

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ  
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ  
ÚSTAV MATEMATIKY  
FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING  
INSTITUTE OF MATHEMATICS

## MODELOVÁNÍ V INŽENÝRSKÝCH ÚLOHÁCH MODELLING IN ENGINEERING

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE  
BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE  
AUTHOR

TOMÁŠ HOLEC

VEDOUCÍ PRÁCE  
SUPERVISOR

RNDr. PAVEL POPELA, Ph.D.

BRNO 2014



Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství

Ústav matematiky

Akademický rok: 2013/2014

## **ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE**

student(ka): Tomáš Holec

který/která studuje v **bakalářském studijním programu**

obor: **Matematické inženýrství (3901R021)**

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

### **Modelování v inženýrských úlohách**

v anglickém jazyce:

### **Modelling in Engineering**

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Student využije své znalosti z lineární algebry, matematické analýzy, mechaniky a hydromechaniky a nastuduje vybranou inženýrskou problematiku. Pro vybraný problém sestaví matematický model, prostuduje jeho vlastnosti, úlohu vyřeší pomocí vlastní implementace vhodného algoritmu a provede diskusi výsledků.

Cíle bakalářské práce:

Výsledný matematický model bude implementován v Matlabu a testován pro vhodnou datovou základnu a umožní provádění výpočetních experimentů. Důraz bude kladen na přímou spolupráci diplomanta s odborníkem vybraného oboru.

Seznam odborné literatury:

Klapka, J. a kol. Metody operačního výzkumu, Brno 2000

Janíček, P. a kol.: Pružnost a pevnost I. 2. vyd., Brno, VUT, 1992.

Haluza, M.: Studijní opory k předmětu Hydromechanika. VUT, Brno.

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Pavel Popela, Ph.D.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2013/2014.

V Brně, dne 22.11.2013

L.S.

---

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc.  
Ředitel ústavu

---

prof. RNDr. Miroslav Doupovec, CSc., dr. h. c.  
Děkan fakulty

## **Abstrakt**

Cílem této bakalářské práce bylo najít optimální návrh oběžného kola čerpadla pro zadaný návrhový bod tak, abychom minimalizovali třecí a diskové ztráty. Návrh jsme provedli pomocí matematického modelu v programu Matlab. Bakalářská práce obsahuje teoretickou a praktickou část. V prvních čtyřech kapitolách byly teoreticky popsány technické poznatky, které se dále využívaly a jejichž znalost byla nezbytná. V páté kapitole bakalářské práce byl popsán matematický model, pomocí něž byly provedeny už konkrétní návrhy a výpočty oběžných kol čerpadla.

## **Summary**

The aim of this bachelor thesis is to determine the optimal parameters of pump impeller in order to minimize friction loss and disc loss. The proposal has been implemented by a mathematical model in Matlab. The thesis consists of theoretical and practical part. The first four chapters summarize the theoretical background that is necessary for creating the mathematical model for the losses of an impeller. In the fifth chapter the implementation of the mathematical model in Matlab is presented and results for particular types of pumps are discussed.

## **Klíčová slova**

Oběžné kolo čerpadla, návrh meridiánu, třecí ztráty, diskové ztráty, rychlostní trojúhelník, Matlab.

## **Keywords**

The impeller of pumps, proposal meridian, friction loss, disc loss, velocity triangle, Matlab.



Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci *Modelování v inženýrských úlohách* vypracoval samostatně pod vedením RNDr. Pavla Popely, Ph.D. s použitím materiálů uvedených v seznamu literatury a odborných konzultací.

Tomáš Holec





Na tomto místě, bych rád poděkoval všem, kteří mi byli nápomocni svými radami, zkušenostmi a všestranně mne podporovali při mé práci. Zejména bych chtěl poděkovat vedoucímu bakalářské práce RNDr. Pavlu Popelovi, Ph.D. za vedení bakalářské práce. Stejně velké dík patří hlavnímu konzultantovi doc. Ing. Miloslavu Haluzovi, CSc. za poskytnutí velkého množství podkladů, vlastních znalostí, za jeho čas, ochotu a trpělivost zodpovídat veškeré mé dotazy týkající se technické problematiky práce.

Dále bych velmi rád poděkoval všem, kteří mi jakkoli jinak pomáhali s mou bakalářskou prací, zejména své rodině, přítelkyni a Oskaru Gruhoněvovi, neboť i oni mi nemalým způsobem a ochotně pomohli.

Tomáš Holec



# Obsah

<b>Úvod</b>	<b>3</b>
<b>1 Matematické pojmy</b>	<b>4</b>
1.1 Základní pojmy a jejich definice	4
1.1.1 Derivace	4
1.1.2 Diferenciály	4
1.1.3 Parciální derivace	5
1.1.4 Gradient	5
1.1.5 Divergence	5
1.1.6 Rotace	6
1.1.7 Laplaceův operátor $\Delta$	6
1.1.8 Neurčitý integrál	6
1.1.9 Určitý integrál - Newtonův	7
1.1.10 Určitý integrál - Riemannův	7
1.2 Základní věty	8
1.2.1 Základní pravidla derivování	8
1.2.2 Základní pravidla integrování	8
1.2.3 Vlastnosti diferenciálních operátorů	9
<b>2 Pružnost a pevnost</b>	<b>11</b>
2.1 Základní pojmy	11
2.2 Prostý krut	12
<b>3 Hydromechanika</b>	<b>13</b>
3.1 Základní pojmy a veličiny	13
3.1.1 Kapaliny	13
3.1.2 Stlačitelnost	13
3.1.3 Průtok a rychlosti	14
3.1.4 Viskozita	14
3.1.5 Reynoldsovo číslo	15
3.1.6 Proudění	15
3.1.7 Coriolisovo číslo	16
3.1.8 Ztráty a účinnosti	17
3.2 Odvození rovnic - Zákony zachování	18
3.2.1 Z. z. hmotnosti - rovnice kontinua	18
3.2.2 Z. z. hybnosti - Eulerova rovnice HD	19
3.2.3 Z.z. energie - Bernoulliho rovnice pro ideální kapalinu	20
3.2.4 Navierova-Stokesova rovnice	20
3.2.5 Z.z. energie - Bernoulliho rovnice pro skutečnou kapalinu	21

3.2.6	Eulerova čerpadlová rovnice . . . . .	21
<b>4</b>	<b>Čerpadla</b>	<b>24</b>
4.1	Oběžné kolo . . . . .	24
4.2	Kritérium rychloběžnosti . . . . .	25
4.3	Účinnosti . . . . .	26
4.4	Pracovní bod . . . . .	27
<b>5</b>	<b>Matematický model návrhu oběžného kola</b>	<b>29</b>
5.1	Návrh meridiálního řezu oběžného kola čerpadla . . . . .	29
5.1.1	Pevnostní výpočty . . . . .	31
5.1.2	Vstup do oběžného kola . . . . .	32
5.1.3	Výstup z oběžného kola . . . . .	34
5.2	Určení třecích ztrát . . . . .	35
5.2.1	Diskové ztráty . . . . .	36
5.2.2	Ztráty třením na lopatkách . . . . .	37
5.2.3	Celková ztráta třením . . . . .	40
5.3	Ukládání dat a rozbor výsledků . . . . .	40
5.3.1	Ukládání dat do Excelu . . . . .	41
5.3.2	Rozbor výsledků z Matlabu . . . . .	41
	<b>Závěr</b>	<b>42</b>
	<b>Literatura</b>	<b>44</b>
	<b>Seznam příloh</b>	<b>45</b>

# Úvod

V technických disciplínách, ale i v běžném životě, hledáme vždy ideální řešení daného problému. To jest takové řešení, které nejlépe splňuje, vyhovuje zadání a zároveň je co nejekonomičtější. Následující text se věnuje jednomu z těchto problémů.

Text je doprovodným a vysvětlujícím textem k matematickému modelu, který řeší postup optimálního návrhu oběžného kola s minimalizací třecích ztrát pro čerpadlo typu Beta16. Model je vytvořený v prostředí Matlab a je demonstrován výstupy z tohoto prostředí. Text je psán jednoduchou formou, aby byl přístupnější a dobře srozumitelný i pro nematematickou a netechnickou část populace. Je koncipován tak, že nejdříve jsou vysvětleny potřebné matematické pojmy a věty, kapitola 1 a poté základní pojmy a principy z technických disciplín, bez kterých bychom modelu neporozuměli, kapitoly 2,3. Po těchto kapitolách následuje kapitola 4, která popisuje základní vlastnosti a rozdělení čerpadel. Na závěr je v kapitole 5 pomocí konkrétního příkladu popsán již samotný matematický model.

# Kapitola 1

## Matematické pojmy

V této kapitole budou zavedeny a přesně nadefinovány veškeré pojmy potřebné k pozdějšímu odvozování a vysvětlování vět v kapitolách 2,3,4, které budeme následně využívat v matematickém modelu v kapitole 5.

### 1.1 Základní pojmy a jejich definice

V práci se budou při odvozování důležitých rovnic velmi často objevovat matematické symboly znázorňující *derivace*, *diferenciály*, *parciální derivace*, *diferenciální operátory* a také jednoduché i násobné *integrály*. V této práci bohužel nemáme prostor na obsáhlé a podrobné definice a veškeré souvislosti, proto budou uvedené definice méně podrobné a částečně zjednodušené, přesto ale naprosto korektní. Tato kapitola čerpá zejména z [5], [9], [10].

#### 1.1.1 Derivace

**Definice 1.1.** Derivací funkce  $y = f(x)$  v bodě  $x_0$  rozumíme vlastní limitu funkce a definujeme ji vztahem

$$y'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, \quad (1.1)$$

kde  $f(x_0)$ ,  $f(x_0 + h)$  jsou funkční hodnoty v bodech  $x_0$ ,  $(x_0 + h)$  a  $h$  je posunutí po ose  $x$  jdoucí velikostí k nule, viz obrázek (1.1).

Derivaci poté budeme značit jako

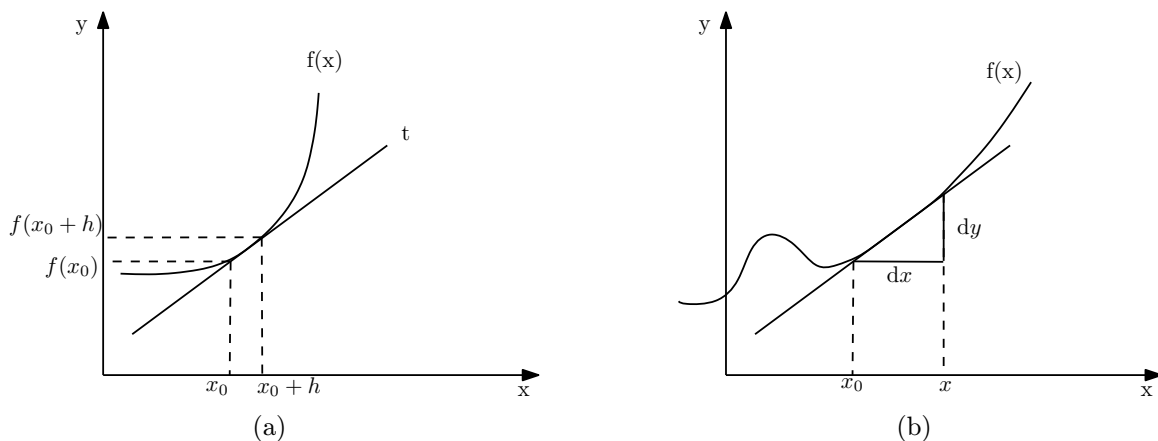
$$y'(x_0) = \frac{dy}{dx}(x_0).$$

#### 1.1.2 Diferenciály

**Definice 1.2.** Diferenciál funkce  $y = f(x)$  v bodě  $x_0$  je lineární funkce, vyjadřující lineární přírůstek této funkce v bodě  $x$ . Pak pro diferenciál prvního řádu píšeme

$$dy = f'(x_0) dx = f'(x_0) \cdot (x - x_0), \quad (1.2)$$

kde  $f'(x_0)$  je derivace funkce v bodě  $x_0$  a  $dx$  je přírůstek na ose  $x$ , viz obrázek (1.1).



Obrázek 1.1: (a) Definice derivace a (b) definice diferenciálu

### 1.1.3 Parciální derivace

Parciální derivace jsou zobecněné derivace pro funkce více proměnných.

**Definice 1.3.** Nechť  $f$  je funkce  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ , bod  $A \in \mathbb{R}^m$  a  $1 \leq i \leq m$ . Pak parciální derivaci funkce  $f$  v bodě  $A$  podle  $i$ -té proměnné definujeme jako vlastní limitu

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(A) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(A + h) - f(A)}{h}, \quad (1.3)$$

parciální derivaci funkce  $f$  podle  $i$ -té proměnné tedy značíme  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ .

### 1.1.4 Gradient

**Definice 1.4.** Nechť  $f$  je funkce  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  a bod  $A \in \mathbb{R}^m$ . Pak vektor tvořený jednotlivými parciálními derivacemi funkce  $f$  podle jednotlivých souřadnic v bodě  $A$  se nazývá *gradient funkce* a píšeme,

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(A) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(A), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(A) \right) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_j} \vec{i}_j. \quad (1.4)$$

Gradient je tedy zobrazení  $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  a vyjadřuje směr největšího růstu funkce  $f$ . Gradient je diferenciální operátor a při jeho formálním zápisu se používá *Hamiltonův operátor nabra*  $\nabla$ , tedy

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \nabla f, \quad \text{kde} \quad \nabla = \left( \sum_{j=1}^m \frac{\partial}{\partial x_j} \vec{i}_j \right).$$

### 1.1.5 Divergence

Divergence, stejně jako gradient, je diferenciální operátor.

**Definice 1.5.** Nechť  $\vec{a}$  je vektorové pole  $\vec{a}: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ , tedy  $\vec{a} = (a_1, \dots, a_m)$ . Pak pole skalárů, které je tvořené součtem jednotlivých parciálních derivací vektorového pole  $\vec{a}$

podle jednotlivých souřadnic, nazýváme *divergence* a píšeme,

$$\nabla \cdot \vec{a} = \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial a_m}{\partial x_m} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial a_i}{\partial x_i} = \text{div } \vec{a}. \quad (1.5)$$

Divergence je tedy zobrazení  $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  a její hodnota v určitém bodě vyjadřuje tok vektorového pole  $\vec{a}$  z jednotkového objemu  $dV$  v tomto bodě.

### 1.1.6 Rotace

Rotace také patří mezi diferenciální operátory jako gradient a divergence.

**Definice 1.6.** Nechť  $\vec{a}$  je vektorové pole  $\vec{a}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , tedy  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ . Pak vektorové pole, jehož složkami jsou výrazy obsahující parciální derivace složek výchozího vektorového pole  $\vec{a}$  podle jednotlivých souřadnic, se nazývá *rotace*. Pak pomocí přílohy (5.55) píšeme,

$$\nabla \times \vec{a} = \left( \frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial a_1}{\partial z} - \frac{\partial a_3}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y} \right) \vec{k} = \text{rot } \vec{a}. \quad (1.6)$$

Tuto definici není možné zobecnit na případ jiného počtu proměnných než tří.

Složením výše uvedených diferenciálních operátorů dostaneme operace 2.řádu. Z těchto operací si uvedeme pouze *Laplaceův operátor*  $\Delta$ .

### 1.1.7 Laplaceův operátor $\Delta$

**Definice 1.7.** Laplaceův operátor  $\Delta$  je tedy diferenciální operátor 2.řádu, který je definován jako,

$$\text{div } \overrightarrow{\text{grad}} f = \nabla \cdot \nabla f = (\nabla \cdot \nabla) f = \nabla^2 f = \Delta f, \quad \text{tedy} \quad (1.7)$$

$$\Delta = \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}.$$

Laplaceův operátor je aplikovatelný na skalární i vektorové pole a výsledkem je pole téhož typu, jako pole původní.

Nechť  $f$  je funkce  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\vec{a}$  je vektorové pole  $\vec{a}: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Pak platí

$$\Delta f = \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2},$$

$$\Delta \vec{a} = \sum_{i=1}^m \Delta a_i \vec{i}_i = \sum_{i=1}^m \left( \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 a_j}{\partial x_j^2} \right) \vec{i}_i.$$

### 1.1.8 Neurčitý integrál

Neurčitý integrál se ve většině případů zavádí pomocí tzv. *primitivní funkce*  $F(x)$ .

**Definice 1.8.** Řekneme, že  $F(x)$  je primitivní funkcí k funkci  $f(x)$  na neprázdném intervalu  $I$ , jestliže platí,

$$F'(x) = f(x), \quad \text{pro } \forall x \in I. \quad (1.8)$$



**Definice 1.9.** Množina všech primitivních funkcí  $F(x)$  k funkci  $f(x)$  je neurčitý integrál a píšeme

$$F(x) = \int f(x) dx. \quad (1.9)$$

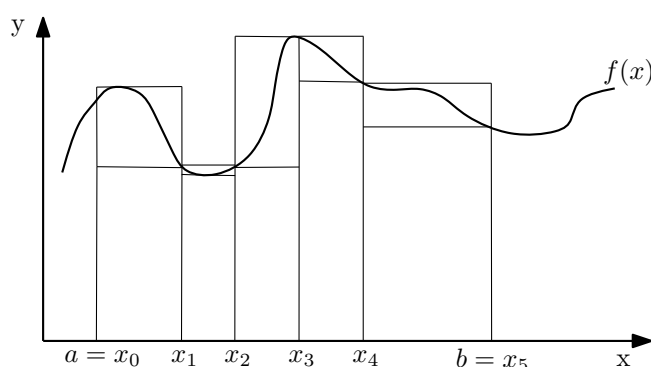
### 1.1.9 Určitý integrál - Newtonův

**Definice 1.10.** Existuje-li na  $\langle a, b \rangle$  primitivní funkce  $F(x)$  k funkci  $f(x)$ , pak pro Newtonův integrál platí

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad (1.10)$$

### 1.1.10 Určitý integrál - Riemannův

Definice Riemannova integrálu vyplývá z obrázku (1.2).



Obrázek 1.2: Zavedení Riemannova integrálu

**Definice 1.11.** Nechť  $f(x)$  je funkce ohraničená na intervalu  $I = \langle a, b \rangle$ . Rozdělme tento interval dělením  $D$  tak, že  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$  a označme  $m_i = \inf_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x)$  a obdobně  $M_i = \sup_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x)$ . Dále nazvěme

$s(f, D) = \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1})$  dolní integrální součet a

$S(f, D) = \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1})$  horní integrální součet.

Pak řekneme, že funkce  $f(x)$  je *Riemannovsky integrovatelná*, jestliže platí rovnost horního a dolního Riemannova integrálu, tj. pro libovolné dělení  $D$  intervalu  $\langle a, b \rangle$  platí

$$\inf_D S(f, D) = \sup_D s(f, D) = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx, \quad (1.11)$$

kde  $\inf_D S(f, D)$  je infimum přes všechna možná dělení  $D$  z horního integrálního součtu a  $\sup_D s(f, D)$  je supremum přes všechna možná dělení  $D$  z dolního integrálního součtu.

Více rozměrný Riemannův integrál pro funkci  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ , která je omezená na intervalu  $J = I_1 \times \dots \times I_m$ , zavádíme obdobně, viz [10] a píšeme

$$\int \dots \int f(x_1, \dots, x_m) dx_1 \dots dx_m.$$

## 1.2 Základní věty

Poté, co jsme si zdefinovali veškeré potřebné pojmy z matematiky, podíváme se blíže také na některé jejich vlastnosti, které budeme dále využívat.

### 1.2.1 Základní pravidla derivování

Pro správné derivování existuje mnoho pokynů a pravidel. Mezi nejvíce důležité z našeho pohledu patří 3 základní pravidla, která si nyní přiblížíme.

Nechť  $c \in \mathbb{R}$  a  $f(x)$ ,  $g(x)$  jsou derivovatelné funkce, tj. třídy  $C^1$ . Pak platí,

**Věta 1.12. Pravidlo o derivaci součinu konstanty a funkce**

$$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x), \quad (1.12)$$

**Věta 1.13. Pravidlo o derivaci součtu a rozdílu 2 funkcí**

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x), \quad (1.13)$$

**Věta 1.14. Pravidlo o derivaci součinu 2 funkcí**

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x). \quad (1.14)$$

### 1.2.2 Základní pravidla integrování

V této práci, z oblasti integrování, budeme využívat zejména tzv. *Newton-Leibnitzovu formuli*, která tvrdí,

**Věta 1.15. Jestliže je funkce  $f(x)$  na  $\langle a, b \rangle$  integrovatelná newtonovsky i riemannovsky pak platí**

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a). \quad (1.15)$$

**Věta 1.16. Linearita Riemannova integrálu**

Dále se budeme řídit linearitou Riemannova integrálu, tj. platností aditivity k funkcím a k integračnímu oboru

$$\int_a^b (f \pm g)(x) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx,$$

$$\int_a^b (f)(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

a také platností homogenity

$$\int_a^b c \cdot f(x) dx = c \cdot \int_a^b f(x) dx. \quad (1.16)$$

**Věta 1.17. Pravidlo pro integraci součinu 2 funkcí**

Nechť  $u(x)$ ,  $v(x)$ ,  $u'(x)$ ,  $v'(x)$  jsou integrovatelné funkce, tj. existují k nim primitivní funkce na intervalu  $I$ . Pak podle věty (1.14) platí

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v',$$

tedy po drobné úpravě dostáváme vzorec pro tzv. *Metodu per partes*

$$\int (u \cdot v') dx = u \cdot v - \int (u' \cdot v) dx. \quad (1.17)$$

**Věta 1.18. Gauss–Ostrogradského**

Nechť  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  je uzavřená, omezená a souvislá množina s hranicí  $\partial\Omega$ , což je uzavřená a kladně orientovaná  $(n-1)$  plocha pro  $n \geq 2$ . Předpokládejme, že  $\vec{a}$  je vektorové pole třídy  $C^1$  na  $\Omega$ . Pak viz [10] platí

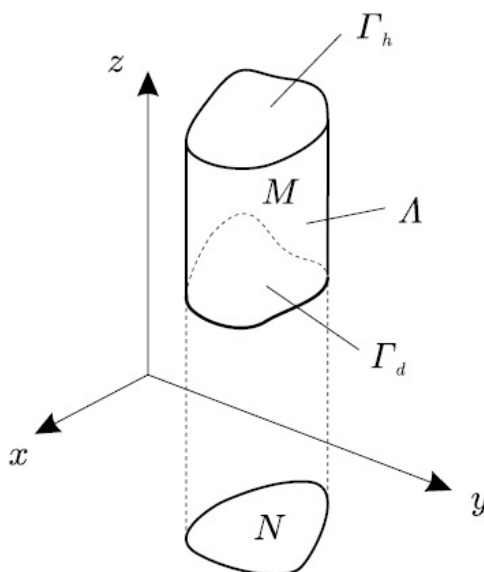
$$\int_{\partial\Omega} \vec{a} \, d\vec{S} = \int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{a} \, dx. \quad (1.18)$$

U této věty si uvedeme i důkaz, jelikož její platnost není hned zřejmá.

*Důkaz.* Pro  $n = 3$ . Nechť  $\Gamma_h : z = h(x, y)$ ,  $\Gamma_d : z = d(x, y)$  a  $M = \Omega \subset \mathbb{R}^3$ . Podle [10] platí,

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \frac{\partial a_3}{\partial z} \, dx \, dy \, dz &= \iint_N \left( \int \frac{\partial a_3}{\partial z} \, dz \right) \, dx \, dy = \iint_N [a_3]_{d(x,y)}^{h(x,y)} \, dx \, dy = \\ &= \iint_N a_3(x, y, h(x, y)) \, dx \, dy - \iint_N a_3(x, y, d(x, y)) \, dx \, dy = \\ &= \iint_{\Gamma_h} a_3 \, dx \, dy - \left( - \iint_{\Gamma_d} a_3 \, dx \, dy \right) + \iint_{\Lambda} a_3 \, dx \, dy = \\ &= \iint_{\partial\Omega} a_3 \, dx \, dy \end{aligned} \quad (1.19)$$

□



Obrázek 1.3: Důkaz Gauss - Ostrogradský pro  $n = 3$ , viz [10]

**1.2.3 Vlastnosti diferenciálních operátorů**

Všechny uvedené diferenciální operátory (gradient, divergence, rotace, Laplaceův operátor) jsou *lineární*, tzn. jsou *homogenní* a *aditivní*. Nyní se podíváme na zajímavou

vlastnost *divergence*, kterou budeme využívat zejména při odvozování v kapitole 3.

Představme si jednoduchý model, kdy vektorové pole  $\vec{a}(x, y, z)$  charakterizuje rychlost proudění kapaliny. Pak

**Věta 1.19.** *div  $\vec{a}$  v určitém bodě udává množství kapaliny, které vyteče z jednotkového objemu  $dV$ , za jednotku času  $dt$ , tedy  $\text{div } \vec{a}(A)$  je přírůstek (úbytek) kapaliny v bodě  $A$ .*

**Věta 1.20.** *Řekneme, že pole se nazývá nezřídlové, tj. množství kapaliny, které do libovolného objemu ohraničeného uzavřenou plochou vteče z něj i vyteče, jestliže v každém jeho bodě platí*

$$\text{div } \vec{a} = 0, \quad (1.20)$$

je-li naopak divergence v nějakém bodě nenulová, tj. platí

$$\text{div } \vec{a} \neq 0, \quad (1.21)$$

nazýváme tento bod *zřídlem pole* a pole označíme za *zřídlové*.

Další vlastnost se týká diferenciálního operátoru *rotace*. Opět uvažujme, že vektorové pole  $\vec{a}$  charakterizuje rychlost proudění kapaliny.

**Věta 1.21.** *Řekneme, že v okolí bodu  $A$  je proudění laminární (3.1.6), jestliže platí*

$$\text{rot } \vec{a}(A) = \vec{0} \quad (1.22)$$

*a dále řekneme, že vektorové pole  $\vec{a}$  je nevírové, pokud platí rovnice (1.22) pro  $\forall A \in \vec{a}$ . Jestliže naopak platí*

$$\text{rot } \vec{a}(A) \neq \vec{0}, \quad (1.23)$$

*řekneme, že proudění v okolí bodu  $A$  je turbulentní (3.1.6), bod  $A$  je vír a vektorové pole  $\vec{a}$  označíme jako vírové.*

Velikost vektoru  $\text{rot } \vec{a}$  v bodě  $A$  pak udává rychlost víření, která je poloviční oproti velikosti tohoto vektoru.

# Kapitola 2

## Pružnost a pevnost

Pro provedení pevnostní kontroly hřídele oběžného kola budeme potřebovat základní znalosti z pružnosti a pevnosti (dále jen PP). PP se zabývá deformací těles a jejich vnitřními silovými účinky, které s touto deformací souvisejí. Tato kapitola vychází a čerpá z [7].

### 2.1 Základní pojmy

Jak již bylo dříve předesláno, v kapitole 5 část 5.1.1 budeme provádět pevnostní kontrolu hřídele. V PP je pro takovéto typy technických součástek zaveden pojem prut.

**Definice 2.1.** Prut je výpočtový model trojrozměrného tělesa. Je určen střednicí  $\gamma$  a v každém jejím bodě příčným průřezem  $\psi$ , který je na tuto střednici kolmý. Těžiště průřezu leží na této střednici.

Z geometrického hlediska je prut dlouhé a štíhlé těleso, jehož průřez je spojitý a souvislý. Prut je dále určen svými kvadratickými momenty, které jsou definovány takto

$$\begin{aligned} J_y &= \int_{\psi} z^2 d\psi, \\ J_z &= \int_{\psi} y^2 d\psi, \\ J_p &= \int_{\psi} \rho^2 d\psi, \end{aligned} \tag{2.1}$$

kde  $J_y$ ,  $J_z$  jsou obecné kvadratické momenty,  $y$  a  $z$  jsou charakteristické rozměry a  $J_p$  je polární kvadratický moment, kde  $\rho$  je funkcí poloměru.

Vzhledem ke kruhovému průřezu hřídele je pro nás nejpodstatnější polární moment. Po převedení integrálu (2.1) do polárních souřadnic a následným spočtením tohoto integrálu dostáváme hodnotu

$$J_p = \frac{\pi d^4}{32}. \tag{2.2}$$

Předpokládejme nyní, že prut zatížíme vnější silovou soustavou  $\Pi$ . Dále předpokládejme, že prut je ve statické rovnováze a provedme jím řez  $\omega$ , který nám rozdělí prut na dvě části. Tyto dvě části musí být tedy také v rovnováze a tudíž na sebe působí soustavami sil, které jsou jednoznačně určeny tzv. výslednými vnitřními účinky (dále VVÚ).

Mezi VVÚ patří normálová síla  $\vec{N}$ , posouvající síla  $\vec{T}$ , ohybový moment  $\vec{M}_o$  a kroutící moment  $\vec{M}_k$ . Jelikož budeme řešit pevnostní kontrolu rotujícího hřídele, nejpodstatnější složkou z VVÚ pro nás bude kroutící moment  $\vec{M}_k$ , na který se podíváme podrobněji. Ostatní složky VVÚ v pevnostní kontrole nebudou vystupovat, proto se jimi nebudeme detailněji zabývat.

## 2.2 Prostý krut

**Definice 2.2.** Prostý krut je označení pro namáhání prutu, kdy jedinou nenulovou složkou VVÚ je kroutící moment  $\vec{M}_k$ . Při namáhání prostým krutem dochází k natáčení příčného průřezu kolem střednice, přičemž se ale příčný průřez nedeformuje a zachovává si rovinnost.

Prostý krut je určen smykovým, neboli tečným napětím  $\vec{\tau}$ , které působí mezi atomovými vrstvami a způsobuje jejich skluz. Toto napětí způsobuje trvalou (plastickou) deformaci.

Nyní si tedy můžeme odvodit vzoreček pro určení kroutícího momentu  $\vec{M}_k$ , kdy vyjdeme ze všeobecně známého vzorce pro moment síly

$$\vec{M} = \vec{F} \cdot r, \quad (2.3)$$

kde  $\vec{F}$  je síla a  $r$  rameno, na kterém síla působí.

V našem případě je působící silou smykové napětí  $\vec{\tau}$  na rameni  $\rho$ ,  $\rho \in (0; R)$ .

Potom z rovnice (2.3) za použití vzorce (2.1) dostáváme

$$\vec{M}_k = \int_{\psi} (\vec{\tau} \cdot \rho) d\psi = G \cdot \vartheta \cdot \int_{\psi} \rho^2 d\psi = G \cdot \vartheta \cdot J_p = \frac{\vec{\tau} \cdot J_p}{\rho},$$

kde  $G$  je modul pružnosti ve smyku a  $\vartheta$  je poměrný úhel zkroucení.

Maximální možný kroutící moment dostaneme pro  $\rho = R$ , tedy

$$\vec{M}_{kmax} = \frac{\vec{\tau} \cdot J_p}{R}, \quad (2.4)$$

kde  $\vec{\tau}$  je smykové napětí,  $J_p$  je polární kvadratický moment a  $R$  je poloměr hřídele.

# Kapitola 3

## Hydromechanika

Hydromechanika je částí obecné mechaniky, zabývající se rovnováhou sil v kapalinách za klidu i za pohybu. Dělíme jí tedy na hydrostatiku a hydrodynamiku (dále jen HD). Teorie k hydromechanice je velmi obsáhlá, z tohoto důvodu budou proto v této kapitole vysvětleny a odvozeny pouze vybrané části. Zejména ty části, které budeme potřebovat k odvození a pochopení návrhu oběžného kola v kapitole 5. Jelikož v této práci řešíme oběžné kolo čerpadla, uvedené rovnice a pojmy budou až na výjimky zejména z HD.

Tato kapitola čerpá z [2] a také z [4]

### 3.1 Základní pojmy a veličiny

Jak už víme, HD se zabývá silami v kapalinách za pohybu. Budeme si tedy muset zavést základní veličiny, které nám budou tento pohyb popisovat. V první řadě, je ale třeba zodpovědět tu nezákladnější otázku. *Co jsou to vlastně vůbec kapaliny?*

#### 3.1.1 Kapaliny

**Definice 3.1.** Kapaliny jsou jedním ze 4 základních skupenství, mají vlastní objem, ale tvar již ne, tzn. přebírají tvar okolního tělesa.

Obecně jsou reálné kapaliny málo stlačitelné a při proudění kladou odpor, tzn. jsou *viskozní*. Jejich soudržnost je způsobena mezimolekulárními přitažlivými silami. Při výpočtech však budeme často místo reálných kapalin uvažovat *kapalinu ideální*.

**Definice 3.2.** Řekneme, že kapalina je ideální, právě tehdy když je *homogenní, nevazká a absolutně nestlačitelná* ( $\rho = \text{konst.}$ ).

Nyní se podíváme na jedny ze základních vlastností reálných kapalin, bez jejichž znalostí bychom se dále v textu neobešli.

#### 3.1.2 Stlačitelnost

**Definice 3.3.** Řekneme, že kapalina je *nestlačitelná*, právě tehdy když platí

$$\frac{d\rho}{dt} = 0 \quad \wedge \quad \frac{d\rho}{dV} = 0, \quad (3.1)$$

kde  $\rho$  je hustota,  $V$  je objem a  $t$  je čas.

To znamená, že hustota kapaliny se s časem, ani místem nemění.

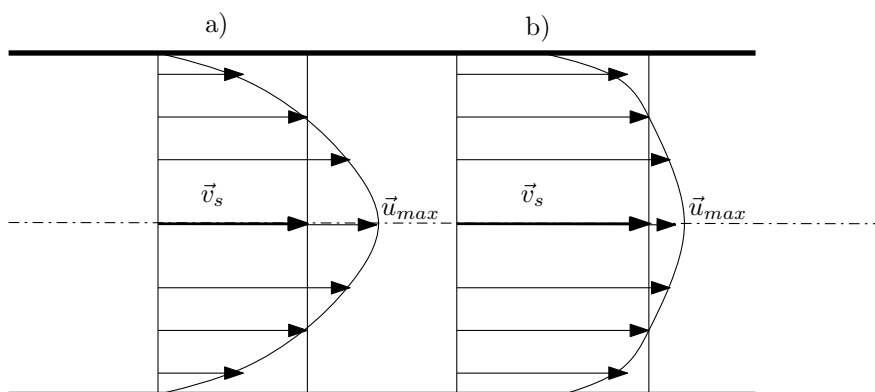
### 3.1.3 Průtok a rychlosti

**Definice 3.4.** *Objemový průtok*  $Q$ , je množství kapaliny, které proteče kontrolním objemem  $V$ , za jednotku času  $t$ . Spočítá se poté pomocí vzorce

$$Q = \frac{dV}{dt} = \int_S dQ = \int_S \vec{u} dS, \quad (3.2)$$

kde  $\vec{u}$  je bodová rychlost kapaliny a  $S$  je průtočná plocha.

Při skutečném proudění je rychlost kapalin dána tzv. *rychlostním profilem*. To znamená, jak můžeme vidět na obrázku (3.1), že rychlost kapaliny je po průřezu různá, to jest, že bodové rychlosti  $\vec{u}_i$  se nerovnají. Proto zavádíme tzv. *střední průřezovou rychlost*  $\vec{v}_s$



Obrázek 3.1: Rychlostní profil - a) laminárního proudění, b) turbulentního proudění,  $\vec{u}$  je bodová rychlost  $\vec{v}_s$  je střední průřezová rychlost

**Definice 3.5.** *Střední průřezová rychlost*  $\vec{v}_s$  je definována jako

$$\vec{v}_s = \frac{Q}{S} = \frac{1}{S} \int_S \vec{u} dS, \quad (3.3)$$

kde  $Q$  je průtok,  $\vec{u}$  bodová rychlost a  $S$  je průtočná plocha.

Poznámka: Střední průřezovou rychlost  $\vec{v}_s$  budeme dále pro jednoduchost značit pouze  $\vec{v}$ .

### 3.1.4 Viskozita

**Definice 3.6.** Při pohybu kapaliny vzniká na rozhraní sousedních vrstev *smykové napětí*  $\vec{\tau}$ , které zabraňuje těmto vrstvám v pohybu. Smykové napětí je vyvoláno vnitřním třením, neboli *viskozitou*.

Smykové napětí je poté podle Newtonova vztahu rovno

$$\vec{\tau} = \eta \cdot \frac{d\vec{v}}{dy}, \quad (3.4)$$

kde  $\eta$  je dynamická viskozita (vazkost) a  $\vec{v}$  je rychlost.

Kinematická viskozita je poté dána podílem dynamické viskozity a hustoty podle vztahu

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} \quad (3.5)$$



### 3.1.5 Reynoldsovo číslo

Mezi další důležité pojmy patří *Reynoldsovo číslo*  $Re$ .

**Definice 3.7.** Reynoldsovo číslo udává jakým typem kapalina proudí. Hodnotu  $Re$  vy počítáme podle vztahu

$$Re = \frac{\vec{v} \cdot d}{\nu}, \quad (3.6)$$

kde  $\vec{v}$  je střední průřezová rychlost kapaliny,  $d$  je charakteristický rozměr a  $\nu$  je kinematická viskozita kapaliny.

V dalším odstavci se podíváme blíže jakými typy proudění kapaliny mohou proudit.

### 3.1.6 Proudění

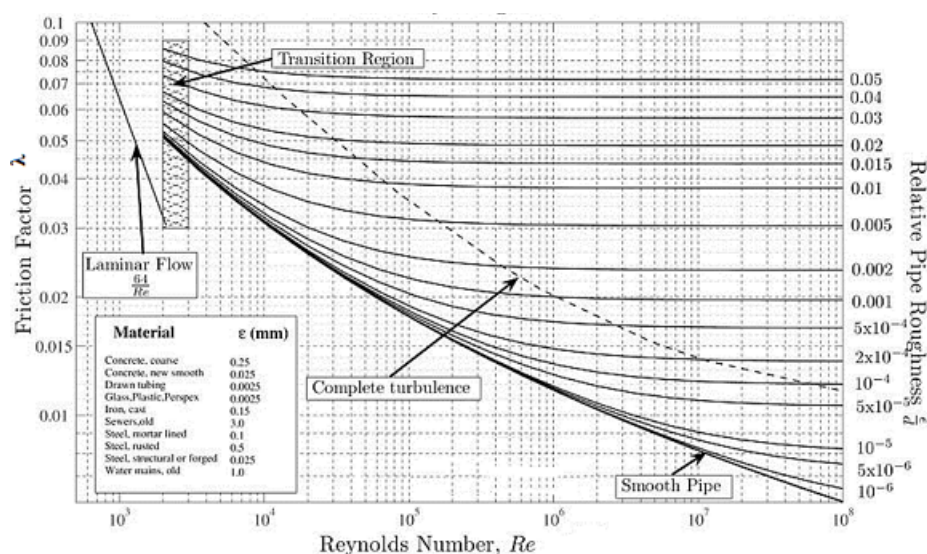
Rozeznáváme dva základní typy proudění. Je to buď *laminární* proudění nebo *turbulentní*. Existenci těchto proudění dokazuje Reynoldsův pokus.

Rozhraním mezi těmito typy, pokud je kapalinou voda, je tzv. *kritická hodnota Reynoldsova čísla*

$$Re_k = 2320.$$

Pokud je  $Re < Re_k$  nacházíme se v oblasti *laminárního* proudění, pokud  $Re > Re_k$  tak jsme v *turbulentním* proudění. Určení typu proudění podle Reynoldse je rychlá metoda, která ale bohužel neposkytuje podrobnější popis proudění.

Pro podrobnější určení toho, jaké proudění máme k dispozici, můžeme využít *Moodyho graf*.



Obrázek 3.2: Moodyho graf závislosti drsnosti  $\lambda$  na Reynoldsově čísle  $Re$ , viz[16]

### Laminární proudění

Toto proudění nastává při nízkých rychlostech, kdy se kapalina pohybuje ve vrstvách (laminách) a nepromíchává se, tedy viz (1.22)

$$\text{rot } \vec{v} = \vec{0}, \quad (3.7)$$

kde  $\vec{v}$  je vektorové pole rychlostí kapaliny. Rychlostní profil u laminárního proudění vypadá jako rotační paraboloid viz obrázek (3.1).

### Turbulentní proudění

Při větších rychlostech dochází k intenzivnímu míšení kapaliny, tedy viz (1.23)

$$\operatorname{rot} \vec{v} \neq \vec{0}, \quad (3.8)$$

kde  $\vec{v}$  je vektorové pole rychlostí kapaliny.

Částice kapaliny přecházejí z jedné vrstvy do druhé a reagují spolu. Rychlosti částic se po průřezu vyrovnávají a z tohoto důvodu rychlostní profil připomíná spíše obdélník, viz obrázek (3.1).

Jak jsme mohli vidět z obrázku (3.1), oba dva typy proudění se liší jak rychlostním profilem, tak i velikostí hydraulických ztrát. To je způsobeno tím, že u laminárního proudění je hydraulický odpor lineárně závislý na rychlosti, kdežto u turbulentního proudění je to kvadraticky, tedy na druhé mocnině rychlosti. Této rychlosti se říká kritická rychlost a zjistíme jí ze vztahu (3.6) když položíme

$$Re = Re_k.$$

Oba dva tyto typy proudění můžeme ještě rozdělit podle závislosti na čase a to na proudění *stacionární* a *nestacionární*.

### Stacionární proudění

**Definice 3.8.** *Stacionární*, neboli *ustálené* proudění je takové, že rychlost kapaliny je nezávislá na čase, tzn. s časem se nemění, tj.

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0. \quad (3.9)$$

### Nestacionární proudění

**Definice 3.9.** *Nestacionární*, neboli *neustálené* proudění je na čase závislé, tzn. rychlost se s časem mění, tj.

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \neq 0. \quad (3.10)$$

### 3.1.7 Coriolisovo číslo

**Definice 3.10.** *Coriolisovo číslo*  $\alpha$  vyjadřuje vliv nerovnoměrného rozdělení rychlostního profilu na celkovou měrnou kinetickou energii kapaliny  $\frac{\vec{v}^2}{2}$ .

Přidání tohoto čísla do energetických rovnic odstraňuje tedy chybu vzniklou zavedením střední průřezové rychlosti  $v$  (3.3), místo skutečného rozdělení rychlostí z rychlostního profilu v průřezu. Coriolisovo číslo  $\alpha$  závisí na tvaru průtočného průřezu a tvaru rychlostního profilu a pro jeho výpočet existuje řada vzorců. Každý autor uvádí trochu lišící se vzorec, nejpoužívanějším vzorcem ale je

$$\alpha = \frac{\iint_S \vec{u}^3 dS}{\vec{v}^3 \cdot S}, \quad (3.11)$$

kde  $\vec{v}$  je střední průřezová rychlost  $\vec{u}$  je bodová rychlost a  $S$  je průtočná plocha.

### 3.1.8 Ztráty a účinnosti

Při proudění skutečných kapalin dochází ke vzniku sil, které brání v pohybu částicím kapaliny. Tyto síly nazýváme *třecími silami*. Práce těchto sil snižuje mechanickou energii kapaliny, která se mění v energii tepelnou. Tuto tepelnou energii z hydraulického hlediska nelze energeticky dále využít a je tedy ztracena. Množství energie, které je třecími silami kapalině odebráno, označujeme jako *disipační - ztrátovou měrnou energii*  $Y_z$ , kterou počítáme podle *Weisbachova vztahu*

$$Y_z = \zeta \frac{\vec{v}^2}{2}. \quad (3.12)$$

Weisbachův vzorec vztahuje ztráty na měrnou kinetickou energii a  $\zeta$ , což je ztrátový součinitel. Ztrátový součinitel  $\zeta$  určíme podle vztahu

$$\zeta = \lambda \frac{l}{d}, \quad (3.13)$$

kde  $l$  je délka kanálu,  $d$  je charakteristický rozměr kanálu a  $\lambda$  je Darcyho třecí faktor, neboli koeficient drsnosti.

Koeficient drsnosti  $\lambda$  můžeme určit pomocí dvou vzorců.

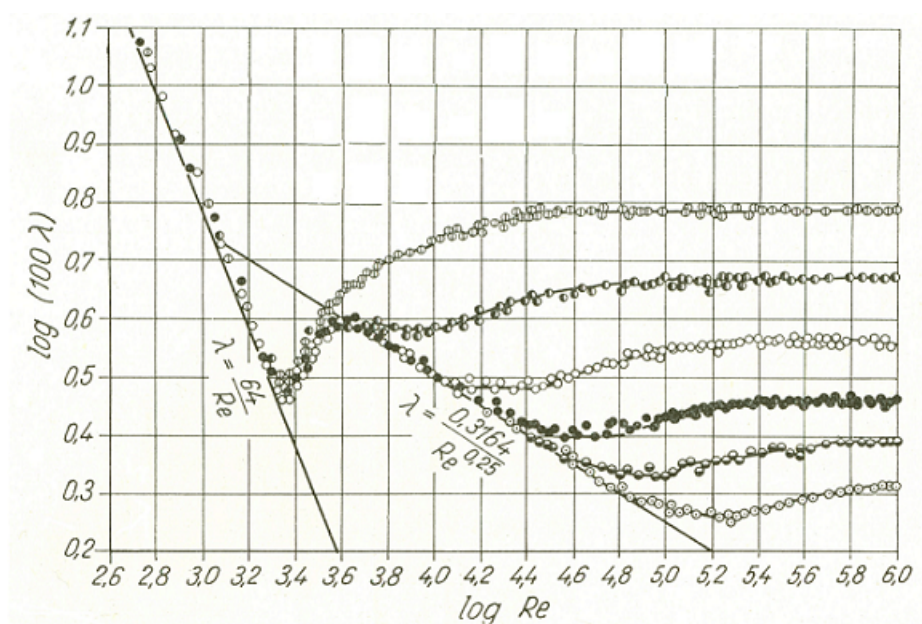
$$\lambda = \frac{64}{Re},$$

pro laminární proudění.

$$\lambda = \frac{0,3164}{\sqrt[4]{Re}},$$

pro turbulentní proudění, kde  $Re$  je Reynoldsovo číslo.

Tyto vzorce ovšem platí jen pro dokonale hladké potrubí. Pokud nedisponujeme dokonale hladkým potrubím musíme drsnost určovat pomocí tzv. *Nikuradseho* (3.3) nebo *Moodyho diagramu* (3.2).



Obrázek 3.3: Nikuradseho diagram, viz [16]

Nyní již víme jak ztráty vypočítat a ještě se podíváme kde vznikají a na čem závisí. Ztráty obecně vznikají v místech, kde dochází ke změně velikosti rychlosti, směru rychlosti nebo obojího, tzv. *místní ztráty* a závisí na délce kanálu a drsnosti  $\lambda$ , tzv. *třecí ztráty*. Hydraulická účinnost  $\eta_h$  je pak definovaná jako

$$\eta_h = \frac{Y}{Y + Y_z}, \quad (3.14)$$

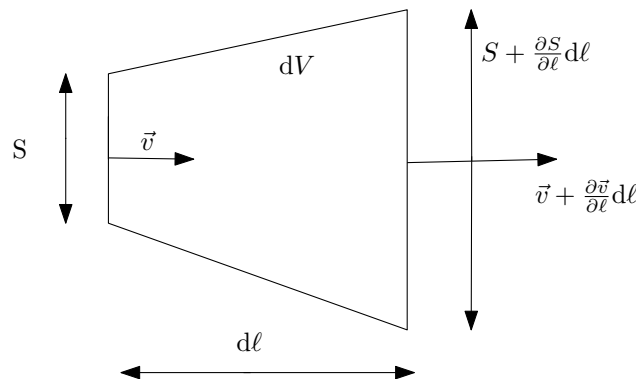
kde  $Y(Y_z)$  je měrná (měrná ztrátová) energie kapaliny.

## 3.2 Odvození rovnic - Zákony zachování

V HD je celá řada více, či méně důležitých rovnic, pro naše potřeby, si ale vystačíme jen s několika základními rovnicemi. Bude se jednat především o rovnice vyjadřující nějaký ze zákonů zachování (dále Z.z). U všech odvození předpokládáme kapaliny, které jsou *nestlačitelné* (3.1).

### 3.2.1 Z. z. hmotnosti - rovnice kontinua

Nyní si odvodíme nejzákladnější rovnici hydromechaniky, kterou je rovnice kontinua. Rovnici odvodíme pro jednorozměrné, ustálené proudění (3.9). Vyjdeme z jednoduchého obrázku.



Obrázek 3.4: Rovnice kontinua

Množství kapaliny, které do elementárního objemu  $dV$  vteče, je rovno

$$dm_1 = \rho dV = \rho S dl = \rho S \vec{v} dt.$$

Množství kapaliny, které z elementárního objemu  $dV$  vyteče, je rovno

$$dm_2 = \rho \left( S + \frac{\partial S}{\partial \ell} dl \right) \cdot \left( \vec{v} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial \ell} dl \right) dt,$$

kde  $\rho$  je hustota,  $S$  je průtočná plocha,  $dl$  je element dráhy,  $\vec{v}$  je rychlost, a  $t$  čas.

Pro elementární objem  $dV$ , kterým proudí kapalina, musí být celková změna hmotnosti nulová, tj.  $dm = dm_1 - dm_2 = 0$ . Dostáváme tedy výraz

$$\rho \vec{v} S dt = \rho \vec{v} S dt + \rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial \ell} dl \right) S dt + \rho \left( \frac{\partial S}{\partial \ell} dl \right) \vec{v} dt + \rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial \ell} \right) \left( \frac{\partial S}{\partial \ell} \right) dl^2 dt.$$

Po jednoduché úpravě a s využitím pravidla o derivaci součinu (1.14) dostáváme tvar

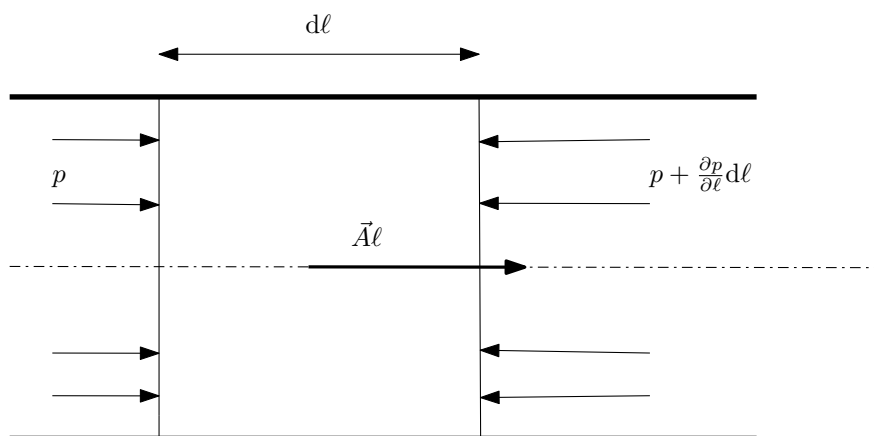
$$\vec{v} \cdot S = konst = Q, \quad (3.15)$$

kde  $Q$  je průtok,  $\vec{v}$  je rychlost a  $S$  je průtočná plocha.

Odvodili jsme tedy rovnici kontinua pro nestlačitelnou, stacionárně proudící kapalinu.

### 3.2.2 Z. z. hybnosti - Eulerova rovnice HD

Další velmi důležitou rovnicí je Eulerova rovnice HD, která vyjadřuje silovou rovnováhu a to konkrétně sil hmotnostních  $\vec{F}_m$  a sil tlakových  $\vec{F}_p$ . Tyto síly se rovnají setrvačné síle  $\vec{F}_s$  od vlastního pohybu částic kapaliny.



Obrázek 3.5: Eulerova rovnice - Silové poměry v potrubí

Rovnici odvodíme pro nestacionárně (3.10) proudící kapalinu. Diferenciál výsledné síly od hmotnostních a tlakových sil je poté roven

$$d\vec{F} = \vec{A} dm + (p \cdot \vec{n}) dS,$$

kde  $\vec{n}$  je vnější normála plochy,  $\vec{A}$  je objemové zrychlení,  $p$  je tlak a  $dm, dS$  jsou elementy hmotnosti a plochy.

Diferenciál setrvačné síly je podle II. Newtonova pohybového zákona roven

$$d\vec{F} = \vec{a} dm,$$

kde  $\vec{a}$  je zrychlení a  $dm$  je element hmotnosti.

Celková síla je pak dána trojným integrálem pro hmotnostní sílu

$$\vec{F}_m = \iiint_V (\vec{A} \cdot \rho) dV \quad (3.16)$$

a dvojným integrálem pro tlakovou sílu

$$\vec{F}_p = - \iint_S (p \cdot \vec{n}) dS. \quad (3.17)$$

Celková setrvačná síla je definována trojným integrálem

$$\vec{F} = \iiint_V \rho \frac{d\vec{v}}{dt} dV. \quad (3.18)$$

Dosazením rovnic (3.16, 3.17) do (3.18) dostáváme Eulerovu rovnici v integrálním tvaru

$$\iiint_V \frac{d\vec{v}}{dt} \rho dV = \iiint_V \vec{A} \rho dV - \iint_S (p \cdot \vec{n}) dS. \quad (3.19)$$

Rozepsáním totálního diferenciálu rychlosti, viz příloha (5.54) a použitím věty (1.18), pomocí které nahradíme plošný integrál integrálem objemovým, dostáváme z rovnice (3.19) výslednou Eulerovu rovnici HD

$$\vec{A} - \frac{1}{\rho} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} p = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \vec{v}, \quad (3.20)$$

kde  $\vec{A}$  je objemové zrychlení,  $\rho$  je hustota,  $p$  je tlak,  $\vec{v}$  je rychlost a  $t$  je čas. Tato rovnice je použitelná pro nestlačitelnou, nestacionárně proudící kapalinu.

### 3.2.3 Z.z. energie - Bernoulliho rovnice pro ideální kapalinu

Bernoulliho rovnice pro ideální kapalinu se odvozuje z Eulerovy rovnice HD, s využitím zjednodušení na jednorozměrné proudění. Jednotlivé členy rovnice (3.20) vynásobíme elementem dráhy  $d\ell$  a po drobné úpravě a integraci dostaneme Bernoulliho rovnici pro ideální kapalinu

$$-U + \frac{p}{\rho} + \int \vec{a}_t d\ell + \frac{\vec{v}^2}{2} = \text{konst.}, \quad (3.21)$$

kde  $U$  je měrná potenciální energie,  $p$  je tlak,  $\rho$  je hustota,  $\vec{a}_t$  je místní zrychlení,  $\vec{v}$  je rychlost a  $d\ell$  je element dráhy.

Měrná potenciální energie  $U$  je dána rovnicí

$$U = \int (\vec{A} d\ell),$$

kde  $\vec{A}$  je objemové zrychlení a  $d\ell$  je element dráhy.

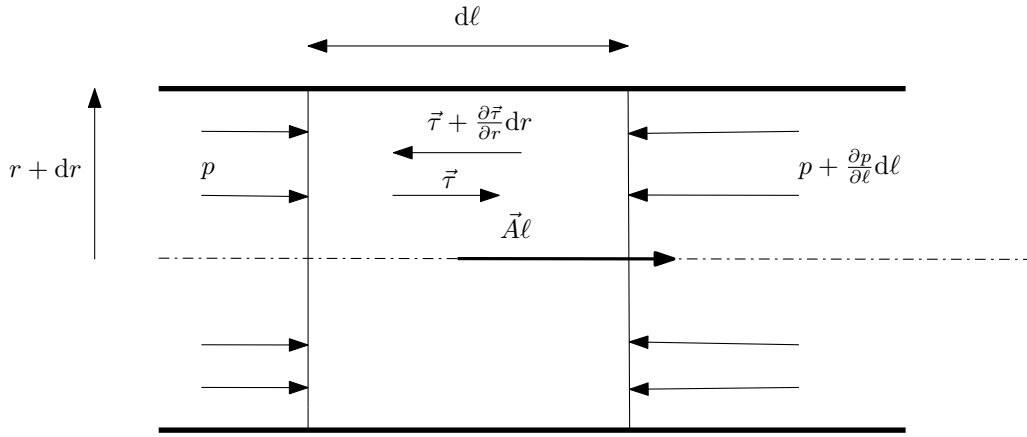
Při použití Bernoulliho rovnice pro turbulentní proudění, při nerovnoměrném rozložení rychlostního profilu, bude měrná kinetická energie korelována tzv. *Coriolisovým číslem*  $\alpha$ , které je dáno vztahem (3.11).

### 3.2.4 Navierova - Stokesova rovnice

Rovnici Naviera - Stokesese (dále  $N - S$ ) odvodíme taktéž pro nestlačitelnou, nestacionárně proudící kapalinu. Rovnice  $N - S$ , stejně jako Eulerova rovnice HD (3.20), vyjadřuje silovou rovnováhu. Navíc nám ale k silám hmotnostním (3.16) a tlakovým (3.17) přibude ještě síla třecí  $\vec{F}_t$ , která je způsobena viskozitou kapaliny.

Pro vyjádření třecích sil použijeme Newtonův vzorec (3.4) a dostáváme tak vztah pro diferenciál třecí síly

$$d\vec{F}_t = \vec{\tau} dS = -\eta \cdot \frac{d\vec{v}}{dr} dS.$$



Obrázek 3.6: N-S rce - Silové poměry v potrubí

Tyto tři síly se opět rovnají setrvačné síle a po úpravě dostáváme tedy rovnici

$$\vec{A} - \frac{1}{\rho} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} p + \nu \cdot \Delta \vec{v} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \vec{v}, \quad (3.22)$$

kde  $\nu$  je kinematická viskozita,  $\vec{A}$  je objemové zrychlení,  $\rho$  je hustota,  $p$  je tlak,  $\vec{v}$  je rychlost,  $t$  je čas a  $\Delta$  je Laplaceův operátor.

$N$ - $S$  rovnice patří mezi parciální diferenciální rovnice nelineární a nejsou obecně řešitelné. Řešení existuje jen ve speciálních případech.

### 3.2.5 Z.z. energie - Bernoulliho rovnice pro skutečnou kapalinu

Při proudění skutečné kapaliny se v silovém poli vyskytují i třecí síly, které jak už víme, jsou způsobeny viskozitou kapaliny. V kapalině vznikají tedy energetické ztráty definované v (3.1.8). Při odvozování Bernoulliho rovnice pro skutečnou kapalinu vyjdeme z rovnice (3.22), kterou vynásobíme elementem dráhy  $d\ell$  a zintegrujeme ji. Dostáváme tedy

$$-U + \frac{p}{\rho} + \int \vec{a}_t d\ell + \frac{\vec{v}^2}{2} + \int (\nu \cdot \Delta \vec{v}) d\ell = konst., \quad (3.23)$$

kde  $U$  je měrná potenciální energie,  $p$  je tlak,  $\rho$  je hustota,  $\vec{a}_t$  je místní zrychlení,  $\vec{v}$  je rychlost,  $\nu$  je kinematická viskozita a  $\Delta$  je Laplaceův operátor.

Integrál  $\int (\nu \cdot \Delta \vec{v}) d\ell = Y_z$ , je v praxi velmi těžko počitatelný, proto se měrná ztrátová energie počítá podle Weisbachova vztahu (3.12).

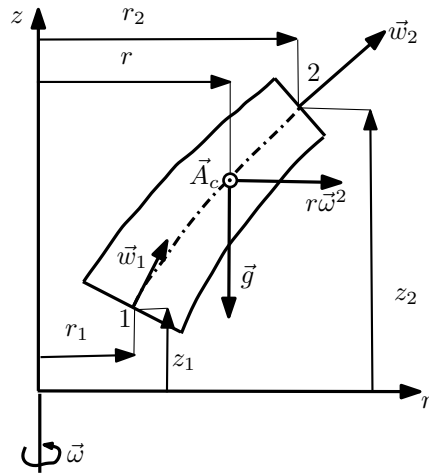
Bernoulliho rovnice pro proudění skutečné kapaliny v proudové trubici mezi místy 1 a 2, na kterou působí pouze tíhové zrychlení má tedy tvar

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{\vec{v}_1^2}{2} - U_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{\vec{v}_2^2}{2} - U_2 + Y_z, \quad (3.24)$$

kde  $p_1, p_2$  jsou tlaky,  $\rho$  je hustota,  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$  jsou rychlosti,  $U_1, U_2$  jsou měrné potenciální energie a  $Y_z$  je měrná ztrátová energie.

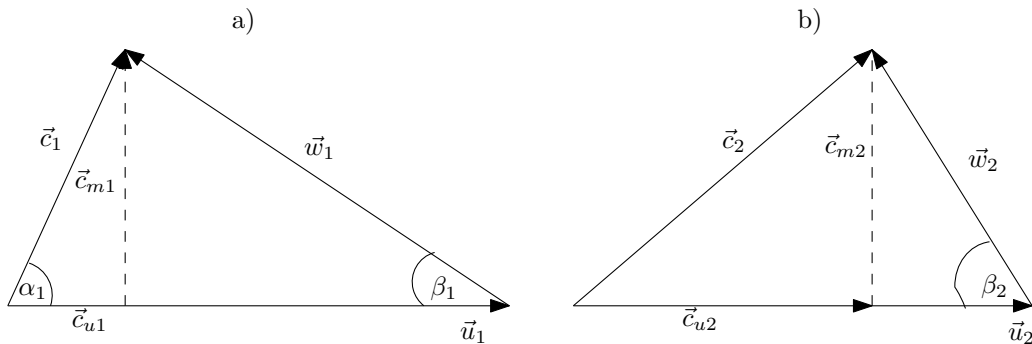
### 3.2.6 Eulerova čerpadlová rovnice

Eulerova čerpadlová rovnice se využívá při proudění kapaliny v *relativním prostoru*. Typickým příkladem relativního prostoru je rotující kanál, který vidíme na obrázku (3.7).



Obrázek 3.7: Rotující kanál - proudění v relativním prostoru

Při průtoku kapaliny rotujícím kanálem relativní rychlostí  $\vec{w}$ , působí na kapalinu odstředivá síla, která má vliv na energii kapaliny. Na kapalinu tedy kromě *gravitačního zrychlení*  $\vec{A}_z = -\vec{g}$  působí ještě zrychlení od *rotačního pohybu*  $\vec{A}_r = r\vec{\omega}^2$  a *Coriolisovo zrychlení*  $\vec{A}_c = 2(\vec{v} \times \vec{\omega})$ , kde  $r$  je poloměr kanálu,  $\vec{\omega}$  je úhlová rychlost. Rychlostní poměry v rotujícím kanálu vyjadřují rychlostní trojúhelníky z obrázku (3.8).



Obrázek 3.8: Rychlostní trojúhelníky, a) na vstupu do kanálu, b) na výstupu z kanálu kde  $\vec{w}_1, \vec{w}_2$  jsou relativní rychlosti,  $\vec{u}_1, \vec{u}_2$  jsou obvodové (unášivé) rychlosti od úhlové rychlosti  $\vec{\omega}$ .  $\vec{c}_{u2}, \vec{c}_{u1}$  jsou unášivé složky absolutních rychlostí,  $\vec{c}_{m1}, \vec{c}_{m2}$  jsou meridiální rychlosti a  $\beta_1, \beta_2$  jsou úhly natočení na vstupu a výstupu lopatky.

Jelikož Coriolisovo zrychlení je kolmé na rychlost  $\vec{w}$  a nemá žádnou složku do směru osy potrubí, bude tím pádem diferenciál měrné potenciální energie funkcí dvou souřadnic, tj.  $U = f(r, z)$ . Tento diferenciál bude poté roven

$$dU = r\vec{\omega}^2 dr - \vec{g} dz .$$

Měrnou potenciální energii  $U$  tedy v tomto případě vyjádříme jako

$$U = \int r\vec{\omega}^2 dr - \int \vec{g} dz, \quad (3.25)$$



kde  $r, z$  jsou vzdálenosti ve směru os,  $\vec{\omega}$  je úhlová rychlost a  $\vec{g}$  je gravitační zrychlení.

Pokud sestavíme pro rotující kanál mezi místy 1 a 2 Bernoulliho rovnici (3.24) a za potenciál  $U$  dosadíme (3.25) dostaneme

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{\vec{w}_1^2 - \vec{u}_1^2}{2} + \vec{g}z_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{\vec{w}_2^2 - \vec{u}_2^2}{2} + \vec{g}z_2 + Y_{z,1-2}, \quad (3.26)$$

kde  $p_1, p_2$  jsou tlaky,  $\rho$  je hustota,  $\vec{w}_1, \vec{w}_2$  jsou relativní rychlosti,  $\vec{u}_1, \vec{u}_2$  jsou unášivé rychlosti,  $\vec{g}$  je gravitační zrychlení a  $Y_{z,1-2}$  je měrná ztrátová energie.

Nyní napišme ještě *energetickou rovnici vnějšího pozorovatele*, který je v *absolutním prostoru*. Tato rovnice bude mít tvar

$$\Delta Y = Y_2 - Y_1 = \frac{p_2 - p_1}{\rho} + \frac{\vec{c}_2^2 - \vec{c}_1^2}{2} + \vec{g}(z_2 - z_1), \quad (3.27)$$

kde  $Y$  je měrná energie,  $p_2, p_1$  jsou tlaky,  $\rho$  je hustota,  $\vec{c}_2, \vec{c}_1$  jsou absolutní rychlosti a  $\vec{g}$  je gravitační zrychlení.

Dosazením rovnice (3.26) do rovnice (3.27) a pomocí rychlostních trojúhelníků z obrázku (3.8) a cosinové věty dostáváme konečný tvar *Eulerovy čerpadlové rovnice*

$$Y_t = \frac{\Delta Y}{\eta_h} = \vec{u}_2 \vec{c}_{u2} - \vec{u}_1 \vec{c}_{u1}, \quad (3.28)$$

kde  $Y_t$  je teoretická měrná energie čerpadla,  $\eta_h$  je hydraulická účinnost,  $\vec{u}_2, \vec{u}_1$  jsou unášivé rychlosti a  $\vec{c}_{u2}, \vec{c}_{u1}$  jsou unášivé složky absolutních rychlostí.

Toto byla poslední rovnice z hydromechaniky, kterou budeme potřebovat. A nyní již můžeme pokračovat na předposlední kapitole, kde se seznámíme blíže s čerpadly.

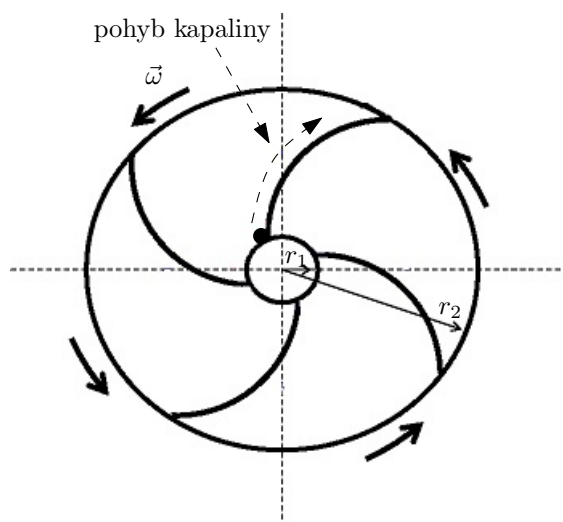
# Kapitola 4

## Čerpadla

Pro dopravu kapalin se v dnešní době používá velmi mnoho hydraulických typů čerpadel. Z tohoto hlediska můžeme čerpadla rozdělit na čerpadla *hydrodynamická* a *hydrostatická*. Mezi hydrodynamická čerpadla patří čerpadla radiální (odstředivá), diagonální nebo axiální. Mezi hydrostatická pak čerpadla pístová, vřetenová a další. Tato kapitola čerpá zejména z [1], [14] a [15]. Nyní se blíže seznámíme s nejdůležitější hydraulickou částí čerpadel, kterou je bezpochyby oběžné kolo.

### 4.1 Oběžné kolo

Oběžné kolo, jež zprostředkovává dopravu kapaliny, je nepostradatelnou částí každého čerpadla nebo turbíny. V oběžném kole se mechanická energie přiváděná hřídelí stává energií potenciální a kinetickou a předává se dopravované kapalině. Na obrázku (4.1) vidíme oběžné kolo, které se otáčí úhlovou rychlostí  $\vec{\omega}$  proti směru hodinových ručiček. Kulička znázorňuje částici kapaliny, která se pohybuje ve směru šipky. Oběžné kolo funguje na principu rotujícího kanálu (3.7), který jsme si popsali výše.



Obrázek 4.1: Oběžné kolo čerpadla se 4 lopatkami

Výběr oběžného kola se odvíjí od *kritéria rychloběžnosti*. Jelikož budeme s rychloběžností počítat i v modelu v kapitole 5 tak si jí nyní odvodíme.

## 4.2 Kritérium rychloběžnosti

Jedná se o *kritérium* přibližné *hydrodynamické podobnosti*, které zohledňuje nejdůležitější síly působící v kapalině. A to konkrétně síly tlakové a impulsní. Tyto síly představuje *Strouhalovo*  $Sh$  a *Eulerovo*  $Eu$  kritérium, viz [1]

$$Sh = \frac{\vec{c}}{nd}, \quad (4.1)$$

kde  $\vec{c}$  je absolutní rychlost,  $n$  jsou otáčky čerpadla a  $d$  je charakteristický rozměr.

$$Eu = \frac{\Delta p}{\rho \vec{c}^2}, \quad (4.2)$$

kde  $\Delta p$  je rozdíl tlaků,  $\rho$  je hustota a  $\vec{c}$  je absolutní rychlost. Na jejich základě je definována bezrozměrná *rychloběžnost*  $n_b$

$$n_b = \frac{1}{Sh \sqrt[4]{Eu^3}}. \quad (4.3)$$

Sloučením rovnic (4.1) a (4.2) s využitím Z. z energie (3.24) pro stejné rychlosti a dopravní výšky tedy

$$Y = \frac{\Delta p}{\rho}$$

a Z.z hmotnosti (3.15)

$$Q = D^2 \vec{c},$$

dostáváme vztah pro otáčky hydraulického stroje

$$n = \frac{1}{Sh \sqrt[4]{Eu^3}} \cdot \frac{\sqrt[4]{Y^3}}{\sqrt{Q}}, \quad (4.4)$$

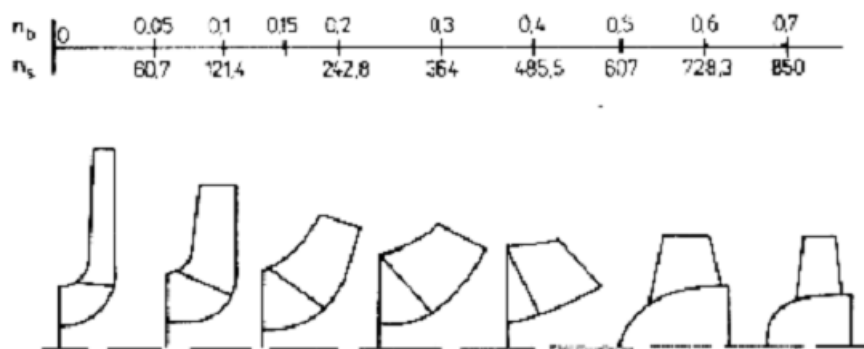
kde  $Y$  je měrná energie,  $Q$  je průtok a  $Sh$ ,  $Eu$  jsou Strouhalovo a Eulerovo kritérium. Podle (4.3) a (4.4) souvisí rychloběžnost s parametry hydraulického stroje

$$n_b = \frac{n \sqrt{Q}}{\sqrt[4]{Y^3}}. \quad (4.5)$$

Pokud do (4.5) dosadíme jednotkové parametry stroje  $Q = 1 [m^3 \cdot s^{-1}]$  a  $Y = 1 [J \cdot kg^{-1}]$  dostáváme  $n_b = n$ . Odtud vyplývá alternativní název rychloběžnosti - *měrné specifické otáčky*. Specifické otáčky lze také vyjádřit starším odvozením pomocí Camerera pro jednotkový výkon  $P = 1 [kW]$  a spád  $H = 1 [m]$

$$n_s = 3.65 \frac{n}{\sqrt{H}} \sqrt{\frac{Q}{\sqrt{H}}}. \quad (4.6)$$

Čerpadla můžeme podle rychloběžnosti rozdělit na *pomaluběžná*  $n_s \in (35, 65)$ , *normální*  $n_s \in (65, 150)$  a *rychloběžná*  $n_s \in (150, 300)$ . Všechny tyto tři typy jsou radiálními čerpadly. Dělení dále pokračuje na *diagonální*  $n_s \in (300, 600)$  a *axiální*  $n_s \in (600, 1500)$ .



Obrázek 4.2: Závislost tvaru oběžného kola na měrných specifických otáčkách, viz [14]

### 4.3 Účinnosti

Ekonomičnost provozu čerpadel charakterizují účinnosti zahrnující vlivy ztrát. Ztráty v čerpadlech se dělí na: *hydraulické, objemové a mechanické*, viz [1].

*Hydraulická účinnost*  $\eta_h$  je důležitým parametrem čerpadla a vyjadřuje ztráty třením, změnou průřezu a vířením kapaliny v oběžném kole. Její hodnota je potřebná během návrhu základních rozměrů oběžného kola. Dá se určit podle vztahu (3.14) nebo podle

$$\eta_h = 1 - \frac{k}{\sqrt[6]{Q \cdot n_b / n}}, \quad (4.7)$$

kde  $k$  je relativní drsnost povrchu,  $Q$  je průtok,  $n$  jsou otáčky a  $n_b$  je rychloběžnost. Častěji se ale určuje nepřímo pomocí

$$\eta_h = \sqrt{\eta_c} - (0,02 \div 0,04), \quad (4.8)$$

kde  $\eta_c$  je celková účinnost, kterou můžeme zjistit pomocí *Erhartova diagramu* (4.3) a  $(0,02 \div 0,04)$  je interval ztrát, které volíme podle velikosti oběžného kola.

*Objemová, neboli volumetrická účinnost*, vyjadřuje ztráty únikem kapaliny mimo oběžné kolo netěsnostmi na sací i výtlačné straně oběžného kola.

*Mechanická účinnost* udává ztráty způsobené třením kapaliny o disky a třením hřídele v ucpávkách a ložiskách.

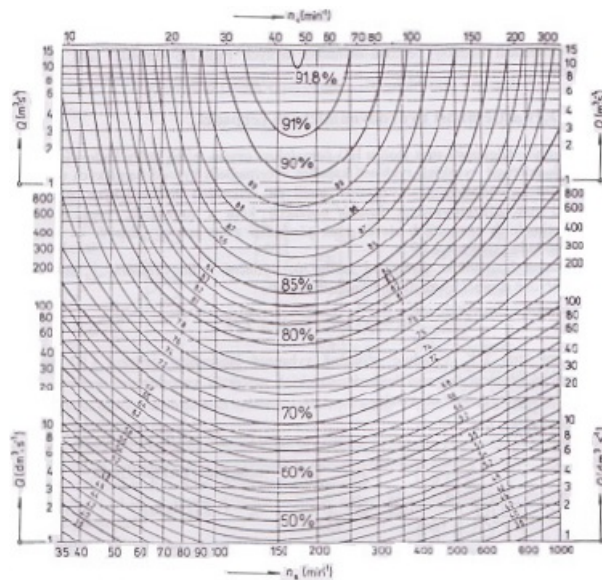
Celková účinnost  $\eta_c$  je pak dána jako

$$\eta_c = \eta_h \cdot \eta_v \cdot \eta_m \quad (4.9)$$

a příkon čerpadla jako

$$P_r = \vec{M}_k \cdot \vec{\omega} = \frac{\rho \cdot Q \cdot Y}{\eta_c}, \quad (4.10)$$

kde  $\vec{M}_k$  je kroutící moment,  $\vec{\omega}$  je úhlová rychlost,  $Q$  je průtok,  $Y$  je měrná energie,  $\rho$  je hustota a  $\eta_c$  je celková účinnost.

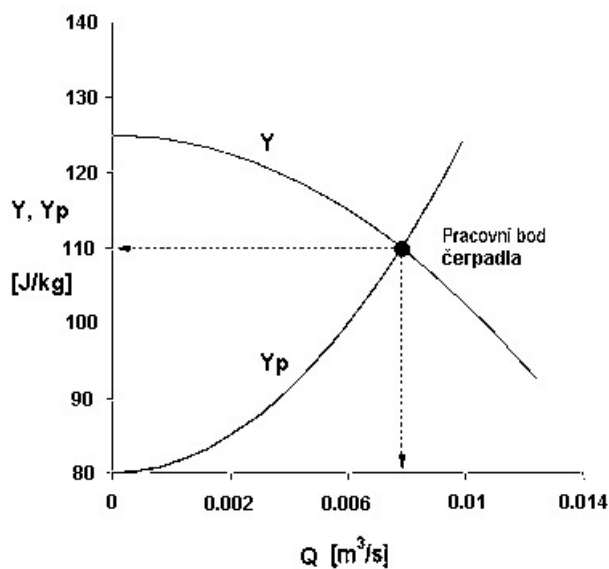


Obrázek 4.3: Erhartův diagram pro vodu, viz [1]

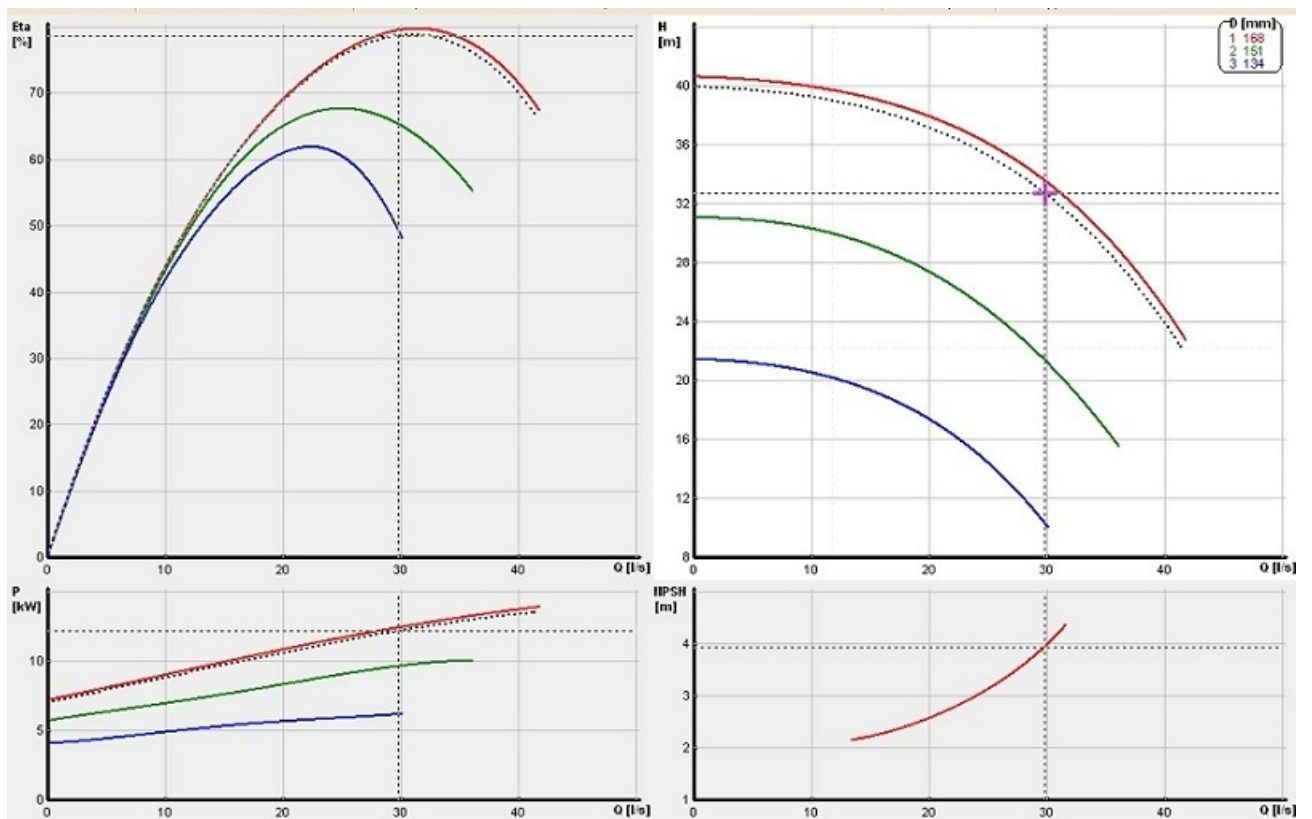
## 4.4 Pracovní bod

*Charakteristika čerpadla* je závislost různých charakteristik čerpadla na objemovém průtoku. Nejčastěji bývá vyjádřena závislost měrné energie  $Y$ , dopravní výšky  $H$  nebo účinnosti  $\eta$ .

*Charakteristika potrubí* je závislost měrné energie  $Y_p$  pro potrubí na objemovém průtoku. *Pracovní bod čerpadla* je poté bodem průniku charakteristiky čerpadla a charakteristiky potrubí. Je to bod, ve kterém čerpadlo za daných podmínek pracuje nejekonomičtěji a přitom nejefektivněji.



Obrázek 4.4: Pracovní bod čerpadla, viz [1]



Obrázek 4.5: Charakteristiky čerpadla, viz [6]  
 V počátku přerušovaných os, leží charakteristiky pro náš návrhový bod.

Nyní již známe veškeré definice a rovnice potřebné k sestavení a rozboru matematického modelu, který si popíšeme v následující kapitole.

# Kapitola 5

## Matematický model návrhu oběžného kola

V této kapitole nás čeká hlavní cíl této práce. Bude zde popsán postup návrhu radiálního oběžného kola čerpadla Beta16. Typ čerpadla jsme určili podle návrhového bodu z obrázku (5.3.2). Návrh je řešen pomocí matematického modelu v prostředí Matlab. Model je uložen na přiloženém CD. Před spuštěním modelu je nutno nejprve uložit model z CD na libovolné přepisovatelné médium!

Model je naprogramován na tzv. *Návrhový bod*, což je takový bod, ve kterém známe průtok  $Q[m^3 \cdot s^{-1}]$ , *dopravní výšku*  $H[m]$  a *otáčky čerpadla*  $n[1 \cdot \text{min}^{-1}]$ . V tomto bodě má pak čerpadlo maximální účinnost, tzv. optimum. Kdybychom chtěli použít čerpadlo pro jiné průtoky než je v optimu, docházelo by k maření dodávané energie.

V modelu uvažují dvě základní drsnosti, a to hodnoty  $Ra = 3,2\mu m$  a  $Ra = 6,3\mu m$ , dále počet lopatek  $z$  v rozsahu (5:8) lopatek a úhel natočení lopatek na výstupu  $\beta_2$  pro hodnoty (28°, 30°, 33°, 35°). Úhel natočení lopatek na vstupu  $\beta_1$ , zkosení lopatek  $\gamma$  a tloušťku lopatek  $\Delta$  volím konstantní, tj.  $\beta_1 = 22^\circ$ ,  $\gamma = 20^\circ$  a  $\Delta = 4,5mm$ .

Model si můžeme představit rozdělený na několik částí. V první jsou zadefinovány konstanty a spočítají se rozměry oběžného kola, ve druhé části se spočtou veškeré třecí ztráty. Následuje třetí a zároveň poslední část, kde se průběžně ukládají data a pracuje se s excelovými soubory *testdata* a *testtabulka*, ve kterých jsou nakonec data uložena a jsou zde vykresleny jejich přehledné grafy. Všechny tři části si nyní rozebereme.

Pro lepší názornost bude model prezentován na konkrétním příkladě, kdy proudící kapalinou bude voda o hustotě  $\rho = 1000 \frac{kg}{m^3}$ . Dále použijeme data, která nám podle modelu vyšla jako optimální, to jest

$$\begin{aligned}z &= 5, \\ \beta_2 &= 35^\circ, \\ Ra &= 3,2\mu m.\end{aligned}$$

Tato kapitola čerpá z [1], [3], [6], [11], [12], [13], [14] a [15].

### 5.1 Návrh meridiálního řezu oběžného kola čerpadla

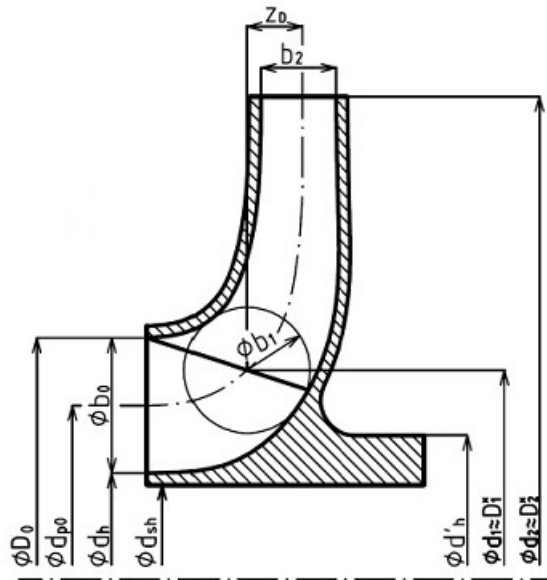
Návrh rozměrů meridiálního řezu je proveden pro zadaný návrhový bod a to, průtok  $Q = 30l/s$ , dopravní výšku  $H = 32,5m$  a otáčky čerpadla  $n = 2900\text{min}^{-1}$ .

Během návrhu meridiálního řezu je předpokládáno, že střední proudnice a střednice kanálu jsou u radiálních oběžných kol s rovnoběžnými disky totožné, viz [12].

$$d_1 \cong D_1^*, d_2 \cong D_2^*,$$

kde význam uvedených průměrů je patrný z obrázku (5.1) a symbol  $\cong$  značí přibližnou rovnost.

Poznámka: Pro jednoduchost nebudeme dále při značení průměrů používat \*.



Obrázek 5.1: Meridiální řez oběžným kolem, viz [12]

Nyní se pustíme do určení rozměrů oběžného kola. K tomu je nejprve potřeba spočítat rychloběžnost - specifické otáčky a hydraulickou účinnost čerpadla.

## Výpočet specifických otáček

Specifické otáčky spočteme pro zadaný návrhový bod v kapitole[5.1] a využijeme k tomu vzorec (4.6). Pak

$$n_s = 134,69 \text{ min}^{-1}, \quad (5.1)$$

nacházíme se v intervalu (35, 300), tedy máme opravdu radiální oběžné kolo, viz 4.2.

## Výpočet hydraulické účinnosti

Při výpočtu hydraulické účinnosti využijeme Erhartův diagram závislosti průtoku  $Q$  na specifických otáčkách  $n_s$ , který je na obrázku (4.3). Odtud zjistíme celkovou účinnost  $n_c$ , která je tedy rovna  $n_c = 0,78$ . Dále využijeme vzorce (4.8), kde za ztráty zvolíme hodnotu 0,03 pro střední kola. Pak

$$n_h = \sqrt{0,78} - 0,03 = 0,8532 \quad (5.2)$$



## 5.1.1 Pevnostní výpočty

### Rozměry hřídele a náboje oběžného kola

Při výpočtu průměru hřídele  $d_{sh}$ , vycházíme z předpokladu, že zatížení hřídele je způsobeno pouze krouticím momentem (2.2) od hnací jednotky čerpadla. Hřídel je třeba dimenzovat na krut při největším zatížení, tj. pro nejvyšší provozní průtok. Doporučené meze zatížení v krutu jsou  $\tau_D \in (15, 30)MPa$ , viz [12].

Ze vztahů (2.2) a (2.4) dostáváme

$$\vec{M}_{kmax} = \frac{\vec{\tau}_{max} \cdot \frac{\pi d_{sh}^4}{32}}{\frac{d_{sh}}{2}},$$

odtud po jednoduché úpravě dostáváme vzorec pro minimální průměr hřídele

$$d_{shmin} = \sqrt[3]{\frac{16\vec{M}_{kmax}}{\pi\tau_D}}. \quad (5.3)$$

Průměr hřídele  $d_{sh}$  volíme libovolně větší než vypočtený  $d_{shmin}$ .

Na základě již známého průměru hnací hřídele lze navrhnout rozměry náboje ze sací a výtlačné strany oběžného kola, viz [3]

$$d_h \cong (1, 3 \div 1, 4)d_{sh},$$

$$d'_h \cong (1, 35 \div 1, 5)d_{sh}.$$

Pro naše hodnoty dostáváme

$$\vec{M}_{kmax} = 74,09Nm,$$

$$d_{shmin} = 23,26mm,$$

volíme průměr hřídele libovolně větší, tedy

$$d_{sh} = 30mm,$$

$$d_h = 40,5mm,$$

$$d'_h = 42mm.$$

### Výpočet tloušťky oběžné lopatky

Naše oběžné kolo čerpadla má specifické otáčky  $n_s$  v rozsahu (130 ÷ 140), takže se jedná o normální radiální čerpadlo. Proto pro zjištění minimální tloušťky lopatky  $\Delta$  je použit tento vzorec, viz [14]

$$\Delta = \frac{15D_2}{1000},$$

kde  $D_2$  je průměr oběžného kola na výstupu (5.24). Pro naše hodnoty dostáváme

$$\Delta = \frac{15 \cdot 174,5}{1000} = 2,62mm.$$

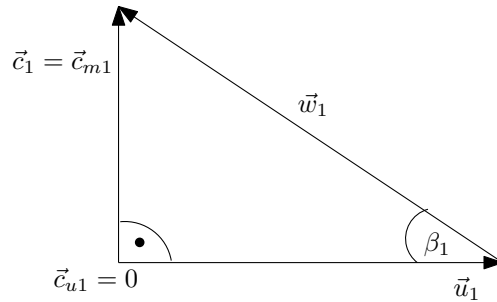
Skutečnou tloušťku lopatky jsme zvolili 4,5 mm, takže lopatka vyhovuje pevnostnímu výpočtu.

## 5.1.2 Vstup do oběžného kola

Pro návrh radiálního čerpadla se předpokládá ideální vstup kapaliny do oběžného kola, tzn., že vstupní úhel  $\alpha_1 = 90^\circ$ , tudíž kapalina vstupuje do oběžného kola bez předrotace. Rychlostní trojúhelník za a) z obrázku (3.8) se nám tedy zjednoduší na pravoúhlý trojúhelník, obrázek (5.2).

### Meridiální rychlost na vstupu do oběžného kola

Nyní vypočítáme meridiální složku celkové rychlosti  $\vec{c}_{m1}$  podle obrázku (5.2), od které se dále odvíjí rozměry vstupních částí oběžného kola.



Obrázek 5.2: Vstupní trojúhelník

Pro výpočet meridiální rychlosti platí

$$\vec{c}_{m1} = K_{m1} \sqrt{2\vec{g}H}, \quad (5.4)$$

kde  $\vec{g}$  je gravitační zrychlení,  $H$  dopravní výška a  $K_{m1}$  je směrný parametr.

Směrný parametr  $K_{m1}$  lze empiricky vyjádřit dvěma vztahy pro různá kola a to podle jejich rychloběžnosti  $n_s$ . Vztahy vypadají takto

$$K_{m1} = 0,12 + 0,5617 \left( \frac{n_s}{1214} - 0,041 \right)^{0,8} \quad n_s \in (50 \div 200), \quad (5.5)$$

$$K_{m1} = 0,227 + 0,574 \left( \frac{n_s}{1214} - 0,1647 \right) \quad n_s > 200. \quad (5.6)$$

Pro náš případ tedy využijeme pro směrný parametr rovnici (5.5) a dosadíme ji do (5.4). S využitím již známých hodnot dostáváme pro meridiální rychlost hodnotu

$$\vec{c}_{m1} = 4,72 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}. \quad (5.7)$$

### Rozměry vstupní části oběžného kola

Hodnotu průměru vstupního hrdla  $d_0$  získáme na základě předpokladu, že

$$Q_0 = \vec{C}_0 \cdot S_0, \quad (5.8)$$

kde  $Q_0$  je průtok zvýšený o volumetrické ztráty  $Q_0 = \frac{Q}{\eta_v}$ ,

$\vec{C}_0$  je rychlost kapaliny ve vstupním hrdle  $\vec{C}_0 = (0,8 \div 0,9) \vec{c}_{m1}$

a  $S_0$  je průřez hrdla oběžného kola  $S_0 = \frac{\pi(D_0^2 - d_h^2)}{4}$ .

Pak vstupní průměr hrdla  $D_0$  je

$$D_0 = \sqrt{d_h^2 + \frac{4Q_0}{\vec{C}_0\pi}}, \quad (5.9)$$

tento průměr zaokrouhlíme k nejbližší hodnotě, která je daná přírubou z normy ČSN.

Pro naše hodnoty dostáváme

$$D_0 = \sqrt{0,0405^2 + \frac{4 \cdot 0,03125}{4,0118\pi}} = 107,51mm, \quad (5.10)$$

nejbližší hodnota z norem je  $110mm$ .

Vstupní průměr lopatky oběžného kola  $D_1$  se pro radiální oběžná kola přibližuje k průměru  $D_0$  a v případech větších hodnot rychloběžnosti k průměru  $d_{p0}$ . Pak podle [12]

$$D_1 = d_{p0} + K(D_0 - d_{p0}),$$

$$d_{p0} = \sqrt{\frac{D_0^2 + d_h^2}{2}} \quad a \quad K = 0,59 + 0,47 \cos\left(\frac{1255n_s}{1214}\right), \quad pro \ n_s < 182$$

nebo můžeme  $D_1$  vyjádřit podle [3] jako

$$D_1 = \frac{\vec{c}_{m1}}{\tan(\beta_1)\pi n}, \quad (5.11)$$

kde  $\vec{c}_{m1}$  je meridiální rychlost,  $n$  jsou otáčky čerpadla a  $\beta_1$  je vstupní úhel natočení lopatky. Pak pro naše hodnoty podle (5.11) dostáváme

$$D_1 = \frac{60 \cdot 4,72}{\tan(22^\circ)\pi 2900} = 76,94mm. \quad (5.12)$$

Nyní ještě potřebujeme určit šířku kanálu na vstupu  $b_1$ . K tomu využijeme vstupní průřez oběžného kola  $S_1 = \frac{Q}{\vec{c}_{m1}}$ . Tuto plochu můžeme také vyjádřit jako

$$S_1 = \pi D_1 b_1 \left(1 - \frac{z \cdot \Delta}{\pi D_1 \sin(\beta_1)}\right),$$

kde  $D_1$  je vstupní průměr lopatky,  $b_1$  vstupní šířka kanálu,  $z$  je počet lopatek,  $\Delta$  je tloušťka lopatky a  $\beta_1$  je vstupní úhel natočení lopatky.

Po jednoduché úpravě dostáváme vzorec pro šířku kanálu

$$b_1 = \frac{Q}{\vec{c}_{m1}\pi D_1 \left(1 - \frac{z \cdot \Delta}{\pi D_1 \sin(\beta_1)}\right)}, \quad (5.13)$$

pro naše hodnoty

$$b_1 = \frac{0,03}{4,72 \cdot 0,07694 \cdot \pi \left(1 - \frac{5 \cdot 0,0045}{0,07694 \cdot \pi \cdot \sin(22)}\right)} = 35mm. \quad (5.14)$$

Nyní již známe veškeré parametry vstupní části oběžného kola a můžeme se zaměřit na část výstupní.

### 5.1.3 Výstup z oběžného kola

Výstup kapaliny z oběžného kola již není ideální jako tomu bylo u vstupu, rychlostní trojúhelník bude tedy obecný, viz (3.8 za b) ).

#### Meridiální rychlost na výstupu z oběžného kola

Nyní vypočítáme meridiální složku celkové rychlosti  $\vec{c}_{m2}$  podle obrázku (3.8 za b) ), od které se dále odvíjí rozměry výstupních částí oběžného kola. Pro výpočet meridiální rychlosti platí

$$\vec{c}_{m2} = K_{m2} \sqrt{2\vec{g}H}, \quad (5.15)$$

kde  $\vec{g}$  je gravitační zrychlení,  $H$  dopravní výška a  $K_{m2}$  je směrný parametr.

Směrný parametr  $K_{m2}$  lze vyjádřit dvěma vztahy pro různá kola a to podle jejich rychloběžnosti  $n_s$ . Vztahy vypadají takto

$$K_{m2} = 0,077 + 1,41 \left( \frac{n_s}{1214} - 0,041 \right)^{1,2} \quad n_s \in (50 \div 200), \quad (5.16)$$

$$K_{m2} = 0,192 + 0,8 \left( \frac{n_s}{1214} - 0,1647 \right)^{1,1} \quad n_s > 200. \quad (5.17)$$

Pro náš případ tedy využijeme pro směrný parametr rovnici (5.16) a dosadíme ji do (5.15). S využitím již známých hodnot dostáváme pro meridiální rychlost hodnotu

$$\vec{c}_{m2} = 3,41 m \cdot s^{-1}. \quad (5.18)$$

#### Rozměry výstupní části oběžného kola

Pro určení výstupního průměru  $D_2$  využijeme rychlostních trojúhelníků na vstupu a výstupu, viz obrázky (5.2, 3.8 za b) ) a vzorec (3.28).

Je zřejmé, že pro  $p_1 = p_2$  a  $\vec{c}_1 = \vec{c}_2$  přejde vzorec (3.28) na

$$\frac{\vec{g}H}{\eta_h} = \vec{u}_2 \vec{c}_{u2}, \quad (5.19)$$

kde  $\vec{g}$  je gravitační zrychlení,  $H$  je dopravní výška,  $\eta_h$  je hydraulická účinnost,  $\vec{u}_2$  je unášivá rychlost a  $\vec{c}_{u2}$  je unášivá složka absolutní rychlosti.

Dále z rychlostního trojúhelníku na výstupu (3.8 za b) ) plyne

$$\tan(\beta_2) = \frac{\vec{c}_{m2}}{\vec{u}_2 - \vec{c}_{u2}},$$

kde  $\vec{c}_{m2}$  je meridiální rychlost,  $\beta_2$  je výstupní úhel natočení lopatky,  $\vec{u}_2$  je unášivá rychlost a  $\vec{c}_{u2}$  je unášivá složka absolutní rychlosti.

Po vyjádření  $\vec{c}_{u2}$ , dosazení do (5.19) a drobné úpravě dostáváme

$$\frac{\vec{g}H}{\eta_h} = \vec{u}_2^2 \left( 1 - \frac{\vec{c}_{m2}}{\vec{u}_2 \tan(\beta_2)} \right), \quad (5.20)$$

tento vzorec by platil pro oběžné kolo s nekonečným počtem lopatek  $z$ , ale vlivem konečného počtu lopatek musíme zavést statisticky zjištěný korelační součinitel  $\kappa$ , pro který použijeme vzorec podle Weissera

$$\kappa = 1,01 - \frac{0,395 + 0,457 \sin(\beta_2)}{\sqrt{z}}, \quad (5.21)$$

kde  $\beta_2$  je výstupní úhel natočení lopatky a  $z$  je počet lopatek.

Tento součinitel dosadíme do rovnice (5.20) a dostáváme kvadratickou rovnici pro obvodovou rychlost  $\vec{u}_2$ . Po úpravě tedy dostáváme

$$\vec{u}_2 = \frac{\frac{\vec{c}_{m2}}{\tan(\beta_2)} + \sqrt{\left(-\frac{\vec{c}_{m2}}{\tan(\beta_2)}\right)^2 - 4\kappa \cdot \frac{-\vec{g}H}{\eta_h}}}{2\kappa}. \quad (5.22)$$

Nyní již můžeme spočítat průměr  $D_2$ , neboť ten je dán vztahem

$$D_2 = \frac{\vec{u}_2}{\pi n}, \quad (5.23)$$

kde  $\vec{u}_2$  je unášivá rychlost a  $n$  jsou otáčky.

Pro naše hodnoty je tedy výstupní průměr

$$D_2 = \frac{26,797 \cdot 60}{2900\pi} = 174,5 \text{ mm}. \quad (5.24)$$

Posledním parametrem je *šířka kanálu na výstupu*  $b_2$  z oběžného kola. K jejímu určení využijeme výstupní průřez oběžného kola  $S_2 = \frac{Q}{\vec{c}_{m2}}$ . Tuto plochu můžeme taky vyjádřit jako

$$S_2 = \pi D_2 b_2 \left(1 - \frac{z \cdot \Delta}{\pi D_2 \sin(\beta_2) \cos(\gamma)}\right),$$

kde  $D_2$  je výstupní průměr lopatky,  $b_2$  výstupní šířka kanálu,  $z$  je počet lopatek,  $\Delta$  je tloušťka lopatky,  $\beta_2$  je výstupní úhel natočení lopatky a  $\gamma$  je zkosení lopatky.

Po jednoduché úpravě dostáváme vzorec pro šířku kanálu

$$b_2 = \frac{Q}{\vec{c}_{m2} \pi D_2 \left(1 - \frac{z \cdot \Delta}{\pi D_2 \sin(\beta_2) \cos(\gamma)}\right)}, \quad (5.25)$$

pro naše hodnoty dostáváme

$$b_2 = \frac{0,03}{3,26 \cdot 0,17648 \cdot \pi \left(1 - \frac{5 \cdot 0,0045}{0,17648 \cdot \pi \sin(22) \cos(20)}\right)} = 18 \text{ mm}. \quad (5.26)$$

Nyní již známe všechny rozměry a víme tedy, jak bude meridiální řez oběžným kolem vypadat. Pusťme se tedy do další části modelu, která se věnuje třecím ztrátám.

## 5.2 Určení třecích ztrát

Ztráty v oběžném kole jsou způsobeny mnoha vlivy, jako je například tření kapaliny nebo vznik vírů při jejím proudění. V modelu řešíme pouze ztráty třecí, ale i přesto si něco málo řekneme ke ztrátám, které nejsou pro jejich náročnost v modelu zahrnuty. Nejpodstatnější z těchto ztrát jsou *ztráty vířením*.

### Lokální vír

V případě čerpaní reálné kapaliny vzniká v oběžném kole s konečným počtem lopatek tzv. *lokální vír*, který vzniká v důsledku nestejných rychlostí proudící kapaliny v kanále. Tento rozdíl rychlostí je způsoben tím, že na vypouklé stěně lopatky je větší tlak

než na stěně vyduté. Čím jsou rozdíly těchto rychlostí větší nebo čím méně kapaliny oběžným kolem protéká, tím ztráty vířením rostou. Pokud zcela uzavřeme šoupátko, vytvoří se dokonce uzavřený lokální vír, který má opačný smysl otáčení než oběžné kolo, ale stejnou úhlovou rychlost  $\vec{\omega}$ . Teorie říká, že lokální vír nevznikne v oběžných kolech s nekonečným počtem lopatek.

Lokální vír v oběžném kole způsobuje, že se kapalina při výstupu z oběžného kola utrhne, tzn., že výstupní úhel kapaliny se zmenší oproti výstupnímu úhlu lopatky  $\beta_2$ . Tento výstupní úhel kapaliny nově označíme jako  $\beta_3$ . Diference výstupního úhlu lopatky  $\beta_2$  a kapaliny  $\beta_3$  se bude zvětšovat se zmenšujícím se počtem lopatek.

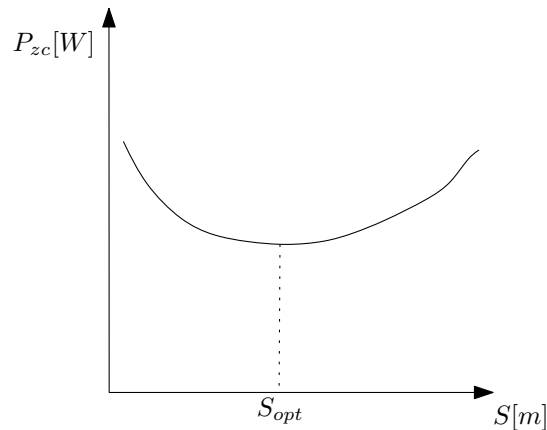
Pro matematické vyjádření a výpočet ztrát vířením by bylo třeba využít program Fluent, jehož náročnost ale přesahuje rámec bakalářské práce, proto ztráty vířením dále nebudeme uvažovat. Podívejme se tedy na ztráty, které vznikají třením na discích oběžného kola.

### 5.2.1 Diskové ztráty

Oběžné kolo disponuje dvěma disky, které od sebe rozlišujeme. Větší z disků s průměrem  $D_2$  nazýváme *náboj*, neboli *nosný disk* a menší s průměrem  $D_0$  poté *věvec*, neboli *krycí disk*. Na obou těchto discích vznikají ztráty vlivem tření kapaliny o povrch disků. Tyto ztráty vyjádříme ve formě *ztrátového výkonu*  $P_z$ . Tento výkon závisí mimo jiné na vzdálenosti mezi diskem a pevnou stěnou  $S$ , viz obrázek (5.3). Pro  $S > S_{opt}$  převažují třecí ztráty, pro  $S < S_{opt}$  ztráty vířením. Optimální hodnota vzdálenosti  $S_{opt}$  je určena pomocí statisticky zjištěného vztahu, viz [3]

$$S_{opt} = \frac{2,97D_2}{2Re^{0,34}}, \quad (5.27)$$

kde  $D_2$  je průměr nosného disku a  $Re$  je Reynoldsovo číslo (3.6).



Obrázek 5.3: Závislost ztrátového výkonu na vzdálenosti disku od pevné stěny

#### Ztráty na náboji

Hodnota ztrátového výkonu se odvíjí od součinitele drsnosti

$$k = 4,5 \cdot 10^{-6} Ra^{0,97}$$

a ztrátového součinitele

$$c_{mN} = \left[ 3,8 \log \left( \frac{D_2}{2k} \right) - 2,4 \sqrt[4]{\left( \frac{2S}{D_2} \right)} \right]^{-2}$$

kde  $Ra$  je drsnost,  $k$  je součinitel drsnosti,  $D_2$  je průměr nosného disku a  $S$  je vzdálenost mezi diskem a pevnou stěnou. Tento vzorec, platí pouze pro  $S \geq S_{opt}$ , jelikož neuvažuje *Taylorovy víry* vznikající při malé vzdálenosti mezi diskem a pevnou stěnou.

Pak ztrátový výkon na náboji je roven

$$P_{zN} = \frac{1}{4} c_{mN} \cdot \rho \cdot \vec{\omega}^3 \cdot \frac{D_2^5}{32}, \quad (5.28)$$

kde  $c_{mN}$  je součinitel ztrát,  $\rho$  je hustota,  $\vec{\omega}$  je úhlová rychlost a  $D_2$  je průměr nosného disku.

Pak pro naše hodnoty dostáváme

$$P_{zN} = 193,68W. \quad (5.29)$$

### Ztráty na věnci

Ztráta na věnci odpovídá ztrátě na náboji snižená o ztrátu odpovídající ploše sání, viz [3]. Pak

$$P_{zV} = P_{zN} - P_{\sigma}, \quad (5.30)$$

kde pro  $P_{\sigma}$  využijeme stejné vztahy jako pro  $P_{zN}$  s jedinou změnou, kdy místo průměru náboje  $D_2$  dosadíme průměr věnce  $D_0$ . Pak

$$c_{m\sigma} = \left[ 3,8 \log \left( \frac{D_0}{2k} \right) - 2,4 \sqrt[4]{\left( \frac{2S}{D_0} \right)} \right]^{-2} \quad P_{\sigma} = \frac{1}{4} c_{m\sigma} \cdot \rho \cdot \vec{\omega}^3 \cdot \frac{D_0^5}{32},$$

kde  $c_{m\sigma}$  je součinitel ztrát a platí pro něj omezení jako pro  $c_{mN}$ ,  $\rho$  je hustota,  $\vec{\omega}$  je úhlová rychlost a  $D_0$  je průměr krycího disku.

Pak ztrátový výkon na věnci je roven

$$P_{zV} = P_{zN} - P_{\sigma} = \frac{\rho \vec{\omega}^3}{4 \cdot 32} \cdot [(c_{mN} \cdot D_2^5) - (c_{m\sigma} \cdot D_0^5)]. \quad (5.31)$$

Pak pro naše hodnoty dostáváme

$$P_{zV} = 193,68 - 19,79 = 173,89W. \quad (5.32)$$

Celkový diskový ztrátový výkon  $P_{zdc}$  je poté roven součtu dílčích ztrátových výkonů

$$P_{zcd} = P_{zN} + P_{zV} = 193,68 + 173,89 = 367,57W. \quad (5.33)$$

### 5.2.2 Ztráty třením na lopatkách

Pro vyjádření ztrát na lopatkách opět využijeme ztrátového výkonu, který v tomto případě vyjádříme jako

$$P_{zlop} = Y_{zlop} \cdot Q \cdot \rho, \quad (5.34)$$

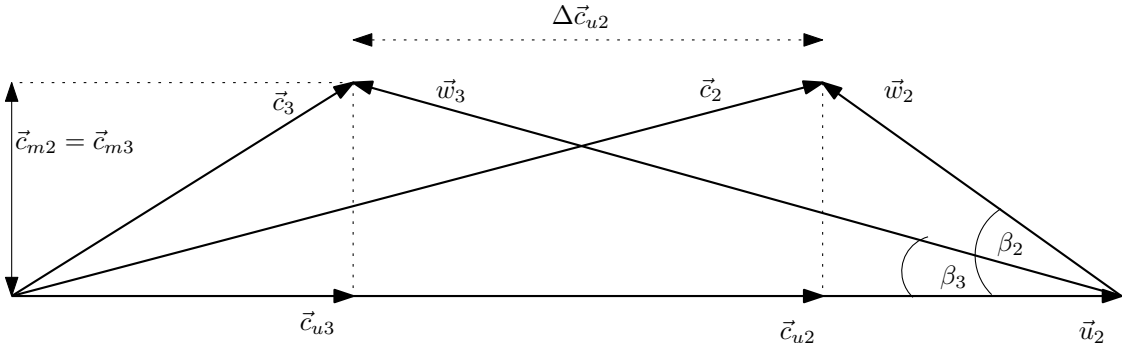
kde  $Q$  je průtok,  $\rho$  je hustota a  $Y_{zlop}$  je měrná ztrátová energie na všech lopatkách, kterou dostaneme obdobou vztahů (3.12 a 3.13). Tedy

$$Y_{zlop} = \zeta \frac{\vec{w}_s^2}{2} \cdot z = \lambda \frac{L}{q} \cdot \frac{\vec{w}_s^2}{2} \cdot z, \quad (5.35)$$

kde  $\zeta$  je ztrátový součinitel,  $\vec{w}_s$  je střední relativní rychlost v kanále,  $z$  je počet lopatek oběžného kola,  $\lambda$  koeficient drsnosti,  $L$  délka lopatky a  $q$  je charakteristický rozměr lopatky.

Délku lopatky bychom nejlépe zjistili opět pomocí programu Fluent, který ale pro jeho náročnost nevyužíváme. Proto použijeme zjednodušení, kdy lopatku aproximujeme kružnicí, respektive její částí.

Pro další výpočty musíme zadefinovat skutečný rychlostní trojúhelník na výstupu kapaliny z oběžného kola. Jak už víme, kvůli lokálnímu víru (5.2) nastává diference mezi výstupním úhlem lopatky  $\beta_2$  a výstupním úhlem kapaliny  $\beta_3$ . V důsledku toho dojde ke změnám rychlostí na výstupu z oběžného kola, viz obrázek (5.4).



Obrázek 5.4: Rychlostní trojúhelníky na výstupu z oběžného kola

Úhel  $\beta_3$  zjistíme jako

$$\tan(\beta_3) = \frac{\vec{c}_{m3}}{\vec{u}_2 - \vec{c}_{u3}}, \quad (5.36)$$

kde

$$\vec{c}_{u3} = \vec{c}_{u2} - \Delta \vec{c}_u = \vec{c}_{u2} - \frac{\pi r_2 \sin(\beta_2) \vec{\omega}}{z}, \quad (5.37)$$

kde  $\vec{c}_{m3}$  je meridiální rychlost,  $\vec{u}_2$  je unášivá rychlost,  $\vec{c}_{u3}$  a  $\vec{c}_{u2}$  jsou unášivé složky absolutní rychlosti,  $\Delta \vec{c}_u$  je změna unášivé složky absolutní rychlosti,  $r_2$  je poloměr oběžného kola na výstupu,  $\vec{\omega}$  je úhlová rychlost,  $z$  je počet lopatek a  $\beta_2, \beta_3$  jsou výstupní úhly lopatky a kapaliny.

Nyní můžeme zadefinovat další parametry a to *střední relativní rychlost*  $\vec{w}_s$ , *střední poloměr kanálu*  $r_s$ , *střední úhel natočení kapaliny*  $\beta_s$  a *střední šířku kanálu*  $b_s$ .

$$\vec{w}_s = \frac{Q}{S_s}, \quad (5.38)$$

kde  $Q$  je průtok a  $S_s$  je střední průřez oběžným kolem.

$$r_s = \frac{D_0 + D_2}{4}, \quad (5.39)$$



kde  $D_0$  je průměr krycího disku a  $D_2$  je průměr nosného disku.

$$\beta_s = \frac{\beta_1 + \beta_3}{2}, \quad (5.40)$$

kde  $\beta_1$  je vstupní úhel kapaliny a  $\beta_3$  je výstupní úhel kapaliny.

$$b_s = \frac{b_1 + b_2}{2}, \quad (5.41)$$

kde  $b_1$  je šířka kanálu na vstupu a  $b_2$  je šířka kanálu na výstupu.

Pomocí těchto vztahů zadefinujme ještě *rozteč kanálu  $t$* , *střední průřez oběžným kolem  $S_s$* , *charakteristický rozměr lopatky  $q$*  a *délku lopatky  $L$* .

$$t = \frac{2\pi r_s}{z}, \quad (5.42)$$

kde  $r_s$  je střední poloměr kanálu a  $z$  je počet lopatek v oběžném kole.

$$S_s = b_s \cdot t, \quad (5.43)$$

kde  $b_s$  je střední šířka kanálu a  $t$  je rozteč kanálu.

$$q = \frac{2\pi r_s}{z} \cdot \sin(\beta_s) = t \cdot \sin(\beta_s), \quad (5.44)$$

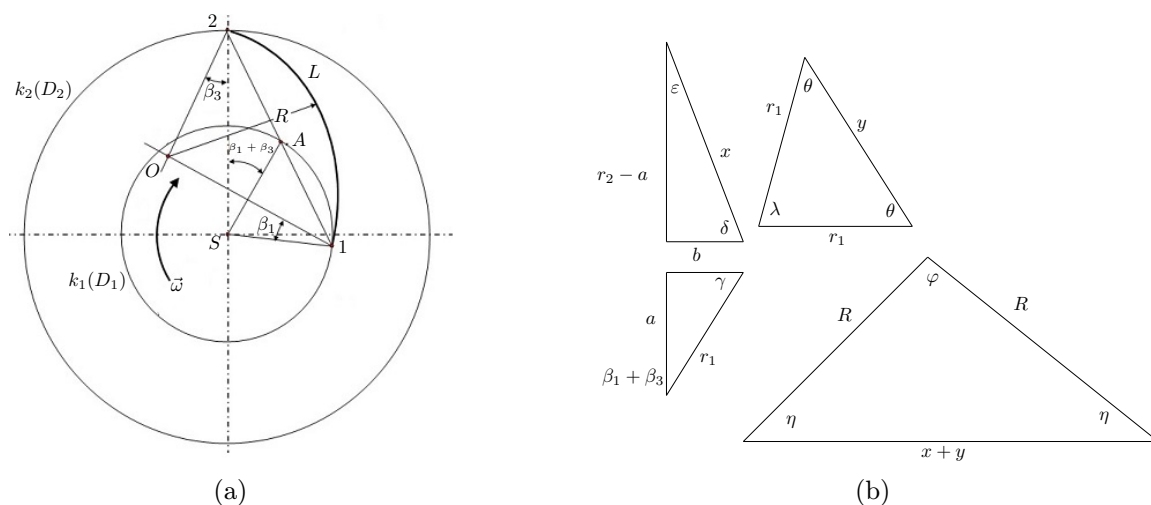
kde  $t$  je rozteč kanálu a  $\beta_s$  je střední úhel natočení kapaliny.

$$L = \varphi \cdot R, \quad (5.45)$$

kde  $\varphi$  je úhel opásání mezi body 1,2 a  $R$  je poloměr kružnice jimi procházející, viz obrázek (5.5).

Jak je vidět délku lopatky  $L$  jsme aproximovali obloukem, který je částí kružnice. Nyní si odvodíme číselné vyjádření délky tohoto oblouku a využijeme k tomu grafickou konstrukci.

### Konstrukce lopatky oběžného kola



Obrázek 5.5: (a) Konstrukce lopatky (b) Trojúhelníky k určení poloměru  $R$  lopatky

Postup při konstrukci je následující, sestrojme dvě soustředné kružnice  $k_2$  a  $k_1$  o průměrech  $D_2$  a  $D_1$  a v jejich středu  $S$  zavedme souřadný systém. Průnik osy  $y$  s kružnicí  $k_2$  označme jako bod 2 (výstup z kola). Ze středu  $S$  vedeme přímkou svírající s osou  $y$  úhel  $(\beta_1 + \beta_3)$ . Kde přímkou protne kružnici  $k_1$ , obdržíme bod  $A$ . Vedme polopřímku z bodu 2 bodem  $A$  a průnik s kružnicí  $k_1$  označme jako bod 1 (vstup do kola). Bod 1 spojíme se středem  $S$ . Bodem 1 dále proložíme přímkou, která svírá s úsečkou  $(S-1)$  úhel  $\beta_1$ . Z bodu 2 vedeme přímkou, která svírá s osou  $y$  úhel  $\beta_3$ . Průsečík této přímky s přímkou vedenou z bodu 1 pod úhlem  $\beta_1$ , označíme jako  $O$ . Tento průsečík je středem kružnice o poloměru  $R$ , která spojuje bod 1 a 2 a tím vytváří tvar lopatky.

Z obrázku (5.5 (a)) konstrukce lopatky vyjmeme několik trojúhelníků, viz (5.5 (b)), ze kterých pomocí obecných pravidel analytické geometrie vyjádříme poloměr  $R$  kružnice spojující body 1 a 2. Vyjádříme také úhel opásání  $\varphi$ .

$$R = \frac{x + y}{2 \cos(\eta)}, \quad (5.46)$$

$$\varphi = 180 - 2\eta, \quad (5.47)$$

pro naše hodnoty dostáváme

$$R = 62,27mm, \quad \varphi = 110^\circ. \quad (5.48)$$

Délka kanálu  $L$  je pak podle (5.45)

$$L = 119,54mm. \quad (5.49)$$

Pak podle (5.35) dostáváme měrnou ztrátovou energii na lopatkách

$$Y_{ylop} = 78,74J.kg^{-1}, \quad (5.50)$$

ze které pak pomocí (5.34) dostáváme ztrátový výkon na lopatkách

$$P_{zlop} = 2362,1W. \quad (5.51)$$

### 5.2.3 Celková ztráta třením

*Celkový ztrátový výkon* v oběžném kole je dán jako součet ztrátového výkonu na discích a lopatkách,

$$P_{zc} = P_{zlop} + P_{zcd} = 2362,1 + 367,57 = 2729,67W. \quad (5.52)$$

*Relativní ztráta* je pak daná podílem celkového ztrátového výkonu ku příkonu (4.10),

$$\nu = \frac{P_{zc}}{P_r} = \frac{2728,33}{13288,1} = 22,25\%. \quad (5.53)$$

## 5.3 Ukládání dat a rozbor výsledků

Nyní již máme spočtené veškeré rozměry a hodnoty ztrát v oběžném kole a zbývá se tedy podívat na poslední část, to jest, jak je v modelu řešeno průběžné ukládání vypočtených hodnot v prostředí Matlab, jejich rozbor a poté konečné uložení do nově vytvořených excelových souborů *testdata*, *testtabulka*.

### 5.3.1 Ukládání dat do Excelu

Jelikož je model řešen převážně pomocí *for* - cyklů, je potřeba vypočtené hodnoty ze svých proměnných průběžně ukládat, protože se tyto proměnné v každém následujícím opakování cyklu smažou a uloží se do nich hodnoty nové. Toto ukládání je řešeno pomocí matic *B* a *TAB*. Matice *B* má tři sloupce, do kterých ukládáme hodnoty vzdálenosti *S* disku od pevné stěny, celkového ztrátového výkonu  $P_{zc}$  a relativní diskové ztráty  $\nu$ . Počet řádků v matici je dán počtem opakování v cyklu. Průběžné hodnoty této matice jsou vypisovány na obrazovku v prostředí Matlab pomocí funkce *fprintf*. Po skončení *for* - cyklů je výsledná matice *B* uložena do excelového souboru *testdata*. Samotné uložení je realizováno pomocí Matlabovské funkce *xlswrite*, jejímiž parametry jsou název excelového souboru, do kterého se mají data uložit (v našem případě soubor *testdata*), oblast dat, která se má uložit (v našem případě matice *B*), název listu v excelovém souboru a první buňka do které se mají data začít ukládat. Podobně je řešeno uložení matice *TAB* do souboru *testtabulka*. Dále, ještě stále v prostředí Matlabu, je vytvořen *for* - cyklus pro pojmenování listů excelového souboru *testdata* a vytvoření hlavičky každého listu. Pojmenování listů je řešeno pomocí příkazů *ewb = e.Workbooks.Open(cesta k souboru)*, který otevře potřebný excelový soubor a pomocí *ewb.Worksheets.Item(m).Name = jmeno listu*, který přejmenuje *m*-tý list. Hlavička je vypsána pomocí již nám známé funkce *xlswrite*. Poté již v samotném excelu, jsou v každém listu k daným vypočteným hodnotám vytvořeny grafy.

### 5.3.2 Rozbor výsledků z Matlabu

Celkem jsme testovali 14 oběžných kol na 1 návrhový bod a pro dvě hodnoty drsností. Ze všech těchto vypočtených dat jsou nakonec vybrána optimální data, to jest ta data, která charakterizují oběžné kolo s nejmenším ztrátovým výkonem, viz obrázek (5.6). Toho je docíleno pomocí minimalizace účelové funkce a následnému zpětnému určení optimálních dat v prostředí Matlab. Tato výsledná data jsou opět vypsána na obrazovku.

---

```
z = 5.00          Beta2 = 35.00
S = 0.0018      Pzd = 367.5683    Pzlop = 2362.0989    Pzc = 2729.6673    ny = 22.25
S = 0.0020      Pzd = 368.7890    Pzlop = 2362.0989    Pzc = 2730.8879    ny = 22.26
S = 0.0030      Pzd = 374.2307    Pzlop = 2362.0989    Pzc = 2736.3297    ny = 22.31
S = 0.0040      Pzd = 378.5231    Pzlop = 2362.0989    Pzc = 2740.6220    ny = 22.34
S = 0.0050      Pzd = 382.1276    Pzlop = 2362.0989    Pzc = 2744.2265    ny = 22.37
S = 0.0060      Pzd = 385.2668    Pzlop = 2362.0989    Pzc = 2747.3658    ny = 22.40
S = 0.0070      Pzd = 388.0671    Pzlop = 2362.0989    Pzc = 2750.1660    ny = 22.42
S = 0.0080      Pzd = 390.6076    Pzlop = 2362.0989    Pzc = 2752.7065    ny = 22.44
S = 0.0090      Pzd = 392.9417    Pzlop = 2362.0989    Pzc = 2755.0406    ny = 22.46
S = 0.0100      Pzd = 395.1071    Pzlop = 2362.0989    Pzc = 2757.2060    ny = 22.48
-----
D2 = 0.1745      b2 = 0.0174      cm2 = 3.4079
D1 = 0.0769      b1 = 0.0350      cm1 = 4.7198
D0 = 0.1075      b0 = 0.0670      cm0 = 4.0118
Beta3 = 13.3004    L = 0.1195
```

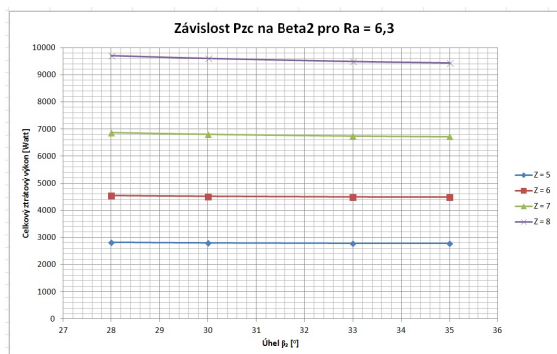
Obrázek 5.6: Výstup z matlabu

# Závěr

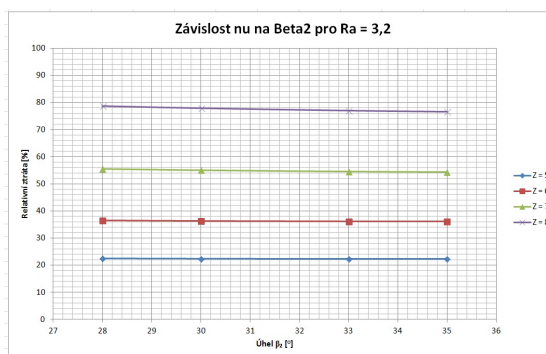
Cílem bakalářské práce bylo sestavení modelu, který provádí optimální návrhy oběžných kol pro zadané návrhové body. Pomocí tohoto modelu jsme zjistili optimální návrh oběžného kola pro čerpadlo *Beta16* na zadaný návrhový bod, viz kapitola[5]. Tímto návrhem je oběžné kolo s 5 lopatkami a úhlem natočení lopatek  $\beta_2 = 35^\circ$ .

Model nám ukázal na důležitost ztrát, jako je tření tekutiny o disky jak na vnitřní tak i vnější stěně oběžného kola, tzv. *diskové ztráty* nebo na *tření kapaliny o lopatky*. Ukázal také, že ztráty na lopatkách jsou řádově větší, než ztráty na discích, mají tedy větší váhu. Proto bychom čekali, že čím méně lopatek bude oběžné kolo obsahovat, tím menší budou ztráty. Není tomu tak, neboť v rozšiřujících se kanálech, které nejsou dostatečně zahlceny kapalinou, tzn. nemají dostatečný počet lopatek, vzniká tzv. *lokální vír*, který způsobuje ztráty vířením. Navíc také způsobí nežádoucí ohyb proudnic, který se projeví odklonem kapaliny od úhlu lopatek  $\beta_2$  na výstupu z oběžného kola. Nejvíce se s tímto jevem setkáváme u pomaloběžných hydrodynamických čerpadel  $n_s \in (35 \div 65)$ . U čerpadel s většími specifickými otáčkami  $n_s$  není vliv lokálního víru tak znatelný.

Model dále potvrdil, že pro nekonečný počet lopatek jsou diskové ztráty minimální a navíc podle teorie v oběžném kole nevzniká lokální vír. Nicméně tato volba není většinou možná, neboť při zvolení velkého počtu lopatek dochází k ucpání oběžného kola lopatkami v sacím prostoru. To můžeme demonstrovat opět pomocí modelu, kde se již pro 8 lopatek pohybuje relativní ztráta  $\nu$  okolo 80%, viz obrázek(5.7). Navíc ztráty třením na lopatkách jdou při velkém počtu lopatek do nekonečna.



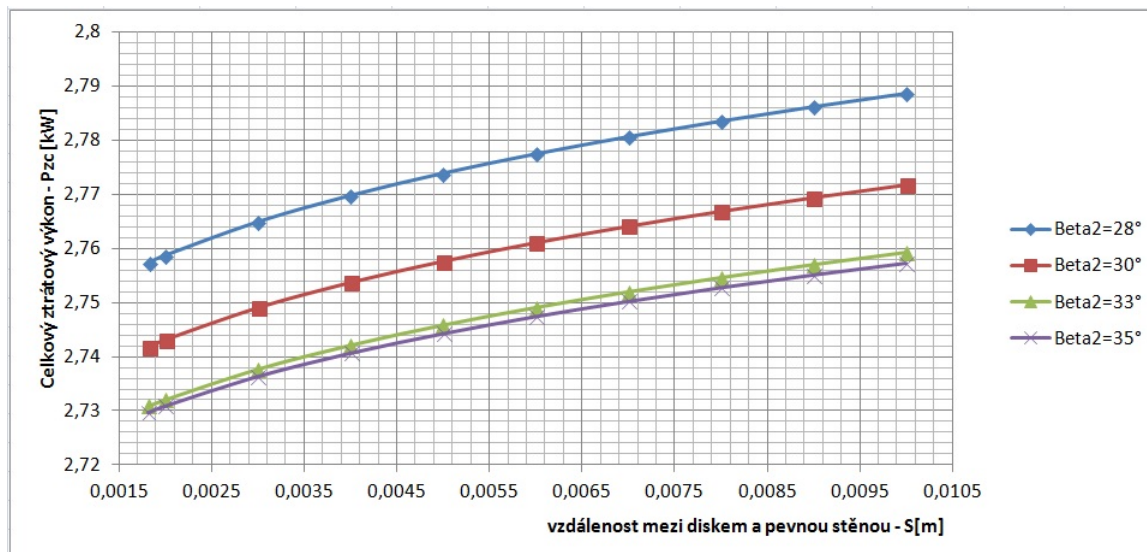
(a)



(b)

Obrázek 5.7: Grafy

Podařilo se nám také potvrdit statisticky zjištěný vzorec  $S_{opt} = \frac{2,97D_2}{2Re^{0,34}}$  pro optimální vzdálenost mezi diskem a pevnou stěnou, kdy mají být ztráty minimální. Tento závěr je vidět z grafů v souboru *testdata* nebo z obrázku (5.8).



Obrázek 5.8: Graf ztrátového výkonu na vzdálenosti mezi diskem a pevnou stěnou

Model lze dále rozšiřovat a zpřesňovat, kupříkladu zavedením lokálního víru do výpočtů. Při výpočtu celkového ztrátového výkonu se nám relativní ztráta  $\nu$  pohybuje okolo 22%. Celková účinnost  $\eta_c$  byla z Erhartova diagramu určena na 78%. Vidíme tedy, že rozdíl mezi teoreticky určenou účinností a účinností vypočtenou pomocí modelu, není téměř žádný, byť jsme pro softwarovou náročnost neuvažovali účinky lokálního víru. Tento rozdíl je tak malý díky tomu, že lokální vír je nezanedbatelný pouze pro menší počet lopatek. Pro 5 a více lopatek si ho můžeme dovolit zanedbat. Tím pádem můžeme model prohlásit za přesný s odchylkami do pár procent.

# Literatura

- [1] BLÁHA, K.; Brada, K.: *Příručka čerpací techniky*. Praha, ČVUT, 1997, ISBN: 80-01-01626-9
- [2] DRÁBKOVÁ, S. a kol.: *Mechanika tekutin*. Ostrava, VŠB – TUO, 2007, ISBN: 978-80-248-1508-4
- [3] HALUZA, M.: *Hydraulické stroje*. Brno, VUT [přednáška]
- [4] HALUZA, M.: *Studijní opory k předmětu Hydromechanika*. Brno, VUT, [přednáška]
- [5] HRIVŇÁK, D.: *Diferenciální operátory vektorové analýzy*. Ostrava, 2002.
- [6] ISH PUMPS OLOMOUC a.s.: *E catalog of pumps*.
- [7] JANÍČEK, P. a kol.: *Pružnost a Pevnost I*. 2. vyd., BRNO, VUT, 1992, ISBN: 80-21-40468-X
- [8] KLAPKA, J. a kol.: *Metody operačního výzkumu*. 2. vyd., Brno, VUT, 2000, ISBN: 80-214-0817-0
- [9] KUREŠ, M.: *Matematická analýza I*. Brno, VUT, 2011.
- [10] KUREŠ, M.: *Matematická analýza II*. Brno, VUT, 2008.
- [11] LAZARKIEWICZ, S.; TROSKOLANSKI, A.: *Impeller pumps*. Varšava, 1965.
- [12] PACIGA, A.; STRÝČEK, O.; GANČO, M.: *Čerpacia technika*. Bratislava, 1984.
- [13] SLOUPENSKÝ, Z.: *Návrh odstředivého čerpadla metodami diferenciální geometrie* [online]. Brno, 2011 [cit. 2014-03-29]. Dostupné z: [https://www.vutbr.cz/studium/zaverecne-prace?zp\\_id=41091](https://www.vutbr.cz/studium/zaverecne-prace?zp_id=41091). Disertační práce. VUT.
- [14] STRÝČEK, O.; GANČO, M.: *Čerpadlá (Konštrukcia a hydraulický výpočet)*. Bratislava, SVŠT, 1968.
- [15] STRÝČEK, O.: *Hydrodynamické čerpadlá*. Bratislava, SVŠT, 1988.
- [16] Wikipedia: Zdroj obrázků [online]. [cit. 2014-03-30]. Dostupné z: <http://en.wikipedia.org>

# Seznam příloh

## Totální diferenciál v 1D

$$\frac{d\vec{v}_x}{dt} = \frac{\partial \vec{v}_x}{\partial t} + \left( \frac{dx}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{v}_x}{\partial x} \right) + \left( \frac{dy}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{v}_x}{\partial y} \right) + \left( \frac{dz}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{v}_x}{\partial z} \right), \quad (5.54)$$

kde

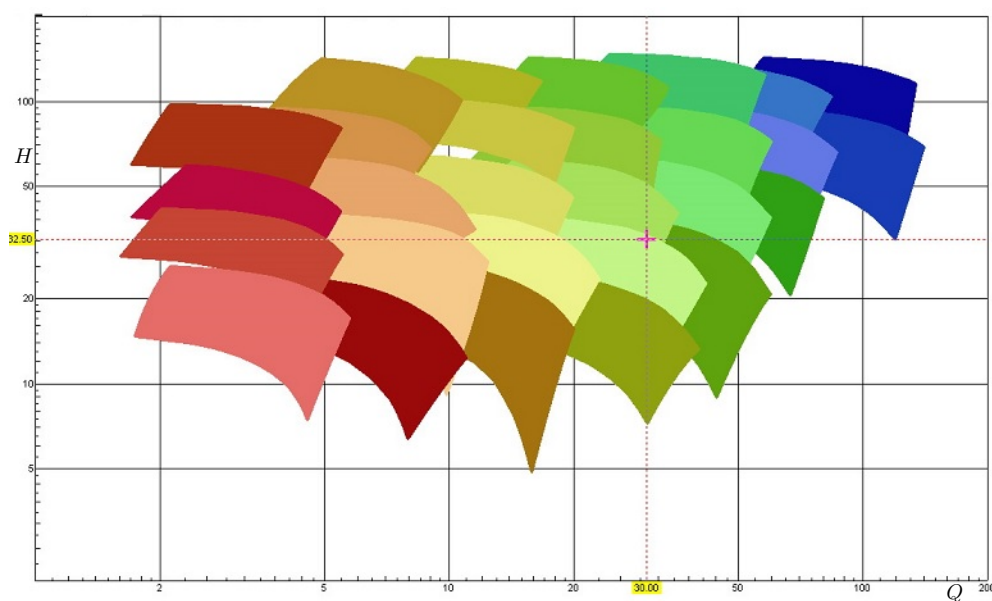
$$\vec{v}(x, y, z) = \left( \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right)$$

## Vektorový součin

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = (u_2 v_3 - u_3 v_2) \vec{i} + (u_3 v_1 - u_1 v_3) \vec{j} + (u_1 v_2 - u_2 v_1) \vec{k}, \quad (5.55)$$

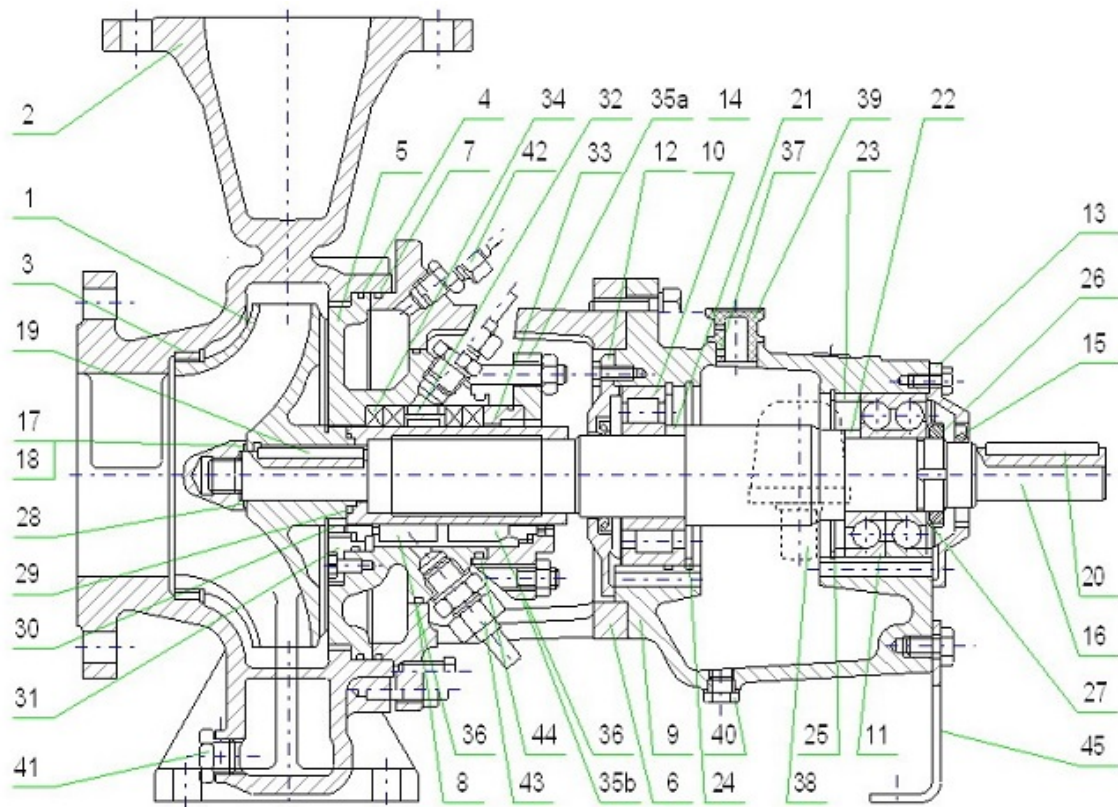
kde  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  jsou jednotkové vektory ve směru os kartézského souřadného systému a  $u_i, v_i$ , kde  $i = 1, 2, 3$  jsou složky vektorů  $\vec{u}, \vec{v}$ .

## Volba typu čerpadla



Obrázek 5.9: Volba typu čerpadla podle návrhového bodu, viz.[6]

Z obrázku vidíme, že máme použít čerpadlo Beta16



Obrázek 5.10: Řez čerpadlem Beta16, viz.[6]

## Zdrojový kód modelu v programu MATLAB

Na přiloženém CD.