



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A BIOMECHANIKY

INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND BIOMECHANICS

VYUŽITÍ METODY KONEČNÝCH PRVKŮ K URČOVÁNÍ NAPĚTÍ VE VRSTVÁCH PRO OPTICKÉ APLIKACE

USE OF FINITE ELEMENT METHOD FOR STRESS EVALUATION IN LAYERS FOR OPTICAL APPLICATIONS

DIPLOMOVÁ PRÁCE

MASTER'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Bc. Anežka Tesařová

VEDOUČÍ PRÁCE

SUPERVISOR

prof. Ing. Jiří Burša, Ph.D.

BRNO 2020

Zadání diplomové práce

Ústav:	Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky
Studentka:	Bc. Anežka Tesařová
Studijní program:	Aplikované vědy v inženýrství
Studijní obor:	Inženýrská mechanika a biomechanika
Vedoucí práce:	prof. Ing. Jiří Burša, Ph.D.
Akademický rok:	2019/20

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma diplomové práce:

Využití metody konečných prvků k určování napětí ve vrstvách pro optické aplikace

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Stanovení mechanického napětí v tenkých vrstvách pro optický průmysl nanesených na podložce je velmi významná úloha. Toto napětí může způsobovat trhliny v nanesených vrstvách, či jejich odlupování od podložek. Mění také strukturu energiového spektra elektronů v materiálu vrstev, a tím i hodnoty optických konstant těchto vrstev. To následně způsobuje odchylky od zamýšlené funkce optických prvků (antireflexní či vysoce odrazné vrstevnaté systémy). Mechanické napětí v tenkých optických vrstvách tedy snižuje kvalitu optických prvků, v nichž jsou vrstvy použity. Nejčastěji používaný nedestruktivní přístup k určení napěťového pole v celé ploše tenkých vrstev je založen na měření změny tvaru vhodné podložky způsobené nanesenou vrstvou a následném použití Stoneyovy formule. Tento přístup dává často jen nepřesné výsledky a v případě komplikovaných napěťových polí dokonce selhává. Je proto velmi žádoucí mít k dispozici přesnější a obecněji použitelný přístup, kterým je MKP modelování. Vytvořený model bude simulovat skutečnou deformaci soustavy vrstva–podložka pomocí nerovnoměrného teplotního zatížení. Nastavením směrově odlišných koeficientů teplotní roztažnosti pro anizotropní materiál vrstvy se dosáhne eliptického rozložení deformace, která odpovídá experimentu. Pro takovou deformaci se vyhodnotí velikosti složek napětí rozhodujících pro vznik mezního stavu (hlavní napětí, smykové napětí na rozhraní vrstev). Vzhledem k očekávané linearitě úlohy tím bude dána pro zvolenou míru anizotropie závislost mezi naměřenou deformací a napětím. Pro řešení úlohy bude k dispozici soubor digitálních map změny tvaru podložky po nanesení vrstvy.

Cíle diplomové práce:

Cílem práce je určit velikost složek mechanického napětí rozhodujících pro porušení ze změřeného pole deformace soustavy podložka–vrstva pro vybrané geometrické a materiálové kombinace vrstvy a podložky. Dále provést verifikaci použitého modelu pro případ izotropního materiálu porovnáním se Stoneyovou formulí.

Seznam doporučené literatury:

ABADIAS, Grégory, Eric CHASON, Jozef KECKES, et al. Review Article: Stress in thin films and coatings. Journal of Vacuum Science & Technology A: Vacuum, Surfaces, and Films [online]. 2018, 36(2). DOI: 10.1116/1.5011790. ISSN 0734-2101. Dostupné z: <http://avs.scitation.org/doi/10.1116/1.5011790>

THIELSCH, Roland, Alexandre GATTO a Norbert KAISER. Mechanical stress and thermal-elastic properties of oxide coatings for use in the deep-ultraviolet spectral region. Applied Optics [online]. 2002, 41(16). DOI: 10.1364/AO.41.003211. ISSN 0003-6935. Dostupné z: <https://www.osapublishing.org/abstract.cfm?URI=ao-41-16-3211>

OHLIDAL, Ivan, R. RODRIGUEZ-VERA, F. MENDOZA-SANTOYO, et al. Optical measurement of mechanical stresses in diamond-like carbon films [online]. In: 2005-2-14, s. 717- [cit. 2019-09-17]. DOI: 10.1117/12.611744. Dostupné z: <http://proceedings.spiedigitallibrary.org/proceeding.aspx?doi=10.1117/12.611744>

Termín odevzdání diplomové práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2019/20

V Brně, dne

L. S.

prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc.
ředitel ústavu

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.
děkan fakulty

Abstrakt

Tato práce se zabývá mechanickým napětím vznikajícím v tenkých vrstvách nanášených na podložku. Nanášení probíhá při vysokých teplotách a vlivem rozdílných teplotních roztažností materiálů dochází k deformaci vzorku, a tím i ke generování napětí. První část práce obsahuje odvození Stoneyho formule pro uniaxiální a biaxiální napětí ve vrstvě. Dále byly vypracovány analytické výpočty normálového napětí ve vrstvě pro zjednodušený případ prutu a smykového napětí na rozhraní vrstev. Hlavní část práce tvoří řešení problému pomocí MKP modelování. Protože reálné teplotní průběhy při nanášení vrstvy nebyly známy, bylo jako vstup použito fiktivní teplotní zatížení. Pro vzorky potom byly hledány takové hodnoty teplotní roztažnosti vrstvy, aby při daném teplotním zatížení výsledný průhyb odpovídal experimentálním datům. V práci byly vytvořeny tři typy modelů, a to model prutového tělesa, axisymetrický model a objemový model. Axisymetrický model sloužil pro výpočet vzorků tvořících kruhové izoliny při deformaci a objemový model pro vzorky tvořící eliptické izoliny. Výsledkem MKP výpočtů byla normálová napětí v nanesených vrstvách, pro které byly za pomoci regresní analýzy vytvořeny odpovídající vztahy.

Summary

This thesis is concerned with the mechanical stress generated in thin layers applied on a substrate. The application takes place at high temperatures and due to different coefficients of thermal expansion of materials, the sample is deformed, and thereby the stress is generated. The first part of the thesis includes the derivation of the Stoney formula for uniaxial and biaxial stress in a layer. Besides, analytical calculations of the normal stress in the layer for the simplified link model, and shear stress on the layer interface were evaluated. The main part of the work consists of solving the problem using FEM modeling. Because the actual temperature behavior during the application was not known, a fictitious temperature load was used as an input. For the samples, the coefficients of thermal expansion of the layer were then searched so that the thermal load resulting deflection corresponds to the experimental data. Three types of models were created, namely the link body model, the axisymmetric model, and the solid model. The axisymmetric model was used for the calculation of samples forming circular isolines during deformation and a volume model for samples forming elliptical isolines. The result of the FEM calculations was the normal stress in the applied layers, for which corresponding relationships were created using regression analysis.

Klíčová slova

MKP, tenká vrstva, normálové napětí, smykové napětí, Stoneyho formule

Keywords

FEM, thin layer, normal stress, shear stress, Stoney formula

TESAŘOVÁ, Anežka. *Využití metody konečných prvků k určování napětí ve vrstvách pro optické aplikace*. Brno, 2020, 70 s. Dostupné také z: <https://www.vutbr.cz/studenti/zav-prace/detail/124915>. Diplomová práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky. Vedoucí práce Jiří Burša.

Prohlašuji, že diplomovou práci s názvem *Využití metody konečných prvků k určování napětí ve vrstvách pro optické aplikace* jsem vypracovala samostatně pod vedením prof. Ing. Jiřího Burši, Ph.D. a všechny zdroje, použité při psaní práce, jsem uvedla v seznamu literatury.

V Brně dne 25. června 2020

Bc. Anežka Tesařová

Děkuji vedoucímu práce prof. Ing. Jiřímu Buršovi, Ph.D. za věcné rady a připomínky při psaní diplomové práce. Dále děkuji pracovníkům z Ústavu fyzikálního inženýrství prof. RNDr. Miloslavu Ohlídalovi, CSc. a Ing. Václavu Šulcovi za zasvěcení do problematiky a dodání potřebných materiálů k vypracování práce. A nakonec děkuji své rodině, příteli a přátelům za podporu při studiu.

Bc. Anežka Tesařová

Obsah

1	Úvod	3
2	Experimentální měření	4
2.1	Vzorky s kruhovými izoliniemi	8
2.2	Vzorky s eliptickými izoliniemi	9
2.3	Anizotropní vzorky se sedlovým bodem	10
3	Stoneyho formule	11
3.1	Stoneyho původní formulace napětí (1909)	11
3.2	Stoneyho formulace s uvažováním ekvibiaxiálního napětí	12
3.3	Úprava Stoneyho formule pro experimentální měření	13
4	Výpočet napětí pomocí prutové teorie	14
4.1	Výpočet napětí	14
4.1.1	Vliv excentricity na řešení	18
4.1.2	Vliv tuhosti nanesené vrstvy	21
4.2	Smykové napětí	22
4.3	Působení teplotní roztažnosti	24
5	MKP výpočet	25
5.1	MKP model prutového tělesa	25
5.1.1	Popis vstupů prutového MKP modelu	25
5.1.2	Vliv kombinace parametrů na výsledky	27
5.1.3	Kontrola hustoty sítě	28
5.1.4	Průhyb prutového tělesa	29
5.1.5	Přetvoření na prutovém tělese	29
5.1.6	Normálové napětí na prutovém tělese	30
5.1.7	Smykové napětí na rozhraní vrstev u prutového tělesa	31
5.2	MKP model axisymetrického tělesa	32
5.2.1	Průhyb axisymetrického tělesa	32
5.2.2	Normálové napětí na axisymetrickém tělese	33
5.2.3	Smykové napětí na rozhraní vrstev axisymetrického tělesa	34
5.2.4	Výsledky vzorků s kruhovými izoliniemi	34
5.2.5	Vliv materiálových charakteristik nanesené vrstvy	35
5.3	MKP model objemového tělesa	36
5.3.1	Popis vstupů objemového MKP modelu	36
5.3.2	Porovnání axisymetrického a objemového modelu tělesa	38
5.3.3	Průhyb objemového tělesa	40
5.3.4	Normálové napětí na objemovém tělese	41
5.3.5	Smykové napětí na rozhraní vrstev objemového tělesa	41
5.3.6	Výsledky vzorků s eliptickými izoliniemi	42
6	Vztahy pro výpočet napětí odpovídajících hodnotám MKP	44
6.1	Vztahy pro vzorky s kruhovými izoliniemi	44
6.2	Vztahy pro vzorky s eliptickými izoliniemi	45

OBSAH

7 Závěr	47
Literatura	49
Seznam použitých zkratek a symbolů	51
A Data kombinací dvojic parametrů	53
A.1 Prutové těleso	53
A.2 Axisymetrické těleso	54
B Data z regresní analýzy	55
C Validace průhybu vzorků s eliptickými izoliniemi	57

1 Úvod

V době psaní této diplomové práce probíhal na Ústavu fyzikálního inženýrství FSI VUT v Brně experimentální výzkum nanášení tenkých vrstev různých materiálů na podložku. Tloušťka vrstvy uvažovaná v diplomové práci se pohybovala v řádech mikrometrů až desítek nanometrů. Vzhledem k tomu, že vrstva byla velmi tenká, nešlo již uvažovat hodnoty materiálových charakteristik, naměřených na větších objemech. Pokud byly tyto charakteristiky vůbec známy.

Při chlazení vzorku po nanesení vrstvy docházelo k prohnutí podložky a tím i ke vzniku mechanického napětí, které může způsobovat trhliny ve vrstvě, případně může dojít k jejímu odlupování od podložky.

Pro výpočet napětí v tenkých vrstvách se nejčastěji využívá nedestruktivní přístup ve formě použití Stoneyho formule. Ta bývá aplikována na naměřené hodnoty změny tvaru podložky způsobené nanesenou vrstvou. Výsledky získané tímto přístupem ovšem bývají nepřesné a v případě komplikovaných napěťových polí jsou často nepoužitelné. Tento problém vede na použití i jiného přístupu pro ověření velikosti vzniklého napětí, jakým je například MKP modelování, což bylo podnětem k vytvoření této diplomové práce s následujícím obsahem.

V druhé kapitole je přiblížena geometrie vzorků a je vysvětleno, jakým způsobem byla zpracována experimentálně naměřená data a jejich rozdělení do tří základních skupin.

Třetí kapitola se zabývá Stoneyho formulí, přičemž nejprve je odvozena původní formule, která je následně doplněna pro případ ekvibiaxiálního napětí na vzorku.

Ve čtvrté kapitole je vzorek zjednodušen na prut s obdélníkovým průřezem, tvořeným podložkou a tenkou vrstvou. Pro takovýto model byl pomocí vzorců pružnosti a pevnosti odvozen vztah pro normálové napětí ve vrstvě a smykové napětí na rozhraní podložky a nanesené vrstvy. Zároveň byl zjišťován vliv posunu neutrální osy ohybu prutu a vliv tuhosti vrstvy na řešení.

Pátá kapitola se věnuje numerickému výpočtu napětí v programu Ansys. První je model prutového tělesa, pro který byly hledány takové hodnoty vstupních veličin, aby výsledný průhyb odpovídal experimentálním datům. Následně byl model rozšířen na axisymetrickou úlohu, která odpovídá výsledkům pro vzorek tvořený izotropním materiálem. Takovýto model ověřoval správnost dále vytvořeného objemového modelu a později na něj byly aplikovány anizotropní vlastnosti materiálu, které odpovídají experimentálně naměřeným eliptickým mapám průhybu.

V poslední, šesté, kapitole byla provedena analýza výsledků ze čtvrté kapitoly a pro stanovené skupiny vzorků byly pomocí regrese vypočteny vztahy pro jednotlivá napětí.

Cíle diplomové práce

- Určení velikosti složek mechanického napětí rozhodujících při porušení. Napětí bude určováno ze změřeného pole deformace pro vybrané geometrické a materiálové kombinace vrstvy a podložky.
- Verifikace použitého modelu pro případ izotropního materiálu porovnáním se Stoneyho formulí.

2 Experimentální měření

Experimentální data dodal ÚFI FSI VUT v podobě digitálních map průhybů naměřených pomocí optického profilometru [1]. Hodnoty průhybů byly z naměřených dat získány pomocí programu Gwyddion, a dále zpracovávány v programech Matlab a Excel.

Jak bylo obecněji zmíněno v [2], kruhové podložky byly zhotoveny z materiálu Corning 7980 (nekrystalické křemičité sklo s vysokou čistotou; materiálový list k nalezení v [3]) s průměrem l_0 a tloušťkou h_1 .

$$l_0 = 25 \text{ mm} \quad (2.1)$$

Tloušťka podložky byla naměřena pomocí střední hodnoty a standardní nejistoty jako $h_1 = (252,78 \pm 1,02) \mu\text{m}$, což bylo zjednodušeno na (2.2) a hodnota byla dále považována za deterministickou.

$$h_1 = 250 \mu\text{m} \quad (2.2)$$

Následně byla na podložky nanášena tenká vrstva oxidu hafničitého HfO_2 (více informací k nalezení v [4]). Jeho materiálové charakteristiky ovšem mohly být odlišné od uvedených v [4] z důvodu malé tloušťky vrstvy h_2 .

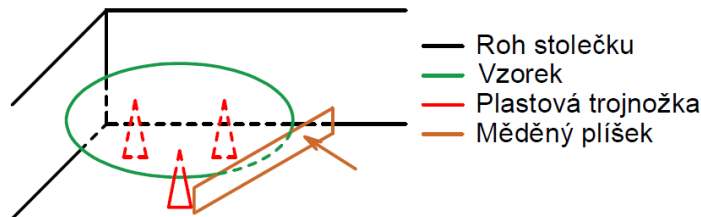
Nanášené tloušťky vrstev byly sepsány v tabulce 2.1 současně s relativní odchylkou od střední hodnoty tloušťky (rovnice 2.3). V závislosti na velikosti relativní odchylky byly tloušťky vrstev h_2 zjednodušeny na celé hodnoty uvedené v prvním sloupci tabulky 2.1, a byly dále považovány za deterministické.

$$\delta_{h_2} = 100 \left| \frac{E(h_2) - h_2}{h_2} \right| \quad (2.3)$$

Tabulka 2.1: Nanášené tloušťky vrstev h_2 .

h_2 [nm]	$E(h_2)$ [nm]	δ_{h_2} [%]
20	20,8	4,0
100	103,4	3,4
242	246,2	1,7
300	304,8	1,6
600	nebyly určeny optické konstanty	–
1200	nebyly určeny optické konstanty	–

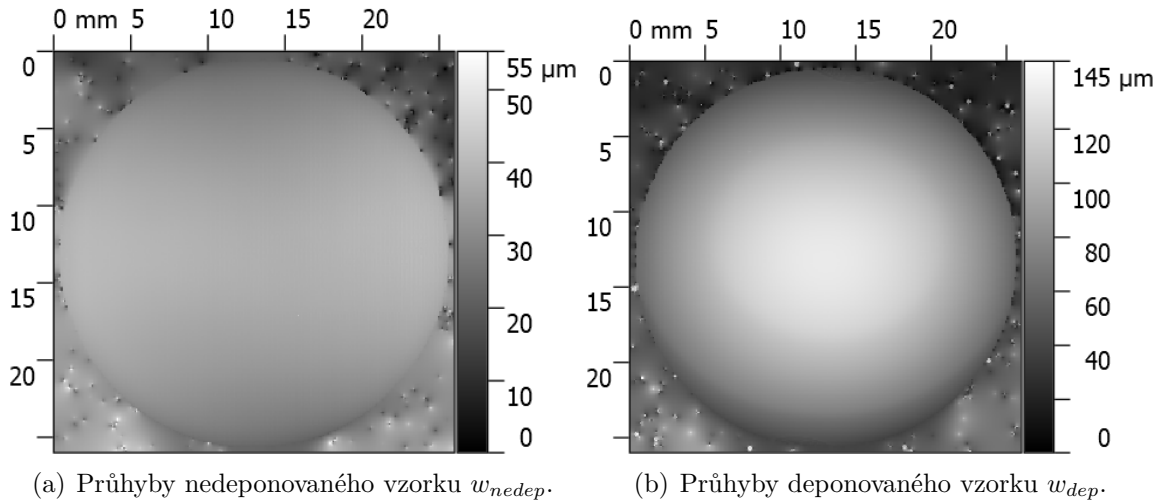
Nanášení probíhalo při teplotě 150°C . Důležitá je také rychlost nanášení vrstvy na podložku, která se obecně pohybuje v rozmezí $0,2 - 0,6 \text{ nm/s}$ a u použitých vzorků odpovídala hodnotě $\nu = 0,5 \text{ nm/s}$.



Obrázek 2.1: Upevnění vzorku na stolku pro měření průhybů.

Pro měření relativních průhybů byly vzorky upevňovány na stoleček, kde byly pokládány na plastovou trojnožku. Neměnná poloha pro měření byla zajištěna měděným plátkem tlačícím na hranu vzorku, který tak udržoval vzorek v rožku (obrázek 2.1).

Nejprve byly změřeny relativní průhyby na podložkách w_{nedep} (obrázek 2.2a), které vznikly při výrobě a pro účely diplomové práce nebyly podstatné. Po nanesení vrstvy byly relativní průhyby vzorku změřeny znovu w_{dep} (obrázek 2.2b).

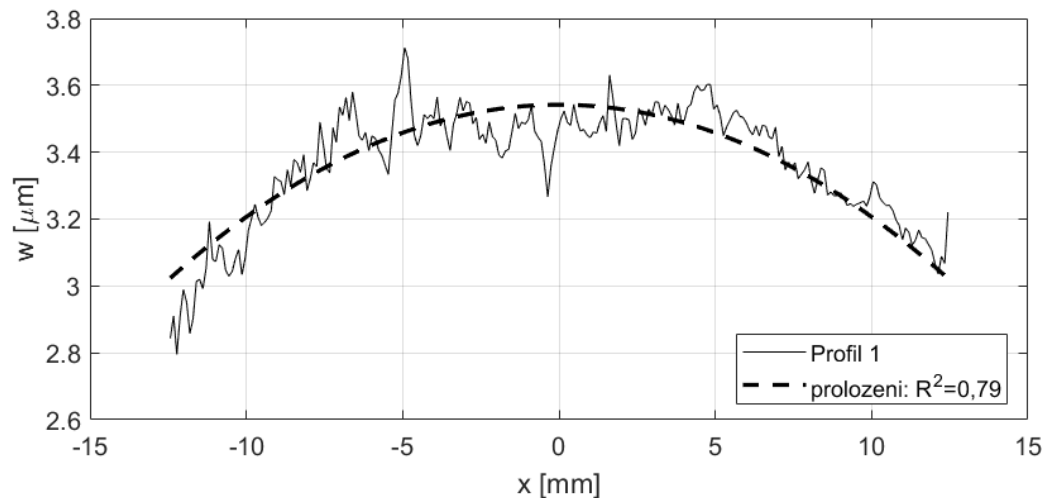


Obrázek 2.2: Mapy průhybů experimentálního vzorku č. 32.

Výsledné relativní průhyby byly potom rozdílem obou naměřených hodnot.

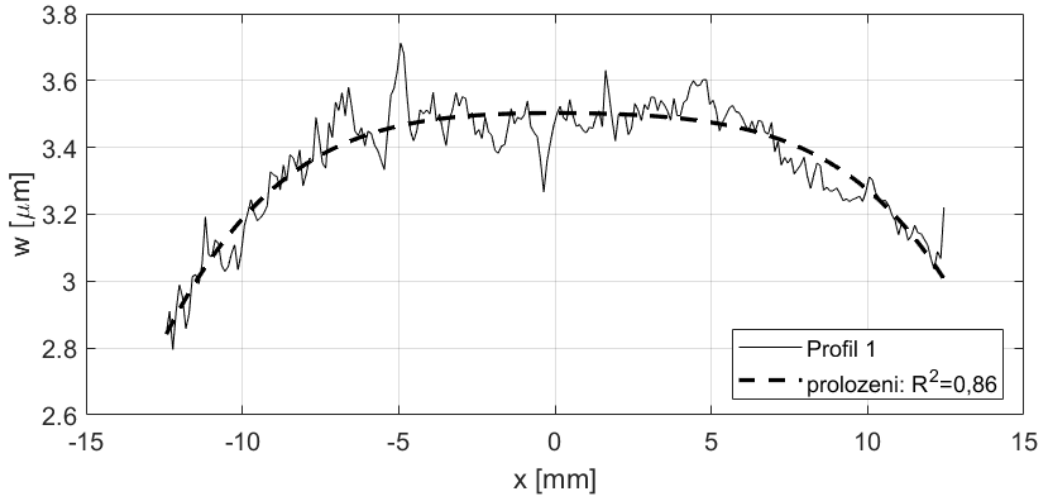
$$w_{exp} = w_{dep} - w_{nedep} \quad (2.4)$$

Po vyhlazení dat v oblasti kolem vzorku byl zjištěn konečný tvar průhybu vrstvy. Hodnoty průhybů byly ovšem stále relativní, protože okraje vrstvy neležely v nule. K jejich určení byla data vyexportována do programu Matlab, kde byly provedeny konečné úpravy, jako je vynulování oblasti mimo plochu vzorku, posuv dat do nulové hladiny a filtrace dat z některých vzorků za účelem získání hodnoty maximálního průhybu w_{max} a zjištění velikosti poloměrů křivosti R_1 a R_2 .



Obrázek 2.3: Vzorek č. 8 s průhybem odpovídajícím polynomické křivce 2. řádu.

Maximální průhyb w_{max} v programu Maltab se ze vzorků se silnější vrstvou dal zjistit buď přímo z dodaných dat, nebo s odfiltrováním největších lokálních maxim na vzorcích. U vzorků se slabší nanosenou vrstvou $h_2 \in \{20; 100\} \text{ nm}$ byly hodnoty průhybů prokládány polynomicou křivkou druhého řádu a až odtud byly získávány hodnoty maximálního průhybu w_{max} . Deformace u naprosté většiny vzorků polynomu druhého řádu odpovídala, ovšem průhyby několika málo vzorků odpovídaly spíše polynomu čtvrtého řádu. Jedním z nich byl vzorek č. 8, jehož proložení dat je na obrázcích 2.3 a 2.4. Byly na nich uvedeny i koeficienty determinace jednotlivých proložení, ze kterých vyplynulo, že konkrétně u tohoto vzorku průhybu lépe odpovídal polynom čtvrtého řádu.



Obrázek 2.4: Vzorek č. 8 s průhybem odpovídajícím polynomicke křivce 4. řádu.

Případy s neparabolickým průhybem byly spíše výjimkou a objevovaly se pouze u některých vzorků s tenkou nanosenou vrstvou ($h_2 = 20$, příp. 100 nm). Proto i u nich byl uvažován parabolický průhyb.

U všech vzorků byl naměřen ideální maximální průhyb téměř ve středu vzorku. Relativní odchylka středu vzorku, vypočtená podle vztahu 2.5, se pohybovala v rozmezí $\delta_{S_0} = \langle 0, 11; 1, 16 \rangle \%$. Tato odchylka byla tedy vyhodnocena jako zanedbatelná.

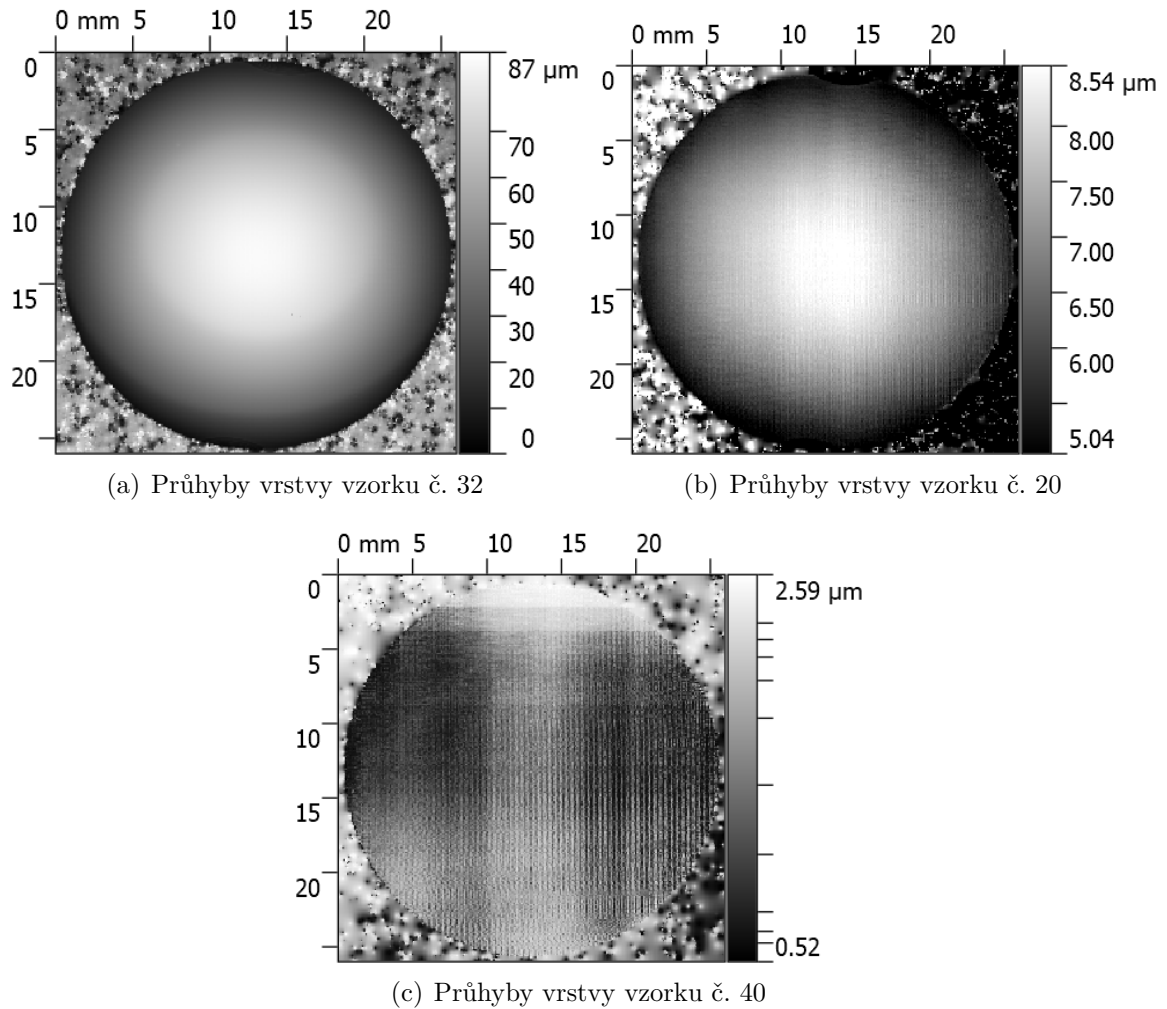
$$\delta_{S_0} = 100 \frac{\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}, \quad (2.5)$$

kde x_1, y_1 jsou souřadnice ideálního středu a x_0, y_0 jsou naměřené souřadnice středu vzorku.

Dále byly kontrolovány úhly natočení dvou významných směrů vypočtených programem Gwyddion, odkud bylo zjištěno, že všechny vzorky mají vzájemné natočení směrů o 90° s maximální odchylkou 1° . Odchylka byla považována za zanedbatelnou a deformace vzorků tedy byla uvažována jako středově souměrná.

Vzorky byly rozděleny podle typu chování do tří skupin. Některé vzorky při měření průhybů odpovídaly téměř izotropnímu chování (obrázek 2.5a). Jiné vzorky, především ty s tenčí vrstvou, vykazovaly jistou míru anizotropie a jejich izočáry netvořily kružnice, ale elipsy (obrázek 2.5b). Vzorky s nejtenčími vrstvami potom měly většinou jeden z poloměrů křivosti s opačným znaménkem (obrázek 2.5c) a v jejich středu tedy vznikala sedlová bod.

To, jestli mohl být vzorek zjednodušen na izotropní případ s kruhovými izoliniemi, bylo rozhodnuto podle relativní odchylky velikostí poloměrů křivosti vzorku R_1 a R_2 , kdy



Obrázek 2.5: Mapy průhybů vybraných experimentálních vzorků.

vždy platilo, že $|R_1| < |R_2|$. Vzorky byly takto testovány pro hodnoty poloměrů křivosti z programu Gwyddion i pro poloměry křivosti spočtené z maximálního průhybu vzorku w_{max} zjištěného Matlabem. Vzorky s relativní odchylkou menší než 10 % (2.6) pro alespoň jednu z formulací byly uznány jako izotropní.

$$\delta_R = 100 \left| \frac{R_1 - R_2}{R_1} \right| \quad (2.6)$$

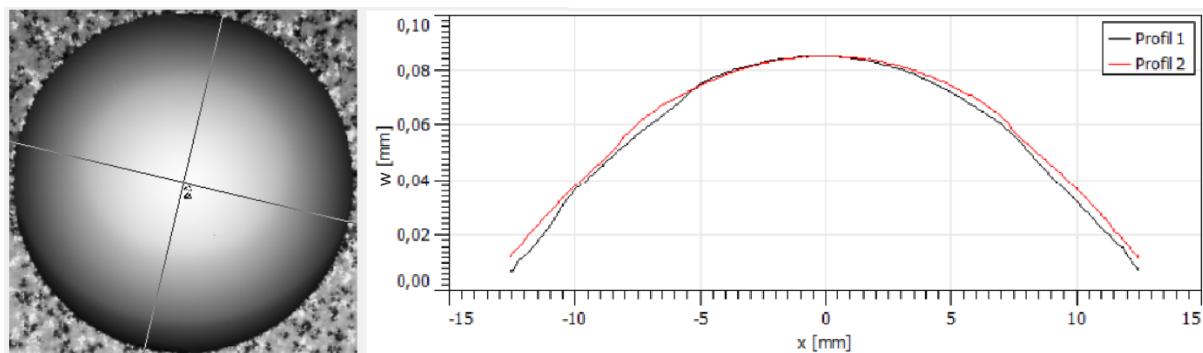
2.1 Vzorky s kruhovými izoliniemi

Jak již bylo zmíněno, z celého souboru byly vyčleněny vzorky, které se deformovaly do tvaru ideálního kulového vrchlíku, a měly tedy kruhové izolinie. Hranice, kdy byly vzorky uznány jako takto izotropní, byla určena pomocí relativní odchyšky poloměrů křivosti δ_R (2.6), která byla menší než 10 %. V tomto případě byly jako rozhodující použity poloměry křivosti R_1 , které byly menší oproti R_2 a odpovídaly tedy většímu průhybu vzorku. Dále bylo používáno souhrnné označení poloměru křivosti $R = R_1$. Vyhovující vzorky byly i s dalšími charakteristikami zapsány v tabulce 2.2.

Tabulka 2.2: Seznam vzorků s kruhovými izoliniemi.

Číslo vzorku	h_2 [nm]	w_{max} [mm]	R [mm]
16	242	0,0020	-39063
17	242	0,0024	-32552
19	300	0,0029	-26940
22	300	0,0036	-21701
24	300	0,0031	-25202
25	600	0,0142	-5502
26	600	0,0173	-4516
27	600	0,0179	-4365
28	600	0,0183	-4269
29	600	0,0182	-4293
30	600	0,0157	-4976
31	1200	0,0673	-1161
32	1200	0,0783	-998
33	1200	0,0825	-947
34	1200	0,0767	-1019
35	1200	0,0815	-959
36	1200	0,0683	-1144

Vzorek č. 32 byl vybrán jako reprezentativní pro tuto skupinu. Relativní hodnoty průhybů podél dvou vzájemně kolmých směrů, které byly naměřeny programem Gwyddion byly znázorněny na obrázku 2.6. Na tomto vzorku byly v kapitole 5.1 demonstrovány výsledky.



Obrázek 2.6: Výsledný průhyb nanosené vrstvy vzorku č. 32 s okolím (Gwyddion).

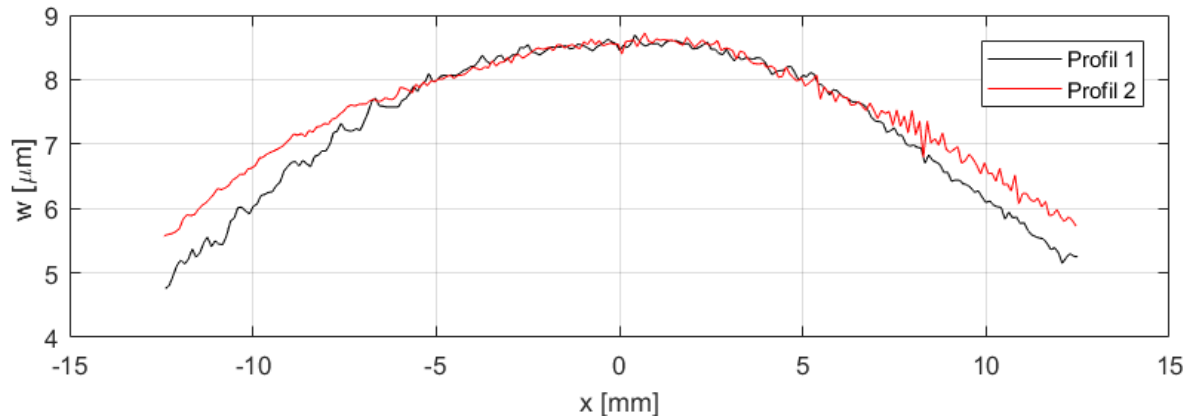
2.2 Vzorky s eliptickými izoliniemi

Vzorky, které nespádaly do předchozí kapitoly 2.1 a zároveň se jejich poloměry křivosti hlavních os nelišily ve znaménku, byly klasifikovány jako vzorky s eliptickými izoliniemi. Seznam těchto vzorků byl zapsán v tabulce 2.3, kde δ_R značí relativní odchylku poloměrů křivosti spočtených po úpravě dat v Matlabu.

Tabulka 2.3: Seznam vzorků s eliptickými izoliniemi.

Číslo vzorku	h_2 [nm]	$w_{max,1}$ [mm]	$w_{max,2}$ [mm]	R_1 [mm]	R_2 [mm]	δ_R [%]
6	20	$-1,70E-04$	$-1,53E-04$	-459559	-510621	11
7	100	$-6,20E-04$	$-4,90E-04$	-126008	-159439	27
8	100	$-5,50E-04$	$-4,80E-04$	-142045	-162760	15
9	100	$-1,00E-03$	$-9,00E-05$	-78125	-868056	1011
10	100	$-5,50E-04$	$-4,73E-04$	-142045	-165169	16
11	100	$-6,80E-04$	$-3,50E-04$	-114890	-223214	94
13	242	-0,0022	-0,0017	-35511	-45956	29
14	242	-0,0036	-0,0016	-21701	-48828	125
15	242	-0,0032	-0,0007	-24414	-111607	357
18	242	-0,0023	-0,0017	-33967	-45956	35
20	300	-0,0038	-0,0030	-20559	-26042	27
21	300	-0,0042	-0,0030	-18601	-26042	40
23	300	-0,0080	-0,0042	-9766	-18601	90

Jako reprezentativní vzorek z této kategorie byl vybrán vzorek č. 20, který je znázorněn na obrázku 2.5b. Jeho průhyby v hlavních směrech jsou potom naznačeny v grafu na obrázku 2.7. Vzorek bude dále použit v kapitole 5.3 pro demonstraci výsledků.



Obrázek 2.7: Průhyby hlavních os vzorku č. 20 s okolím naměřené programem Gwyddion.

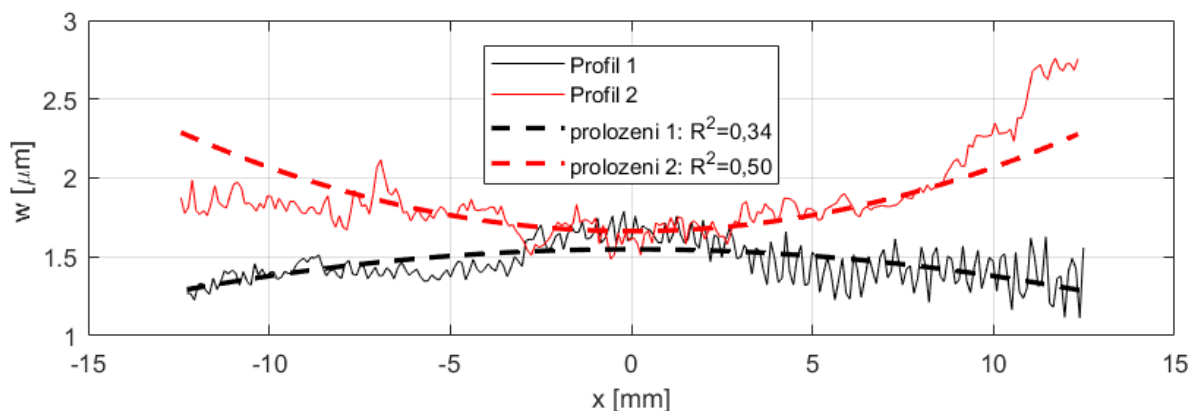
2.3 Anizotropní vzorky se sedlovým bodem

Poslední skupinou vzorků byly anizotropní případy s rozdílným znaménkem poloměru křivosti na hlavních osách. Na takovýchto vzorcích se po nanesení vrstvy ve středu vytvořil sedlový bod. Tento případ se týkal pouze vzorků s tloušťkou vrstvy $h_2 = 20; 100 \text{ nm}$, kde docházelo k velmi malým průhybům (řádově 10^{-4} mm). Z toho důvodu mohlo při měření docházet k velkým relativním chybám, a potom bylo i velmi obtížné průhyby na vzorcích správně vyhodnotit. V tabulce 2.4 je seznam vzorků, které by podle dat odečtených z programu Gwyddion mohly spadat do této skupiny.

Tabulka 2.4: Seznam vzorků se sedlovým bodem.

Číslo vzorku	h_2 [nm]	$w_{max,1}$ [mm]	$w_{max,2}$ [mm]	R_1 [mm]	R_2 [mm]	δ_R [%]
1	20	$-2,00E-04$	$1,40E-04$	$-3,91E+05$	$5,58E+05$	243
2	20	$-8,00E-05$	$2,60E-05$	$-9,77E+05$	$3,00E+06$	408
3	20	$-1,70E-04$	$3,60E-06$	$-4,60E+05$	$2,17E+07$	4822
4	20	$-3,43E-04$	$5,80E-05$	$-2,28E+05$	$1,35E+06$	691
40	20	$-2,67E-04$	$1,18E-03$	$-2,93E+05$	$6,60E+04$	123
12	100	$-1,80E-03$	$5,90E-04$	$-4,34E+04$	$1,32E+05$	405

Jak již bylo zmíněno, z důvodu velkého šumu dat bylo obtížné vyhodnotit jejich správnost. Jedním ze vzorků odpovídajících teorii by ovšem měl být vzorek č. 40, jehož průhyby byl zobrazen na obrázku 2.5c. Jeho průhyby v hlavních směrech byly potom v grafu na obrázku 2.8, kde byly okem viditelné obrácené hodnoty poloměru křivosti R .



Obrázek 2.8: Průhyby hlavních os vzorku č. 40 s okolím naměřené programem Gwyddion.

U reprezentativního vzorku č. 40 byly i přes šum znatelné průhyby. V případě ostatních vzorků spadajících do této skupiny byly průhyby $w_{max,i}$ ještě menší. Velikost šumu zde potom přesahovala velikost průhybu a čtení dat tím bylo velice omezeno. To dokazovala i malá velikost koeficientů determinace R^2 , které byly spočteny pro vzorek č. 40 na obrázku 2.8. Z toho důvodu nebyly vzorky spadající do této skupiny vyhodnocovány pomocí MKP.

3 Stoneyho formule

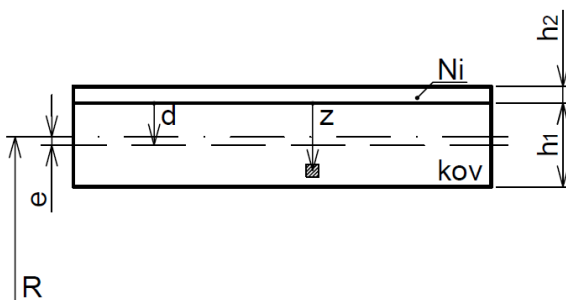
Stoneyho formule je používána pro vyjádření napětí v tenkém filmu. Vztah byl vyjádřen Georgem Geraldem Stoneyem v roce 1909 pro izotropní materiál podložky a jednoosé napětí (3.8). Dále byly vyjádřeny vztahy pro působení rovnoměrného dvouosého napětí pro izotropní (3.15) a anizotropní materiál podložky. Formule pro anizotropní podložku používá pro výpočet prvky matice poddajnosti S_{ij} [5], ovšem nebyla zde uvedena.

Pro výpočet bylo předpokládáno, že výsledné napětí σ_2 je průměrné napětí v tenké vrstvě [6].

$$\sigma_2 = \frac{1}{h_2} \int_0^{h_2} \sigma_{xx}(z) dz \quad (3.1)$$

3.1 Stoneyho původní formulace napětí (1909)

Stoney ve své práci [7] uvažoval kovovou destičku $102 \times 12 \times 0,32 \text{ mm}$, na kterou byla nanášena tenká vrstva niklu (obrázek 3.1). Tato vrstva byla schopná ohnout kovovou podložku v podélném směru. Ze znalosti ohybu a šířky nanášené vrstvy bylo možné dopočítat napětí, které při nanášení vzniklo.



Obrázek 3.1: Obdélníkový průřez Stoneyho vzorku.

Výchozím vztahem pro výpočet napětí byla silová rovnováha mezi podložkou a nanášenou vrstvou.

$$\int_{h_2}^0 F_2 dz = \int_{h_1}^0 F_1 dz \quad (3.2)$$

Při uvažování jednotkové plochy, na kterou síla působí, bylo odvozeno napětí.

$$\int_{h_2}^0 \sigma_2 dz = \int_{h_1}^0 \sigma_1 dz \quad (3.3)$$

Potom, za předpokladu rovnoměrného napětí zmíněného v (3.1), platilo

$$\sigma_2 h_2 = \int_{h_1}^0 \frac{M_{oy}}{J_y} z dz \quad (3.4)$$

$$\sigma_2 h_2 = \int_{h_1}^0 \frac{E_1}{R} (d - z) dz \quad (3.5)$$

$$\sigma_2 h_2 = \frac{E_1}{R} \left(dh_1 - \frac{h_1^2}{2} \right) \quad (3.6)$$

3.2 STONEYHO FORMULACE S UVAŽOVÁNÍM EKVIBIAXIÁLNÍHO NAPĚTÍ

Dále bylo použito Stoneyho vyjádření posunu neutrální plochy e , který byl odvozen v podkapitole 4.1.1. Z něj vyplývalo, že $d = \frac{2}{3}h_1$.

$$\sigma_2 h_2 = \frac{E_1 h_1^2}{6R} \quad (3.7)$$

Odtud byla vyjádřena konečná formule pro napětí od Stoneyho.

$$\sigma_2 = \frac{E_1 h_1^2}{6R h_2}, \quad (3.8)$$

kde σ_2 je napětí ve vrstvě, E_1 je Youngův modul pružnosti v tahu podložky, h_1 je tloušťka podložky a h_2 je tloušťka nanesené vrstvy.

Správnost formule byla omezena předpokladem, že nanesená vrstva je velmi tenká a že vlastnosti vrstvy jsou podobné vlastnostem podložky, a tím pádem jsou jejich moduly pružnosti totožné ($E_1 = E_2$).

Pro jakoukoliv tloušťku vrstvy h_2 Stoney uvedl následující vztah.

$$\sigma_h = \frac{E_1 h_1^2 + h_1 h_2}{6R h_2} \quad (3.9)$$

3.2 Stoneyho formulace s uvažováním ekvibiaxiálního napětí

V původní Stoneyho formulaci bylo uvažováno jednoosé napětí. Později se ale ukázalo [5], že s ohledem na délku pásu, je jeho šířka znatelně větší než tloušťka nanesené vrstvy h_2 . Proto je napětí σ_2 ve vrstvě biaxiální a platí

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} \sigma_2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

Místo modulu pružnosti E se potom uvádí biaxiální modul E' , jehož odvození je pro $\sigma_x = \sigma_y \neq 0$ a $\sigma_z = 0$ následující.

$$\varepsilon_x E = \sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z) \quad (3.11)$$

$$\varepsilon_x E = \sigma_x(1 - \mu) \quad (3.12)$$

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \mu} \varepsilon_x \quad (3.13)$$

Proto

$$E' = \frac{E}{1 - \mu}, \quad (3.14)$$

kde E je Youngův modul pružnosti v tahu a μ je Poissonovo číslo. Stoneyho formule pro ekvibiaxiální napětí a izotropní materiál podložky má pak tvar

$$\sigma_2 = \frac{E_1 h_1^2}{6(1 - \mu_1)R h_2} \quad (3.15)$$

3.3 Úprava Stoneyho formule pro experimentální měření

Vzhledem k tomu, že při experimentu bylo prováděno dvojí měření průhybů, a tedy i dvojí měření křivosti vzorku (před a po deponaci), bylo nutné použít obměnu Stoneyho formule podle [8]. Hodnotu křivosti $1/R$ zde nahrazuje rozdíl křivostí před a po deponaci, což vyjadřuje případ, kdy se podložka ještě před deponací vrstvy zdeformuje.

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_{dep}} - \frac{1}{R_{nedep}}, \quad (3.16)$$

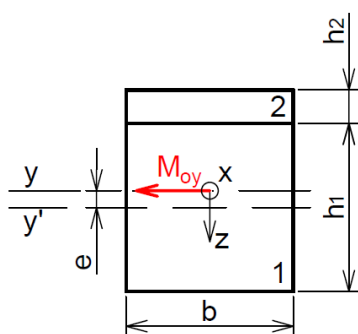
kde R_{dep} je poloměr křivosti deponovaného vzorku a R_{nedep} je poloměr křivosti nedeponovaného vzorku.

4 Výpočet napětí pomocí prutové teorie

Aby bylo možné kontrolovat věrohodnost výsledků získaných MKP a Stoneyho přístupem, byla použita teorie o tenkých vrstvách [9]. Pro číselnou interpretaci problému byl použit vzorek č. 32.

Pro výpočet napětí byl použit ohybový moment M_{oy} , který byl inverzně dopočítán ze znalosti poloměru křivosti R vzorku. Poloměr křivosti byl spočten pomocí odvozené rovnice pro maximální průhyb, přičemž hodnoty průhybů jsou známé.

V prvním kroce byl model desky zjednodušen na prut s obdélníkovým průřezem (obrázek 4.1), stejně jako uvažoval Stoney. Zde byly známé materiálové charakteristiky podložky (E_1, μ_1, α_1), tloušťky vrstev (h_1, h_2), délka vzorku (l_0) a průhyb vzorku (w).



Obrázek 4.1: Obdélníkový průřez uvažovaného prutu.

4.1 Výpočet napětí

Jak bylo zmíněno dříve, pro výpočet napětí bylo nutné nejdříve určit průhyb prutu. Při zjišťování průhybu byl uvažován prut zatížený dvojicí momentů na okrajích, který zaručuje konstantní ohybový moment M_{oy} po celé délce prutu (obrázek 4.2).



Obrázek 4.2: Prut zatížený dvojicí momentů s průběhem ohybového momentu M_{oy} .

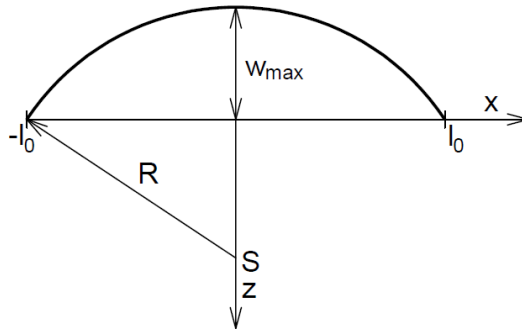
Pro výpočet na prutu byl použit průřez s největším průhybem w_{max} . Z Pythagorovy věty podle obrázku 4.3 byl dále dopočítán poloměr křivosti.

$$R^2 = \left(\frac{l_0}{2}\right)^2 + (R - w_{max})^2 \quad (4.1)$$

jako

$$R = \frac{l_0^2 + 4w_{max}^2}{8w_{max}}, \quad (4.2)$$

kde w_{max} je maximální průhyb a l_0 délka vzorku.


 Obrázek 4.3: Průhyb prutu s poloměrem křivosti R .

Díky poloměru křivosti R bylo možné dopočítat hodnotu ohybového momentu M_{oy} pomocí vztahu z pružnosti a pevnosti [10]

$$\frac{1}{R} = -\frac{M_{oy}}{\sum E_i J'_{yi}} \quad (4.3)$$

jako

$$M_{oy} = -\frac{\sum E_i J'_{yi}}{R}, \quad (4.4)$$

kde M_{oy} je ohybový moment, E_i je Youngův modul pružnosti v tahu vrstvy, J'_{yi} je kvadratický moment vrstvy vyjádřený k neutrální ose y' a R je poloměr křivosti. Jmenovatel $\sum E_i J'_{yi}$ zde byl vyjádřen ze zdroje [9] a před zlomkem se nachází minus z důvodu opačné orientace poloměru křivosti R oproti ose z . Pro kvadratické momenty J'_{yi} podle [9] platí

$$J'_{y1} = \frac{1}{12}bh_1^3 + bh_1 \left(\frac{h_2}{2} - e \right)^2, \quad (4.5)$$

$$J'_{y2} = \frac{1}{12}bh_2^3 + bh_2 \left(\frac{h_1}{2} + e \right)^2, \quad (4.6)$$

kde b je tloušťka prutu a e je posuv neutrální osy (excentricita) naznačený na obrázku 4.1. V podkapitole 4.1.1 byl dále rozebrán celkový vliv excentricity na řešení a v podkapitole 4.1.2 byl zhodnocen vliv tuhosti vrstvy.

Pro ověření experimentálních hodnot byly analyticky určeny průhyby w_a pomocí vyjádření rovnice průhybu prutu pro malé deformace [10].

$$w''_a = -\frac{M_{oy}}{\sum E_i J'_{yi}} \quad (4.7)$$

$$w'_a = -\frac{M_{oy}}{\sum E_i J'_{yi}}x - c_1 \quad (4.8)$$

$$w_a = -\frac{M_{oy}}{\sum E_i J'_{yi}} \frac{x^2}{2} - c_1 x - c_2 \quad (4.9)$$

Následně byly dosazeny okrajové podmínky $w(x = -\frac{l_0}{2}) = 0$ a $w(x = \frac{l_0}{2}) = 0$ a vyjádřeny konstanty c_1 a c_2 .

$$c_1 = 0 \quad (4.10)$$

4.1 VÝPOČET NAPĚTÍ

$$c_2 = -\frac{M_{oy}}{\sum E_i J'_{yi}} \frac{l_0^2}{8} \quad (4.11)$$

Po dosazení konstant z rovnic 4.10 a 4.11 do analytické rovnice průhybu 4.9 bylo vyjádřeno analytické řešení.

$$w_a = \frac{-M_{oy}}{2 \sum E_i J'_{yi}} \left(x^2 - \frac{l_0^2}{4} \right) \quad (4.12)$$

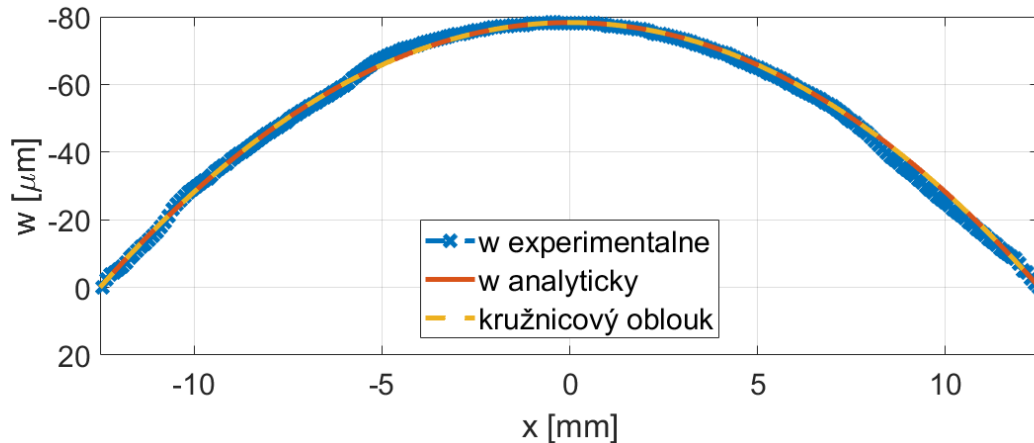
Vzhledem k tomu, že byl předpokládán průhyb prutu jako kružnicového oblouku, byla provedena kontrola analytického výpočtu průhybu pomocí rovnice kružnice

$$x^2 + (w_k + (R - w_{max}))^2 = R^2 \quad (4.13)$$

jako

$$w_k = \sqrt{R^2 - x^2} - R + w_{max}. \quad (4.14)$$

Porovnání experimentálních a analytických hodnot bylo znázorněno na obrázku 4.4. Shoda jednotlivých přístupů zde byla velmi dobrá a rozložení experimentálních hodnot odpovídalo teoretickému.



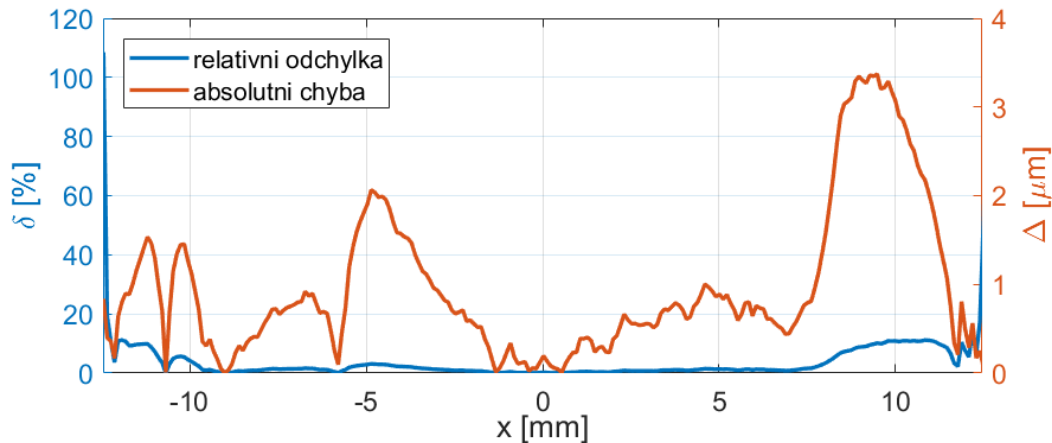
Obrázek 4.4: Porovnání experimentu s ideálním průhybem prutu.

Z analytických a experimentálních výsledků byly pomocí následujících rovnic (4.15) a (4.16) dopočítány absolutní chyby Δ a relativní odchylky δ . Zobrazeny byly v grafu na obrázku 4.5.

$$\Delta = |w_a - w_{exp}| \quad (4.15)$$

$$\delta = \frac{100 |w_a - w_{exp}|}{w_a} \quad (4.16)$$

Z grafu bylo patrné, že na okrajích vzorku se relativní odchylka δ zvětšuje přes 50 %. To bylo ovšem způsobeno nedokonalým srovnáním naměřených dat k horizontální rovině. Na okrajích vzorku tedy není průhyb přesně 0 mm, ale hodnota blíží se k nule, což dokazoval i průběh absolutní chyby Δ .



Obrázek 4.5: Absolutní chyba a relativní odchylka měření od ideálního průhybu.

Dále bylo spočteno celkové přetvoření na horním a dolním povrchu z [9]

$$\varepsilon_{tot,i} = \frac{M_{oy}}{\sum E_i J'_{yi}} z'_i = \frac{z'_i}{R}, \quad (4.17)$$

kde R je poloměr křivosti a z'_i je vzdálenost vrstvy i od neutrální osy.

Ke získání přetvoření ε_{tot} na horním a dolním povrchu prutu, bylo za z'_i dosazeno

$$z'_1 = \frac{h_1 + h_2}{2} - e \quad (4.18)$$

pro výpočet přetvoření na dolním povrchu $\varepsilon_{tot,1}$ a

$$z'_2 = - \left(\frac{h_1 + h_2}{2} + e \right) \quad (4.19)$$

pro výpočet přetvoření na horním povrchu prutu $\varepsilon_{tot,2}$.

V případě, že by nebylo uvažováno teplotní zatížení vzorku, byl by platný vztah pro výpočet napětí σ z [9].

$$\sigma_i = E_i \varepsilon_i. \quad (4.20)$$

Vzhledem k tomu, že v řešeném případě nevzniká pouze mechanické přetvoření ε_M , ale zároveň i přetvoření teplotní ε_T , jsou pro přetvoření a napětí podle [11] platné následující vztahy.

$$\varepsilon_{tot} = \varepsilon_T + \varepsilon_M \quad (4.21)$$

$$\varepsilon_{tot} = \alpha \Delta T + \frac{\sigma}{E} \quad (4.22)$$

$$\sigma = (\varepsilon_{tot} - \alpha \Delta T) E, \quad (4.23)$$

kde ε_{tot} je celkové přetvoření, α je součinitel teplotní roztažnosti, ΔT je změna teploty a E je Youngův modul pružnosti.

4.1 VÝPOČET NAPĚTÍ

4.1.1 Vliv excentricity na řešení

Vliv excentricity e na řešení byl posuzován z několika pohledů.

1. Stoneyho původní článek [7] uvádí výpočet excentricity kovového prutu s obdélníkovým průřezem, který ohnulo nanesení niklové vrstvy (obrázek 3.1). Ve výpočtu byla uvažována malá hodnota tloušťky prutu h_1 v porovnání s poloměrem křivosti R a dále nebyla uvažována tloušťka nanesené vrstvy h_2 .

$$\int_{h_1}^0 \frac{E}{R}(d-z)zdz = 0 \quad (4.24)$$

$$\int_{h_1}^0 (dz - z^2)dz = \left[d\frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} \right]_{h_1}^0 = 0 \quad (4.25)$$

$$-d\frac{h_1^2}{2} + \frac{h_1^3}{3} = 0 \quad (4.26)$$

$$d = \frac{2}{3}h_1 \quad (4.27)$$

$$e = d - \frac{h_1}{2} = \frac{1}{6}h_1 \quad (4.28)$$

Pro vybraný vzorek byla spočtena velikost excentricity e jako

$$e = 0,0417 \text{ mm}. \quad (4.29)$$

2. Další možností byl výraz pro velikost excentricity e ze článku [9], který byl upraven pro dvě vrstvy.

$$e = \frac{h_1 h_2 (E_1 - E_2)}{2(E_1 h_1 + E_2 h_2)} \quad (4.30)$$

Posouzení velikosti excentricity e s ohledem na moduly pružnosti E byl potom následující (tabulka 4.1):

Tabulka 4.1: Hodnoty posuvů neutrální osy u řádově odlišných Youngových modulů pružnosti (malé křivosti).

	E_1 [MPa]	E_2 [MPa]	e [mm]
$E_2 = E_1$	73000	73000	0
$E_2 = 10E_1$	73000	730000	0,0052
$E_2 = E_1/10$	73000	7300	$-5,3974E-04$

V případě stejně velkých modulů pružnosti E byl posun neutrální osy nulový a pro hodnoty E_2 lišící se o řád byl posun velmi malý.

Pro ověření zanedbatelnosti posunu neutrální osy v případě slabě zakřiveného prutu byly dále dopočítány kvadratické momenty podle rovnice 4.5 s uvažováním prutu o šířce $b = 1 \text{ mm}$ (tabulka 4.2).

Odtud byl dále dopočítán procentuální rozdíl kvadratických momentů pro případy $e \neq 0$ a $e = 0$ (tabulka 4.3).

Bylo tedy zjištěno, že posuv neutrální osy e je i při řádové změně modulu pružnosti zanedbatelný.

4 VÝPOČET NAPĚTÍ POMOCÍ PRUTOVÉ TEORIE

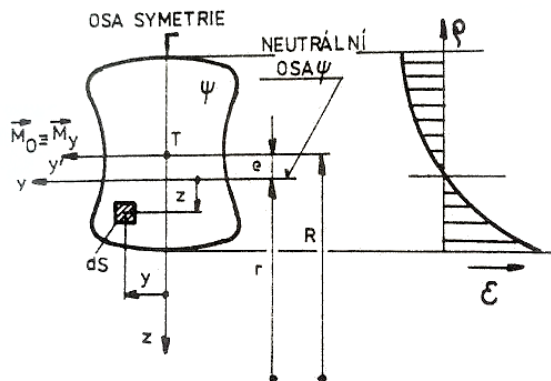
Tabulka 4.2: Hodnoty kvadratických momentů u řádově odlišných Youngových modulů pružnosti (malé křivosti).

	E_1 [MPa]	E_2 [MPa]	J'_{y1} [mm ⁴]
$E_2 = E_1$	73000	73000	0,001302
$E_2 = 10E_1$	73000	730000	0,001310
$E_2 = E_1/10$	73000	7300	0,001302

Tabulka 4.3: Hodnoty odchylek kvadratických momentů u řádově odlišných Youngových modulů pružnosti (malé křivosti).

	E_1 [MPa]	E_2 [MPa]	odchylka [%]
$E_2 = E_1$	73000	73000	0
$E_2 = 10E_1$	73000	730000	0,391
$E_2 = E_1/10$	73000	7300	0,018

3. Nakonec byl posouzen posuv neutrální osy vlivem křivosti prutu podle teorie silně zakřivených prutů. Vztah pro velikost excentricity e se zohledněním teorie silně zakřivených prutů vycházel z podmínky statické rovnováhy [10] na průřezu znázorněném na obrázku 4.6.



Obrázek 4.6: Průřez silně zakřiveného prutu [10].

$$\sum \int_{\Psi_i} \sigma dS_i = c \sum E_i \int_{\Psi_i} \frac{z}{r-z} dS_i = 0 \quad (4.31)$$

Odtud byl po dosazení $z = r - \rho$ a integraci $\int_{\Psi_i} \frac{1}{\rho} dS_i = b \ln \frac{r_{i1}}{r_{i0}}$ dopočítán vztah pro poloměr neutrální plochy r .

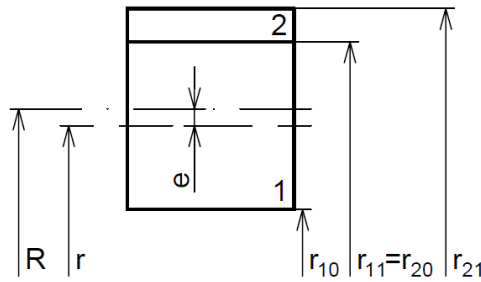
$$r = \frac{E_1 h_1 + E_2 h_2}{E_1 \ln \frac{r_{11}}{r_{10}} + E_2 \ln \frac{r_{21}}{r_{20}}}, \quad (4.32)$$

kde E_i jsou moduly pružnosti v tahu, h_i jsou tloušťky vrstev a r_{ij} jsou poloměry jejichž značení r_{i0} a r_{i1} bylo objasněno na obrázku 4.7.

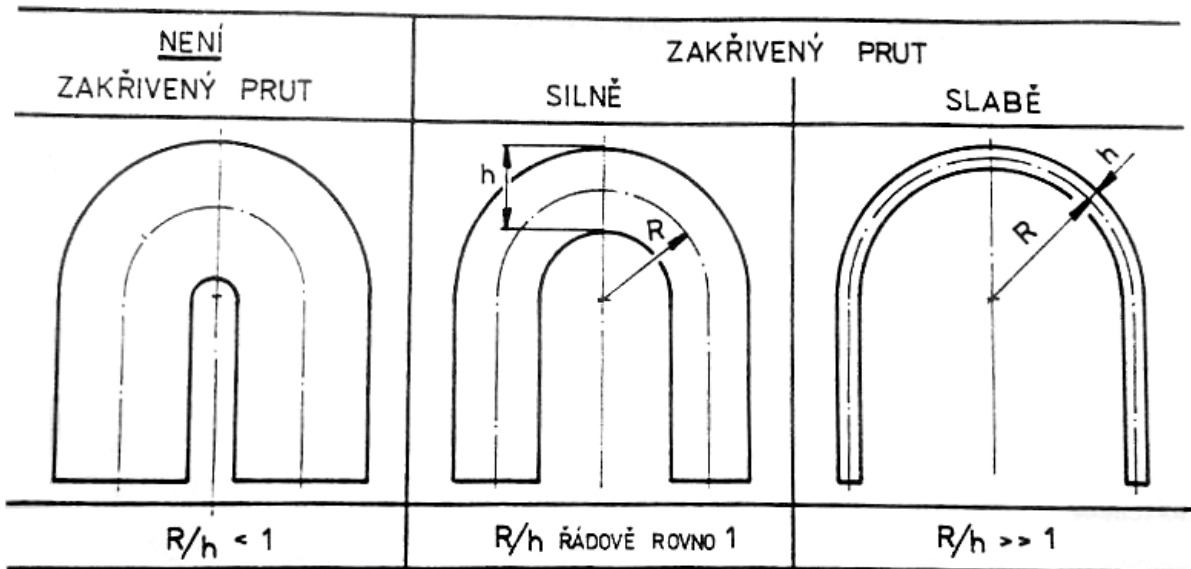
Velikost excentricity byla následně vypočítána z velikostí poloměru zakřivení R a poloměru neutrální plochy r .

$$e = R - r \quad (4.33)$$

4.1 VÝPOČET NAPĚTÍ



Obrázek 4.7: Značení poloměrů na vzorku.



Obrázek 4.8: Rozdělení silně a slabě zakřivených prutů. [10]

Jak bylo uvedeno v [10], teorie silně zakřivených prutů se používá pro případy kdy $\frac{R}{h} \approx 10^0$, jak bylo znázorněno na obrázku 4.8.

Při uvažování vzorku č. 32, byly hodnoty pro poměr R/h následující.

$$\frac{R}{h_1 + h_2} = \frac{998}{0,25 + 0,0012} = 4000 \approx 1 \quad (4.34)$$

V případě, že by byl uvažován slabě zakřivený prut, pro člen $r - z$ z rovnice 4.31 platí $z \ll r$, a po úpravě by byla získána rovnice 4.30.

Podle rovnice 4.34 bylo znatelné, že poměr R/h v případě použitých vzorků řádově neodpovídá 1. Tato skutečnost vedla na slabě zakřivený prut řešený v bodě 2. Pokud by ovšem nebylo použito zjednodušení, kdy $z \ll r$, platily by velikosti excentricity e v tabulce 4.4 podle vztahů 4.32 a 4.33.

Tabulka 4.4: Hodnoty posuvů neutrální osy u řádově odlišných Youngových modulů pružnosti (velké křivosti).

	E_1 [MPa]	E_2 [MPa]	e [mm]
$E_2 = E_1$	73000	73000	$-5,2701E-06$
$E_2 = 10E_1$	73000	730000	0,0051
$E_2 = E_1/10$	73000	7300	$-5,4497E-04$

Pro dané posuvy neutrální osy byly stejně jako v bodě 2 spočteny kvadratické momenty J'_{y1} a procentuální rozdíl k případu $e = 0$ (tabulka 4.5).

Tabulka 4.5: Hodnoty kvadratických momentů u řádově odlišných Youngových modulů pružnosti (velké křivosti).

	E_1 [MPa]	E_2 [MPa]	J'_{y1} [mm ⁴]	odchylka [%]
$E_2 = E_1$	73000	73000	0,001302	1,22E-04
$E_2 = 10E_1$	73000	730000	0,001307	0,39
$E_2 = E_1/10$	73000	7300	0,001302	0,02

Zde bylo opět znatelné, že procentuální rozdíl hodnot byl malý, a tím pádem byly hodnoty posuvu neutrální osy nevýznamné.

Pokud by byla hledána velikost poloměru zakřivení taková, aby posun neutrální osy nebyl zanedbatelný, dosahovala by při uvažování rozměrů vzorku v kapitole 2 $R = 0,7$ mm. Ostatní hodnoty byly znázorněny v tabulce 4.6.

Tabulka 4.6: Hodnoty odchylky u řádově odlišných Youngových modulů pružnosti (velké křivosti) pro $R = 0,7$ mm.

	E_1 [MPa]	E_2 [MPa]	e [mm]	J'_{y1} [mm ⁴]	odchylka [%]
$E_2 = E_1$	73000	73000	-0,0076	0,001319	1,28
$E_2 = 10E_1$	73000	730000	-0,0030	0,001305	0,24
$E_2 = E_1/10$	73000	7300	-0,0081	0,001321	1,43

Odchylky v tabulce 4.6 přesahují velikost 1 %, což se dá považovat za hodnotu, která by mohla mít vliv na řešení. Dostáváme je ovšem pro velikost poloměru zakřivení $R = 0,7$ mm, což je velmi malý poloměr v porovnání s hodnotami na naměřených vzorcích, které se pohybují kolem $R = 1000$ mm a výše až o několik řádů.

Absolutní hodnoty posuvů neutrální osy spadaly do intervalu $|e| \in \langle 0; 0,0417 \rangle$ mm. Bylo tedy patrné, že vliv excentricity byl nejvýznamnější ve Stoneyho formulaci (4.28). U slabě zakřivených prutů byl posuv neutrální osy zanedbatelný vzhledem k rozměru vzorku i při změně modulu pružnosti vrstvy o jeden řád. Stejně tomu bylo i při uvažování teorie silně zakřivených prutů, kde by poloměry křivosti R musely být minimálně o 4 řády menší, než jak tomu bylo u experimentálně naměřených vzorků. Globálně tedy byl vliv posuvu neutrální osy e zanedbatelný i při uvažování řádové změny modulu pružnosti E_2 .

4.1.2 Vliv tuhosti nanesené vrstvy

Z experimentu bylo zjištěno, že Youngův modul pružnosti v tahu E_2 se pro tenké vrstvy liší od dat uváděných v materiálových listech. Velikost Youngova modulu pružnosti pro uvažovaný příklad byla tudíž neznámá. Ohybová tuhost K ovšem byla vyjádřena jako

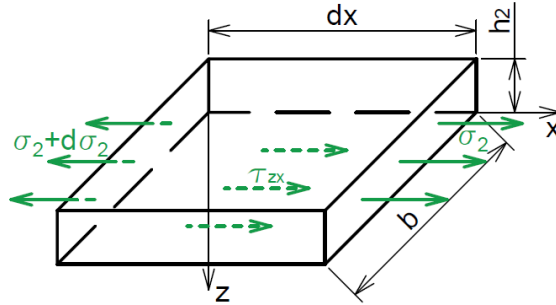
$$K = E_1 J_{y1} + E_2 J_{y2} = E_1 \left(\frac{1}{12} b h_1^3 + b h_1 \left(\frac{h_2}{2} - e \right)^2 \right) + E_2 \left(\frac{1}{12} b h_2^3 + b h_2 \left(\frac{h_1}{2} + e \right)^2 \right). \quad (4.35)$$

Po dosazení tloušťek vrstev h_i ($h_1 \sim 10^{-1}$ mm; $h_2 \sim 10^{-3}$ mm) bylo patrné, že kvadratický moment filmu J_{y2} má první člen řádu 10^{-9} a druhý člen řádu 10^{-5} . Oproti kvadratickému momentu v podložce J_{y1} s řády členů 10^{-3} a 10^{-7} byl tedy zanedbatelně malý.

$$J_{y2} \approx 0 \quad (4.36)$$

4.2 Smykové napětí

Při vzniku normálového napětí ve vrstvě σ_2 zároveň vznikalo smykové napětí τ_{zx} na rozhraní podložky a vrstvy. Situace byla znázorněna na obrázku 4.9.



Obrázek 4.9: Znázornění smykového napětí na rozhraní.

Při určování smykového napětí se vycházelo z předpokladu, že přírůstek normálového napětí σ_2 , které vzniklo ve vrstvě, je v rovnováze se smykovým napětím τ_{zx} na rozhraní.

$$d\sigma_2 b h_2 = \tau_{zx} b dx \quad (4.37)$$

Při uvažování rovnoměrného napětí ve vrstvě byl odvozen následující výraz.

$$\sigma_2 h_2 = \int \tau_{zx} dx \quad (4.38)$$

Podrobněji byla funkce pro vyjádření smykového napětí na rozhraní tělesa popsána ve zdroji [12], který vychází z [13, 14, 15] a [16]. Zde bylo smykové napětí vyjádřeno vztahem

$$\tau_{zx} = A \frac{x}{h_2} e^{-B \frac{x}{h_2}}. \quad (4.39)$$

Případně pro $\alpha = \frac{x}{h_2}$:

$$\tau_{zx} = A \alpha e^{-B \alpha}, \quad (4.40)$$

kde x je vzdálenost od okraje vzorku, h_2 je tloušťka nanesené vrstvy, e je Eulerova konstanta a A, B jsou konstanty. Nejprve bylo z rovnice (4.40) nadefinováno α_{max} pro získání konstanty B :

$$\frac{d\tau}{d\alpha} = 0 = A \alpha e^{-B \alpha} (-B) + A e^{-B \alpha} \quad (4.41)$$

$$B = \frac{1}{\alpha_{max}} \quad (4.42)$$

Potom byl dosazen vztah (4.40) do vztahu silové rovnováhy (4.38), a při uvažování $\alpha = \frac{x}{h_2}$ byla vyjádřena konstanta A . Zároveň byla uvažována nulová hodnota osy x na okraji vzorku (obrázek 4.10):

$$\int_0^{\infty} A \alpha e^{-B \alpha} d\alpha = \sigma_2 \quad (4.43)$$

$$\frac{1}{B^2} = \frac{\sigma_2}{A} \quad (4.44)$$

$$A = \sigma_2 B^2 = \frac{\sigma_2}{\alpha_{max}^2} \quad (4.45)$$

4 VÝPOČET NAPĚTÍ POMOCÍ PRUTOVÉ TEORIE

Po dosazení rovnic (4.42) a (4.45) do (4.40) byl získán konečný vztah pro smykové napětí.

$$\tau_{zx} = \frac{\sigma_2}{\alpha_{max}^2} \alpha e^{-\frac{1}{\alpha_{max}} \alpha} = \frac{\sigma_2}{\alpha_{max}^2} \frac{x}{h_2} e^{-\frac{1}{\alpha_{max}} \frac{x}{h_2}} \quad (4.46)$$

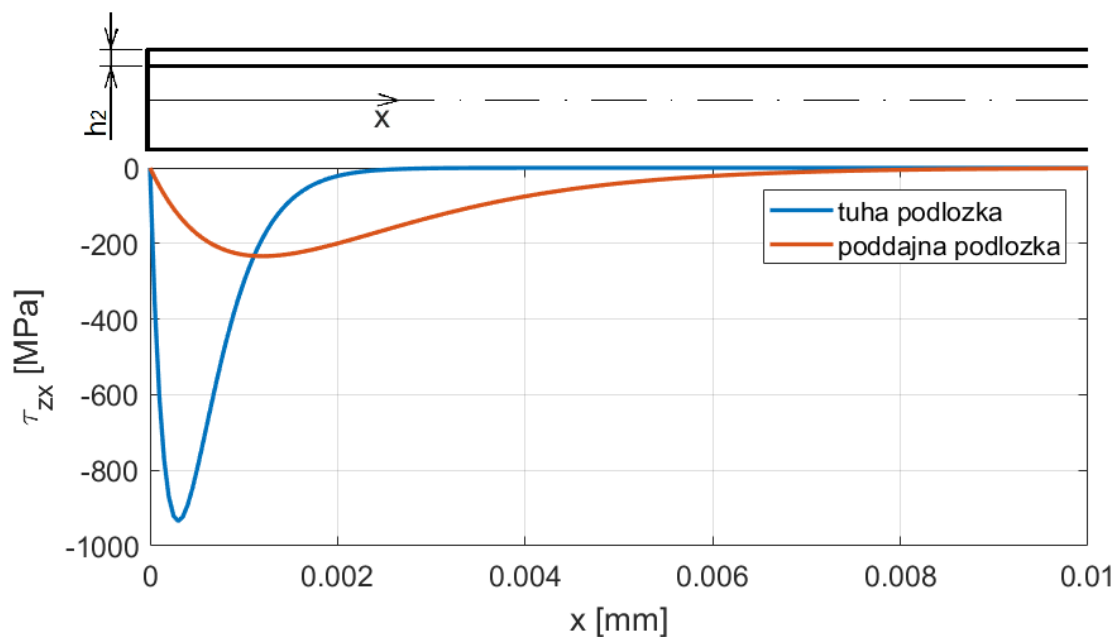
Přičemž maximální hodnoty dosahoval při $\alpha = \alpha_{max}$.

$$\tau_{zx,max} = \tau_{zx}(\alpha = \alpha_{max}) = \frac{\sigma_2}{e\alpha_{max}} \quad (4.47)$$

Uváděná konstanta α_{max} je závislá na tuhosti podložky.

- V případě, že podložka je tuhá, maximální hodnota smykového napětí se pohybuje blízko okraje a předpokládáme $\alpha_{max} = \frac{1}{4}$
- Pokud je podložka poddajná, maximální hodnota smykového napětí se pohybuje dál od okraje, její absolutní hodnota je menší a předpokládáme $\alpha_{max} = 1$

Jednotlivé průběhy smykového napětí pro tuhý a poddajný materiál podložky byly znázorněny na obrázku 4.10. Zde bylo znatelné, že smykové napětí τ_{zx} bylo na okrajích vzorku nulové, v blízkosti okraje se jeho absolutní hodnota zvětšovala na maximum a na zbytku vzorku se opět pohybovala v nulových hodnotách.



Obrázek 4.10: Smykové napětí na rozhraní vrstev u okraje vzorku č. 32 ($h_2 = 1200 \text{ nm}$).

Veškeré smykové napětí se tedy koncentrovalo pouze v blízkosti okrajů vzorku, který byl dlouhý $l_0 = 25 \text{ mm}$, a bylo závislé na tloušťce nanosené vrstvy h_2 . Rozhodující byla také velikost konstanty α_{max} , která byla v případě všech použitých vzorků uvažována jako $\alpha_{max} = 1/4$.

4.3 Působení teplotní roztažnosti

Při výpočtech bylo třeba uvažovat teplotní roztažnosti vrstev, proto bylo předpokládáno teplotní přetvoření

$$\varepsilon_{Ti} = \alpha_i \Delta T_i, \quad (4.48)$$

kde α_i je teplotní roztažnost vrstvy i a ΔT_i je změna teploty ve vrstvě i . Ovšem bez změny teploty se v tomto případě vrstvy nedeformovaly a proto bylo možné zapsat, že

$$\varepsilon_{tot,i} = \varepsilon_{Ti}, \quad (4.49)$$

kde $\varepsilon_{tot,i}$ je celkové přetvoření vrstvy prutu a ε_{Ti} je přetvoření vrstvy při teplotním zatížení. Rovnost platila i pro poměry

$$\frac{\varepsilon_{tot,1}}{\varepsilon_{tot,2}} = \frac{\varepsilon_{T1}}{\varepsilon_{T2}}. \quad (4.50)$$

Po dosazení výrazů (4.17) a (4.48) do rovnice (4.50) a převedení neznámých na levou stranu vznikl vztah

$$\alpha_2 \frac{\Delta T_2}{\Delta T_1} = \alpha_1 \frac{z'_2}{z'_1}, \quad (4.51)$$

kde z'_1 a z'_2 jsou vzdálenosti povrchů vrstev od neutrální osy y' (viz (4.18) a (4.19)). Neznámé na levé straně byly následně zadefinovány jako nová hledaná neznámá α_T .

$$\alpha_T = \alpha_2 \frac{\Delta T_2}{\Delta T_1} \quad (4.52)$$

Z rovnice (4.52) bylo patrné, že v případě stejných hodnot změn teploty ve vrstvách ΔT_1 a ΔT_2 nově nadefinovaná neznámá α_T odpovídá teplotní roztažnosti nanesené vrstvy α_2 .

5 MKP výpočet

Jedním z cílů diplomové práce bylo vytvořit konečněprvkový model v softwaru Ansys pro výpočet napětí ve vzorcích.

Nejprve byl vytvořen model prutu, který sloužil pro verifikaci výsledků z kapitoly 4, případně 3 (kapitola 5.1). Následovalo rozšíření modelu prutu na axisymetrický případ, který odpovídal kruhovému vzorku s izotropními vlastnostmi materiálů (kapitola 5.2). Posléze byl takovýto model vytvořen i ve 3D jako objemové těleso. Nakonec byl na objemový model aplikován anizotropní materiál s rozdílnými délkovými teplotními roztažnostmi $\alpha_{2,i}$ ve zvolených směrech i (kapitola 5.3).

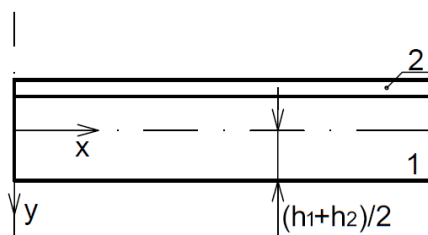
Pro obě skupiny vzorků, tedy s kruhovými a eliptickými izoliniemi, byl vybrán reprezentativní vzorek, na kterém byl algoritmus odladěn a následně byly vypočteny výsledky i pro další vzorky ze skupiny. Pro prutové (kapitola 5.1) a axisymetrické těleso (kapitola 5.2) byl reprezentativním vzorkem vzorek č. 32 a pro objemové těleso s eliptickými izoliniemi (kapitola 5.3) to byl vzorek č. 20.

Princip MKP výpočtu spočíval v tom, že model kruhové podložky s nanesenou vrstvou byl přichycen na okrajích ve svislém směru a aby mohlo dojít k jeho prohnutí, byl zatížen fiktivním teplotním zatížením na horní a dolní ploše. Vlivem fiktivní změny teploty a rozdílných součinitelů teplotní roztažnosti ve vrstvách potom došlo k deformaci vzorku současně s vygenerováním napětí. Metoda s fiktivním zatížením je zde použita z toho důvodu, že teplotní průběhy při nanášení tenké vrstvy na podložku nejsou známy a modelování reálného děje tedy není možné.

5.1 MKP model prutového tělesa

Jako reprezentativní vzorek byl vybrán vzorek č. 32.

U vzorku byl definován souřadný systém tak, aby osa x vždy ležela ve směru prutu, přičemž osa y směřovala dolů (obrázek 5.1). U prezentovaných výsledků bylo ovšem z důvodu jednotnosti práce použito označení z jako osy směřující dolů.



Obrázek 5.1: Orientace souřadného systému v Ansysu u rovinného modelu.

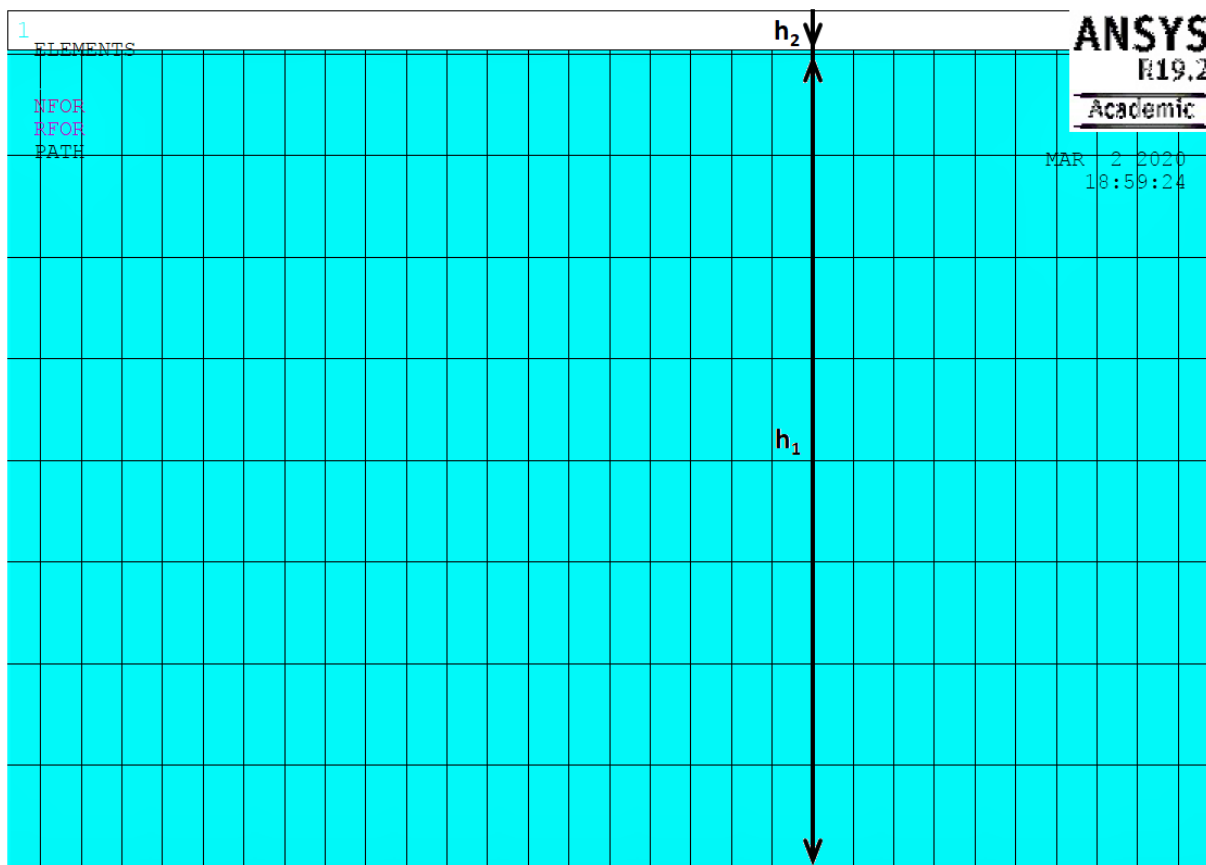
5.1.1 Popis vstupů prutového MKP modelu

Geometrie

- S uvažováním rozměrů z kapitoly 2 byl vytvořen model prutu s osou symetrie ležící v ose y .
- Na prut byla nadefinována síť kvadratických prvků s 1000 prvky po délce, 8 prvky po tloušťce podložky a 1 prvkem po tloušťce vrstvy. Kvadratické prvky byly zvoleny

5.1 MKP MODEL PRUTOVÉHO TĚLESA

z toho důvodu, že umožňují realizaci právě jednoho prvku po tloušťce vrstvy. Detail výsledné sítě je na obrázku 5.2.



Obrázek 5.2: Detail sítě na modelu prutu.

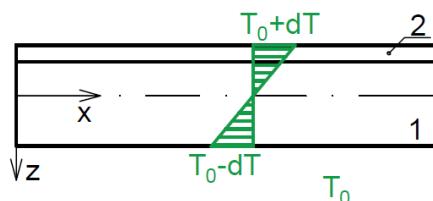
Materiál

- Modul pružnosti v tahu: $E_1 = E_2 = 73000 \text{ MPa}$, kde E_1 bylo převzato z [3] a E_2 bylo zvoleno identické z toho důvodu, že se v kapitole 4.1.1 řádová změna modulu pružnosti E_2 ukázala jako zanedbatelná. Zároveň by podle [4] mělo být E_2 řádově odpovídající E_1 .
- Poissonova konstanta: $\mu_1 = \mu_2 = 0,16$ přičemž bylo uvažováno jednoosé zatížení, takže hodnota μ byla nepodstatná. Hodnota μ_1 byla převzata z [3].
- Součinitel teplotní roztažnosti: $\alpha_1 = 5.2e-7 \text{ K}^{-1}$ (uvedeno v [3]); α_2 jako proměnná fiktivní hodnota.
- Tepelná vodivost: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1 \text{ W/mmK}$, což byla opět fiktivní hodnota, která měla za úkol lineární rozložení teploty po tloušťce tělesa (obrázek 5.3) a její velikost neměla vliv na výsledné rozložení teplot.

Zatížení

- Bylo zvoleno fiktivní teplotní zatížení, které mělo za úkol vyvolat průhyb odpovídající experimentálně naměřeným hodnotám na vzorku. K jeho vytvoření byla definována teplota okolí $T_0 = 293,15 \text{ K}$ a teplotní přírůstek $\pm\Delta T$ na povrchu vzorku

(obrázek 5.3) jako proměnná fiktivní teplota. Konkrétní kombinace rozdílu teploty ΔT a součinitele teplotní roztažnosti α_2 bylo konkrétněji rozebráno v následující kapitole 5.1.2.



Obrázek 5.3: Lineární rozložení teploty.

Vazby s okolím

- Byly nadefinovány symetrické okrajové podmínky na osu y a následně nulové posuvy ve směru y na konci prutu (obrázek 5.4).



Obrázek 5.4: Okrajové podmínky na modelu prutu.

5.1.2 Vliv kombinace parametrů na výsledky

Jako vstupy do fiktivního teplotního zatížení byl použit součinitel teplotní roztažnosti vrstvy α_2 a změna teploty povrchu k teplotě okolí ΔT . K danému rozdílu teplot ΔT byl vždy hledán takový součinitel α_2 , aby výsledný průhyb odpovídal experimentálně naměřené hodnotě na daném vzorku. Jak bylo zmíněno dříve, hodnoty parametrů byly fiktivní čísla, která neodpovídala realitě a sloužila k demonstraci teplotního přetvoření $\varepsilon_{T,2}$ potřebnému k prohnutí vzorku. Jednotlivé kombinace parametrů byly uvedeny v tabulce 5.1. Případně podrobněji v dodatku A.

Tabulka 5.1: Kombinace dvojic parametrů.

ΔT [K]	α_2 [1/K]	$\varepsilon_{T,2}$ [mm/mm]	σ_2 [MPa]
130	$3,23E-05$	$4,20E-03$	-297,72
50	$1,41E-04$	$7,05E-03$	-505,45
10	$8,45E-04$	$8,45E-03$	-607,96
5	$1,74E-03$	$8,68E-03$	-624,62
1	$8,77E-03$	$8,77E-03$	-631,10
0,1	$8,81E-02$	$8,81E-03$	-633,77
0,01	$8,81E-01$	$8,81E-03$	-633,96
0,001	$8,81E+00$	$8,81E-03$	-633,94

Jak je vidět z tabulky 5.1, hodnoty teplotního přetvoření $\varepsilon_{T,2}$ nebyly v závislosti na zvolených parametrech konstantní. Při větší změně teploty se totiž nedeformovala pouze nanesená vrstva, ale docházelo i k roztahování podložky. Podle spočtených hodnot přetvoření

5.1 MKP MODEL PRUTOVÉHO TĚLESA

byly kombinace s $\Delta T < 1K$ dostatečně přesné pro další výpočet a byly dále používány pouze kombinace v této přípustné oblasti.

Konečný výpočet byl pro model prutu proveden pro následující hodnoty.

$$\alpha_2 = 8,81 K^{-1}$$

$$\Delta T = 0,001 K$$

5.1.3 Kontrola hustoty sítě

Sít tělesa byla navržena tak, aby byla co nejjemnější a zároveň splňovala podmínky studentské verze Ansysu (maximálně 32000 uzlů). Aby bylo možné zkontrolovat zda je síť dostatečně hustá, byl navíc vytvořen jemnější a hrubší model. Parametry jednotlivých modelů byly uvedeny v tabulce 5.2.

Tabulka 5.2: Parametry kontrolních sítí.

Počet prvků po:	délce $l_0/2$	tloušťce h_1	tloušťce h_2	uzlů	prvků
původní	1000	8	1	29019	9000
hrubší	500	4	1	8511	2500
jemnější	2200	3	1	30809	8800

U jemnější sítě bylo dosaženo většího počtu prvků po délce $l_0/2$ pomocí nekonstantního dělení po tloušťce h_1 . Pro jednotlivé sítě byly vygenerovány výsledky průhybu a napětí, které byly sepsány v tabulce 5.3.

Tabulka 5.3: Výsledky u kontrolních sítí.

Hustota sítě	w_{max} [mm]	$\sigma_{x,max}$ [MPa]	$\tau_{zx,max}$ [MPa]
hrubší	-0,078322	-630,8	-82,1
původní	-0,078321	-630,8	-124,5
jemnější	-0,078307	-630,8	-146,6

Z výsledků jednotlivých veličin pro každou síť byla vypočtena relativní odchylka δ_i k hodnotám původní sítě podle vztahu 5.1 (tabulka 5.4).

$$\delta_i = 100 \left| \frac{i_{kontrolni} - i_{puvodni}}{i_{puvodni}} \right|, \quad (5.1)$$

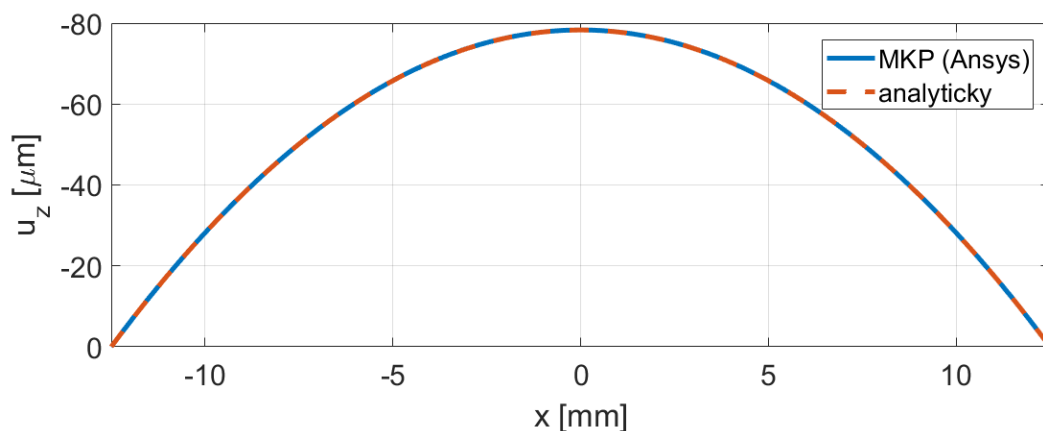
Tabulka 5.4: Relativní odchylky výsledků kontrolních sítí oproti původní sítě.

Hustota sítě	$\delta_{w_{max}}$ [%]	$\delta_{\sigma_{x,max}}$ [%]	$\delta_{\tau_{zx,max}}$ [%]
hrubší	0,001	0	34
původní	0,000	0	0
jemnější	0,018	0	18

Podle relativních odchylek δ_i jednotlivých výsledků, které se, s výjimkou relativní odchylky smykového napětí, pohybovaly do 5 %, bylo možné prohlásit, že zvolená hustota sítě byla dostatečná. Velké relativní odchylky smykového napětí $\tau_{zx,max}$, které vznikaly na okrajích vzorku na rozhraní jednotlivých vrstev, ukazovaly, že pro správnou interpretaci smykových napětí by bylo potřeba dále zjemňovat síť. Tento problém byl samostatně rozebrán v kapitole 5.1.7.

5.1.4 Průhyb prutového tělesa

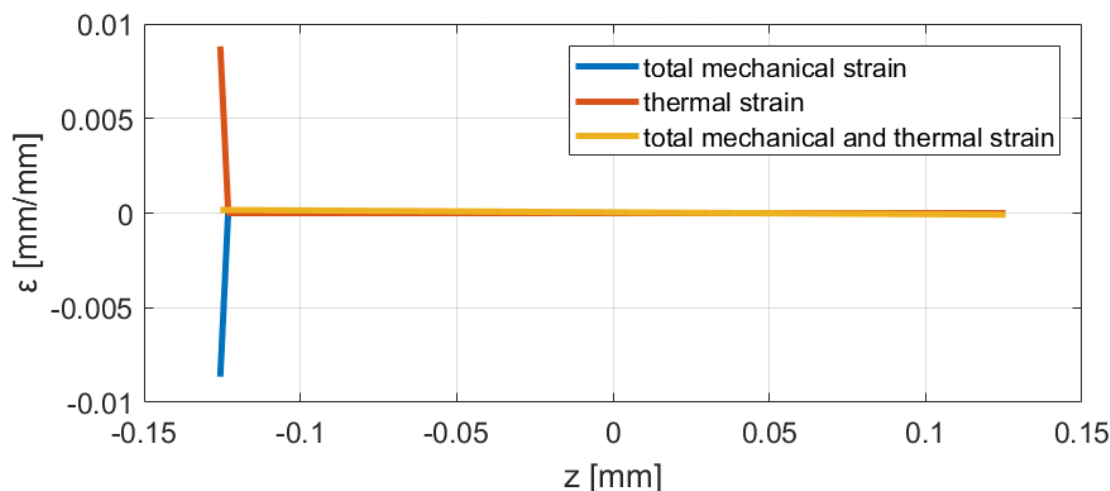
Výsledný maximální průhyb odpovídal naměřené hodnotě na vzorku č. 32 (tabulka 2.2). Stejně jako tvar průhybu, který byl znázorněn v grafu na obrázku 5.5.



Obrázek 5.5: Porovnání průhybu z analytického výpočtu a MKP.

5.1.5 Přetvoření na prutovém tělese

Hodnoty všech uvažovaných přetvoření byly znázorněny v grafu na obrázku 5.6, kde byly znatelné skokové hodnoty mechanického a teplotního přetvoření ve vrstvě.

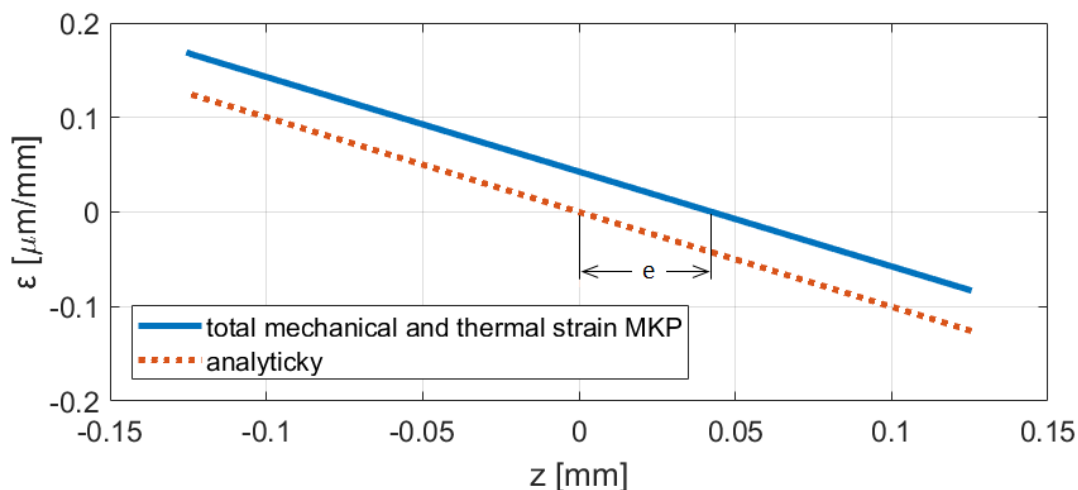


Obrázek 5.6: Průběhy přetvoření vypočtené MKP.

Na obrázku 5.7 byl potom vykreslen detail celkového přetvoření ε_{tot} , které bylo porovnáváno s analyticky vypočtenou hodnotou. Tvary průběhů přetvoření byly v tomto případě identické, ovšem v analytickém případě byly uvažovány naprosto stejné materiály pro podložku i vrstvu, a byl zanedbán jakýkoliv posuv neutrální osy (rozebráno v kapitole 4.1.1). V grafu byl tento posuv v MKP viditelný a jeho velikost byla $e = 0,04 \text{ mm}$, což odpovídalo Stoneyho předpokladu posuvu neutrální osy (4.29).

Velikosti celkového přetvoření na horním ($\varepsilon_{tot,2}$) dolním ($\varepsilon_{tot,1}$) povrchu byly porovnány v tabulce 5.5.

5.1 MKP MODEL PRUTOVÉHO TĚLESA



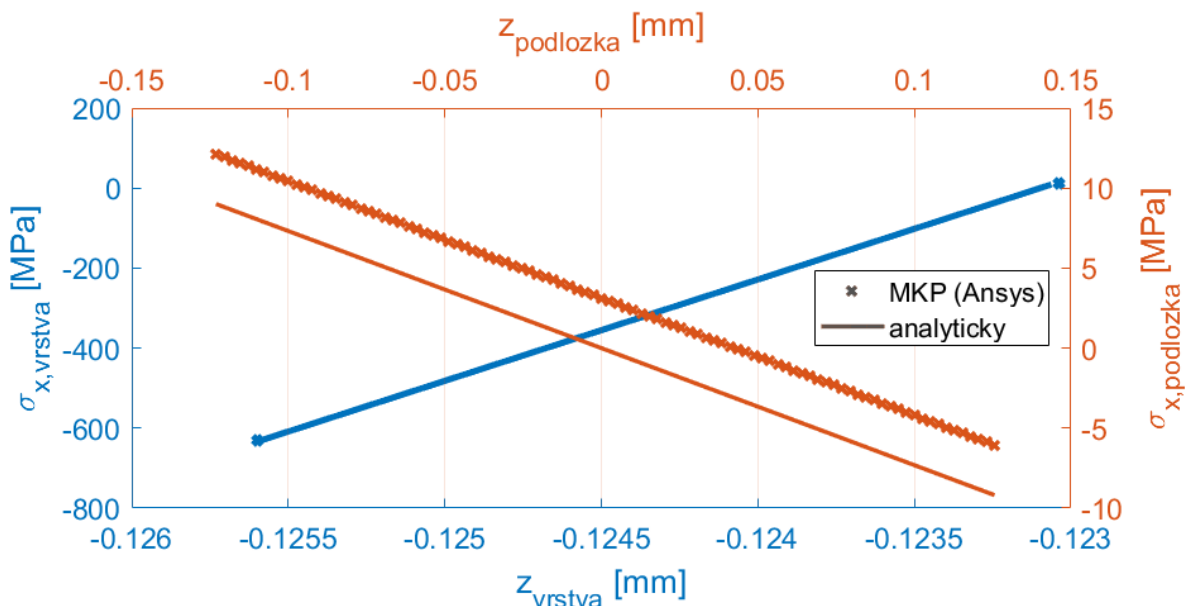
Obrázek 5.7: Porovnání celkového přetvoření z analytického výpočtu a MKP.

Tabulka 5.5: Porovnání celkového přetvoření na površích prutu.

	analyticky	MKP
$\varepsilon_{tot,1}$ [mm/mm]	$-1,259E-04$	$-8,319E-05$
$\varepsilon_{tot,2}$ [mm/mm]	$1,259E-04$	$1,69E-04$

5.1.6 Normálové napětí na prutovém tělese

Dále bylo porovnáváno normálové napětí na prutu. Jeho průběh, spočtený pomocí MKP, je vykreslen i s analytickými hodnotami tohoto napětí, které byly vypočteny pomocí vztahu 4.23, v grafu na obrázku 5.8.



Obrázek 5.8: Porovnání normálového napětí z analytického výpočtu a MKP.

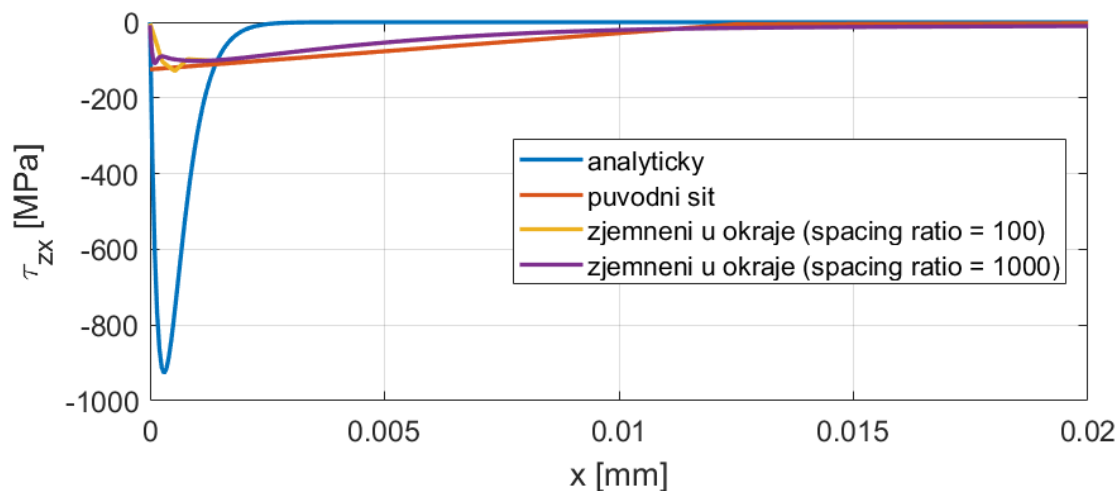
Na obrázku 5.8 je znatelné, že hodnoty napětí se pro MKP a analytický výpočet výrazně neliší, což dokazuje i tabulka 5.6 s hodnotami napětí na povrchu. Ve stejné tabulce je uvedena i hodnota napětí ve vrstvě, která vychází ze Stoneyho formule pro uniaxiální napětí (3.8).

Tabulka 5.6: Porovnání normálového napětí na površích prutu.

	analyticky	MKP	Stoney
$\sigma_{x,1}$ [MPa]	-9,2	-6,1	-
$\sigma_{x,2}$ [MPa]	-633,9	-630,8	-635,1

5.1.7 Smykové napětí na rozhraní vrstev u prutového tělesa

Nakonec byly porovnávány hodnoty smykového napětí na rozhraní podložky a vrstvy. Průběhy napětí na okraji vzorku byly znázorněny v grafu na obrázku 5.9, kde analytické hodnoty napětí byly spočteny pomocí vztahů odvozených v kapitole 4.2.



Obrázek 5.9: Porovnání smykového napětí z analytického výpočtu a MKP.

Pro viditelnou špičku smykového napětí byla původní síť příliš hrubá. Aby se výpočet vešel do studentské licence, bylo zvoleno nekonstantní dělení po tloušťce podložky h_1 a bylo tedy možné snížit zde počet prvků. Zároveň bylo zavedeno nekonstantní dělení i po délce vzorku l_0 tak, aby u okraje byla síť co nejjemnější. Nejprve byla zvolena hodnota Spacing Ratio = 100 a následně Spacing Ratio = 1000. V druhém případě je z obrázku 5.9 patrné, že hodnoty napětí těsně u okraje vzorku byly téměř identické s analytickým výpočtem. Při dalším zjemňování po celé délce vzorku, které nebylo provedeno kvůli omezení licence Ansysu, se tedy dala předpokládat konvergence výsledků k analytické hodnotě. Z toho důvodu byla pro všechny další výpočty použita pouze maximální hodnota smykového napětí vypočtená analyticky podle (4.47), která byla pro vzorek č. 32 následující.

$$\tau_{zx,max} = -928,2 \text{ MPa} \quad (5.2)$$

5.2 MKP model axisymetrického tělesa

Jako reprezentativní vzorek s kruhovými izoliniemi byl vybrán vzorek č. 32 s tloušťkou nanesené vrstvy $h_2 = 1200 \text{ nm}$.

V případě axisymetrického tělesa byl použit obdobný model jako u prutového tělesa s následujícími odlišnostmi:

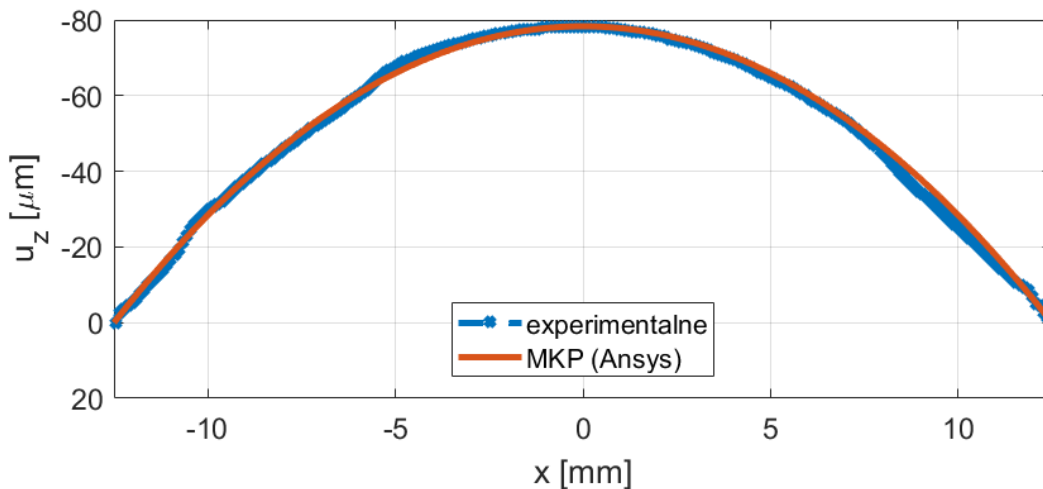
- Použité prvky byly definovány s vlastností axisymetrie.
- Poissonova konstanta μ_2 pro dvouosé zatížení nebyla nepodstatná. Byly tedy provedeny simulace pro $\mu_2 = \mu_1 = 0,16$ a později i pro $\mu_2 = 0,3$, což je hodnota odpovídající kovovým prvkům, kterým hafnium je.
- Podle výsledků z kapitoly 5.1.2 byla uvažována změna teploty $\Delta T = 0,1 \text{ K}$, která ležela v přípustné oblasti.
- Na osu y byly nadefinovány nulové posuvy ve směru x , což vzhledem k použité axisymetrii nebylo nezbytné. Ve směru y byly vzorku nadefinovány nulové posuvy v bodě, kde by se měl při prohnutí dotýkat podložky (obrázek 5.10).



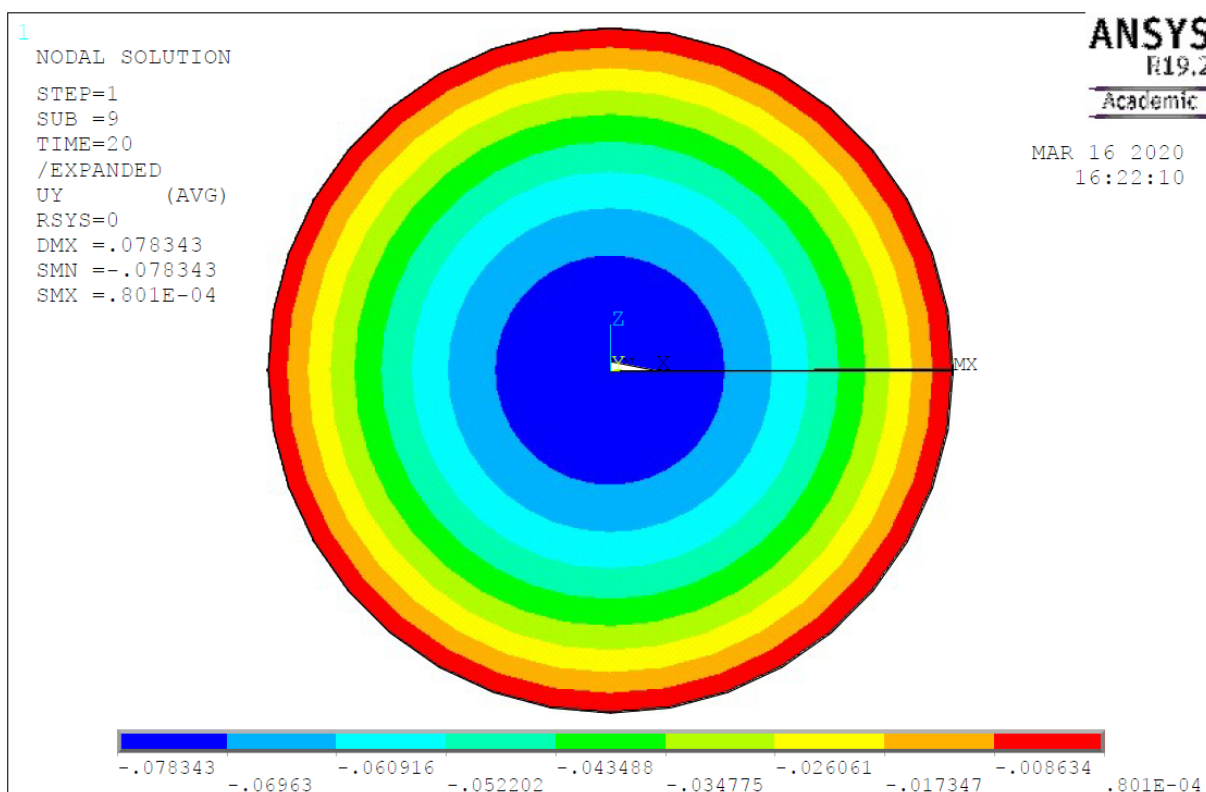
Obrázek 5.10: Okrajové podmínky axisymetrického modelu.

5.2.1 Průhyb axisymetrického tělesa

Maximální průhyb axisymetrického vzorku odpovídal hodnotě naměřené experimentálně (tabulka 2.2). Stejně jako průběh průhybu v radiálním směru vzorku v grafu na obrázku 5.11, kde je znatelná velmi dobrá shoda výsledků MKP modelu s experimentem. Na obrázku 5.12 potom byla provedena úplná expanze axisymetrického modelu.



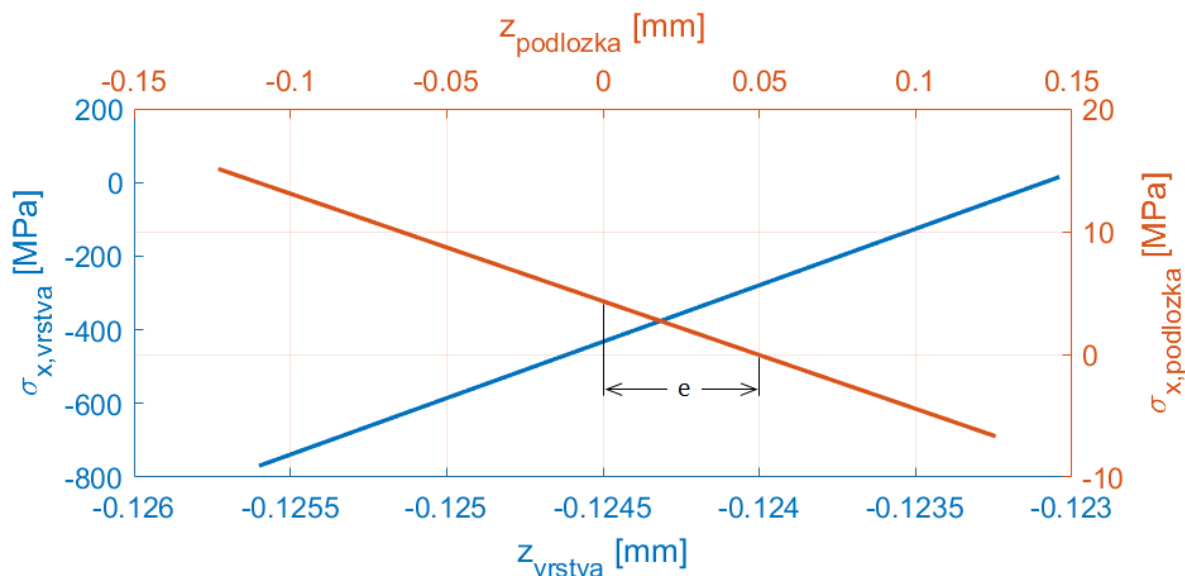
Obrázek 5.11: Porovnání průhybů experimentálního měření a MKP.



Obrázek 5.12: Průhyb axisymetrického vzorku.

5.2.2 Normálové napětí na axisymetrickém tělese

Na axisymetrickém tělese vznikalo normálové napětí σ_x s podobným průběhem jako na prutovém tělese. Tento průběh byl znázorněn na obrázku 5.13, kde byl patrný pomalý nárůst napětí v podložce a následné skokové zvýšení hodnot ve vrstvě.



Obrázek 5.13: Graf průběhu normálového napětí po průřezu.

Z grafu na obrázku 5.13 bylo dále patrné, že neutrální osa opět neležela uprostřed, ale byla posunuta o hodnotu $e = 0,05 \text{ mm}$. To odpovídalo hodnotě blížíci se Stoneyho před-

5.2 MKP MODEL AXISYMETRICKÉHO TĚLESA

pokladu (4.28) stejně jako v případě prutového tělesa. Při porovnání napětí se Stoneyho výpočtem (3.15) byl vypočten rozdíl 13 MPa (tabulka 5.7).

Tabulka 5.7: Porovnání normálového napětí ve vrstvě axisymetrického tělesa.

	MKP	Stoney
$\sigma_{x,2}$ [MPa]	-769,4	-756,1

5.2.3 Smykové napětí na rozhraní vrstev axisymetrického tělesa

Na rozhraní vrstev bylo určeno smykové napětí τ_{zx} jehož maximální hodnota byla spočtena podle analytického výpočtu (4.47).

$$\tau_{zx,max} = -1132,2 \text{ MPa.} \quad (5.3)$$

5.2.4 Výsledky vzorků s kruhovými izoliniemi

Pro všechny vzorky, které byly kategorizovány jako případy s kruhovými izoliniemi (tabulka 2.2) byly dopočítány výsledky obdobným způsobem jako bylo popsáno v celé kapitole 5.2. Pro výpočty byla používána proměnná $\Delta T = 0,01 \text{ K}$, která podle kapitoly 5.1.2 tvoří s daným α_2 dostatečně přesnou kombinaci pro výpočet.

Výpočet probíhal tak, že vzorky byly nejprve rozděleny do skupin podle tloušťky nanesené vrstvy h_2 . Následně bylo pro skupinu spočteno několik hodnot maximálních průhybů w_{max} a součinitelů teplotní roztažnosti α_2 . Data byla proložena polynomickou křivkou druhého stupně a podle známého w_{max} daného vzorku bylo dopočítáno α_2 . Regresní analýzy pro skupiny vzorků byly uvedeny v dodatku B. Pro vzorky byla nakonec dopočítána hodnota normálového napětí ve vrstvě Stoneyho formulí i pomocí MKP (tabulka 5.8).

Tabulka 5.8: Seznam vzorků s kruhovými izoliniemi s dopočtenými hodnotami napětí.

naměřené hodnoty				dopočtené citlivostní analýzou		napětí			
číslo vzorku	h_2 [nm]	$W_{max,exp}$ [mm]	R [mm]	α_2 [1/K]	$W_{max,Ansys}$ [mm]	σ_{Ansys} [MPa]	σ_{Stoney} [MPa]	δ_σ [%]	τ_{zx} [MPa]
16	242	-0,0020	-39063	1,10E-01	-0,001995	-95,2	-95,8	0,6	-140,1
17	242	-0,0024	-32552	1,32E-01	-0,002394	-114,3	-114,9	0,6	-168,2
19	300	-0,0029	-26940	1,29E-01	-0,002897	-111,6	-112,0	0,4	-164,2
22	300	-0,0036	-21701	1,60E-01	-0,003594	-138,4	-139,0	0,5	-203,6
24	300	-0,0031	-25202	1,38E-01	-0,003099	-119,4	-119,7	0,3	-175,6
25	600	-0,0142	-5502	3,17E-01	-0,014180	-272,8	-274,2	0,5	-401,5
26	600	-0,0173	-4516	3,87E-01	-0,017319	-333,1	-334,1	0,3	-490,1
27	600	-0,0179	-4365	4,00E-01	-0,017902	-344,3	-345,7	0,4	-506,6
28	600	-0,0183	-4269	4,09E-01	-0,018306	-352,0	-353,4	0,4	-518,0
29	600	-0,0182	-4293	4,07E-01	-0,018216	-350,3	-351,5	0,3	-515,4
30	600	-0,0157	-4976	3,51E-01	-0,015705	-302,1	-303,2	0,4	-444,5
31	1200	-0,0673	-1161	7,72E-01	-0,067377	-657,8	-649,8	1,2	-968,0
32	1200	-0,0783	-998	9,03E-01	-0,078346	-769,4	-756,0	1,7	-1132,2
33	1200	-0,0825	-947	9,53E-01	-0,082477	-812,0	-796,6	1,9	-1194,8
34	1200	-0,0767	-1019	8,84E-01	-0,076768	-753,2	-740,6	1,7	-1108,4
35	1200	-0,0815	-959	9,41E-01	-0,081489	-801,8	-786,9	1,8	-1179,8
36	1200	-0,0683	-1144	7,84E-01	-0,068390	-668,0	-659,5	1,3	-983,0

Z tabulky bylo znatelné, že napětí vypočtené Stoneyho formulí a výsledky z MKP se příliš nelišily. Z důvodu porovnání jednotlivých napětí byly v tabulce dopočteny hodnoty relativní odchylky δ_σ . Pro vzorky s tloušťkou vrstvy $h_2 \in \{242; 300; 600\} \text{ nm}$ se relativní chyba pohybovala v rozmezí 0,3–0,6 %. U vzorků s tloušťkou vrstvy $h_2 = 1200 \text{ nm}$ se relativní chyba δ_σ pohybovala mezi 1,2–1,9 %, což byla odchylka sice vyšší, než v předchozím případě, ale byla stále přijatelná. Hodnoty normálového napětí σ_x se zvětšovaly se vzrůstající tloušťkou nanosené vrstvy. Stejně tak i hodnoty maximálního smykového napětí $\tau_{zx,max}$ dopočteného z normálového napětí σ_{Ansys} .

5.2.5 Vliv materiálových charakteristik nanosené vrstvy

V kapitole 5.2 bylo počítáno napětí s vlastnostmi nanosené vrstvy, Youngovým modulem pružnosti E_2 a Poissonovou konstantou μ_2 , totožnými s vlastnostmi podložky.

$$E_2 = E_1 = 73000 \text{ MPa} \quad (5.4)$$

$$\mu_2 = \mu_1 = 0,16 \quad (5.5)$$

Podle poznatků z [17] a [18] by ovšem měl být Youngův modul pružnosti vrstvy o řád vyšší, a to $E_2 = 165000 \text{ MPa}$. Materiál vrstvy byl HfO_2 , přičemž samotné hafnium Hf spadá do skupiny kovů s Poissonovou konstantou $\mu = 0,3$. Stejná konstanta μ_2 byla uvedena i v [19].

Aby nedošlo k chybě způsobené nepřesností parametrů, byly sestaveny čtyři kombinace těchto materiálových charakteristik (tabulka 5.9).

Tabulka 5.9: Varianty materiálových charakteristik nanosené vrstvy.

Varianta	1	2	3	4
$E_2 \text{ [MPa]}$	73000	165000	73000	165000
$\mu_2 \text{ [-]}$	0,16	0,16	0,3	0,3

První varianta byla rozebrána v předchozí kapitole 5.2. Zbylé varianty byly spočteny obdobným způsobem, pouze s pozměněnými parametry podle tabulky 5.9. Pro všechny napětí z různých variant byla dále spočtena relativní odchylka $\delta_{\sigma,i}$ mezi i -tou a první variantou a z nich potom střední hodnota pro dané varianty (tabulka 5.10).

Tabulka 5.10: Střední hodnoty relativních odchylek variant materiálových charakteristik nanosené vrstvy.

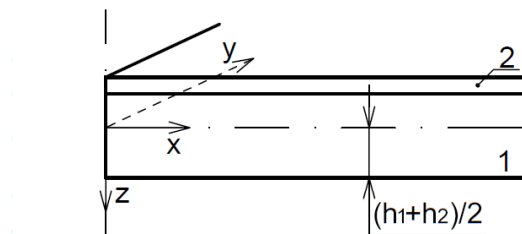
$$\begin{aligned} \delta_{\sigma,12}^- &= 0,4 \% \\ \delta_{\sigma,13}^- &= 0,2 \% \\ \delta_{\sigma,14}^- &= 0,4 \% \end{aligned}$$

Tento výsledek ukázal, že střední hodnota odchylek se pohybovala do 1 %. Vliv odlišných materiálových charakteristik tedy byl považován za zanedbatelný a dále byly uvažovány pouze hodnoty ze vztahů (5.4) a (5.5).

5.3 MKP model objemového tělesa

Jako reprezentativní vzorek byl vybrán vzorek č. 20 s tloušťkou vrstvy $h_2 = 300 \text{ nm}$ a relativní odchylkou křivostí $\delta_R = 27 \%$ (tabulka 2.3).

U modelu objemového tělesa byl souřadný systém definován tak, aby osy x a y ležely v radiálním směru vzorku a osa z procházela jeho středem a směřovala dolu (obrázek 5.14).



Obrázek 5.14: Orientace souřadného systému v Ansysu u objemového modelu.

5.3.1 Popis vstupů objemového MKP modelu

Geometrie

- Vzhledem k tomu, že se vzorky deformovaly symetricky vzhledem k hlavním osám elipsy, byl vytvořen čtvrtinový model objemového tělesa v I . kvadrantu s uvažováním rozměrů vzorku v kapitole 2.
- Na těleso byla nedefinovaná síť kvadratických prvků s 1 prvkem po tloušťce vrstvy h_2 , 2 prvky po tloušťce podložky h_1 a s 50 prvky na všech ostatních liniích. Síť byla hrubší než v případě prutového nebo axisymetrického tělesa z důvodu omezení studentské licence Ansysu, proto byla její hustota kontrolována v následující kapitole 5.3.2. Síť tělesa byla znázorněna na obrázku 5.15.

Materiál

- Materiálové charakteristiky byly pro objemový model použity stejné jako v předchozích modelech, tedy:

$$E_1 = E_2 = 73000 \text{ MPa}$$

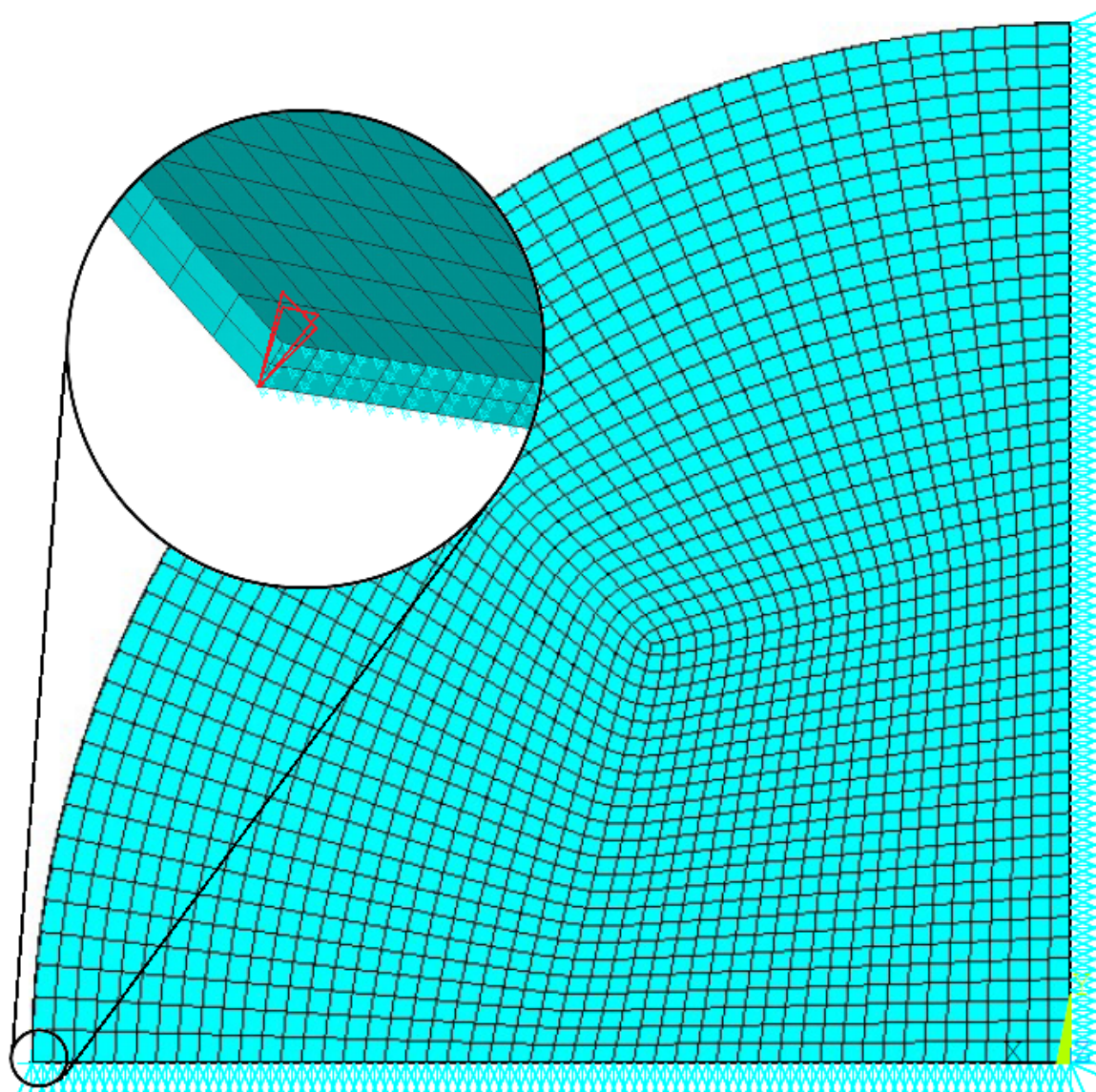
$$\mu_1 = \mu_2 = 0,16$$

$$\alpha_1 = 5.2e - 7 \text{ K}^{-1}; \alpha_2 \text{ je fiktivní proměnná}$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1 \text{ W/mmK}$$

Zatížení

- Bylo opět zvoleno fiktivní teplotní zatížení, generované pomocí $T_0 \pm \Delta T$, jako u předchozích modelů.



Obrázek 5.15: Upravené okrajové podmínky na vysítovaném objemovém modelu.

Vazby s okolím

- V rovinách řezu byly nadefinovány podmínky symetrie. Zamezení pohybu v ose z bylo uskutečněno pomocí podpěry na okraji vzorku na ose x . Podle experimentálních hodnot průhybů se vzorky s eliptickými izoliniemi nedotýkaly podložky po celém svém obvodu, jako vzorky s kruhovými izoliniemi, ale pouze v jednom radiálním směru. Ve všech ostatních radiálních směrech byly okraje vzorku ve vzduchu. Odpovídající okrajové podmínky jsou zobrazeny na obrázku 5.15.

Pro určení napětí na vzorcích s eliptickými izoliniemi byly z experimentálních dat odečteny maximální průhyby $w_{max,1,exp}$ a $w_{max,2,exp}$, což jsou průhyby vzorku v osách x a y . Odtud byly pomocí polynomických regresních parametrů druhého řádu, které byly zjišťovány pro jednotlivé tloušťky nanosené vrstvy h_2 a byly sepsány v dodatku B, dopočteny hodnoty součinitelů teplotní roztažnosti $\alpha_{2,1}$ a $\alpha_{2,2}$.

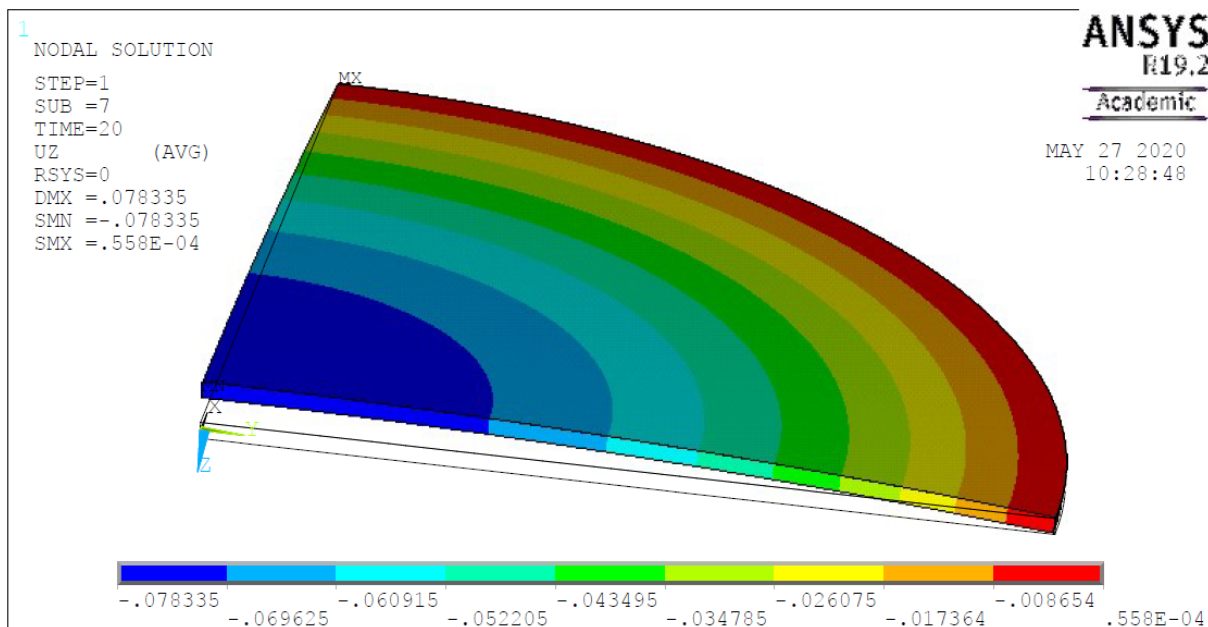
Vzhledem k poznatkům z kapitoly 5.1.2 byly všechny výpočty v této kapitole prováděny pro $\Delta T = 0,01 K$.

5.3 MKP MODEL OBJEMOVÉHO TĚLESA

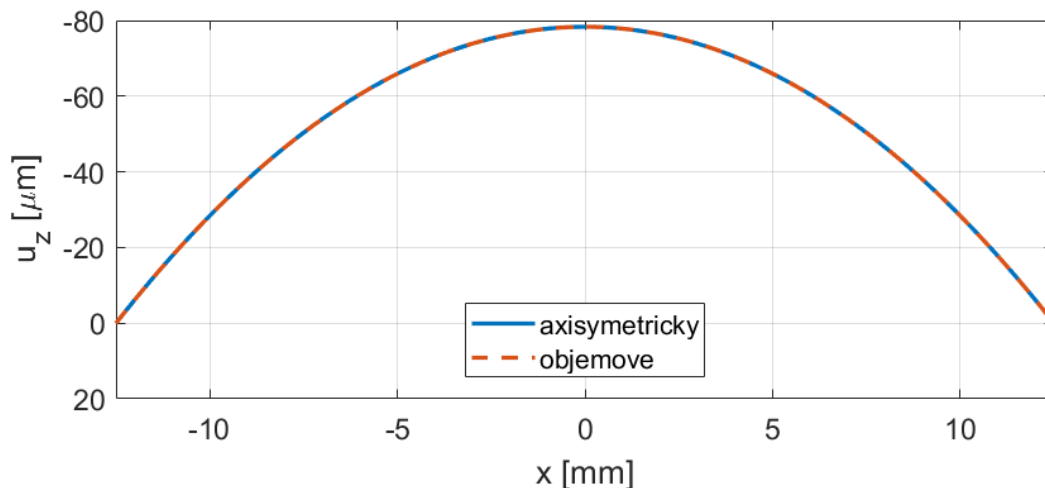
5.3.2 Porovnání axisymetrického a objemového modelu tělesa

Vzhledem k viditelně hrubší síti objemového tělesa oproti axisymetrickému modelu bylo potřeba ověřit, zda je zvolená síť dostatečná. Z toho důvodu byl vzorek č. 32, který byl v kapitole 5.2 počítán pomocí modelu axisymetrického tělesa, vymodelován jako objemové těleso a výsledky byly porovnávány.

Průhyb, zobrazený na obrázku 5.16 a v grafu 5.17, vycházel v soustředných kružnicích a jeho průběh a maximální hodnota se pro jednotlivé modely lišila minimálně.

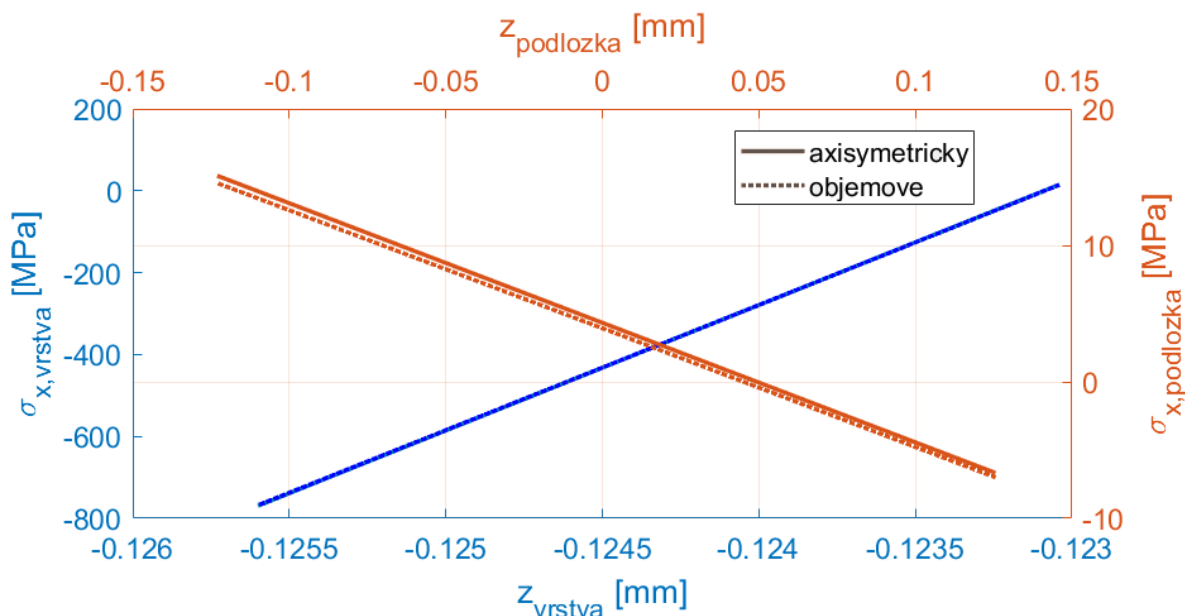


Obrázek 5.16: Průhyb objemového tělesa vzorku č. 32 v ose z (automatické měřítko zobrazení).



Obrázek 5.17: Porovnání průhybu vzorku č. 32 pro axisymetrické a objemové těleso.

V grafu na obrázku 5.18 byl potom zobrazen průběh normálového napětí σ_x po tloušťce. Výsledky normálového napětí spočtené na axisymetrickém a objemovém modelu se rozcházejí zhruba o 1 MPa, ovšem průběhy byly velmi podobné.



Obrázek 5.18: Porovnání normálového napětí vzorku č. 32 pro axisymetrické a objemové těleso.

Smykové napětí na rozhraní vrstev nebylo porovnáváno z důvodu nedostatečné hustoty sítě na okraji vzorku (kapitola 5.1.7).

Pro celkové porovnání modelů byly spočteny relativní odchylky, podle rovnice 5.6, pro maximální hodnotu posuvů a normálových napětí a výsledky byly uvedeny v tabulce 5.11.

$$\delta_x = 100 \left| \frac{x_{objem} - x_{axisym}}{x_{axisym}} \right|, \quad (5.6)$$

kde x je jedna z počítaných veličin (u_z , σ_x).

Tabulka 5.11: Porovnání výsledků axisymetrického a objemového modelu vzorku č. 32.

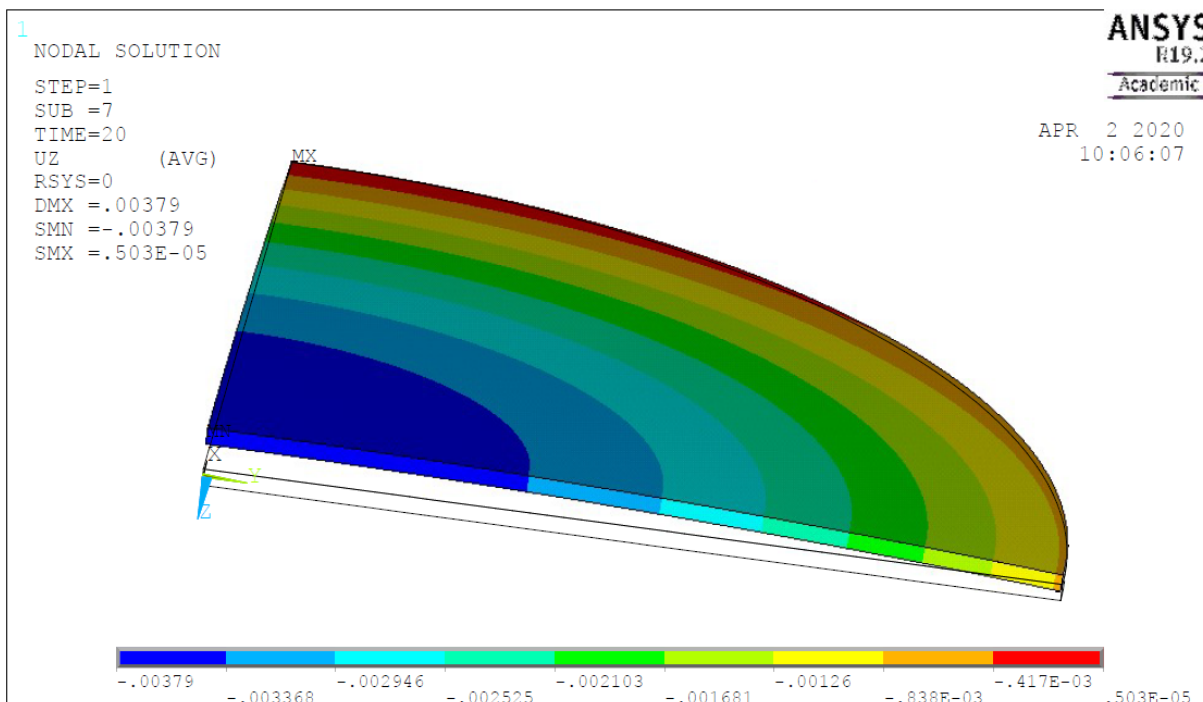
	u_z [mm]	σ_x [MPa]
axisymetricky	-0,078346	-769,4
objemově	-0,078335	-768,1
δ_x [%]	0,01	0,2

Relativní odchylka se pro maximální posuv u_z a maximální normálové napětí σ_x pohybovala do velikosti 1 %. Rozdíly ve výsledcích byly tedy zanedbatelné a síť objemového modelu byla považována za dostatečně jemnou pro výpočet těchto veličin.

5.3 MKP MODEL OBJEMOVÉHO TĚLESA

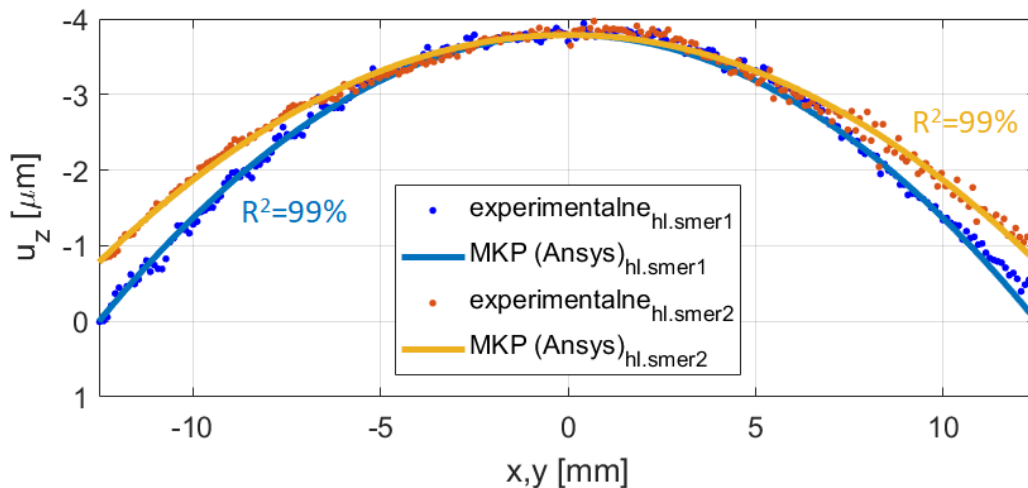
5.3.3 Průhyb objemového tělesa

Výsledný maximální průhyb vzorku (obrázek 5.19) odpovídal datům z experimentálního měření.



Obrázek 5.19: Průhyb objemového tělesa v ose z (automatické měřítko zobrazení).

Ovšem v případě vzorků s eliptickými izoliniemi bylo třeba kontrolovat průběhy průhybů ve směrech os x a y . Z toho důvodu byla data průhybu v osách převedena do Matlabu a porovnána s experimentálně určenými hodnotami (obrázek 5.20).

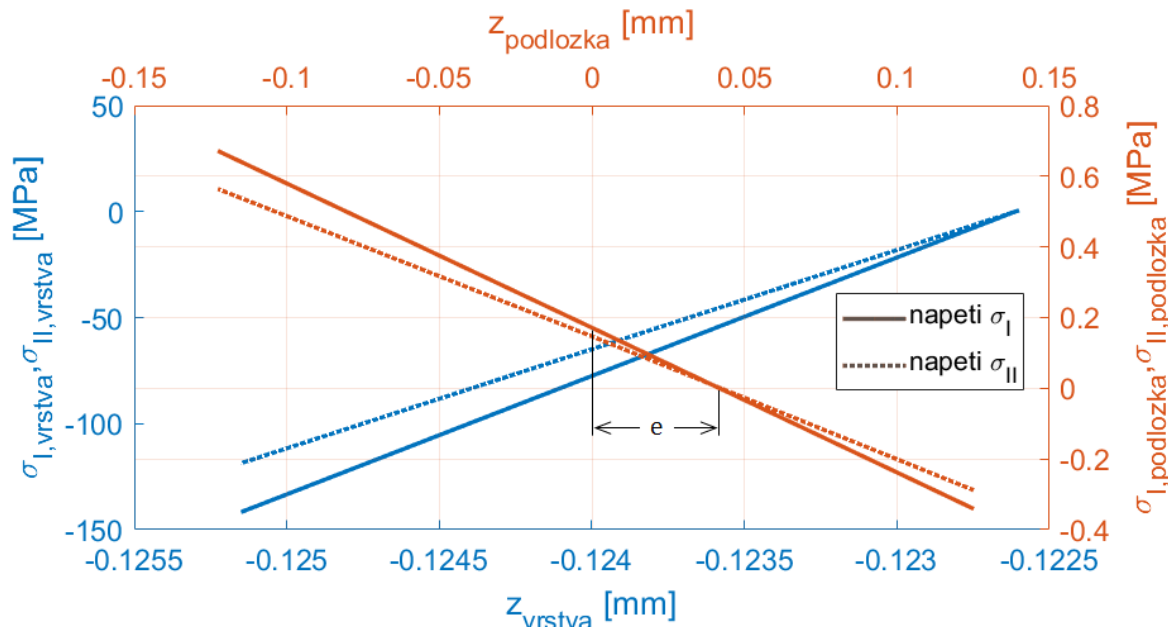


Obrázek 5.20: Porovnání průhybů experimentálního měření a MKP.

Jak bylo znatelné z obrázku 5.20, naměřené hodnoty s menšími odchylkami v případě vzorku č. 20 odpovídaly datům spočteným pomocí MKP.

5.3.4 Normálové napětí na objemovém tělese

Na anizotropním tělese vznikaly dvě normálová napětí σ_I a σ_{II} , která působila ve směru os x a y . Obě měly podobný průběh s tím, že v podložce se pohybovaly kolem nulové hodnoty a v nanosené vrstvě směrem k povrchu jejich absolutní hodnoty řádově rostly. Průběhy byly znázorněny v grafu na obrázku 5.21.



Obrázek 5.21: Graf průběhu normálových napětí σ_I a σ_{II} po tloušťce.

Na průbězích byl opět znatelný posuv neutrální osy vzorku, která byla v tomto případě $e = 0,04 \text{ mm}$. Hodnota se tedy opět blížila Stoneyho formulaci posuvu neutrální osy (4.29) stejně jako v případě axisymetrických vzorků.

Normálová napětí bylo možné porovnat s hodnotami spočtenými Stoneyho formulí, přičemž napětí σ_I odpovídalo Stoneyho napětí pro poloměr křivosti R_1 a napětí σ_{II} odpovídalo Stoneyho napětí pro poloměr křivosti R_2 . Hodnoty napětí pak byly sepsány v tabulce 5.12, odkud bylo patrné, že napětí se lišila o několik jednotek MPa .

Tabulka 5.12: Porovnání normálových napětí ve vrstvě objemového tělesa.

	MKP	Stoney
σ_I [MPa]	-141,7	-146,8
σ_{II} [MPa]	-118,7	-115,9

5.3.5 Smykové napětí na rozhraní vrstev objemového tělesa

Smykové napětí τ_{zx} určované na rozhraní vrstev vzorku bylo i pro případ objemových těles vypočteno analytickým vztahem (4.46). Přičemž maximum se opět nachází v řádu mikrometrů od okraje vzorku a odpovídá velikosti vypočtené pomocí (4.47).

$$\tau_{zx,max} = -208,6 \text{ MPa} \quad (5.7)$$

$$\tau_{zy,max} = -174,6 \text{ MPa} \quad (5.8)$$

5.3.6 Výsledky vzorků s eliptickými izoliniemi

Ze všech vzorků byly odděleny ty, které odpovídaly případu s kruhovými izoliniemi (kapitola 2.1) a ty, které měly odlišné znaménko u poloměrů křivostí R_1 a R_2 a tvořily tedy sedlo (kapitola 2.3). Zbylé vzorky byly rozděleny do skupin podle tloušťky nanesené vrstvy h_2 . Z experimentálních dat byly odečteny hodnoty maximálního průhybu $w_{max,1,exp}$ a $w_{max,2,exp}$, odkud byly spočteny jednotlivé poloměry křivosti R_1 a R_2 pomocí (4.2). K dopočtu součinitelů teplotní roztažnosti v jednotlivých směrech byly použity regresní parametry (pro skupiny vzorků rozepsané v dodatku B), které byly, stejně jako v axisymetrickém případě, polynomické druhého řádu (tabulka 5.13).

Tabulka 5.13: Seznam vzorků s eliptickými izoliniemi.

číslo vzorku	naměřené hodnoty			dopočtené hodnoty			citlivostní analýza		
	h_2 [nm]	$w_{max,1,exp}$ [mm]	$w_{max,2,exp}$ [mm]	R_1 [mm]	R_2 [mm]	δ_R [%]	$\alpha_{2,1}$ [1/K]	$\alpha_{2,2}$ [1/K]	$w_{max,Ansys}$ [mm]
6	20	-1,70E-04	-1,53E-04	-4,60E+05	-5,11E+05	11	1,11E-01	1,00E-01	-1,70E-04
7	100	-6,20E-04	-4,90E-04	-126008	-159439	27	8,24E-02	6,50E-02	-6,20E-04
8	100	-5,50E-04	-4,80E-04	-142045	-162760	15	7,30E-02	6,37E-02	-5,50E-04
9	100	-1,00E-03	-9,00E-05	-78125	-868056	1011	1,33E-01	1,16E-02	-1,00E-03
10	100	-5,50E-04	-4,73E-04	-142045	-165169	16	7,30E-02	6,27E-02	-5,50E-04
11	100	-6,80E-04	-3,50E-04	-114890	-223214	94	9,04E-02	4,63E-02	-6,80E-04
13	242	-0,0022	-0,0017	-35511	-45956	29	1,21E-01	1,05E-01	-0,002192
14	242	-0,0036	-0,0016	-21701	-48828	125	1,93E-01	8,82E-02	-0,003585
15	242	-0,0032	-0,0007	-24414	-111607	357	1,82E-01	4,96E-02	-0,003187
18	242	-0,0023	-0,0017	-33967	-45956	35	1,21E-01	8,82E-02	-0,002300
20	300	-0,0038	-0,0030	-20559	-26042	27	1,69E-01	1,34E-01	-0,003790
21	300	-0,0042	-0,0030	-18601	-26042	40	1,82E-01	1,29E-01	-0,004193
23	300	-0,0080	-0,0042	-9766	-18601	90	3,51E-01	3,07E-01	-0,007961

Tabulka 5.14: Seznam vzorků s eliptickými izoliniemi s dopočteným napětím.

číslo vzorku	Ansys				Stoney		odchylky hl. napětí	
	σ_I [MPa]	σ_{II} [MPa]	τ_{zx} [MPa]	τ_{zy} [MPa]	σ_{R1} [MPa]	σ_{R2} [MPa]	$\delta_{\sigma R1}$ [%]	$\delta_{\sigma R2}$ [%]
6	-95,1	-88,2	-139,94	-129,75	-98,5	-88,6	3,6	0,5
7	-69,4	-58,3	-102,07	-85,83	-71,8	-56,8	3,6	2,7
8	-62,2	-56,2	-91,49	-82,76	-63,7	-55,6	2,5	1,1
9	-100,8	-24,5	-148,40	-36,10	-115,9	-10,4	14,9	57,5
10	-62,1	-55,5	-91,32	-81,66	-63,7	-54,8	2,7	1,2
11	-73,1	-45,3	-107,60	-66,71	-78,8	-40,6	7,8	10,5
13	-101,3	-83,6	-149,13	-123,04	-105,3	-81,4	3,9	2,6
14	-158,1	-88,7	-232,71	-130,46	-172,4	-76,6	9,0	13,6
15	-135,9	-49,4	-199,93	-72,65	-153,2	-33,5	12,8	32,1
18	-105,8	-84,3	-155,72	-124,08	-110,1	-81,4	4,1	3,5
20	-141,7	-118,7	-208,57	-174,64	-146,8	-115,9	3,6	2,4
21	-155,2	-120,8	-228,31	-177,76	-162,2	-115,9	4,6	4,1
23	-286,6	-179,7	-421,74	-264,37	-309,0	-162,2	7,8	9,7

U všech vzorků byla dále provedena kontrola průhybů ve směrech os x a y počítaných pomocí MKP s experimentem v programu Matlab. Validace průhybů vzorku č. 20 byla

zobrazena v grafu na obrázku 5.20 a průhyby ostatních vzorků byly uvedeny v grafech na obrázcích v dodatku C.

Pro všechny vzorky byla potom dopočítána normálová napětí σ_I a σ_{II} pomocí MKP, smyková napětí τ_{zx} a τ_{zy} a napětí podle Stoneyho formule σ_{R_1} a σ_{R_2} (tabulka 5.14). Nakonec byly dopočteny hodnoty odchylek normálových napětí a napětí podle Stoneyho formulí, tedy odchylky σ_I s σ_{R_1} a σ_{II} s σ_{R_2} .

Hodnoty relativních odchylek δ_σ v tabulce 5.14 ukazovaly, že jsou závislé nejen na míře odchylky poloměrů křivosti δ_R , ale i na tloušťce nanesené vrstvy h_2 . Kromě dvou případů, kdy relativní odchylka poloměrů křivosti δ_R přesahovala hodnotu 200 %, se relativní odchylka největšího normálového napětí pohybovala do 10 %. S rostoucí tloušťkou nanesené vrstvy měla absolutní hodnota napětí σ_I převážně tendenci se zvyšovat. Odchylky napětí, v jednotlivých skupinách podle tloušťky vrstev, vykazovaly vzorky, kde platí $R_1 : R_2 < 1 : 2$ (vzorky č. 9, 14, 15) a vzorek č. 6. Ten patřil do skupiny vzorků s tloušťkou vrstvy $h_2 = 20 \text{ nm}$, u které experimentální měření průhybů vykazovalo velký šum, což snižovalo celkovou přesnost výpočtu. Současně se vzrůstajícím normálovým napětím stoupalo i maximální smykové napětí τ_{zx} .

6 Vztahy pro výpočet napětí odpovídajících hodnotám MKP

Konečné hodnoty napětí počítané pomocí MKP v kapitole 5 podléhaly několika iteracím. Pro rychlejší dopočet hodnot bez programu Ansys, byly pomocí regrese v programu Excel [20] vytvořeny odpovídající vztahy.

Vzhledem k tomu, že byl použit pouze jeden typ nanášené vrstvy, byly zvoleny pouze dvě proměnné, tloušťka nanášené vrstvy h_2 a poloměr křivosti vzorku R_i . Jako konstantní byla uvažována tloušťka podložky h_1 , průměr vzorku l_0 a materiálové charakteristiky obou materiálů, Youngovy moduly pružnosti $E_1 = E_2$ a Poissonovy konstanty $\mu_1 = \mu_2$.

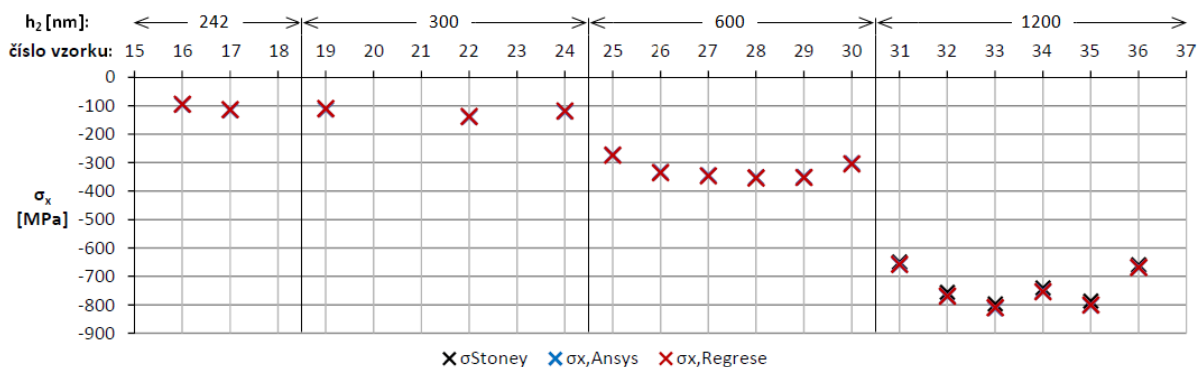
Napětí vykazovala mocninnou závislost na proměnných h_2 a R_i . Mocnina tedy byla zjištěna a s takto upravenou proměnnou byla provedena lineární regrese. Vztahy vznikly samostatně pro vzorky s kruhovými a eliptickými izoliniemi. Podle p-hodnoty koeficientů regresní analýzy, která by neměla přesahovat hodnotu 0,05, bylo určeno, že napětí budou záviset pouze na součtu proměnných v určitých mocninách, a nikoliv na jejich součinu. Koeficienty determinace R^2 u konečných modelů se pohybovaly v rozmezí 99–100 % stejně jako korigované koeficienty determinace R_{adj}^2 . Regresní modely tedy bylo možné považovat za kvalitní. Při predikci pro další vzorky by ovšem i při vysokém R^2 modelu mohlo dojít k chybě vlivem toho, že vztahy byly vytvořeny pro 9–17 vzorků, což by se dalo považovat za relativně malý statistický soubor dat.

6.1 Vztahy pro vzorky s kruhovými izoliniemi

U vzorků s kruhovými izoliniemi byly provedeny regresní analýzy pro 17 hodnot napětí s tloušťkami nanášené vrstvy od 242 nm do 1200 nm.

Pro normálové napětí σ_x byl vytvořen vztah (6.1). Ten vykazuje absolutní chyby, oproti hodnotě napětí spočtené pomocí MKP, v intervalu $\Delta_{\sigma_x} \in \langle 0; 2 \rangle$ MPa. Srovnání napětí spočtených Stoneyho formulí, programem Ansys a regresním vztahem byly pro jednotlivé vzorky zobrazeny v grafu na obrázku 6.1.

$$\sigma_x = - (0,21 - 0,07819h_2^{1,2605} + 66570,2(-R)^{-0,563}) \quad (6.1)$$



Obrázek 6.1: Porovnání normálových napětí na vzorku s kruhovými izoliniemi.

6 VZTAHY PRO VÝPOČET NAPĚTÍ ODPOVÍDAJÍCÍCH HODNOTÁM MKP

Maximální smykové napětí $\tau_{zx,max}$ lze spočítat z regresí vypočteného normálového napětí pomocí vztahu (4.47), který je v následující formě

$$\tau_{zx,max} = \tau_{zx}(\alpha = \alpha_{max}) = \frac{\sigma_x}{e\alpha_{max}} = \frac{4\sigma_x}{e}.$$

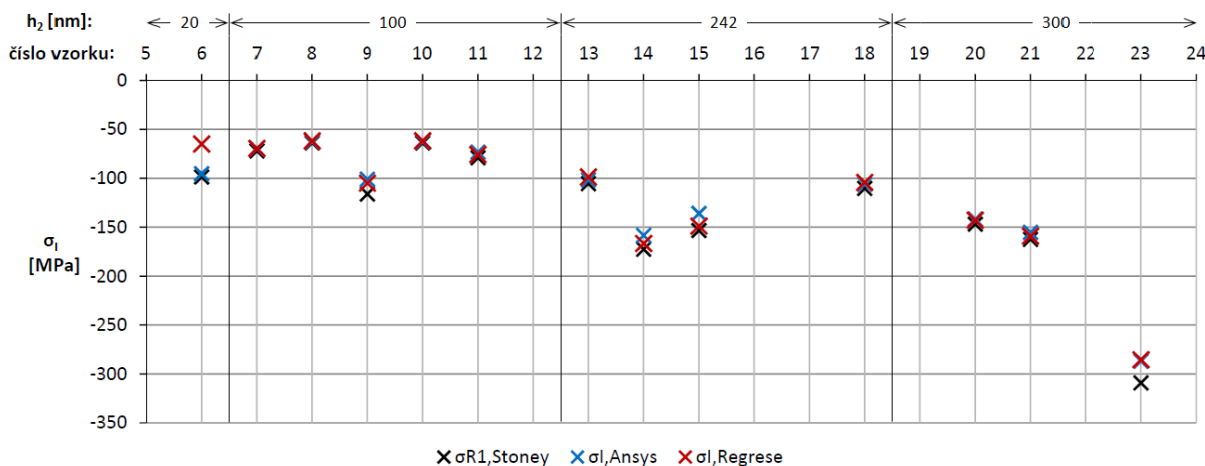
Vzniklé absolutní chyby se potom pohybovaly v rozmezí $\Delta_{\tau_{zx}} \in \langle 0, 1; 2, 9 \rangle MPa$.

6.2 Vztahy pro vzorky s eliptickými izoliniemi

Dále byly provedeny regresní analýzy pro vzorky s eliptickými izoliniemi, kterých je 13. Z tohoto souboru byl ovšem vyřazen vzorek č. 6, z důvodu velkých nepřesností experimentálně naměřených dat a malého koeficientu determinace R^2 , a vzorky 9, 14 a 15, pro které platí $R_1 : R_2 < 1 : 2$ což, jak bylo zmíněno v předchozí kapitole 5.3.6, vedlo k odchylkám vypočteného normálového napětí oproti ostatním vzorkům v dané skupině tloušťky vrstvy h_2 . Regrese tedy byla počítána pouze z devíti vzorků, a to s tloušťkami nanosené vrstvy od 100 nm do 300 nm.

Normálové napětí σ_I bylo popsáno vztahem (6.2), který vykazuje absolutní chyby v intervalu $\Delta_{\sigma_I} \in \langle 0, 1; 3, 8 \rangle MPa$. Při uvažování hodnot napětí i u vyřazených vzorků se maximální absolutní chyba dostala až k hodnotě $\Delta_{\sigma_I} = 30, 3 MPa$. Porovnání napětí bylo zobrazeno v grafu na obrázku 6.2.

$$\sigma_I = - (12, 98 - 1, 798h_2^{0,8255} + 40239(-R_1)^{-0,484}) \quad (6.2)$$

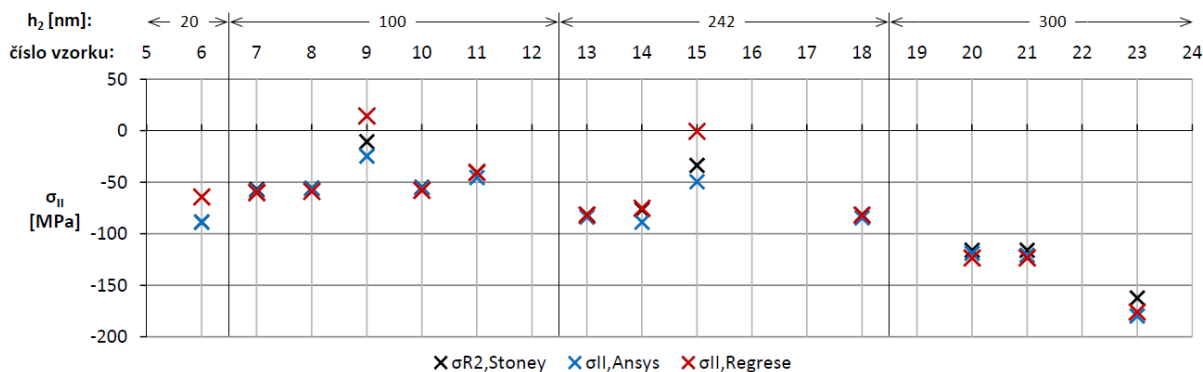


Obrázek 6.2: Porovnání normálových napětí σ_I na vzorku s eliptickými izoliniemi.

Normálové napětí σ_{II} , které se vázalo k poloměru křivosti R_2 , vyjadřoval vztah (6.3). Absolutní chyba výpočtu se pohybovala v rozmezí $\Delta_{\sigma_{II}} \in \langle 1, 6; 5, 1 \rangle MPa$, s uvažováním vyřazených vzorků bylo $\Delta_{\sigma_{II,max}} = 48, 8 MPa$. Srovnání napětí pro jednotlivé vzorky bylo zobrazeno v grafu na obrázku 6.3.

$$\sigma_{II} = - (7, 9 - 2, 4733h_2^{0,7704} + 32900(-R_2)^{-0,457}) \quad (6.3)$$

6.2 VZTAHY PRO VZORKY S ELIPTICKÝMI IZOLINIEMI



Obrázek 6.3: Porovnání normálových napětí σ_{II} na vzorku s eliptickými izoliniemi.

Smyková napětí τ_{ij} bylo, stejně jako v případě vzorků s kruhovými izoliniemi, možné vypočítat z normálových napětí σ_i získaných regresí za pomoci vztahu (4.47).

Absolutní chyba smykového napětí na ose x τ_{zx} se pohybovala v rozmezí $\Delta_{\tau_{zx}} \in \langle 0, 1; 5, 6 \rangle MPa$ a při uvažování vyřazených vzorků její maximální hodnota byla $\Delta_{\tau_{zx},max} = 44,6 MPa$.

Smykové napětí na ose y τ_{zy} vykazovalo absolutní chyby v intervalu $\Delta_{\tau_{zy}} \in \langle 2, 4; 7, 4 \rangle MPa$ a při uvažování vyřazených vzorků byla maximální absolutní chyba $\Delta_{\tau_{zy},max} = 71,9 MPa$.

7 Závěr

Diplomová práce se zabývala stanovením napětí vznikajícího v tenkých vrstvách nanesených na kruhové podložce pomocí přístupu konečněprvkového modelování. Pro zpracování byla dodána data z experimentálního měření, která obsahovala geometrii vzorků a jejich průhyby před a po deponaci vrstvy. Ukázalo se, že data lze rozdělit nejen podle tloušťky nanesené vrstvy, ale také podle jejich typu průhybu. Část vzorků, především se silnější nanesenou vrstvou, se díky málo rozdílným poloměrům křivosti v hlavních směrech dala považovat za izotropní. Jejich izolinie tedy při průhybu tvořily soustředné kružnice. Ostatní vzorky při porovnání poloměrů křivosti vykazovaly spíše anizotropní chování. Zároveň bylo zjištěno, že vzorky se deformují symetricky, což je umožnilo zjednodušit na ortotropní případ. Ze zbývajících vzorků, které nebyly uvažovány jako izotropní, byla vyčleněna část, kdy jednotlivé poloměry křivosti měly opačné znaménko, a zbylé vzorky byly pojmenovány jako případ s eliptickými izoliniemi. Data průhybů ve směrech os x a y byla dále prokládána polynomy, přičemž bylo zjištěno, že v naprosté většině případů odpovídají polynomu druhého řádu.

Jedním z cílů práce bylo porovnat vypočtená data s napětím spočteným Stoneyho formulí, a proto byla provedena rešerše v této oblasti. Zde bylo sepsáno odvození Stoneyho formule pro uniaxiální napětí, a ta byla dále rozšířena pro ekvibiaxiální napětí.

Aby mohly být kontrolovány výsledky spočtené pomocí MKP, byla vypracována kapitola, kde byl vzorek zjednodušen na prut s obdélníkovým průřezem. Na prutu byl předpokládán konstantní ohybový moment, což vedlo na případ s prutem zatíženým dvojicí momentů. Při porovnání průhybu naměřeným experimentálně a spočteným analyticky, docházelo průměrně k relativní odchylce 4 %. Dále byl zkoumán vliv excentricity na řešení, kdy byl porovnáván přístup podle Stoneyho, přístup s uvažováním malé křivosti a přístup s využitím teorie silně zakřivených prutů. Výsledky vypočtené teorií silně a slabě zakřivených prutů se pohybovaly v zanedbatelně malých hodnotách. Hodnota posuvu neutrální osy Stoneyho přístupem byla o něco větší a její velikost odpovídala posuvu neutrální osy, který byl spočten v pozdějších kapitolách programem Ansys. Zároveň byla vyjádřena ohybová tuhost celého průřezu, odkud vyplynulo, že velikost tuhosti nanesené vrstvy má zanedbatelnou velikost. Dále bylo odvozeno smykové napětí na rozhraní vrstev, jako reakce na změnu normálového napětí ve vrstvě, které dosahuje maximálních hodnot ve vzdálenosti menší než $1 \mu m$ od okraje vzorku.

Pro samotný MKP výpočet byly zhotoveny tři modely:

- První byl model prutu, který měl za úkol verifikovat výsledky vypočtené analyticky. Při porovnání normálového napětí ve vrstvě spočteného analyticky, pomocí MKP a Stoneyho formulí docházelo k relativní odchylce maximálně 1 %. U smykového napětí se kvůli studentské licenci Ansysu nepodařilo dostatečně zjemnit síť natolik, aby bylo dosaženo maximální hodnoty. Ovšem vypočtené hodnoty napětí ukazovaly na konvergenci MKP výsledku k analytickému.
- Druhý byl model axisymetrického tělesa, u kterého bylo uvažováno ekvibiaxiální napětí ve vrstvě. Jako axisymetrické těleso byly počítány vzorky, které měly malé odchylky poloměrů křivosti, a byly tedy zjednodušeny na vzorky s kruhovými izoliniemi. Normálové napětí spočtené pomocí MKP v tomto případě rostlo se vzrůstající tloušťkou nanesené vrstvy a stejně tomu bylo i v případě maximálního smykového napětí vznikajícího na okrajích vzorku. Napětí spočtené pomocí Stoneyho formule

rostlo podobně, přičemž odchylka mezi hodnotami podle Stoneyho a MKP výpočtu také stoupala v závislosti na tloušťce nanesené vrstvy.

- Třetím modelem bylo objemové těleso, které bylo z důvodu výpočetní kapacity počítáno jako čtvrtinový model, ovšem i přes to mělo oproti předchozím dvěma případům znatelně řidší síť. Dostatečná jemnost sítě byla ověřena pomocí výsledků axisymetrického tělesa. Pomocí objemového modelu byly počítány vzorky spadající do skupiny případů s eliptickými izoliniemi. Zde byly zjišťovány dvě největší absolutní hodnoty normálových napětí a dvě smyková napětí. Spočtená napětí pomocí MKP i Stoneyho formule nyní rostly v závislosti na tloušťce nanesené vrstvy, ale i na odchylce poloměrů křivosti hlavních směrů vzorku. Při porovnání Stoneyho formulace napětí a hodnot napětí spočteného MKP v tomto případě docházelo k větším odchylkám, než tomu bylo v případě vzorků s kruhovými izoliniemi.

Nakonec byly výsledky z konečněprvkových modelů podrobeny regresní analýze. Díky té byly sestaveny vztahy odpovídající hodnotám jednotlivých napětí s přesností 99–100 %, která byla posuzována pomocí koeficientů determinace.

Literatura

- [1] OHLÍDAL, M. a K. PÁLENÍKOVÁ. Možnosti optického profilometru MicroProf FRT při 3D hodnocení kvality povrchu. *Jemná mechanika a optika*. Praha: Fyzikální ústav Akademie věd České republiky, 2004, **49**(9), 251-255. ISSN 0447-6411.
- [2] OHLÍDAL, Miloslav, Ivan OHLÍDAL, Pavel NÁDASKÝ, Jakub KLUS a Jiří JANKŮJ. *Optical measurement of mechanical stress in Al₂O₃ thin films*. Brno.
- [3] Corning HPFS® 7979, 7980, 8655 Fused Silica: Optical Materials Product Information. In: *Corning* [online]. Corning Incorporated, 2019, 2014 [cit. 2019-12-20]. Dostupné z: <https://www.corning.com/media/worldwide/csm/documents/5bf092438c5546dfa9b08e423348317b.pdf>
- [4] Hafnium Oxide. *American Elements: The Advanced Materials Manufacturer* [online]. 2020 [cit. 2020-02-17]. Dostupné z: <https://www.americanelements.com/hafnium-oxide-12055-23-1>
- [5] JANSSEN, G.C.A.M., M.M. ABDALLA, F. VAN KEULEN, B.R. PUJADA a B. VAN VENROOY. Celebrating the 100th anniversary of the Stoney equation for film stress: Developments from polycrystalline steel strips to single crystal silicon wafers. *Thin Solid Films* [online]. 2009, **517**(6), 1858-1867 [cit. 2020-01-23]. DOI: 10.1016/j.tsf.2008.07.014. ISSN 00406090. Dostupné z: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0040609008007669>
- [6] ABADIAS, Grégory, Eric CHASON, Jozef KECKES, et al. *Review Article: Stress in thin films and coatings* [online]. 2018, **36**(2) [cit. 2020-01-27]. DOI: 10.1116/1.5011790. ISSN 0734-2101. Dostupné z: <http://avs.scitation.org/doi/10.1116/1.5011790>
- [7] STONEY, G.G. The Tension of Metallic Films Deposited by Electrolysis. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. 1909, **82**(553), 172-175. DOI: 10.1098/rspa.1909.0021. ISSN 1364-5021. Dostupné také z: <http://rspa.royalsocietypublishing.org/cgi/doi/10.1098/rspa.1909.0021>
- [8] ARDIGO, Maria Rosa, Maher AHMED a Aurélien BESNARD. Stoney Formula: Investigation of Curvature Measurements by Optical Profilometer. *Advanced Materials Research* [online]. Switzerland: Trans Tech Publications, 2014, **996**, 361-366 [cit. 2020-04-23]. DOI: 10.4028/www.scientific.net/AMR.996.361. ISSN 1662-8985. Dostupné z: <https://www.scientific.net/AMR.996.361>
- [9] BURŠA, Jiří a Přemysl JANÍČEK. Evaluation of Moduli of Elasticity for Thin Layers. *Engineering Mechanics*. Brno, 2003, **10**(1), 149-158.
- [10] JANÍČEK, Přemysl, Emanuel ONDRÁČEK, Jan VRBKA a Jiří BURŠA. *Mechanika těles: pružnost a pevnost I*. 3. přeprac. vyd., v Akademickém nakladatelství CERM 1. vyd. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2004. ISBN 80-214-2592-X.
- [11] Stress, Strain and Deformation: Axial Loading. In: *University of Pittsburgh* [online]. Pittsburgh [cit. 2020-03-04]. Dostupné z: <https://pitt.edu/qiw4/Academic/ENGR0135/Chapter4-2.pdf>

LITERATURA

- [12] NIX, William D. An incomplete set of class notes for a graduate class at Stanford University: Materials Science and Engineering 353, Mechanical Properties of Thin Films. In: *IMechanica: web of mechanics and mechanicians* [online]. 2014, 2005 [cit. 2020-06-01]. Dostupné z: <https://imechanica.org/files/353%20Class%20Notes%202005.pdf>
- [13] MURAKAMI, MASANORI, TUNG-SHENG KUAN a ILAN A. BLECH. Mechanical Properties of Thin Films on Substrates. *Preparation and Properties of Thin Films* [online]. Elsevier, 1982, 1982, , 163-210 [cit. 2020-06-01]. DOI: 10.1016/B978-0-12-341824-1.50010-0. ISBN 9780123418241. Dostupné z: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/B9780123418241500100>
- [14] ALECK, B. J. Thermal Stresses in Rectangular Plate Clamped along an Edge. *Journal of Applied Mechanics*. 1949, **16**(118).
- [15] TRANTER, C. J. a J. W. CRAGGS. Stresses near the end of a long cylindrical shaft under non-uniform pressure loading. *Philosophical Magazine*. 1947, **38**(214).
- [16] DOERNER, Mary F. a William D. NIX. Stresses and deformation processes in thin films on substrates. *Critical Reviews in Solid State and Materials Sciences* [online]. 1988, **14**(3), 225-268 [cit. 2020-06-01]. DOI: 10.1080/10408438808243734. ISSN 1040-8436. Dostupné z: <http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/10408438808243734>
- [17] BERDOVA, Maria, X. LIU, C. WIEMER, A. LAMPERTI, G. TALLARIDA, E. CIANCI, M. FANCIULLI a S. FRANSSILA. Hardness, elastic modulus, and wear resistance of hafnium oxide-based films grown by atomic layer deposition. *Journal of Vacuum Science & Technology A* [online]. 2016, **34**(5) [cit. 2020-04-27]. DOI: 10.1116/1.4961113. Dostupné z: <https://doi.org/10.1116/1.4961113>
- [18] VENKATACHALAM, Dinesh, J. BRADBY, M. SALEH, S. RUFFELL a R. ELLIMAN. Nanomechanical properties of sputter-deposited HfO₂ and Hf_xSi_{1-x}O₂ thin films. *Journal of Applied Physics* [online]. 2011, **110**(4), 043527-043527-5 [cit. 2020-04-27]. DOI: 10.1063/1.3627155. Dostupné z: https://www.researchgate.net/publication/234861097_Nanomechanical_properties_of_sputter-deposited_HfO2_and_HfxSi1-xO2_thin_films
- [19] ILIC, B., S. KRYLOV a H. G. CRAIGHEAD. Young's modulus and density measurements of thin atomic layer deposited films using resonant nanomechanics. *Journal of Applied Physics* [online]. 2010, **108**(4), 044317 [cit. 2020-04-27]. DOI: 10.1063/1.3474987. ISSN 0021-8979. Dostupné z: <http://aip.scitation.org/doi/10.1063/1.3474987>
- [20] ŽÁK, Libor. *Pravděpodobnost a statistika II* [přednáška]. VUT FSI Brno, LS 2018.

Seznam použitých zkratek a symbolů

1		index podložky (první vrstvy)
2		index nanesené vrstvy (druhé vrstvy)
b	$[mm]$	šířka prutu
c_1, c_2	$[mm]$	konstanty
e	$[mm]$	posuv neutrální osy vzorku (excentricita)
E_i	$[MPa]$	Youngův modul pružnosti v tahu i -té vrstvy
$E(h_2)$	$[mm]$	střední hodnota tloušťky podložky
F_i	$[N]$	síla, kterou působí i -tá vrstva
h_i	$[mm]$	tloušťka i -té vrstvy
J_{yi}	$[mm^4]$	kvadratický moment i -té vrstvy
K	$[Nmm^2]$	ohybová tuhost
l_0	$[mm]$	průměr vzorku
M_{oy}	$[Nmm]$	ohybový moment
r	$[mm]$	poloměr neutrální plochy
R_{dep}, R_{nedep}	$[mm]$	poloměr křivosti deponovaného/nedeponovaného vzorku
R_i	$[mm]$	poloměr křivosti vzorku v i -tém směru
R^2	$[\%]$	koeficient determinace
R_{adj}^2	$[\%]$	korigovaný koeficient determinace
S_{ij}	$[MPa^{-1}]$	matice poddajnosti
T_0	$[K]$	teplota okolí
w, u_z	$[mm]$	průhyb vzorku v ose z
w_{dep}, w_{nedep}	$[mm]$	průhyb deponovaného/nedeponovaného vzorku
w_{max}	$[mm]$	maximální průhyb vzorku
$[x_0, y_0]$	$[mm, mm]$	souřadnice ideálního středu vzorku
$[x_1, y_1]$	$[mm, mm]$	souřadnice naměřeného středu vzorku
y'		neutrální osa
z'_i	$[mm]$	vzdálenost vrstvy i od neutrální osy

SEZNAM POUŽITÝCH ZKRATEK A SYMBOLŮ

α_i	$[K^{-1}]$	součinitel teplotní roztažnosti i -té vrstvy
α_{max}	$[-]$	konstanta pro výpočet smykového napětí
δ_i	$[\%]$	relativní odchylka veličiny i
Δ_i	$[[i]]$	absolutní chyba veličiny i
ΔT	$[K]$	změna teploty
ε_M	$[-]$	mechanické přetvoření
ε_T	$[-]$	teplotní přetvoření
ε_{tot}	$[-]$	celkové přetvoření
λ_i	$[W/mmK]$	tepelná vodivost v i -té vrstvě
μ	$[-]$	Poissonova konstanta
ν	$[mm/s]$	rychlost nanášení vrstvy
ρ	$[mm^{-1}]$	křivost vzorku
σ_i	$[MPa]$	normálové napětí v i -té vrstvě
σ_I, σ_{II}	$[MPa]$	normálová napětí ve vrstvě anizotropního vzorku
σ_x	$[MPa]$	normálové napětí v nanesené vrstvě
τ_{ij}	$[MPa]$	smykové napětí

A Data kombinací dvojic parametrů

A.1 Prutové těleso

Rozdělení výpočtů podle hodnot dT [K]															
0,001		0,01		0,1		1		5		10		50		130	
alpha2 [1/K]	wmax [mm]	alpha2 [1/K]	wmax [mm]	alpha2 [1/K]	wmax [mm]	alpha2 [1/K]	wmax [mm]	alpha2 [1/K]	wmax [mm]	alpha2 [1/K]	wmax [mm]	alpha2 [1/K]	wmax [mm]	alpha2 [1/K]	wmax [mm]
5,00E+00	0,04433	5,00E-01	0,044376	5,00E-02	0,044405	5,00E-03	0,044689	5,00E-05	0,003802	5,20E-06	0,003648	5,20E-06	0,018233	5,20E-06	0,047329
8,00E+00	0,071104	8,00E-01	0,071107	8,00E-02	0,071135	8,00E-03	0,071417	5,00E-04	0,023729	5,00E-05	0,007605	5,00E-05	0,038018	3,00E-05	0,075624
8,50E+00	0,075559	8,77E-01	0,077968	1,40E-01	0,124492	9,00E-03	0,080326	1,00E-03	0,045954	5,00E-04	0,047534	8,00E-05	0,051296	4,00E-05	0,087037
8,83E+00	0,0785	9,00E-01	0,080017					5,00E-03	0,222471	8,00E-04	0,074236	1,00E-04	0,060156	5,00E-05	0,098446
9,00E+00	0,080014									9,00E-04	0,083136	1,20E-04	0,069018	1,50E-04	0,082311
Lineární proložení dat napočítaných pomocí MKP ($y=ax+b$)															
a	0,00892	a	0,0891	a	0,89	a	8,8929	a	44,17	a	88,833	a	442,56	a	1141
b	-2,77E-04	b	-2,00E-04	b	-6,90E-05	b	0,0003	b	0,0016	b	0,0032	b	0,0159	b	0,0414
wmax	0,0783	wmax	0,0783	wmax	0,0783	wmax	0,0783	wmax	0,0783	wmax	0,0783	wmax	0,0783	wmax	0,0783
alpha2	8,81E+00	alpha2	8,81E-01	alpha2	8,81E-02	alpha2	8,77E-03	alpha2	1,74E-03	alpha2	8,45E-04	alpha2	1,41E-04	alpha2	3,23E-05
Končné hodnoty součinitele teplotní roztažnosti															
alpha2	8,81E+00	alpha2	8,81E-01	alpha2	8,81E-02	alpha2	8,77E-03	alpha2	1,74E-03	alpha2	8,45E-04	alpha2	1,41E-04	alpha2	3,23E-05
wmax	0,078321	wmax	0,078324	wmax	0,078352	wmax	0,078277	wmax	0,078904	wmax	0,078242	wmax	0,078323	wmax	0,078249
Dopočtené hodnoty teplotního přetvoření [mm/mm] a hlavního napětí [MPa]															
epsT	8,81E-03	epsT	8,81E-03	epsT	8,81E-03	epsT	8,77E-03	epsT	8,68E-03	epsT	8,45E-03	epsT	7,05E-03	epsT	4,20E-03
sigma	-633,94	sigma	-633,96	sigma	-633,61	sigma	-631,10	sigma	-624,62	sigma	-607,96	sigma	-505,45	sigma	-297,72
Hodnoty napětí spočtené MKP [MPa]															
sigma	-630,8	sigma	-630,8	sigma	-630,796	sigma	-627,9	sigma	-622,742	sigma	-604,662	sigma	-502,966	sigma	-295,887

Obrázek A.1: Varianty kombinací proměnných u prutu s absolutními hodnotami průhybů w_{max} .

A.2 Axisymetrické těleso

$\mu=0,16$											
Rozdělení výpočtů podle hodnot dT [K]											
0,001		0,01		0,1		1		5		10	
alpha2 [1/K]	wmax [mm]	alpha2 [1/K]	wmax [mm]	alpha2 [1/K]	wmax [mm]	alpha2 [1/K]	wmax [mm]	alpha2 [1/K]	wmax [mm]	alpha2 [1/K]	wmax [mm]
5,00E-01	0,004418	5,00E-02	4,42E-03	5,00E-03	0,004449	5,00E-04	0,004736	5,00E-05	0,003802	5,00E-06	0,00363
5,00E+00	0,044029	5,00E-01	4,40E-02	5,00E-02	0,04406	5,00E-03	0,044338	5,00E-04	0,023679	5,00E-05	0,007604
8,00E+00	0,069736	8,00E-01	0,069739	8,00E-02	0,069765	8,00E-03	0,070033	1,00E-03	0,045577	5,00E-04	0,047121
9,00E+00	0,078094	9,00E-01	0,078097	9,00E-02	0,078123	9,00E-03	0,078386	1,94E-03	0,085313	8,00E-04	0,072701
9,08E+00	0,078758	1,00E+00	0,086332	1,00E-01	0,086358			5,00E-03	0,194007	9,00E-04	0,081009
1,00E+01	0,086329										
Polynommické proložení dat napočítaných pomocí MKP ($y=ax^2+bx+c$)											
a	-3,7E-05	a	-0,00374	a	-0,375	a	-34,137	a	-1518,4	a	-3543,5
b	0,00902	b	0,0902	b	0,902	b	8,9921	b	46,155	b	89,722
c	-9,4E-05	c	-9,1E-05	c	-6,3E-05	c	0,0002	c	0,0012	c	0,0032
wmax	0,0783	wmax	0,0783	wmax	0,0783	wmax	0,0783	wmax	0,0783	wmax	0,0783
alpha2	9,03E+00	alpha2	9,03E-01	alpha2	9,03E-02	alpha2	8,99E-03	alpha2	1,77E-03	alpha2	8,67E-04
Konečné hodnoty součinitele teplotní roztažnosti											
alpha2	9,03E+00	alpha2	9,03E-01	alpha2	9,03E-02	alpha2	8,99E-03	alpha2	1,77E-03	alpha2	8,67E-04
wmax	0,078343	wmax	0,078346	wmax	0,078372	wmax	0,078303	wmax	0,078301	wmax	0,078281
Dopočtené hodnoty teplotního přetvoření [mm/mm]											
epsT	9,03E-03	epsT	9,03E-03	epsT	9,03E-03	epsT	8,99E-03	epsT	8,87E-03	epsT	8,67E-03
Hodnoty napětí spočtené MKP [MPa]											
sigma	-769,39	sigma	-769,39	sigma	-769,385	sigma	-765,934	sigma	-753,823	sigma	-738,267

Obrázek A.2: Varianty kombinací proměnných u axisymetrického tělesa pro $\mu_2 = 0,16$ s absolutními hodnotami maximálních průhybů w_{max} .

B Data z regresní analýzy

Uvedená data byla zhotovena pro všechny dodané tloušťky vrstev h_2 . Podle výsledků z kapitoly 5.2.5 byla použita Poissonova konstanta $\mu_2 = 0,16$. Data jsou platná pro tělesa s dvousóým zatížením, tedy pro kapitoly 5.2 a 5.3, kde byly hodnoty součinitele teplotní roztažnosti α_2 a maximálního průhybu w_{max} na sobě kvadraticky závislé jako $w_{max} = a\alpha_2^2 + b\alpha_2 + c$.

Regresní analýza pro $h_2=20\text{nm}$					
naměřené hodnoty			regresní parametry		
alpha2 [1/K]	alpha2^2 [mm^2]	wmax [mm]	a	b	c
1,00E-01	0,01	-0,000153	-7,16E-05	-1,48E-03	-4,63E-06
2,00E-01	0,04	-0,000303			
2,30E-01	0,0529	-0,000348			
2,50E-01	0,0625	-0,000378			
2,80E-01	0,0784	-0,000424			
3,00E-01	0,09	-0,000454			

Obrázek B.1: Data regresní analýzy pro vzorky s $h_2 = 20 \text{ nm}$.

Regresní analýza pro $h_2=100\text{nm}$					
naměřené hodnoty			regresní parametry		
alpha2 [1/K]	alpha2^2 [mm^2]	wmax [mm]	a	b	c
1,00E-02	0,0001	-0,000078	1,14E-05	-7,49E-03	-3,30E-06
5,00E-02	0,0025	-0,000378			
9,00E-02	0,0081	-0,000677			
1,00E-01	0,01	-0,000752			
1,20E-01	0,0144	-0,000902			

Obrázek B.2: Data regresní analýzy pro vzorky s $h_2 = 100 \text{ nm}$.

Regresní analýza pro $h_2=242\text{nm}$					
naměřené hodnoty			regresní parametry		
alpha2 [1/K]	alpha2^2 [mm^2]	wmax [mm]	a	b	c
1,00E-02	0,0001	-0,000180	4,79E-05	-1,82E-02	9,58E-07
5,00E-02	0,0025	-0,000908			
1,00E-01	0,01	-0,001814			
1,50E-01	0,0225	-0,002721			
2,00E-01	0,04	-0,003629			

Obrázek B.3: Data regresní analýzy pro vzorky s $h_2 = 242 \text{ nm}$.

Regresní analýza pro $h_2=300\text{nm}$					
naměřené hodnoty			regresní parametry		
alpha2 [1/K]	alpha2^2 [mm^2]	wmax [mm]	a	b	c
5,00E-03	0,000025	-0,000115	-2,74E-04	-2,24E-02	-3,13E-06
5,00E-02	0,0025	-0,001124			
1,00E-01	0,01	-0,002246			
2,00E-01	0,04	-0,004494			
3,00E-01	0,09	-0,006748			

Obrázek B.4: Data regresní analýzy pro vzorky s $h_2 = 300 \text{ nm}$.

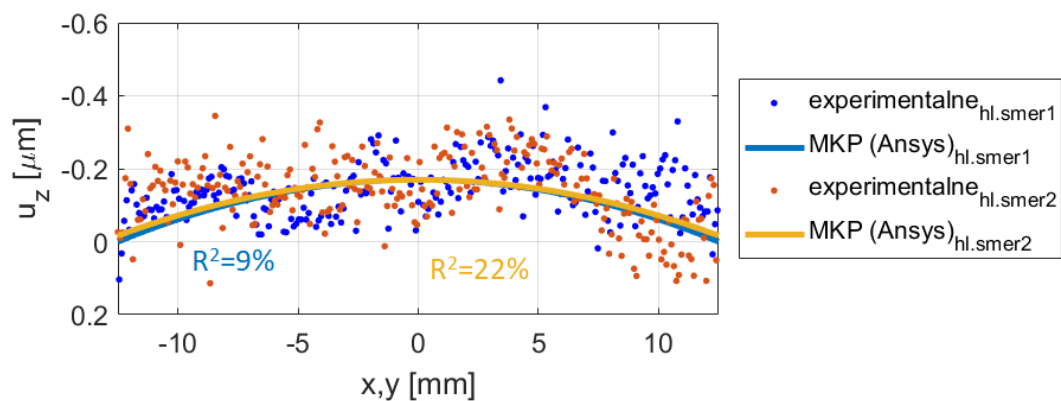
Regresní analýza pro $h_2=600\text{nm}$					
naměřené hodnoty			regresní parametry		
alpha2 [1/K]	alpha2^2 [mm^2]	wmax [mm]	a	b	c
5,00E-02	0,0025	-0,002233	-2,24E-04	-4,47E-02	1,81E-06
1,00E-01	0,01	-0,004466			
3,00E-01	0,09	-0,013418			
4,00E-01	0,16	-0,017902			
5,00E-01	0,25	-0,022387			

Obrázek B.5: Data regresní analýzy pro vzorky s $h_2 = 600 \text{ nm}$.

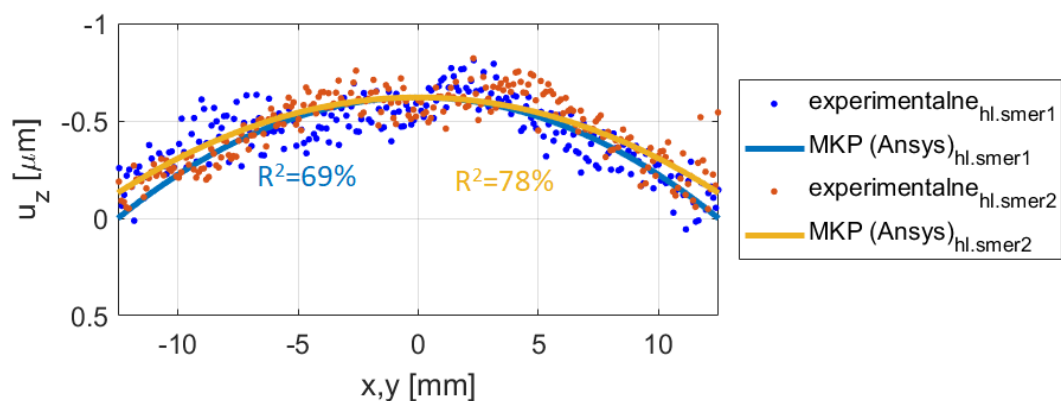
Regresní analýza pro $h_2=1200\text{nm}$					
naměřené hodnoty			regresní parametry		
alpha2 [1/K]	alpha2^2 [mm^2]	wmax [mm]	a	b	c
5,00E-02	0,0025	-0,004421	3,74E-03	-9,02E-02	9,07E-05
5,00E-01	0,25	-0,044032			
8,00E-01	0,64	-0,069739			
9,00E-01	0,81	-0,078097			
1,00E+00	1	-0,086332			

Obrázek B.6: Data regresní analýzy pro vzorky s $h_2 = 1200 \text{ nm}$.

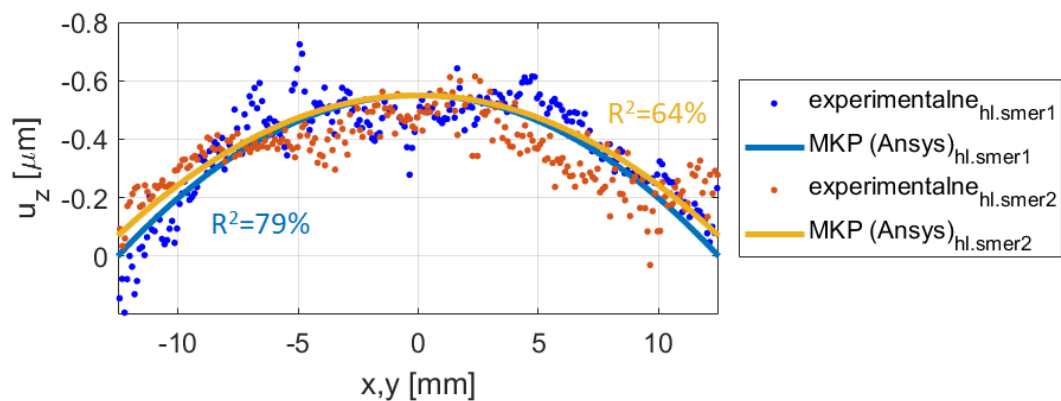
C Validace průhybu vzorků s eliptickými izoliniemi



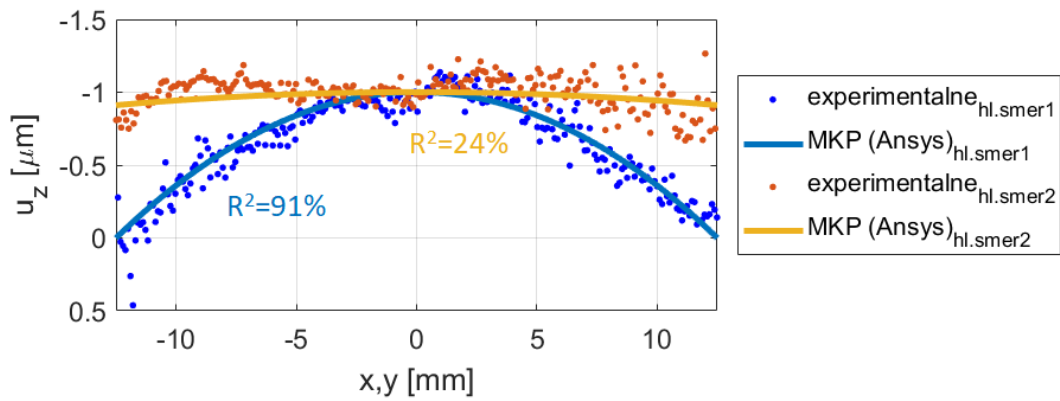
Obrázek C.1: Průhyby v ose z na hlavních směrech vzorku č. 6.



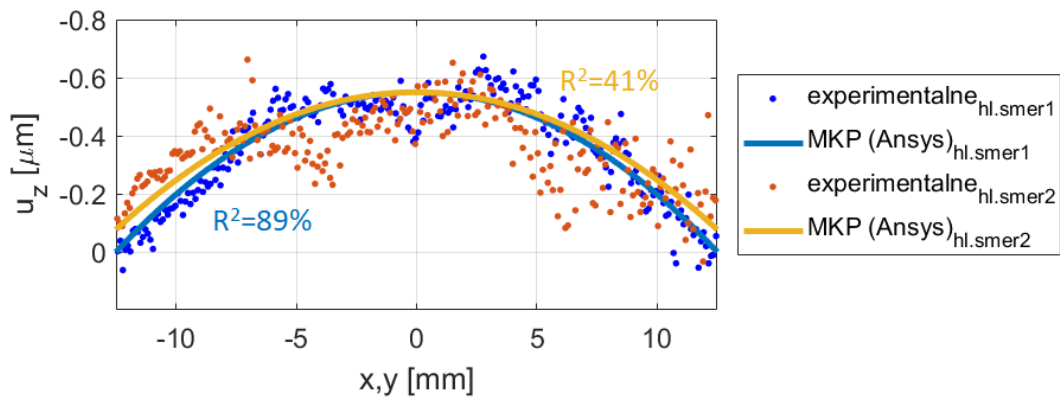
Obrázek C.2: Průhyby v ose z na hlavních směrech vzorku č. 7.



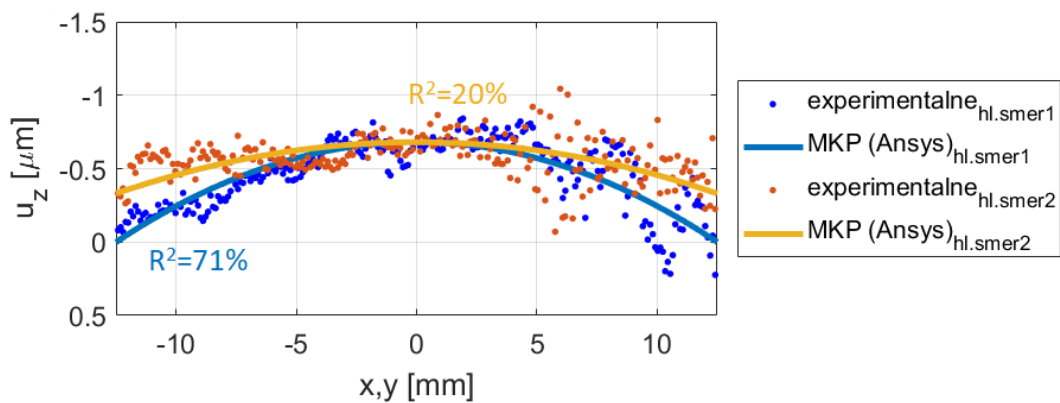
Obrázek C.3: Průhyby v ose z na hlavních směrech vzorku č. 8.



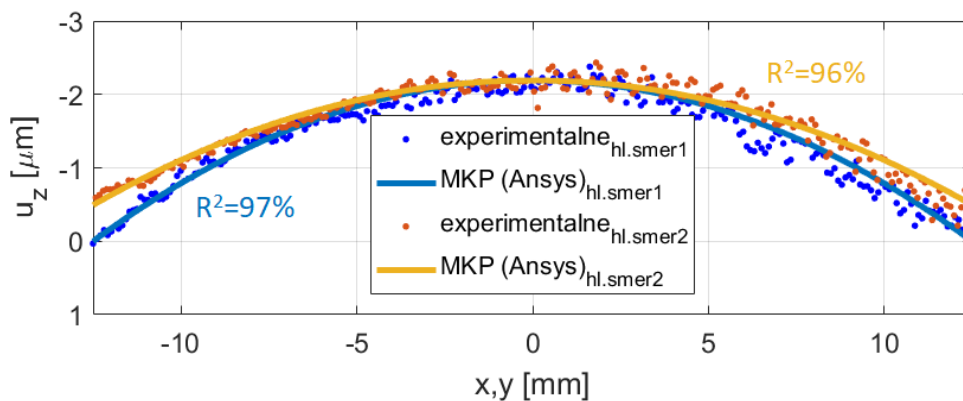
Obrázek C.4: Průhyby v ose z na hlavních směrech vzorku č. 9.



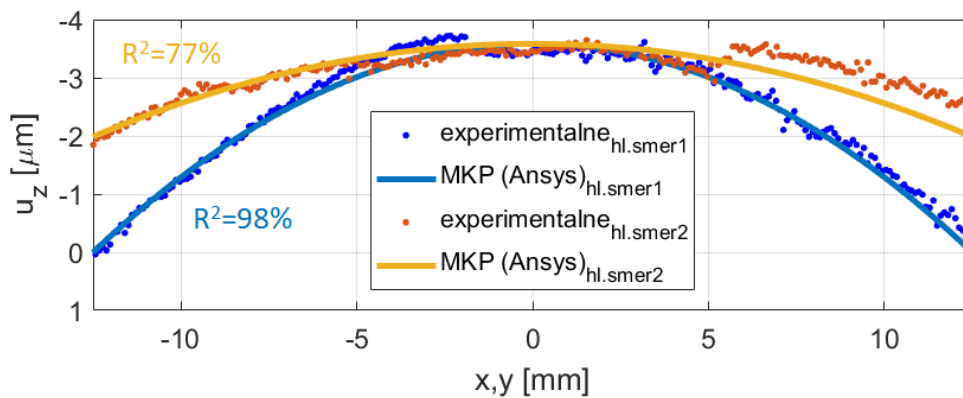
Obrázek C.5: Průhyby v ose z na hlavních směrech vzorku č. 10.



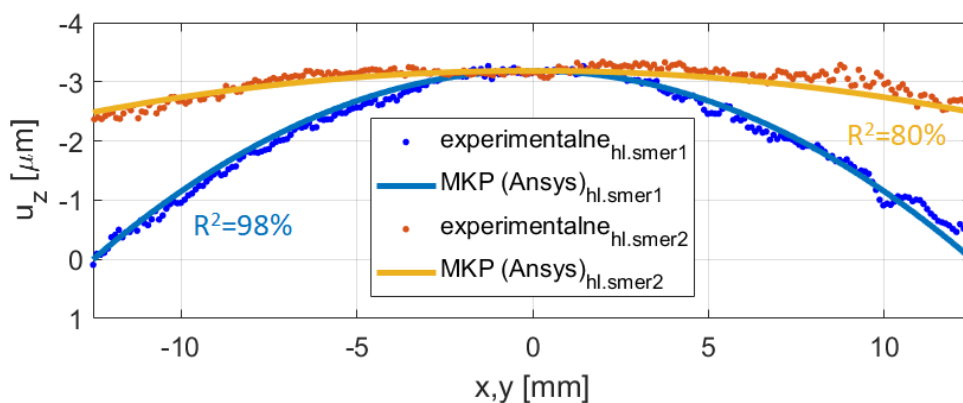
Obrázek C.6: Průhyby v ose z na hlavních směrech vzorku č. 11.



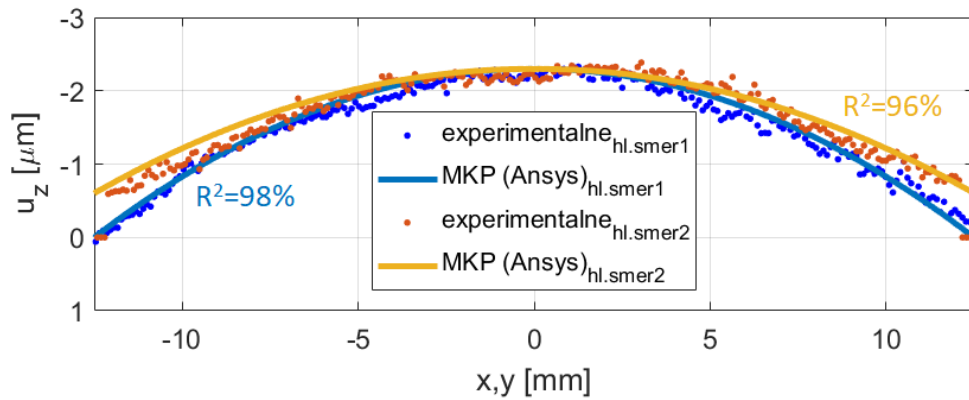
Obrázek C.7: Průhyby v ose z na hlavních směrech vzorku č. 13.



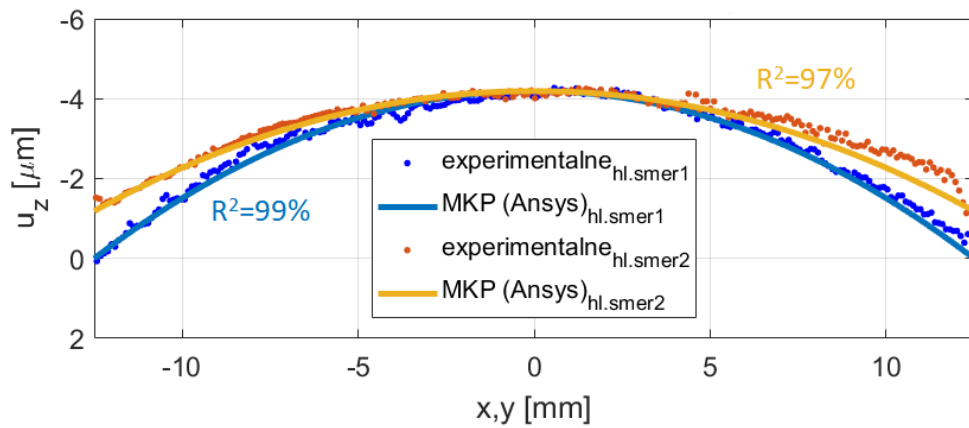
Obrázek C.8: Průhyby v ose z na hlavních směrech vzorku č. 14.



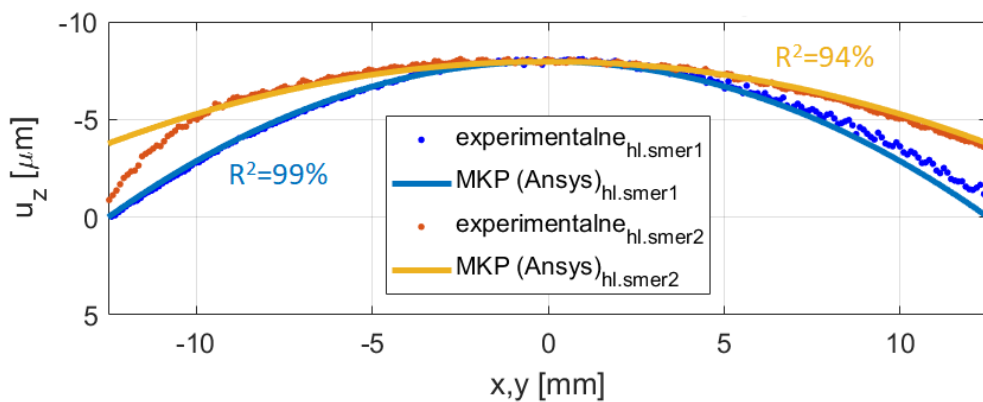
Obrázek C.9: Průhyby v ose z na hlavních směrech vzorku č. 15.



Obrázek C.10: Průhyby v ose z na hlavních směrech vzorku č. 18.



Obrázek C.11: Průhyby v ose z na hlavních směrech vzorku č. 21.



Obrázek C.12: Průhyby v ose z na hlavních směrech vzorku č. 23.