$S(h) = \frac{S_1 v_1}{\sqrt{v_1^2 - 2gh}}. \quad (3.3)$$

Pro jednoduchost předpokládejme nádobu kruhového tvaru, tedy obsah budeme počítat tímto způsobem:

$$S(h) = \pi r^2. \quad (3.4)$$

Předchozí dvě rovnice (3.3) a (3.4) dáme do rovnosti, čímž lze odvodit výsledný tvar nádoby:

$$\frac{S_1 v_1}{\sqrt{v_1^2 - 2gh}} = \pi r^2.$$



Obrázek 3.1: Tvar nádoby pro volbu parametrů $v_1 = 2$ a $S_1 = 10$.

Výsledný tvar nádoby bude popsán pomocí rovnice:

$$h = \frac{v_1^2 \pi^2 r^4 - S_1^2 v_1^2}{2g\pi^2 r^4}. \quad (3.5)$$

Pomocí předchozí rovnice (3.5) můžeme vykreslit křivku nádoby, pro kterou bude platit, že výtoková rychlost $v_1 = konst.$ Tato křivka je znázorněna na obr. 3.1.

Tímto je dokázáno, že existuje nádoba, ze které bude kapalina vytékat konstantní rychlostí. Dále už budeme používat pouze pojmy práce a výkon.

3.2. Model soustavy pracovišť

V této části uvedeme model systému, se kterým budeme dále pracovat. Budeme uvažovat N pracovišť, z nichž každé má své pevně dané vlastnosti Q_i^* a V_i^* . Charakteristika Q_i^* představuje maximální výkon i -tého pracoviště a V_i^* popisuje maximální délku fronty i -tého pracoviště. Dále máme nastavena pravidla pro přesun práce mezi jednotlivými pracovišti, která jsou určena konstantami α_{ij} a β_j . $\alpha_{ij} \in \langle 0, 1 \rangle$ je část z celkového množství práce přivedená z i -tého pracoviště na j -té pracoviště a $\beta_j \in \langle 0, 1 \rangle$ je část výkonu ze zdroje, kterou budeme požadovat po j -tém pracovišti. Dále máme dán vnější zdroj Q_0 . Obecně víme, že množství práce na pracovišti závisí na množství práce přivedené a množství odvedené práce. To je zřejmé i z následujícího vztahu:

$$\dot{V}_i = Q_i^p - Q_i^v, \quad i = 1, \dots, N, \quad (3.6)$$

kde Q_i^p je příkon i -tého pracoviště a Q_i^v je výkon i -tého pracoviště. N je počet pracovišť.

Dále se budeme zabývat tím, jakých hodnot nabývá výkon na pracovišti. Vyjdeme ze vztahu (3.2), který modifikujeme pro soustavu pracovišť. Výkon bude popsán vztahem:

$$Q_i^v(t) = \begin{cases} Q_i^*, & \text{jestliže } V_i > 0, \\ Q_i^p(t), & \text{jestliže } V_i = 0, \end{cases} \quad (3.7)$$

kde Q_i^p je příkon i -tého pracoviště, Q_i^v je výkon i -tého pracoviště, V_i je okamžité množství práce čekající na zpracování i -tým pracovištěm a Q_i^* je maximální výkon i -tého pracoviště.

Důsledkem vztahu (3.7) je, že pracoviště nepodává větší výkon než je jeho maximální výkon. Odvedená práce není větší než jsou možnosti jednotlivých pracovišť, tedy:

$$Q_i^v(t) \leq Q_i^*.$$

Tímto způsobem si nyní popíšeme soustavu N pracovišť. Vyjdeme ze vztahu (3.6). Pracoviště jsou číslovány podle pořadí vzestupně. Předpokládáme, že práce se může přesouvat z jednoho pracoviště do kteréhokoliv jiného pracoviště včetně sebe sama.

$$\dot{V}_i = \beta_i Q_0 + \sum_{j=1}^N \alpha_{ji} Q_j^v - Q_i^v, \quad i = 1 \dots N, \quad (3.8)$$

kde $\beta_i \in \langle 0, 1 \rangle$, $\alpha_{ji} \in \langle 0, 1 \rangle$ a zároveň ze zákona zachování hmoty vyplývá, že výkon, který přerozdělujeme, se nemůže ztratit. Proto platí, že

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \beta_i &= 1, \\ \sum_{j=1}^N \alpha_{ji} &= 1, \quad i = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Maticově můžeme soustavu (3.8) zapsat jako:

$$\dot{V} = Q_0 \vec{b} + A \vec{Q}^v - \vec{Q}^v, \quad \text{tedy} \quad \dot{V} = Q_0 \vec{b} + (A - \mathbb{E}) \vec{Q}^v,$$

kde v \dot{V} jsou obsaženy okamžité hodnoty práce, která čeká na zpracování na i -tých pracovištích, vektor \vec{b} je vektor, který obsahuje hodnoty β_i pro jednotlivá pracoviště, matice A obsahuje hodnoty α_{ji} pro jednotlivá pracoviště, matice \mathbb{E} je jednotková matice a vektor \vec{Q}^v obsahuje výkony jednotlivých pracovišť. Tuto soustavu lze rozepsat tímto způsobem:

$$\begin{pmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \\ \vdots \\ \dot{V}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_N \end{pmatrix} Q_0 + \begin{pmatrix} (\alpha_{11} - 1) & \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{N1} \\ \alpha_{12} & (\alpha_{22} - 1) & & \alpha_{N2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \alpha_{1N} & \alpha_{2N} & \cdots & (\alpha_{NN} - 1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1^v \\ Q_2^v \\ \vdots \\ Q_N^v \end{pmatrix}$$

Pro jednoduchost se omezíme na případ, kdy se práce může přesouvat pouze na pracoviště s vyšším indexem. Tedy takové, které je až další v pořadí, práce se tedy nesmí ani vracet na stejné pracoviště, což lze zapsat jako $\alpha_{jj} = 0$ a $j \geq i$. Pro i -té stanoviště tedy platí:

$$\dot{V}_i = \beta_i Q_0 + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ji} Q_j^v - Q_i^v, \quad i = 1 \dots N.$$

Tento vztah lze rozepsat tímto způsobem:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= \beta_1 Q_0 - Q_1^v, \\ \dot{V}_2 &= \beta_2 Q_0 + \alpha_{12} Q_1^v - Q_2^v, \\ &\vdots \\ \dot{V}_N &= \beta_N Q_0 + \sum_{j=1}^{N-1} \alpha_{jN} Q_j^v - Q_N^v. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Pro větší přehlednost použijeme maticový zápis soustavy.

$$V = Q_0 \vec{b} + (A - \mathbb{E}) \vec{Q}^v.$$

V tomto zjednodušeném modelu se matice $A - \mathbb{E}$ zredukovala na dolní trojúhelníkovou matici, tedy

$$A - \mathbb{E} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_{12} & -1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ \alpha_{1N} & \alpha_{2N} & \cdots & -1 \end{pmatrix}$$

Je vhodné zmínit, že takto odvozená soustava nemá konstantní pravou stranu, ale její pravá strana se mění v závislosti na vstupních podmínkách.

4. Udržitelnost systémů s konstantním zdrojem

Udržitelnost systému znamená, že množství přiváděné práce nebude růst nade všechny meze. V této kapitole budeme předpokládat konstantní přísun práce ze zdroje. Hlavním cílem bude najít hodnotu vstupního množství práce ze zdroje, při které nedojde ke vzniku front. Nejdříve tento vztah odvodíme teoreticky a v další části uvedeme příklady, na které tento model aplikujeme.

4.1. Odvození

Pro systém (3.9) si vypíšeme podmínky, pomocí kterých najdeme nejvyšší systémem zpracovatelnou hodnotu vstupní práce, při které ještě nedojde ke vzniku front. Budeme vycházet z myšlenky, že příkon nesmí být větší než výkon pracoviště. Množství práce, které čeká na zpracování, by nemělo růst. Tedy

$$\dot{V}_i \leq 0, \quad i = 1 \dots N,$$

což můžeme rozepsat jako:

$$\beta_i Q_0 + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ji} Q_j^v \leq Q_i^v, \quad i = 1 \dots N.$$

Postupně

$$\begin{aligned} \beta_1 Q_0 &\leq Q_1^v, \\ \beta_2 Q_0 + \alpha_{12} Q_1^v &\leq Q_2^v, \\ \beta_3 Q_0 + \alpha_{13} Q_1^v + \alpha_{23} Q_2^v &\leq Q_3^v, \\ &\vdots \\ \beta_N Q_0 + \sum_{j=1}^{N-1} \alpha_{jN} Q_j^v &\leq Q_N^v. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Za předpokladu, že jsou všechny tyto nerovnice splněny, můžeme použít $Q_i^v = Q_i^p = f_i(Q_0)$. Tuto soustavu nerovnic (4.1) přepíšeme na tvar pouze pro vstupní práci Q_0 , abychom získali vztahy pro výkony následujících pracovišť. Budeme postupně prochá-

zet jednotlivé nerovnice a dosazovat největší možný výkon Q_i^v vycházející z předchozí nerovnice, tedy

$$\begin{aligned}
\beta_1 Q_0 &\leq Q_1^v, \\
\beta_2 Q_0 + \alpha_{12} \beta_1 Q_0 &\leq Q_2^v, \\
\beta_3 Q_0 + \alpha_{13} \beta_1 Q_0 + \alpha_{23} \beta_2 Q_0 + \alpha_{23} \alpha_{12} \beta_1 Q_0 &\leq Q_3^v, \\
&\vdots \\
\sum_{k=1}^N Q_0 \left[\sum_{j_1=1}^{N-1} \cdots \sum_{j_k=1}^{j_{k-1}-1} \beta_{j_k} \alpha_{j_1 N} \prod_{p=1}^{k-1} \alpha_{j_{p+1} j_p} \right] + \beta_N Q_0 &\leq Q_N^v. \tag{4.2}
\end{aligned}$$

Z předpisu (3.7) vyplývá, že Q_i^v na pravé straně nerovnosti může být rovnou pouze Q_i^* nebo Q_i^p . Pro $Q_i^v = Q_i^p$ jsou nerovnosti splněny automaticky, takže se budeme zabývat opačným případem, tedy

$$\begin{aligned}
\beta_1 Q_0 &\leq Q_1^*, \\
\beta_2 Q_0 + \alpha_{12} \beta_1 Q_0 &\leq Q_2^*, \\
\beta_3 Q_0 + \alpha_{13} \beta_1 Q_0 + \alpha_{23} \beta_2 Q_0 + \alpha_{23} \alpha_{12} \beta_1 Q_0 &\leq Q_3^*, \\
&\vdots \\
\sum_{k=1}^N Q_0 \left[\sum_{j_1=1}^{N-1} \cdots \sum_{j_k=1}^{j_{k-1}-1} \beta_{j_k} \alpha_{j_1 N} \prod_{p=1}^{k-1} \alpha_{j_{p+1} j_p} \right] + \beta_N Q_0 &\leq Q_N^*. \tag{4.3}
\end{aligned}$$

Z této soustavy můžeme odvodit vztah pro nejvyšší hodnotu Q_0 , pro kterou je zaručeno, že se nebudou tvořit fronty. Tuto hodnotu označíme Q_0^{**} a platí pro ni následující rovnost:

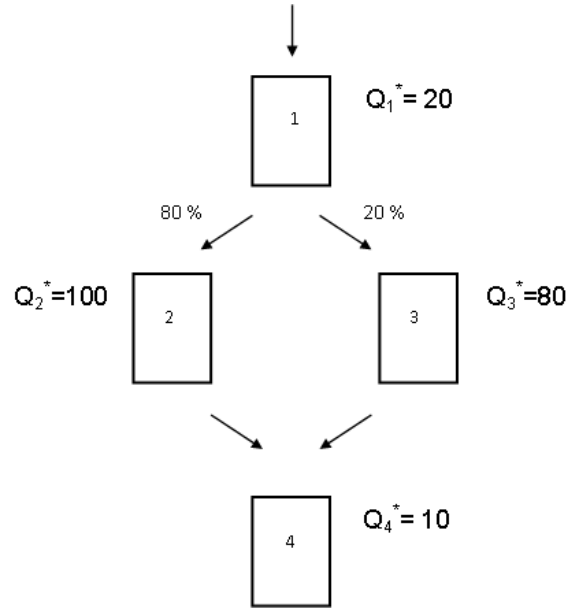
$$Q_0^{**} = \min \left(\frac{Q_1^*}{\beta_1}, \frac{Q_2^*}{\beta_2 + \alpha_{12} \beta_1}, \dots, \frac{Q_N^*}{\sum_{k=1}^N \left[\sum_{j_1=1}^{N-1} \cdots \sum_{j_k=1}^{j_{k-1}-1} \beta_{j_k} \alpha_{j_1 N} \prod_{p=1}^{k-1} \alpha_{j_{p+1} j_p} \right] + \beta_N} \right). \tag{4.4}$$

4.2. Příklady

V této části kapitoly výše odvozený model aplikujeme na příklady. V prvním příkladu popíšeme systém 4 pracovišť a ve druhém stejným způsobem soustavu 6 pracovišť. Cílem bude stanovit hodnotu příkonu Q_0^{**} , pro kterou se ještě nebudou tvořit fronty.

4.2.1. Systém 4 pracovišť

Začneme popisovat systém 4 pracovišť. Výkon z prvního pracoviště se rozdělí, z 80 % jde do druhého pracoviště a 20 % do třetího. Výkony druhého a třetího pracoviště se sbíhají do čtvrtého. Toto je znázorněno na obrázku 4.1. Z obrázku zároveň vidíme, že $Q_1^* = 20$, $Q_2^* = 100$, $Q_3^* = 80$, $Q_4^* = 10$.



Obrázek 4.1: Systém 4 pracovišť

Tento systém lze popsat následující soustavou rovnic:

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_1 &= Q_0 - Q_1^v, \\
 \dot{V}_2 &= \frac{4}{5}Q_1^v - Q_2^v, \\
 \dot{V}_3 &= \frac{1}{5}Q_1^v - Q_3^v, \\
 \dot{V}_4 &= Q_2^v + Q_3^v - Q_4^v,
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

s počátečními podmínkami $V_1(0) = 0, V_2(0) = 0, V_3(0) = 0, V_4(0) = 0$. Maticový zápis této soustavy nádob má následující tvar:

$$\begin{pmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \\ \dot{V}_3 \\ \dot{V}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{4}{5} & -1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1^v \\ Q_2^v \\ Q_3^v \\ Q_4^v \end{pmatrix}$$

Nyní se začneme zabývat udržitelností této soustavy. Pro systém si vypíšeme podmínky, pomocí kterých najdeme nejvyšší systémem zpracovatelnou hodnotu vstupního výkonu, při kterém nedochází ke vzniku front. Budeme používat postup, odvozený ve čtvrté kapitole. Vyjdeme tedy ze vztahů (4.1), (4.2) a (4.3). Podle vztahu (4.3) platí:

$$\begin{aligned}
 Q_0 &\leq Q_1^*, \\
 \frac{4}{5}Q_0 &\leq Q_2^*, \\
 \frac{1}{5}Q_0 &\leq Q_3^*, \\
 Q_0 &\leq Q_4^*.
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Z této soustavy můžeme odvodit vztah pro hodnotu Q_0^{**} , která popisuje nejvyšší příkon, pro který je zaručeno, že nebudou vznikat fronty:

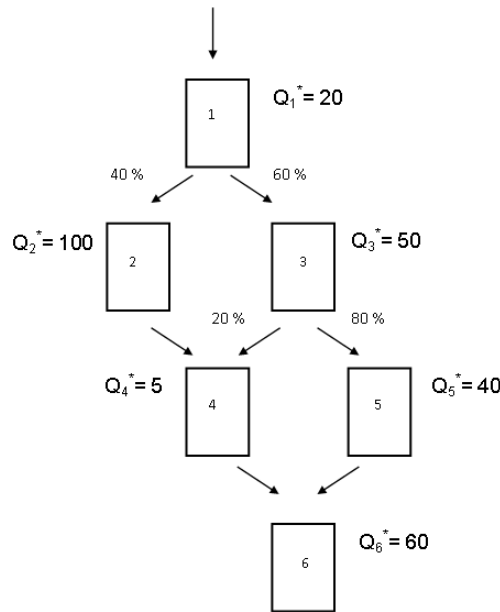
$$Q_0^{**} = \min(Q_1^*, \frac{5}{4}Q_2^*, 5Q_3^*, Q_4^*). \quad (4.7)$$

Nyní do rovnice (4.7) dosadíme konkrétní hodnoty:

$$Q_0^{**} = \min(20, 125, 80, 10) = 10. \quad (4.8)$$

4.2.2. Systém 6 pracovišť

V dalším rozebereme úlohu pro 6 pracovišť. Tato pracoviště jsou znázorněna na obrázku 4.2.



Obrázek 4.2: Systém 6 pracovišť

Tento systém lze popsat následující soustavou rovnic.

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= Q_0 - Q_1^v, \\ \dot{V}_2 &= \frac{2}{5}Q_1^v - Q_2^v, \\ \dot{V}_3 &= \frac{3}{5}Q_1^v - Q_3^v, \\ \dot{V}_4 &= Q_2^v + \frac{1}{5}Q_3^v - Q_4^v, \\ \dot{V}_5 &= \frac{4}{5}Q_3^v - Q_5^v, \\ \dot{V}_6 &= Q_4^v + Q_5^v - Q_6^v, \end{aligned} \quad (4.9)$$

s počátečními podmínkami $V_1(0) = 0, V_2(0) = 0, V_3(0) = 0, V_4(0) = 0, V_5(0) = 0, V_6(0) = 0$. Nyní se začneme zabývat udržitelností této soustavy. Pro systém si vypíšeme podmínky,

pomocí kterých najdeme nejvyšší systémem zpracovatelnou hodnotu vstupního výkonu, při kterém nedochází ke vzniku front. Budeme používat postup, odvozený ve čtvrté kapitole. Vyjdeme tedy ze vztahů (4.1), (4.2) a (4.3). Pro vztah (4.3) v tomto příkladě platí:

$$\begin{aligned} Q_0 &\leq Q_1^*, \\ \frac{2}{5}Q_0 &\leq Q_2^*, \\ \frac{3}{5}Q_0 &\leq Q_3^*, \\ \frac{7}{25}Q_0 &\leq Q_4^*, \\ \frac{12}{25}Q_0 &\leq Q_5^*, \\ \frac{19}{25}Q_0 &\leq Q_6^*. \end{aligned}$$

Z této soustavy odvodíme vztah pro Q_0^{**} , který udává, jaký je nejvyšší příkon ze zdroje, při kterém ještě nebudou vznikat fronty. Platí, že

$$Q_0^{**} = \min(Q_1^*, \frac{5}{2}Q_2^*, \frac{5}{3}Q_3^*, \frac{25}{7}Q_4^*, \frac{25}{12}Q_5^*, \frac{25}{19}Q_6^*). \quad (4.10)$$

Nyní do rovnice (4.10) dosadíme konkrétní hodnoty:

$$Q_0^{**} = \min(20, 250, \frac{5}{3}50, \frac{25}{7}5, \frac{25}{12}40, \frac{25}{19}60) = \frac{25}{7}5. \quad (4.11)$$

5. Udržitelnost systémů s periodickým zdrojem

V této kapitole se budeme zabývat tím, že vstupní práce Q_0 může krátkodobě přesahovat příkon Q_0^{**} definovaný v předchozí kapitole. Konkrétně budeme předpokládat, že Q_0 je periodická, po částech spojitá konstantní funkce, která se pohybuje kolem hodnoty Q_0^{**} . Systém považujeme za udržitelný, pokud jsou splněny tyto 2 podmínky:

- I. Na konci intervalu Q_M , což je větší z výkonů použité periodické funkce, žádná fronta nevzroste nad mez maximální povolené délky fronty daného pracoviště.
- II. Na konci periody se vše vrátí do původního stavu.

5.1. Odvození

Oproti předchozí kapitole budeme mít zadanou vlastnost i -tého pracoviště V_i^* , která reprezentuje nejvyšší povolenou délku fronty tohoto pracoviště. Budeme uvažovat soustavu N pracovišť podle (3.9), z nichž každé má své pevně dané vlastnosti Q_i^* a V_i^* .

Nyní si popíšeme, jakým způsobem se bude měnit Q_0 v čase. Předpokládáme, že $Q_M = konst$, $Q_m = konst$ a $Q_M > Q_0^{**} > Q_m$.

$$Q_0(t) = \begin{cases} Q_M, & t \in \bigcup_k \langle kT, (k+p)T \rangle, \quad 0 < p < 1, \quad T > 0, \\ Q_m, & t \in \bigcup_k \langle (k+p)T, (k+1)T \rangle, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (5.1)$$

kde T je perioda a p je část periody, po kterou požadujeme větší výkon Q_M .

I. podmínka udržitelnosti

Nyní se budeme zabývat první z podmínek udržitelnosti. Připustíme vznik front a budeme hledat, která z pracovišť nestihnou pracovat na požadovaný výkon. Z předpisu (5.1) máme dán příkon Q_M . Sestavíme algoritmus, který pomůže tato pracoviště určit. Z pracovišť, která tvoří frontu sestavíme množinu \mathcal{N} . Na počátku algoritmu je tato množina prázdná. Postup při výpočtu algoritmu je následující:

1. krok: Vycházíme ze soustavy (4.3). Předpokládáme, že minimum, předepsané rovnicí (4.4), je určeno r -tým stanovištěm. Tuto hodnotu si označíme jako Q_{0r}^{**} podle r -té podmínky, tedy $Q_{0r}^{**} = Q_0^{**}$. Pokud bude přítok o δ větší než Q_{0r}^{**} , kde δ je mála hodnota, pro kterou bude porušena jen r -tá podmínka a žádná jiná, tak r -té stanoviště začne tvořit frontu. Dále nám zůstanou platné všechny podmínky až do r -té. V r -té podmínce bude opačná nerovnost a výkon r -tého pracoviště bude maximální, tedy

$Q_r^v = Q_r^*$. V důsledku toho se pozmění i následující nerovnice. Platné podmínky tedy budou tyto:

$$\begin{aligned}
& \beta_1 Q_0 \leq Q_1^*, \\
& \beta_2 Q_0 + \alpha_{12} \beta_1 Q_0 \leq Q_2^*, \\
& \beta_3 Q_0 + \alpha_{13} \beta_1 Q_0 + \alpha_{23} \beta_2 Q_0 + \alpha_{23} \alpha_{12} \beta_1 Q_0 \leq Q_3^*, \\
& \vdots \\
& \sum_{k=1}^{r-1} Q_0 \left[\sum_{j_1=1}^{r-2} \cdots \sum_{j_k=1}^{j_{k-1}-1} \beta_{j_k} \alpha_{j_1(r-1)} \prod_{p=1}^{k-1} \alpha_{j_{p+1} j_p} \right] + \beta_{r-1} Q_0 \leq Q_{r-1}^*, \\
& \sum_{k=1}^r Q_0 \left[\sum_{j_1=1}^{r-1} \cdots \sum_{j_k=1}^{j_{k-1}-1} \beta_{j_k} \alpha_{j_1(r)} \prod_{p=1}^{k-1} \alpha_{j_{p+1} j_p} \right] + \beta_r Q_0 > Q_r^*, \\
& \sum_{k=1}^{r-1} Q_0 \left[\sum_{j_1=1}^{r-2} \cdots \sum_{j_k=1}^{j_{k-1}-1} \beta_{j_k} \alpha_{j_1(r-1)} \prod_{p=1}^{k-1} \alpha_{j_{p+1} j_p} \right] + \beta_{r+1} Q_0 + \alpha_{r(r+1)} Q_r^* \leq Q_{r+1}^*, \\
& \vdots \\
& \sum_{k=1}^{r-1} Q_0 \left[\sum_{j_1=1}^{r-2} \cdots \sum_{j_k=1}^{j_{k-1}-1} \beta_{j_k} \alpha_{j_1(r-1)} \prod_{p=1}^{k-1} \alpha_{j_{p+1} j_p} \right] + \beta_N Q_0 + \sum_{j=r}^{N-1} \alpha_{jN} Q_j^* \leq Q_N^*. \quad (5.2)
\end{aligned}$$

Pracoviště s indexem r vložíme do množiny \mathcal{N} .

2. krok: V dalším kroku algoritmu určíme, které z pracovišť se začne přehlcovat po r -tém. Toto pracoviště označíme indexem m . Pokud bude přítok o δ větší než Q_{0m}^{**} , m -té pracoviště začne tvořit fronty. V m -té podmínce obrátíme nerovnost a následující podmínky budou touto změnou opět ovlivněny. Pracoviště s indexem m opět zařadíme do množiny \mathcal{N} .

3. krok: Tímto způsobem pokračujeme v procházení pracovišť, které se přehltní a zařazujeme je do množiny \mathcal{N} . Algoritmus ukončíme, když se dostaneme do tvaru soustavy podmínek, pro který budou všechny nerovnice platné. Podmínky, které budou mít opačnou nerovnost, určují pracoviště, která mohou tvořit frontu a náleží do množiny \mathcal{N} .

Tento algoritmus popisuje případ, ve kterém se při větším příkonu pozmění vždy jen jedna z nerovnic. Obecně se při stejné hodnotě příkonu může začít tvořit fronta na více pracovištích. Algoritmus by se dal pro tento případ analogicky pozměnit, porušeno by bylo více nerovností a v závislosti na tom i následující nerovnice. Výsledkem tohoto algoritmu je množina obsahující všechna pracoviště, na kterých se bude tvořit fronta.

Na základě odvozené množiny pracovišť, která začnou tvořit frontu, určíme nejvyšší čas, ve kterém je nutné zastavit přívod Q_M do systému. V tomto čase fronta dosáhne své maximální povolené délky V_i^* a čas označíme t_{max} . V případě, že se fronta tvoří na více

stanovištích současně, přívod je nutné zastavit tak, aby na žádném z nich fronta nepřesáhla maximální povolenou délku. Tedy maximální čas bude nejmenší z jednotlivých časů, ve kterých jednotlivá stanoviště vytvoří svou maximální délku fronty. Musí tedy platit:

$$t_{max} = \min_{i \in \mathcal{N}}(t_i). \quad (5.3)$$

Čas, za který se jedno pracoviště přehltí, se dá vyjádřit z rovnice (3.6). Řešení této rovnice je:

$$V_i = (Q_i^p - Q_i^v)t_i + c_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad (5.4)$$

kde konstanta c_i je počáteční množství práce na i -tém stanovišti, které je z počáteční podmínky $V_i(0) = 0$ nulové. Z této rovnice si vyjádříme čas t_i , tedy:

$$t_i = \left(\frac{V_i}{Q_i^p - Q_i^v} \right), \quad i = 1, \dots, N. \quad (5.5)$$

Po dobu pT , kdy je $Q_M > Q_{0i}^{**}$ se fronta na i -tém pracovišti zvětšuje a po dobu $(1-p)T$ při $Q_m < Q_{0i}^{**}$ se fronta zmenšuje. Délka fronty popsaná rovnicí (5.4) nesmí být po dobu pT větší než maximální délka, tuto podmínku zapíšeme jako:

$$V_i(pT) \leq V_i^*, \quad i \in \mathcal{N}. \quad (5.6)$$

Z tohoto vztahu můžeme pomocí vztahů (5.4) a (5.6) vyjádřit maximální délku fronty pro i -té pracoviště z množiny pracovišť tvořících frontu:

$$V_i^* = (Q_i^p - Q_i^v)t_i, \quad i \in \mathcal{N}. \quad (5.7)$$

Dále víme, že $Q_i^v = Q_i^*$, protože při vzniku fronty pracoviště pracuje na svůj maximální výkon. Z rovnice (5.7) získáme maximální čas, po který můžeme po i -tém stanovišti požadovat větší výkon Q_M , než začne fronta růst nad stanovenou hranici:

$$t_i = \frac{V_i^*}{Q_i^p - Q_i^*}, \quad i \in \mathcal{N}. \quad (5.8)$$

Nyní můžeme určit, po jakou dobu můžeme po celém systému požadovat výkon Q_M . Tímto časem je nejmenší z jednotlivých časů, ve kterých se jednotlivá stanoviště přehltí, tj. dosáhnou své maximální délky fronty, popsány rovnicí (5.3). Z rovnice (5.8) známe předpis, pro tyto jednotlivé časy. Dosazení těchto jednotlivých časů do rovnice (5.3) máme konečný tvar vztahu:

$$t_{max} = \min_{i \in \mathcal{N}}(t_i) = \min_{i \in \mathcal{N}} \left(\frac{V_i^*}{Q_i^p - Q_i^*} \right). \quad (5.9)$$

Čas t_{max} je nejdelší doba, po kterou můžeme do systému pouštět příkon Q_M bez toho, aby na některém ze stanovišť délka fronty přesáhla danou mez.

II. podmínka udržitelnosti

Nyní se budeme zabývat druhou podmínkou udržitelnosti systému. Tato podmínka určuje, že na konci periody se vše vrátí do počátečního stavu. Výkon Q_M požadujeme

po pracovišti vždy po dobu pT a menší výkon Q_m po zbytek periody $(1-p)T$. Vyjdeme z rovnice

$$\dot{V} = Q_0 - Q_v,$$

kde Q_v je výkon na konci systému. Tuto rovnici zintegrujeme podle času

$$\int_0^T \dot{V} dt = \int_0^T Q_0 - Q_v dt.$$

Integrál $\int_0^T \dot{V} dt = V(T) - V(0)$. Z počáteční podmínky víme, že $V(0) = 0$. Dále předpokládáme, že systém pracuje na svůj maximální výkon. Nejvyšší hodnota konečného výkonu Q_v systému, aniž by se na některém ze stanovišť tvořila fronta, je Q_0^{**} . Dosazením do předchozí rovnice (5.1) dostaneme:

$$V(T) = \int_0^T Q_0 - Q_0^{**} dt = \int_0^T Q_0 dt - TQ_0^{**} = 0,$$

tj.

$$\int_0^T Q_0 dt = TQ_0^{**}.$$

Pro po částech spojitý příkon Q_0 vede integrál na tuto rovnici:

$$pTQ_M + (1-p)TQ_m \leq Q_0^{**}T.$$

Z tohoto vztahu již můžeme odvodit druhou podmínku udržitelnosti, tj.

$$pQ_M + (1-p)Q_m \leq Q_0^{**}. \quad (5.10)$$

Systém se tedy nepřehltí a dokáže zpracovat vloženou práci, pokud je vážený průměr obou hodnot $Q_0(t)$ menší než Q_0^{**} .

5.2. Příklady

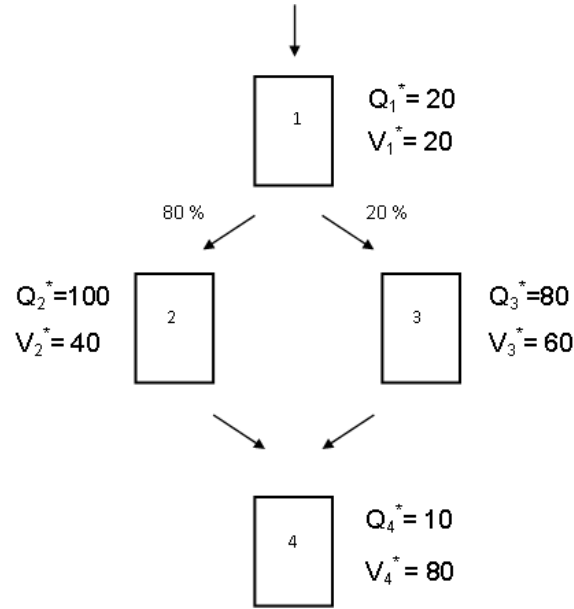
V příkladech využijeme dvou zadání z předchozí kapitoly. Pro každé stanoviště stanovíme navíc hodnotu maximální délky fronty. Úkolem bude ze zadaných hodnot p , Q_M a Q_m stanovit, pro které hodnoty periody T je systém ještě udržitelný.

5.2.1. Systém 4 pracovišť

Využijeme prvního systému z předchozí sekce a doplníme ho o hodnoty maximální délky fronty na jednotlivých pracovištích: $V_1^* = 20$, $V_2^* = 40$, $V_3^* = 60$, $V_4^* = 80$. Toto je znázorněno na obrázku 5.1.

Vstupní výkon Q_0 je zadán tak, aby jedna jeho část byla větší a druhá menší než Q_0^{**} . V předchozích výpočtech jsme ve vztahu (4.8) zjistili, že $Q_0^{**} = 10$ je určeno čtvrtým pracovištěm. Vyšší výkon budeme pouštět polovinu periody a nižší ve druhé polovině periody. Časová závislost vstupního výkonu tedy bude následující:

$$Q_0(t) = \begin{cases} 1,2 \cdot Q_0^{**}, & t \in \bigcup_k \langle kT, (k+0,5)T \rangle, \quad 0 < p < 1, \quad T > 0, \\ 0,6 \cdot Q_0^{**}, & t \in \bigcup_k \langle (k+0,5)T, (k+1)T \rangle, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (5.11)$$



Obrázek 5.1: Systém 4 pracovišť

Nyní se začneme zabývat první podmínkou udržitelnosti soustavy. První podmínkou je, že na konci intervalu pro Q_M žádná fronta nevzroste nad mez maximální délky fronty.

Pomocí algoritmu (5.2) zjistíme, na kterých pracovištích se budou při této volbě Q_M tvořit fronty. Minimum popsané vztahem (4.7) je určeno čtvrtým pracovištěm, proto ho označíme Q_{04}^* . Pokud zvedneme příkon Q_0 o hodnotu δ nad toto minimum, čtvrté pracoviště se začne zahlcovat. Víme tedy, že čtvrtá nerovnice bude porušena, proto změňme její znaménko nerovnosti. Jelikož je toto pracoviště poslední v pořadí, nebude ovlivňovat žádné jiné a ostatní nerovnice zůstanou nezměněny:

$$\begin{aligned} Q_0 &\leq Q_1^*, \\ \frac{4}{5}Q_0 &\leq Q_2^*, \\ \frac{1}{5}Q_0 &\leq Q_3^*, \\ Q_0 &> Q_4^*. \end{aligned}$$

Čtvrté pracoviště zařadíme do množiny \mathcal{N} . Po vyloučení čtvrtého pracoviště vidíme, že minimum z rovnice (4.7) je určeno prvním pracovištěm. Víme, že příkon má svou vyšší hodnotu $Q_0 = Q_M = 12$. Ze zadání víme, že $Q_1^* = 20$, tedy první nerovnost $Q_0 \leq Q_1^*$ je v maximální hodnotě příkonu splněna. Podmínky tedy svůj tvar nezmění:

$$\begin{aligned} Q_0 &\leq Q_1^*, \\ \frac{4}{5}Q_0 &\leq Q_2^*, \\ \frac{1}{5}Q_0 &\leq Q_3^*, \\ Q_0 &> Q_4^*. \end{aligned}$$

Tímto algoritmus ukončíme. Výsledkem algoritmu je množina \mathcal{N} tvořená pouze čtvrtým pracovištěm.

Pro hodnotu $Q_0^{**} = 10$ vypočítáme čas přehlcení, tedy dosažení maximální délky fronty, čtvrtého pracoviště. Čas přehlcení čtvrtého pracoviště vypočítáme ze vztahu (5.8) takto:

$$t_4 = \frac{V_4^*}{Q_4^p - Q_4^*},$$

kde $Q_4^p = 12$. Po dosazení konkrétních hodnot:

$$t_4 = \frac{80}{12 - 10} = 40.$$

Maximální doba je určena pouze čtvrtým pracovištěm, tedy

$$t_{max} = \min_{i \in N}(t_i) = t_4 = 40. \quad (5.12)$$

Po rozboru úlohy vidíme, že v tomto případě se při maximálním příkonu Q_M začne tvořit fronta pouze na čtvrtém pracovišti. Maximální výkon zbylých pracovišť bude dostatečný ke zpracování požadované práce. Dále stanovíme maximální délku periody T . Z rovnice (5.11) vidíme, že $p=0,5$, tedy každý z příkonů Q_M a Q_m je pouštěn do systému polovinu periody. Nejvyšší doba, po kterou můžeme pouštět příkon Q_M , je podle (5.12) $t_{max} = 40$. Maximální délka periody je tedy $2 \cdot t_{max} = 80$.

Pro úplnost se budeme zabývat druhou podmínkou udržitelnosti systému. Pomocí vztahu (5.10) zjistíme, jestli se systém po proběhnutí periody vrátí do původního stavu. Vypočítáme tedy vážený průměr z obou hodnot výkonu Q_0 .

$$0,5 \cdot 1,2 \cdot Q_0^{**} + (1 - 0,5) \cdot 0,6 \cdot Q_0^{**} \leq Q_0^{**}.$$

Po úpravě dostaneme:

$$0,9 \cdot Q_0^{**} \leq Q_0^{**},$$

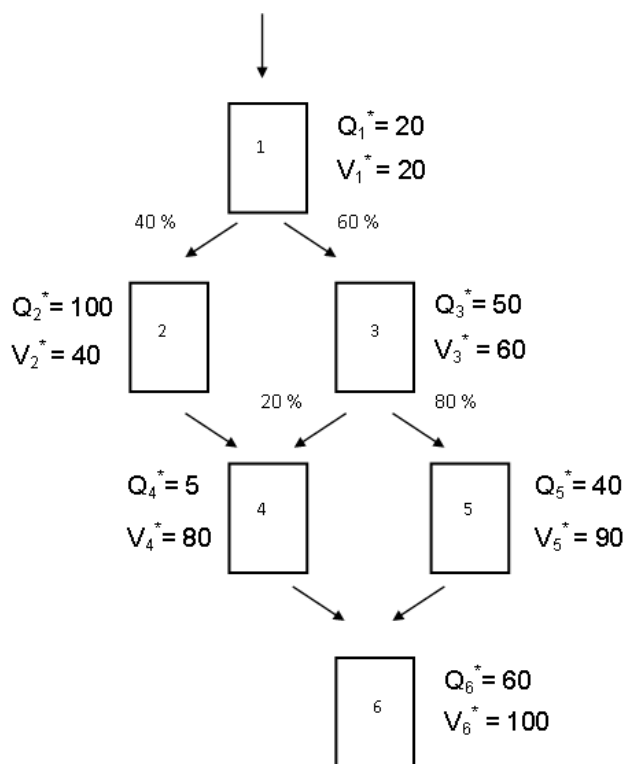
což platí. Tedy při této volbě periodického zdroje se na konci každé periody pracoviště vrátí do stavu beze front.

5.2.2. Systém 6 pracovišť

Oproti příkladu v kapitole o systémech s konstantním zdrojem máme opět navíc zadány maximální délky front. Pro maximální délky front platí: $V_1^* = 20, V_2^* = 40, V_3^* = 60, V_4^* = 80, V_5^* = 90, V_6^* = 100$. Toto je znázorněno na obrázku 5.2. Příkon Q_0 je nastaven tak, aby jedna jeho část byla větší a druhá menší než Q_0^{**} . Ve vztahu (4.11) v předchozích výpočtech jsme zjistili, že $Q_0^{**} = \frac{125}{7}$ je určeno čtvrtým pracovištěm. Vyšší výkon budeme pouštět pětinu periody a nižší zbylou část periody. Časová příkonu tedy bude následující:

$$Q_0(t) = \begin{cases} 1,7 \cdot Q_0^{**}, & t \in \bigcup_k \langle kT, (k+0,2)T \rangle, \quad 0 < p < 1, \quad T > 0, \\ 0,5 \cdot Q_0^{**}, & t \in \bigcup_k \langle (k+0,8)T, (k+1)T \rangle, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (5.13)$$

Nyní se začneme zabývat první podmínkou udržitelnosti soustavy. První podmínkou je, že na konci intervalu pro Q_M žádná fronta nevzroste nad mez maximální délky fronty.



Obrázek 5.2: Systém 6-ti pracovišť

Pomocí odvozeného algoritmu (5.2) zjistíme, na kterých z pracovišť se budou při této volbě Q_M tvořit fronty. Minimum popsané vztahem (4.7) je určeno čtvrtým pracovištěm, proto ho označíme Q_{04}^{**} . Pokud zvedneme příkon Q_0 o hodnotu δ nad toto minimum, čtvrté pracoviště se začne zahlcovat. Víme tedy, že čtvrtá nerovnice bude porušena, proto změním její znaménko nerovnosti. Tato změna ovlivní také další nerovnice.

$$\begin{aligned}
 Q_0 &\leq Q_1^*, \\
 \frac{2}{5}Q_0 &\leq Q_2^*, \\
 \frac{3}{5}Q_0 &\leq Q_3^*, \\
 \frac{2}{5}Q_0 + \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{5}Q_0 &> Q_4^*, \\
 \frac{12}{25}Q_0 &\leq Q_5^*, \\
 \frac{12}{25}Q_0 + Q_4^* &\leq Q_6^*.
 \end{aligned}$$

Čtvrté pracoviště zařadíme do množiny \mathcal{N} . Po vyloučení čtvrtého pracoviště vidíme, že minimum z rovnice (4.7) je určeno prvním pracovištěm. U první nerovnosti změňme znaménko, toto ovlivní i další nerovnosti, které vhodně změňme.

$$\begin{aligned}
Q_0 &> Q_1^*, \\
\frac{2}{5}Q_1^* &\leq Q_2^*, \\
\frac{3}{5}Q_1^* &\leq Q_3^*, \\
\frac{2}{5}Q_0 + \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{5}Q_0 &> Q_4^*, \\
\frac{4}{5}Q_3^* &\leq Q_5^*, \\
Q_4^* + Q_5^* &\leq Q_6^*.
\end{aligned}$$

První pracoviště tedy zařadíme do množiny \mathcal{N} .

Po vyloučení čtvrtého a prvního pracoviště vidíme, že minimum z rovnice (4.7) je určeno šestým pracovištěm. Budeme tedy zkoumat platnost poslední nerovnosti $Q_4^* + Q_5^* \leq Q_6^*$. Po dosazení maximálních výkonů jednotlivých pracovišť, dostaneme nerovnost $45 \leq 60$, která je vždy splněna. Podmínky tedy svůj tvar nezmění:

$$\begin{aligned}
Q_0 &> Q_1^*, \\
\frac{2}{5}Q_1^* &\leq Q_2^*, \\
\frac{3}{5}Q_1^* &\leq Q_3^*, \\
\frac{2}{5}Q_0 + \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{5}Q_0 &> Q_4^*, \\
\frac{4}{5}Q_3^* &\leq Q_5^*, \\
Q_4^* + Q_5^* &\leq Q_6^*.
\end{aligned}$$

Tímto ukončíme algoritmus.

Nyní vypočítáme čas, kdy stanoviště, z množiny \mathcal{N} určené algoritmem, dosáhnou své maximální délky fronty. Pro první stanoviště platí:

$$t_1 = \frac{V_1^*}{Q_M - Q_1^*},$$

kde $Q_M = 1,7 \cdot Q_0^{**}$. Po dosazení konkrétních hodnot:

$$t_1 = \frac{20}{30,6 - 20} = 1,93.$$

Analogickým postupem platí pro čtvrté stanoviště:

$$t_4 = \frac{V_4^*}{Q_4^p - Q_4^*},$$

kde $Q_4^p = 10,4$. Po dosazení konkrétních hodnot:

$$t_4 = \frac{80}{10,4 - 5} \doteq 14,81.$$

Nyní vypočítáme čas přeplnění systému ze vztahu:

$$t_{max} = \min_{i \in \mathcal{N}}(t_i) = \min(t_1, t_4) = t_1 = 1,93.$$

Vidíme, že maximální čas, po který můžeme pouštět příkon Q_M , je 1,93, což ze zadání příkonu (5.13) tvoří pětinu celé periody. Největší délka periody tedy je $5 \cdot 1,93 \doteq 9,65$.

Po rozboru úlohy tedy vidíme, že v tomto případě se při nezastavení maximálního příkonu Q_M nejdříve zahltí první pracoviště a poté čtvrté pracoviště.

Dále se pro úplnost budeme zabývat druhou podmínkou udržitelnosti systému. Pomocí vztahu (5.10) zjistíme, jestli se systém po proběhnutí periody vrátí do původního stavu. Vypočítáme tedy vážený průměr z obou hodnot výkonu Q_0 .

$$0,2 \cdot 1,7 \cdot Q_0^{**} + (1 - 0,2) \cdot 0,5 \cdot Q_0^{**} \leq Q_0^{**}.$$

Po úpravě dostaneme:

$$0,74 \cdot Q_0^{**} \leq Q_0^{**},$$

což platí. Tímto jsme zjistili, že při této volbě periodického zdroje se na konci každé periody pracoviště vrátí do stavu beze front.

6. Závěr

Cílem této práce bylo odvodit a sestavit soustavu diferenciálních rovnic, která by vhodně popisovala chování systémů s úzkými místy, a pro některé speciální případy tuto soustavu vyřešit, či doplnit alespoň kvalitativní informace o řešení. V této práci se povedlo odvodit obecný model, který tento systém popisuje a zároveň algoritmus pro výpočet udržitelnosti systému.

Po zavedení základních pojmů byl ve druhé kapitole odvozen tvar nádoby, pro kterou platí, že její výtoková rychlost je konstantní. Dále byl v této kapitole sestaven model popisující průtok kapaliny jednou nádobou. Podařilo se najít podobnost mezi modelem průtoku kapaliny nádobou a pracovištěm ve výrobním procesu, což je využito v další kapitole. Ve třetí kapitole je, pomocí dříve sestaveného modelu pro průtok kapaliny jednou nádobou a nalezené podobnosti s výrobním procesem, odvozena soustava diferenciálních rovnic pro systém N pracovišť. Tento model je zjednodušen na model, ve kterém se práce může přesouvat pouze do následujících pracovišť, tedy se nesmí vracet.

V dalších kapitolách je postupně zkoumána udržitelnost těchto systému pro konstantní a periodický zdroj. Při zkoumání udržitelnosti systému se podařilo sestavit podmínku pro nejvyšší hodnotu příkonu, při kterém ještě nedojde ke vzniku front. Dále se pro udržitelnost systému s periodickým, po částech konstantním, zdrojem podařilo odvodit vztah, který udává maximální dobu, po kterou můžeme tento příkon nechat vstupovat na stanoviště, než fronta dosáhne své kritické délky. Na závěr obou kapitol, které se zabývají udržitelností systémů pracovišť, jsou uvedeny příklady, na které jsou poznatky aplikovány.

Na výsledky této práce lze navázat například při zkoumání obecnějšího, nezjednodušeného, modelu soustavy N pracovišť. Dále lze uvažovat spojitě se měnící zdroj a poté zkoumat jeho udržitelnost a z ní vyplývající další vlastnosti.

Literatura

- [1] Čermák, Jan; Ženíšek, Alexander. *Matematika III*. Brno: AKADEMICKÉ NAKLADATELSTVÍ CERM, 2006. 205 s. ISBN 80-214-3261-6.
- [2] Kalas, Josef; Ráb, Miloš. *Obyčejné diferenciální rovnice*. Brno: Vydavatelství Masarykovy univerzity, 1995. 207 s. ISBN 80-210-1130-0.
- [3] Noskievič, Jaromír. *Hydromechanika*. Ostrava: Vysoká škola báňská, 1986. 130 s.
- [4] Šob, František. *Hydromechanika*. Brno: AKADEMICKÉ NAKLADATELSTVÍ CERM, 2002. 238 s. ISBN 80-214-2037-5.
- [5] Treiber, Martin; Kesting, Arne. *Traffic Flow Dynamics: Data, Models and Simulation*. Heidelberg: Springer , 2013. 503 s. ISBN 978-3-642-32459-8.

7. Seznam použitých zkratek a symbolů

\mathbb{E}	jednotková matice
\mathbb{R}	množina reálných čísel
\dot{y}	derivace y podle proměnné t
\int	znak integrálu
Σ	znak sumy