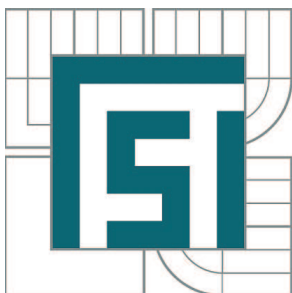


VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A
BIOMECHANIKY

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND
BIOMECHANICS

EXPERIMENTÁLNÍ ANALÝZA DYNAMICKÉHO CHOVÁNÍ VETKNUTÉHO NOSNÍKU

EXPERIMENTAL ANALYSIS OF A FIXED BEAM DYNAMIC BEHAVIOR

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

JAN PODUŠKA

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Ing. LUKÁŠ BŘEZINA, Ph.D.

BRNO 2011

Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství

Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky

Akademický rok: 2010/2011

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

student(ka): Jan Poduška

který/která studuje v **bakalářském studijním programu**

obor: **Strojní inženýrství (2301R016)**

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Experimentální analýza dynamického chování vetknutého nosníku

v anglickém jazyce:

Experimental analysis of a fixed beam dynamic behavior

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Předpokládá se experimentální analýza kmitání vetknutého nosníku. Experimentálně získaná data budou porovnána s výstupy matematického modelu, který bude v rámci řešení sestaven v prostředí Matlab, popř. Matlab Simulink.

Cíle bakalářské práce:

1. Experimentálně analyzujte kmitání vetknutého nosníku
2. Sestavit simulační model kmitání vetknutého nosníku
3. Porovnat chování reálné soustavy a modelu

Seznam odborné literatury:

Brepta R., Půst L., Turek F.: Mechanické kmitání, Sobotáles, 1994

Stejskal V., Okrouhlík M.: Kmitání s Matlabem, Česká technika, 2001

Vedoucí bakalářské práce: Ing. Lukáš Březina, Ph.D.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2010/2011.

V Brně, dne 5.11.2010

L.S.

prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc.
Ředitel ústavu

prof. RNDr. Miroslav Doupovec, CSc.
Děkan fakulty

ABSTRAKT

Tato práce se zabývá modální analýzou vetknutého nosníku. V práci je proveden rozbor aplikovaného matematického modelu. Matematický model je realizován v programovém prostředí MATLAB. Je proveden výpočet vlastních frekvencí a tvarů vlastních kmitů. Výsledky jsou porovnány s daty získanými pomocí experimentální modální analýzy.

ABSTRACT

This thesis is dealing with analysis of dynamic behavior of a fixed beam. An analysis of the applied mathematical model is proposed in the work. The mathematical model is then realized in MATLAB programming environment. Modal frequencies and mode shapes are consequently computed and results are compared to those obtained from the experimental modal analysis.

KLÍČOVÁ SLOVA

modální analýza, vetknutý nosník, matematický model, MATLAB, mechanické kmitání

KEYWORDS

modal analysis, fixed beam, mathematical model, MATLAB, mechanical oscillation

BIBLIOGRAFICKÁ CITACE

PODUŠKA, J. *Experimentální analýza dynamického chování vetknutého nosníku*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2011. 36 s. Vedoucí bakalářské práce Ing. Lukáš Březina, Ph.D.

PROHLÁŠENÍ

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně na základě svých vědomostí, rad a pokynů vedoucího bakalářské práce, poskytnutých materiálů a odborných konzultací.

V Brně, dne 26. 5. 2011

.....
Jan Poduška

PODĚKOVÁNÍ

Děkuji vedoucímu své bakalářské práce Ing. Lukáši Březinovi, Ph.D. za odborné rady a připomínky k mé práci. Dále děkuji Ing. Lubomíru Houfkovi, Ph.D. za jeho ochotu při provádění experimentu a zpracování výsledků.

OBSAH

1 ÚVOD	10
2 MODÁLNÍ ANALÝZA	11
2.1 Matematické modelování	11
2.2 Experimentální modální analýza	11
2.3 Buzení soustav	12
2.4 Snímání odezvy	12
3 ZADANÝ PŘÍKLAD	13
3.1 Klasifikace zadání	13
3.2 Schéma zadání	13
3.3 Sestavení pohybové rovnice	13
4 ŘEŠENÍ PŘÍKLADU	16
4.1 Obecné řešení pohybové rovnice	16
4.2 Frekvenční rovnice vetknutého nosníku a její řešení	17
4.3 Určení tvaru vlastních kmitů vetknutého nosníku	19
4.4 Vliv zjednodušení Bernoulliho-Eulerovy teorie	19
5 VÝPOČET POMOCÍ PROGRAMU MATLAB	20
5.1 Popis funkce	20
5.1.1 Vstupní parametry	20
5.1.2 Výpočet kořenů frekvenční rovnice	20
5.1.3 Výpočet vlastních frekvencí	21
5.1.4 Výpočet polohy uzlových bodů	21
5.1.5 Vykreslení vlastních tvarů kmitů	21
5.2 Výsledky výpočtu zadaného nosníku	21
6 EXPERIMENT	24
6.1 Provedení experimentu	24
6.2 Použité vybavení	24
6.3 Výsledky a porovnání	25
6.3.1 Vlastní frekvence	25
6.3.2 Tvary vlastních kmitů	26
ZÁVĚR	28
SEZNAM POUŽITÝCH ZDROJŮ	29
SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ	30
SEZNAM PŘÍLOH	31
PŘÍLOHA 1 – VÝPIS ZDROJOVÉHO KÓDU	32
Funkce vetnos	32
Skript start	36

1 ÚVOD

Kmitavý pohyb je typický pro většinu mechanických soustav a konstrukcí. Tento pohyb je ale často zdrojem hluku a chvění v životním či pracovním prostředí. Účinky hluku a mechanického chvění jsou nejen nepříjemné, ale mohou být i nebezpečné, případně mohou způsobovat zvýšené opotřebení součástí, snížení výkonu, apod. Většina problémů spojených s vibracemi je způsobena rezonancemi. Rezonance vznikají tam, kde dynamické síly budí vlastní kmity mechanických soustav.

Z těchto důvodů jsou dynamické vlastnosti daných mechanických soustav pečlivě vyšetřovány a analyzovány. Účinným nástrojem pro zkoumání a modelování vlastností mechanických soustav je právě modální analýza. Modální analýzu je možno provádět v rovině teoretické, jako výpočet modálních vlastností dané soustavy, nebo jako experiment. Často se provádí obě analýzy a jejich výsledky se porovnávají.

Experimentální modální analýza je v dnešní době nejrozšířenějším způsobem zjišťování modálních vlastností. Její výhodou je snadná proveditelnost v dílenských podmínkách, nenáročnost na vybavení a rychlost průběhu celé analýzy.

Cílem této práce je teoreticky analyzovat jednoduchý případ volného kmitání vetknutého nosníku a s pomocí matematického softwaru vypočítat vlastní frekvence a určit tvary vlastních kmitů. Takto získané výsledky pak porovnat s hodnotami získanými experimentální modální analýzou.

2 MODÁLNÍ ANALÝZA

Modální analýza je moderní obor dynamiky, který k popisu kmitavých vlastností a kmitavého chování soustav používá možnosti rozkladu složitějšího kmitavého procesu na dílčí, tzv. modální (vidové, vlastní) příspěvky. Každý příspěvek je charakterizován vlastní frekvencí a vlastním tvarem kmitu [5].

Modální analýzu je možno provádět buď analyticky, jako výpočet modálních parametrů pomocí matematického modelu, nebo experimentálně.

2.1 Matematické modelování

Podle [5] je samotný postup dynamických výpočtů vlastních frekvencí a tvarů kmitů možno nazvat modální analýzou. Pro tyto účely se používají dva druhy matematických modelů – spojité a diskrétní.

Spojité matematické modely jsou soustavy typu kontinuí, kde elastomechanické vlastnosti jsou rozloženy spojitě. Přesný výpočet kmitavých vlastností těchto modelů je možný jen pro nejjednodušší případy [5]. Spojité modely totiž mají nekonečný počet stupňů volnosti (a tedy i nekonečno vlastních frekvencí) a jejich řešení vede na parciální diferenciální rovnice [2]. Takovým případem je např. vetknutý nosník, ale mohou to být také jiné případy uložení nosníků, struny, lana, membrány nebo skořepiny.

Diskrétní matematické modely jsou podle [1] vytvářeny kombinací základních jednoduchých prvků – hmotných bodů nebo tuhých hmotných těles, nehmotných pružin a nehmotných tlumičů. Modely jsou vytvářeny vhodnou diskretizací kontinua, tj. soustředěním hmotnosti kontinua do vhodně zvolených míst a svázáním těchto hmotností nehmotnými pružinami, popř. tlumiči. Jinou možností diskretizace kontinua je použití metody konečných prvků. Řešení diskrétních modelů vede na soustavu obyčejných diferenciálních rovnic. Tyto modely mají konečný počet stupňů volnosti.

2.2 Experimentální modální analýza

Při experimentální modální analýze se odměřuje odezva soustavy při jejím řízeném buzení ve zvolené síti bodů na povrchu soustavy. Pro experiment musí být soustava fyzicky dostupná. Soustava je nejprve vhodně upevněna a na jejím povrchu je zvolena síť bodů, ve kterých bude soustava buzena měřitelným silovým účinkem (např. pomocí rázové kladívka nebo elektromagnetického budiče). Do jednoho referenčního bodu je umístěn snímač odezvy [5]. Experiment se dá provést také naopak, tj. buzení v jednom bodě a snímání odezvy ve více místech. Odezva soustavy je pak charakterizována tzv. frekvenční odezvou funkcí, což je komplexní funkce frekvence definovaná podle [7] jako

$$H(\omega) = \frac{\text{výstup}}{\text{vstup}}$$

Výstupní veličinou může být výchylka, rychlost nebo zrychlení. Podle toho jsou rozlišovány tři základní typy frekvenčních odezвовých funkcí – poddajnost, pohyblivost nebo akcelerace.

Při experimentu jsou časové průběhy budící síly a měřené výstupní veličiny (zpravidla zrychlení) přivedeny na vstupy dvoukanálového analyzátoru signálů založeného na rychlé Fourierově transformaci. Metodou Fourierovy transformace se signály z časové oblasti převedou do frekvenční oblasti. Detailně je proces rozebrán v [5] a [7]. Výsledkem jsou komplexní spektra. Na základě těchto spekter jsou určeny hodnoty frekvenční odezвовé funkce. Z naměřených hodnot frekvenční odezвовé funkce jsou pak určeny hodnoty vlastních frekvencí a tvary vlastních kmitů.

2.3 Buzení soustav

Při měření odezvové funkce musí být zkoumaná soustava buzena měřitelnou dynamickou silou. Používány jsou především takové zdroje budící síly, které mají široké kmitočtové rozsahy. Budící síla je zpravidla snímána piezoelektrickým snímačem síly.

Podle [6] je nejrozšířenějším druhem buzení při modální analýze buzení rázové, např. pomocí rázového kladívka. Mechanické rázy jsou krátkodobé děje, které mají spojitá spektra s maximem na frekvenci 0 Hz. S růstem kmitočtu se jejich amplitudy snižují. To znamená podle [7], že silový impuls má určitý užitečný frekvenční rozsah, ve kterém je průběh síly v podstatě plochý a nad tento rozsah se snižuje. Tento rozsah frekvencí, které jsou účinně vybuzeny rázovým kladívkem, závisí na tuhosti dotýkajících se povrchů a hmotnosti kladívka.

Výhodou použití rázového buzení je právě fakt, že se jedním úderem zároveň vybudí všechny vlastní frekvence v daném frekvenčním rozsahu. To výrazně zrychluje průběh analýzy. Frekvenční rozsah lze měnit jednoduše změnou přídavné hmoty kladívka, nebo záměnou špičky kladívka. Navíc budící zdroj je lehký a přenosný a přístrojové vybavení je poměrně levné.

Druhým typem buzení mechanických soustav je buzení pomocí budičů vibrací. Nejpoužívanější je elektromagnetický budič, ve kterém je vstupní signál převáděn na střídavé magnetické pole. Střídavé magnetické pole způsobí pohyb cívky a tím celé buzené struktury, která je k cívce připevněna. Kromě elektromagnetických se používají také elektrohydraulické nebo mechanické budiče vibrací.

Výhodou použití budiče vibrací je možnost zvolit si typ budícího signálu, který může být sinusový, náhodný, pseudonáhodný apod.

2.4 Snímání odezvy

Při měření odezvy mechanických soustav se používají elektromechanické měniče ve funkci snímačů citlivých ke zrychlení, rychlosti nebo výchylce kmitání. Jedním z nejvýhodnějších aktivních snímačů je piezoelektrický snímač zrychlení (akcelerometr) [6]. Tyto snímače mají výhodné vlastnosti, zejména malou hmotnost a široký pracovní rozsah, jednoduchou konstrukci a vysokou odolnost vůči vnějším vlivům.

Připevnění snímače na vyšetřovanou soustavu je realizováno pomocí šroubů, speciálních lepidel, oboustranné lepicí pásky, včelího vosku nebo magnetu. Nejpoužívanější metodou je přilepení pomocí včelího vosku, protože jde o nenáročnou metodu a včelí vosk navíc podstatně neovlivňuje vlastnosti snímače.

3 ZADANÝ PŘÍKLAD

3.1 Klasifikace zadání

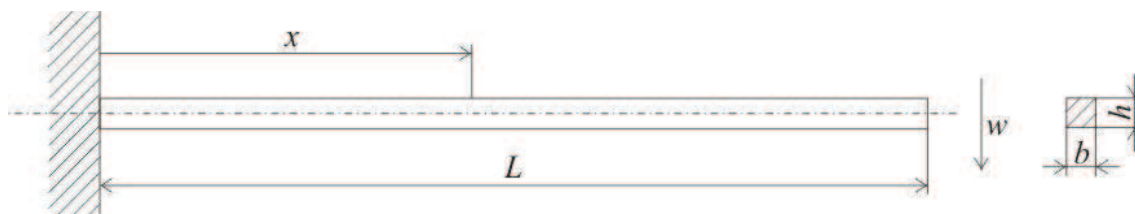
Řešeným tělesem, které je i předmětem experimentu, je jednostranně vetknutý nosník, tedy těleso se spojitě rozloženou hmotou. Použitý nosník je přímý a má konstantní obdélníkový průřez (je prizmatický) o výšce h a šířce b po celé délce L . Jeho délka je mnohem větší než jeho příčný rozměr. Materiálem nosníku je ocel, je to tedy materiál lineárně pružný.

Nosník kmitá pouze ohybově, bez vnějšího zatížení (tzv. volné kmitání), v rovině dané střednicí (osou x) a jednou z hlavních os setrvačnosti průřezu (hlavními osami setrvačnosti jsou v tomto případě osy souměrnosti příčného průřezu). Tlumení se neuvažuje.

Úkolem je zvolit matematický model, na jeho základě sestavit pohybovou rovnici, vypočítat vlastní frekvence a určit rovnici tvaru vlastních kmitů.

3.2 Schéma zadání

Na obr. 1 je schéma zadaného příkladu s naznačenými rozměry a směry osy x a průhybu w .



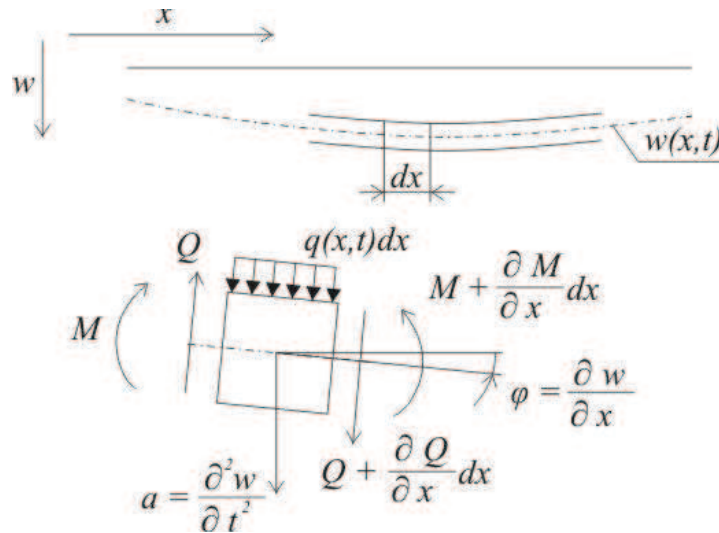
Obr. 1: Schéma zadaného příkladu

3.3 Sestavení pohybové rovnice

Pro řešení zadaného příkladu je nejprve potřeba sestavit pohybovou rovnici a tu pak dále řešit. V literatuře existuje dobře popsáný spojitý model ohybového kmitání přímých nosníků a tím je Bernoulliho-Eulerova teorie. K sestavení pohybových rovnic tedy použijeme Bernoulliho-Eulerovu teorii tak, jak je pospaná v [1] a [3]. Při sestavování pohybových rovnic se podle [3] předpokládá, že

- nosník je přímý
- příčné deformace nosníku jsou malé
- kmitání se děje v rovině dané osou nosníku a některou z hlavních os setrvačnosti
- roviny kolmé na podélnou osu nezatíženého nosníku (střednici) zůstávají rovinnými i při kmitání
- zanedbávají se malé posuvy prvků nosníku ve směru podélné osy nosníku

Tyto zjednodušující předpoklady můžeme na zadaný nosník aplikovat. Sestavíme pro něj tedy pohybovou rovnici. Vycházíme z uvolněného elementárního prvku, který koná obecný rovinný pohyb (obr. 2). Pro obecný rovinný pohyb sestavujeme rovnici translačního pohybu a rovnici rotačního pohybu.



Obr. 2: Síly a momenty působící na element příčně kmitajícího nosníku

Rovnice translačního pohybu pro střed hmotnosti elementárního prvku má tvar

$$Q + \frac{\partial Q}{\partial x} dx - Q + q(x,t)dx = \rho A \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} dx, \quad (3.1)$$

který se upraví na

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + q(x,t) = \rho A \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}, \quad (3.2)$$

kde ρ je hustota materiálu nosníku, A je plocha průřezu nosníku, $w(x,t)$ je průhyb, Q je posouvající síla a $q(x,t)$ je vnější zatížení. Plocha průřezu nosníku A je obecně funkcí x , ale řešení nosník je prizmatický, a proto uvažujeme A jako konstantu.

Momentovou rovnicí sestavíme a upravíme obdobným způsobem. Dostaneme tvar

$$Q - \frac{\partial M}{\partial x} = I \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \quad (3.3)$$

kde I je moment setrvačnosti elementárního prvku vzhledem k ose z a φ je celkové natočení elementárního prvku. Pro celkové natočení prvku, resp. směrnici průhybové čáry platí vztah

$$\frac{\partial w(x,t)}{\partial x} = \psi + \gamma. \quad (3.4)$$

ψ je natočení průřezu nosníku způsobené ohybovým momentem a γ jsou úhlová přetvoření průřezu způsobená smykem.

Bernoulliho-Eulerova teorie předpokládá, že rotační setrvačnost elementu nosníku je zanedbatelná, neboť osový moment setrvačnosti prvku $I = \frac{1}{12} A \rho dx^3$ je velice malý [3]. Tato teorie také dále zanedbává úhlová přetvoření způsobená smykem, tedy $\gamma = 0$. Vztah (3.3) přejde zanedbáním rotační setrvačnosti v rovnici

$$Q = \frac{\partial M}{\partial x}, \quad (3.5)$$

a ze vztahu (3.4) dostaneme

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \psi . \quad (3.6)$$

Natočení prvku je tedy způsobeno pouze ohybovým momentem. Závislost ohybového momentu na natočení, resp. na průhybu, nosníku je tzv. rovnice ohybové čáry, která má pro malé průhyby tvar

$$M = -EJ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} , \quad (3.7)$$

kde J je kvadratický moment průřezu k ose z , který opět bereme pro uvažovaný nosník jako konstantu, a E je modul pružnosti v tahu materiálu nosníku. Toto vyjádření ohybového momentu dosadíme do rovnice (3.5)

$$Q = -EJ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} . \quad (3.8)$$

Ted' můžeme dosadit za Q do rovnice (3.2) a získat pohybovou rovnici ve tvaru

$$\rho A \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} + EJ \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} = q(x,t) . \quad (3.9)$$

Jak už bylo řečeno, řešený nosník není nijak zatížen a platí tedy

$$\rho A \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} + EJ \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} = 0 \quad (3.10)$$

Pohybovou rovnici je vhodné ještě upravit na tvar [1]

$$\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} + c_0 j \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} = 0 , \quad (3.11)$$

kde konstanta c_0 je tzv. rychlost podélných vln v nosníku a vyjadřuje se jako

$$c_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

a konstanta j je kvadratický poloměr průřezu, který se vypočítá jako

$$j = \sqrt{\frac{J}{A}}$$

Rovnice (3.11) je tedy konečná podoba pohybové rovnice pro ohybové kmitání nosníku, který není zatížen žádnou vnější silou. Jedná se o parciální diferenciální rovnici

4 ŘEŠENÍ PŘÍKLADU

V předchozí kapitole byla na základě Bernoulliho-Eulerovy teorie sestavena pohybová rovnice volného ohybového kmitání přímého nosníku. Tato rovnice je parciální diferenciální rovnicí parabolického typu. Tato kapitola se zabývá řešením této rovnice a určením vlastních frekvencí zadaného nosníku. Vychází se z řešení pohybové rovnice, jak je uvedeno v [1],[3] a [4].

4.1 Obecné řešení pohybové rovnice

Podle [1] a [3] můžeme předpokládat, že obecné řešení pohybové rovnice má tvar

$$w(x, t) = w_0(x)e^{i\Omega t}, \text{ resp.} \quad (4.1)$$
$$w(x, t) = w_0(x)(A \cos \Omega t + B \sin \Omega t).$$

Funkce $w_0(x)$ je funkcí pouze proměnné x a vyjadřuje průhyb daného tvaru kmitu v závislosti na této proměnné. Funkce $e^{i\Omega t}$ vyjadřuje časový průběh kmitání a je závislá pouze na čase. Tím jsme rozdělili řešení na dvě na sobě nezávislé části. Pokud nyní toto řešení dosadíme do pohybové rovnice (3.11), dostaneme

$$w_0(x)e^{i\Omega t}(-\Omega^2) + c_0 j \frac{d^4 w_0(x)}{dx^4} e^{i\Omega t} = 0, \quad (4.2)$$

což můžeme upravit na rovnici

$$\frac{d^4 w_0(x)}{dx^4} = \frac{\Omega^2}{c_0^2 j^2} w_0(x). \quad (4.3)$$

Je to obyčejná diferenciální rovnice pro tvar kmitu, neboť zde už nederivujeme funkci dvou proměnných, nýbrž pouze jedné. Konstanta Ω je zde vlastní frekvence pro daný tvar kmitu. Zavedeme ještě

$$\beta^4 = \frac{\Omega^2}{c_0^2 j^2} \quad (4.4)$$

a rovnice přejde do tvaru

$$\frac{d^4 w_0(x)}{dx^4} = \beta^4 w_0(x). \quad (4.5)$$

Řešení této rovnice předpokládáme ve tvaru

$$w_0(x) = C e^{\lambda x} \quad (4.7)$$

a dosadíme-li toto řešení do rovnice (4.5), pak obdržíme charakteristickou rovnici

$$\lambda^4 = \beta^4, \quad (4.8)$$

jejíž řešení jsou

$$\lambda_1 = \beta, \lambda_2 = -\beta, \lambda_3 = i\beta, \lambda_4 = -i\beta.$$

Nyní můžeme sestavit řešení rovnice (4.5)

$$w_0(x) = C_1 e^{\beta x} + C_2 e^{-\beta x} + C_3 e^{i\beta x} + C_4 e^{-i\beta x},$$

které upravíme na tvar

$$w_0(x) = C_1 \sinh \beta x + C_2 \cosh \beta x + C_3 \sin \beta x + C_4 \cos \beta x . \quad (4.9)$$

Každému z n tvarů vlastních kmitů nosníku přísluší jedna funkce $w_{0n}(x)$, jedna hodnota β_n a tedy i jedna hodnoty vlastní frekvence Ω_n . Obecné řešení pohybové rovnice pak vyjádříme pomocí principu superpozice jako

$$w(x, t) = w_{0n}(x)(A_n \cos \Omega_n t + B_n \sin \Omega_n t), \quad (4.10)$$

když předtím vypočítáme konstanty C_1 až C_4 z okrajových podmínek pro dané uložení nosníku a konstanty A_n a B_n z počátečních podmínek.

Pro další práci s řešením rovnice tvaru kmitů je vhodné ji vyjádřit pomocí tzv. Krylovových (Rayleighových) funkcí. Jedná se o funkce, které jsou sestaveny tak, aby vždy jedna z nich byla při nulovém argumentu rovna 1 a ostatní byly rovny 0 [3].

$$S(\beta x) = \frac{1}{2}(\cosh \beta x + \cos \beta x),$$

$$T(\beta x) = \frac{1}{2}(\sinh \beta x + \sin \beta x),$$

$$U(\beta x) = \frac{1}{2}(\cosh \beta x - \cos \beta x),$$

$$V(\beta x) = \frac{1}{2}(\sinh \beta x - \sin \beta x).$$

Jejich další předností je, že derivací přecházejí jedna v druhou, násobenou mocninami veličiny β [1]. Použitím těchto rovnic přejde rovnice (4.9) na tvar

$$w_0(x) = C_1 S(\beta x) + C_2 T(\beta x) + C_3 U(\beta x) + C_4 V(\beta x). \quad (4.11)$$

4.2 Frekvenční rovnice vetknutého nosníku a její řešení

Pro každý konkrétní případ uložení nosníku existuje jedna frekvenční rovnice, kterou dostaneme tak, že do rovnice (4.11) dosadíme okrajové podmínky platné pro daný případ. Pro každý konec nosníku existují dvě okrajové podmínky. Sestavíme soustavu rovnic a determinant matice soustavy položíme roven nule.

Pro případ vetknutého nosníku, tedy nosníku s jedním koncem vetknutým a druhým volným jsou okrajové podmínky následující

$$\begin{aligned} w_0(0) &= 0, \\ \frac{dw_0(0)}{dx} &= 0, \\ M = \frac{d^2 w_0(L)}{dx^2} &= 0, \\ Q = \frac{d^3 w_0(L)}{dx^3} &= 0. \end{aligned}$$

Ve vetknutí je tedy průhyb a natočení nulové a na volném konci nosníku nepůsobí žádný moment a žádná posouvající síla. Dosazením do (4.11) obdržíme rovnice

$$\begin{aligned} w_0(0) &= C_1 S(\beta \cdot 0) + C_2 T(\beta \cdot 0) + C_3 U(\beta \cdot 0) + C_4 V(\beta \cdot 0) = 0, \\ \frac{dw_0(0)}{dx} &= C_1 \beta V(\beta \cdot 0) + C_2 \beta S(\beta \cdot 0) + C_3 \beta T(\beta \cdot 0) + C_4 \beta U(\beta \cdot 0) = 0, \end{aligned}$$

$$\frac{d^2 w_0(L)}{d^2 x} = C_1 \beta^2 U(\beta \cdot L) + C_2 \beta^2 V(\beta \cdot L) + C_3 \beta^2 S(\beta \cdot L) + C_4 \beta^2 T(\beta \cdot L) = 0,$$

$$\frac{d^3 w_0(L)}{d^3 x} = C_1 \beta^3 T(\beta \cdot L) + C_2 \beta^3 U(\beta \cdot L) + C_3 \beta^3 V(\beta \cdot L) + C_4 \beta^3 S(\beta \cdot L) = 0.$$

Vzhledem k tomu, že všechny jsou rovny nule, můžeme každou vydělit příslušnou mocninou β a zapíšeme-li pak tuto soustavu maticově, získáme

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ U(\beta \cdot L) & V(\beta \cdot L) & S(\beta \cdot L) & T(\beta \cdot L) \\ T(\beta \cdot L) & U(\beta \cdot L) & V(\beta \cdot L) & S(\beta \cdot L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Z prvních dvou rovnic vyplývá, že

$$C_1 = 0,$$

$$C_2 = 0$$

a soustava se tedy redukuje na

$$\begin{bmatrix} S(\beta \cdot L) & T(\beta \cdot L) \\ V(\beta \cdot L) & S(\beta \cdot L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.12)$$

Má-li tato rovnice mít řešení, musí se determinant matice soustavy rovnat nule. Vyjádříme si tedy determinant matice soustavy a položíme ho roven nule

$$\begin{vmatrix} S(\beta \cdot L) & T(\beta \cdot L) \\ V(\beta \cdot L) & S(\beta \cdot L) \end{vmatrix} = S^2(\beta \cdot L) - T(\beta \cdot L)V(\beta \cdot L) = 0.$$

Po dosazení za Krylovovy funkce a několika úpravách dostaneme frekvenční rovnici vetknutého nosníku ve tvaru

$$\cosh(\beta L) \cos(\beta L) + 1 = 0. \quad (4.13)$$

Je to transcendentní rovnice, jejíž kořeny lze nalézt pouze numericky [2]. Pomocí softwaru MATLAB (jak bude vysvětleno dále) dojdeme k prvním čtyřem kořenům frekvenční rovnice

$$\begin{aligned} \beta_1 L &= 1,875, \\ \beta_2 L &= 4,694, \\ \beta_3 L &= 7,855, \\ \beta_4 L &= 10,996, \\ \beta_n L &= (n - \frac{1}{2})\pi. \end{aligned}$$

Z rovnice (4.4) lze nyní vyjádřit vlastní frekvenci ve tvaru

$$\Omega_n = \frac{(\beta_n L)^2}{L^2} c_0 j, \quad (4.14)$$

a můžeme z rozměrů nosníku vypočítat první čtyři vlastní frekvence (nebo více, podle toho kolik kořenů frekvenční rovnice vypočítáme).

4.3 Určení tvaru vlastních kmitů vetknutého nosníku

K určení tvaru vlastních kmitů vetknutého nosníku už stačí pouze vyjádřit zbývající konstanty C_3 a C_4 ze soustavy (4.12). Po dosazení kořenů frekvenční rovnice bude mít tato soustava tvar

$$\begin{aligned} C_3 S(\beta_n L) + C_4 T(\beta_n L) &= 0, \\ C_3 V(\beta_n L) + C_4 S(\beta_n L) &= 0. \end{aligned}$$

Vyjádříme si konstanty ve tvaru

$$\frac{C_4}{C_3} = -\frac{S(\beta_n L)}{T(\beta_n L)} = -\frac{\cosh(\beta_n L) + \cos(\beta_n L)}{\sinh(\beta_n L) + \sin(\beta_n L)}$$

a dosadíme do rovnice pro tvar vlastních kmitů (4.11). Výsledkem je vyjádření n -tého tvaru kmitu

$$w_{0n}(x) = D_n \left\{ U(\beta_n x) - \frac{C_4}{C_3} V(\beta_n x) \right\},$$

tedy

$$w_{0n}(x) = D_n \left\{ \cosh(\beta_n x) - \cos(\beta_n x) - \frac{\cosh(\beta_n L) + \cos(\beta_n L)}{\sinh(\beta_n L) + \sin(\beta_n L)} [\sinh(\beta_n x) - \sin(\beta_n x)] \right\}, \quad (4.15)$$

kde D_n je nenulová konstanta. Pro další výpočty byla volena $D_n = 1$.

4.4 Vliv zjednodušení Bernoulliho-Eulerovy teorie

Při sestavování pohybové rovnice ohybového kmitání nosníku byla použita Bernoulliho-Eulerova teorie. Byl tedy zanedbán vliv úhlových přetvoření γ způsobených posouvající silou a také vliv rotační setrvačnosti elementárního prvku. Vliv rotační setrvačnosti respektuje Rayleighova teorie a vliv posouvající síly Timošenkova teorie. Pokud připustíme vliv posouvající síly a rotační setrvačnosti, bude pro volné kmitání mít pohybová rovnice tvar

$$\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - I \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + I \frac{\kappa \rho}{G} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} - EJ \frac{\kappa \rho}{G} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} = 0.$$

V [1] a [3] jsou obě teorie popsány a výsledky porovnány s Bernoulliho-Eulerovou teorií. Ze srovnání vyplývá, že pro nosníky, jejichž délka je větší než $15h$, je vzniklá chyba zanedbatelná.

5 VÝPOČET POMOCÍ PROGRAMU MATLAB

V [8] je Matlab charakterizován jako univerzální programové prostředí pro technické výpočty. Umožňuje provádět výpočty, programovat a zobrazovat data. Základním prvkem Matlabu je matice. To usnadňuje řešení úloh s vektorovou a maticovou formulací. V Matlabu se vytváří soubory funkcí, pomocí kterých je pak možno řešit určitý konkrétní problém nebo výpočet.

Pro řešení zadaného příkladu byla naprogramována funkce *vetnos*, která vypočítá vlastní frekvence a zobrazí tvary vlastních kmitů. Její výhoda spočívá v tom, že lze snadno měnit její vstupní parametry, např. rozměry nosníku nebo materiál.

Funkce byla vytvořena ve verzi Matlab R2007a na operačním systému Windows XP Professional.

5.1 Popis funkce

Funkce *vetnos* vypočítá vlastní frekvence a polohu uzlových bodů zadaného vetknutého nosníku a zobrazí tvary vlastních kmitů graficky. Spouštění této funkce je realizováno pomocí skriptu *start*, ve kterém je možno zadat vstupní parametry. Informace k funkci se zobrazí po zadání příkazu *help vetnos* do příkazového řádku Matlabu.

Zdrojové kódy funkce *vetnos* i skriptu *start* jsou uvedeny v příloze 1.

5.1.1 Vstupní parametry

Funkce *vetnos* má sedm vstupních proměnných:

- šířku příčného průřezu b v mm
- výšku příčného průřezu h v mm
- délku nosníku L v mm
- hustotu materiálu nosníku ρ_0 v $\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$
- modul pružnosti E v Pa
- proměnnou *tvar*, která může mít hodnotu 1, 2, 3, 4 nebo vse a určuje, zda se vykreslí jen první, druhý, třetí nebo čtvrtý tvar vlastních kmitů nebo všechny do jednoho grafu
- proměnnou *prurez*, která může mít hodnotu *obdelnik* nebo *kruh*, podle toho jaký tvar má příčný průřez nosníku (v případě že se jedná o kruhový průřez, zadá se hodnota b jako průměr a hodnota h může být libovolné číslo)

5.1.2 Výpočet kořenů frekvenční rovnice

Ve funkci je napevno zadána frekvenční rovnice pro vetknutý nosník (4.13), která byla odvozena výše. Kořeny této funkce lze získat pouze numerickým řešením, pro které se ideálně hodí funkce *fzero* programu Matlab. Funkce je zde použita stejným způsobem jako ve [2].

Funkce *fzero* má dvě vstupní proměnné, a to vlastní rovnici, jejíž kořeny chceme získat, a počáteční odhad kořenu. Pro každý odhad najde funkce jeden kořen rovnice. Kořeny jsou vyhledávány „hrubou silou“, tzn. je určen interval odhadů kořenů $y = 1, 2, 3, \dots, 11$ a tyto odhady jsou postupně pomocí cyklu *for* dosazovány do funkce *fzero*. Interval odhadů byl určen na základě vypočítaných kořenů v [1], kde čtvrtý kořen má hodnotu 10,996. Vzhledem k tomu že nebylo potřeba počítat více než první čtyři vlastní frekvence, nebylo také nutné zjišťovat více kořenů frekvenční rovnice. Více kořenů by se však dalo nalézt snadno pouhým zvýšením horní meze intervalu odhadů.

Nalezené kořeny frekvenční rovnice jsou ukládány do vektoru *kor*, který má na konci cyklu 11 prvků. V tomto intervalu se však nachází pouze čtyři kořeny frekvenční rovnice. Je tedy zřejmé, že se některé ve vektoru opakují. Třídění vypočítaných kořenů je provedeno tak, že se opět pomocí cyklu *for* berou jednotlivé prvky vektoru *kor* a vypočítá se hodnota rozdílu tohoto prvku a prvku následujícího. Pomocí cyklu *if* se pak tato hodnota porovná se zadanou přes-

ností eps a je-li absolutní hodnota rozdílu větší než hodnota proměnné eps , zapíše se vyšší z obou kořenů do vektoru $koreny$. Takto se postupně naplní vektor $koreny$, který na konci cyklu obsahuje první čtyři kořeny frekvenční rovnice. Tyto kořeny jsou vypsány na obrazovku funkcí $disp$.

5.1.3 Výpočet vlastních frekvencí

Dále se pomocí cyklu $switch/case$ rozhodne na základě hodnoty proměnné $prurez$, zda se jedná o kruhový nebo obdélníkový průřez a vypočítá se kvadratický moment průřezu a plocha průřezu. Použité vzorce pro obdélník jsou

$$J = \frac{bh^3}{12} \text{ a } S = bh$$

a pro kruh

$$J = \frac{\pi b^4}{64} \text{ a } S = \frac{\pi b^2}{4}.$$

Vypočtené hodnoty spolu s materiálovými charakteristikami a kořeny frekvenční rovnice jsou dosazeny do vztahu 4.14. Takto se vypočítají vlastní frekvence, které jsou následně také vypsány pomocí funkce $disp$.

5.1.4 Výpočet polohy uzlových bodů

Uzlové body jsou v podstatě kořeny rovnice pro tvar vlastních kmitů (4.15). Výpočet jejich polohy (poloha je zde brána jako vzdálenost od vetknutí) je realizován stejným způsobem jako výpočet kořenů frekvenční rovnice. Cyklus for postupně bere rovnice pro jednotlivé tvary kmitů (4.15) a provádí opět proceduru s funkcí $fzero$. Výsledkem je matice $nods$ o rozměrech 4×4 , jejíž každý řádek je posloupností vzdáleností uzlových bodů daného tvaru vlastních kmitů.

5.1.5 Vykreslení vlastních tvarů kmitů

Aby bylo možno volit, který tvar kmitů se má zobrazit, bylo potřeba nejprve vypočítat vykreslované hodnoty pomocí cyklu for a uložit je do dvou matic x a y . Tyto matice mají čtyři řádky a každý odpovídá jednomu tvaru vlastních kmitů. V matici x jsou hodnoty polohy x a v matici y jsou jim odpovídající hodnoty výchylek, které se vypočítají dosazením do rovnice vlastních kmitů 4.15.

Pomocí cyklu if se pak zjistí hodnota proměnné $tvar$ a podle toho se vykreslí graf. Např. má-li proměnná $tvar$ hodnotu 2, pak se vykreslí druhý řádek matice y v závislosti na druhém řádku matice x apod. Pokud je hodnota proměnné $tvar$ vse , pak se nevytvoří pouze jeden graf, ale čtyři grafy do jednoho okna. K vykreslování je použito funkce $plot$ a pro vytvoření více grafů v jednom obrázku funkce $subplot$.

5.2 Výsledky výpočtu zadaného nosníku

Výše popsaná funkce byla použita k výpočtu vlastních frekvencí a tvarů vlastních kmitů nosíku, který byl také později předmětem experimentu. Zadané parametry byly:

- šířka příčného průřezu $b = 8$ mm
- výška příčného průřezu $h = 8$ mm
- délka nosníku $L = 400$ mm
- hustotu materiálu nosníku $\rho_0 = 7850$ kg·m⁻³ (materiálem byla ocel)
- modul pružnosti $E = 2,1 \cdot 10^{11}$ Pa
- proměnná $tvar = 1, 2, 3, 4$ nebo vse

- proměnná *prurez* = *obdélník*

Je tedy zřejmé, že délka nosníku je skutečně větší než $15h$ a použitím zjednodušené Bernoulliho-Eulerovy teorie se nedopustíme výrazné odchylky.

Po zadání těchto parametrů do skriptu *start* se postupně vypíší hodnoty nalezených kořenů frekvenční rovnice, hodnoty vlastních frekvencí a polohy uzlových bodů jednotlivých tvarů. Výsledky vypsané v příkazovém řádku mají tuto podobu:

První čtyři kořeny frekvenční rovnice jsou 1.8751, 4.6941, 7.8548, 10.9955.

První čtyři vlastní frekvence nosníku jsou 41.7758 Hz, 261.8047 Hz, 733.0606 Hz, 1436.5062 Hz.

Uzlové body pro první čtyři tvary kmitání (udáno ve vzdálenostech od vetknutého konce v mm) jsou:

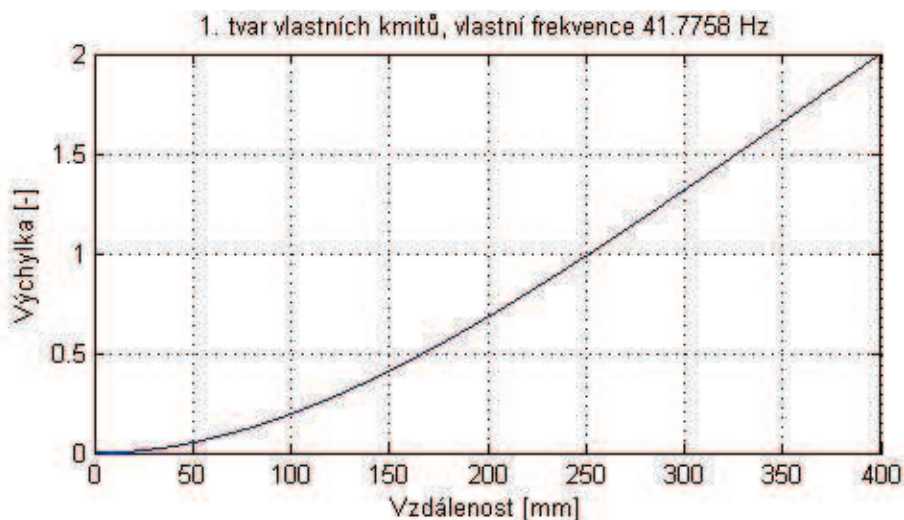
1. tvar 0

2. tvar 0 313.3778

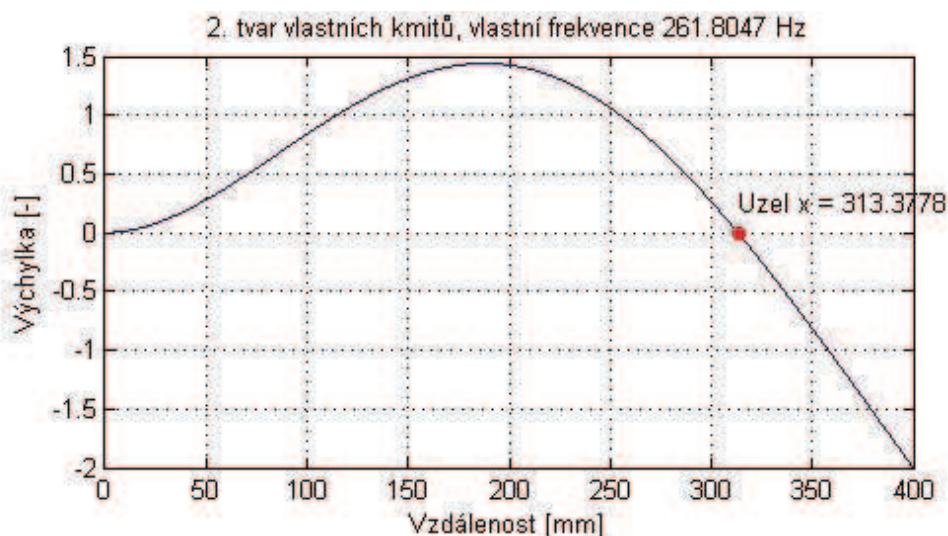
3. tvar 0 201.4191 347.071

4. tvar 0 143.335 257.6352 362.2256

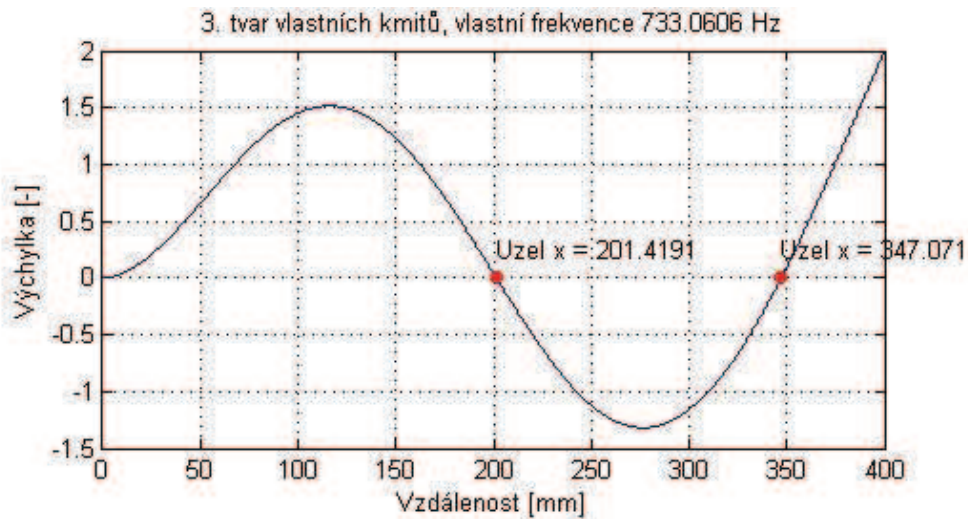
Zároveň s tímto textem je zobrazeno okno s grafem požadovaného tvaru vlastních kmitů (resp. všech tvarů) a se zvýrazněnými uzlovými body – viz obr. 3 – 6.



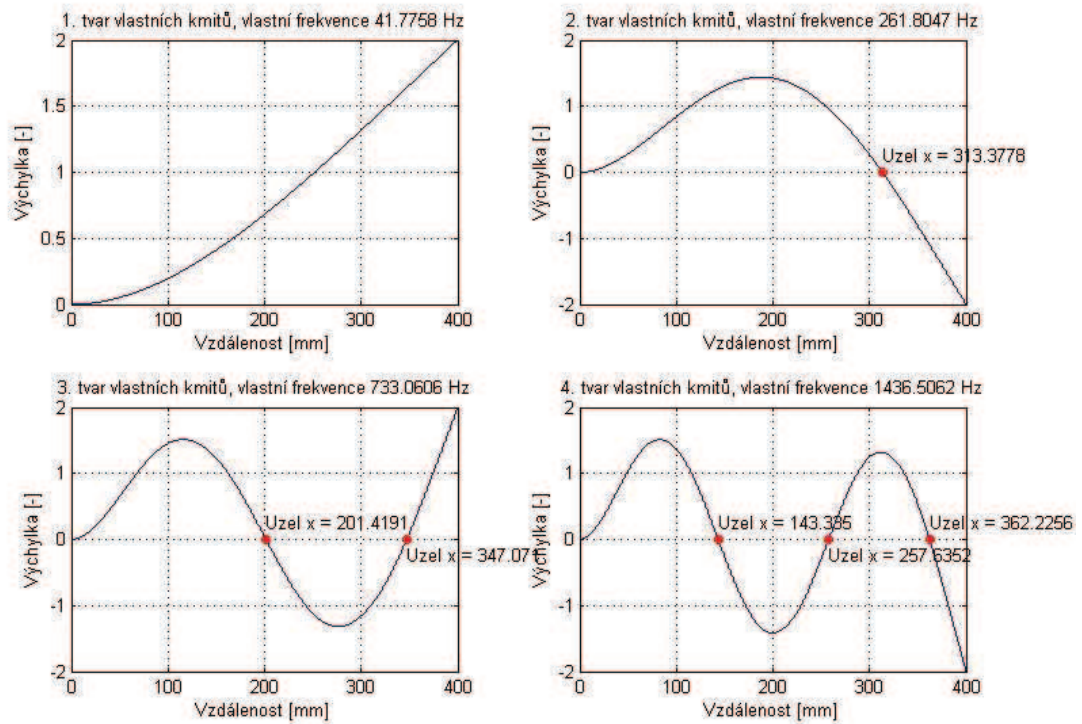
Obr. 3: Vypočtený první tvar vlastních kmitů



Obr. 4: Vypočtený druhý tvar vlastních kmitů



Obr. 5: Vypočtený třetí tvar vlastních kmitů



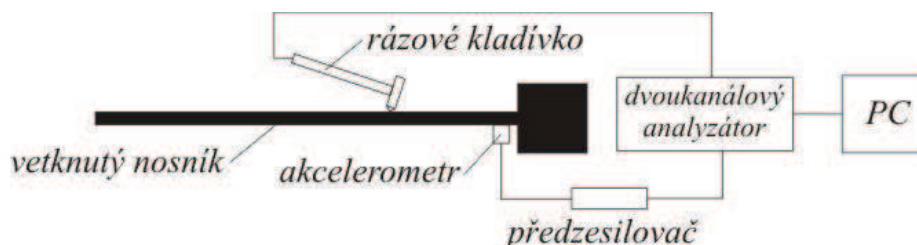
Obr. 6: Všechny tvary vlastních kmitů zobrazené v jednom okně

6 EXPERIMENT

Pro porovnání vypočtených vlastních frekvencí a tvarů vlastních kmitů byla provedena experimentální modální analýza vetknutého nosníku. Parametry použitého nosníku jsou uvedeny výše. Nosník byl buzen rázově pomocí rázového kladívka a jako odezva systému bylo snímáno zrychlení.

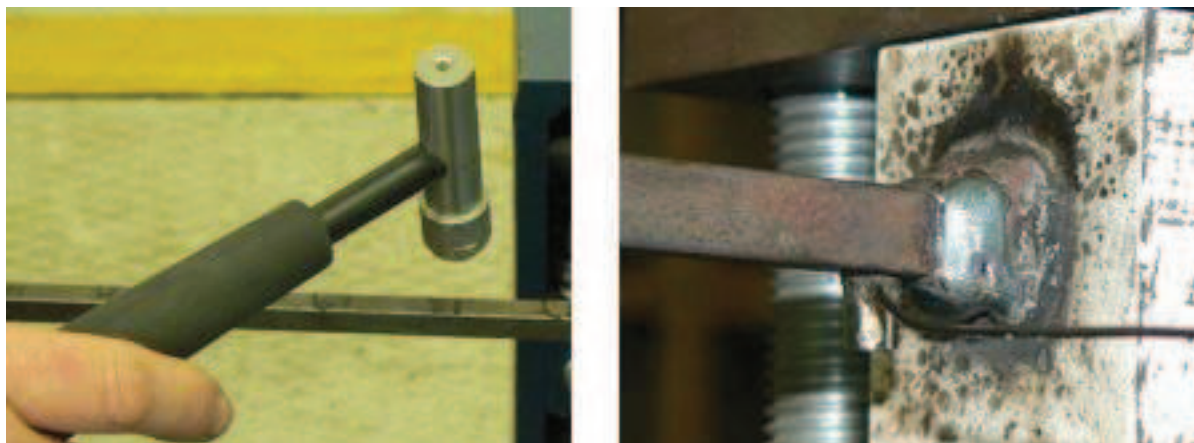
6.1 Provedení experimentu

Vetknutý nosník je upnut do upínacího přípravku a rozdělen na 13 stejných částí (body 0 – 13) přibližně po 30,77 mm. Tyto části jsou na nosníku vyznačeny. Na vetknutý konec je pomocí včelího vosku připevněn piezoelektrický snímač zrychlení. Zapojení je provedeno podle schématu na obr. 7. Snímač je přes předzesilovač připojen ke dvoukanálovému analyzátoru. Na druhý vstup analyzátoru je připojeno rázové kladívko. Dvoukanálový analyzátor je připojen k PC vybavenému softwarem pro zaznamenávání a vyhodnocování naměřených údajů. Na základě vypočtených hodnot byl rozsah měřených frekvencí zvolen 1600 Hz.



Obr. 7: Schéma zapojení

Měření se provádí poklepáním rázového kladívka na vyznačená místa na nosníku (viz obr. 8). Na každé místo se poklepe třikrát. Software zaznamenává frekvenční odezvou funkci z dvoukanálového analyzátoru automaticky.



Obr. 8: Buzení rázovým kladívkem a upevnění snímače na nosníku

Nakonec je provedeno vyhodnocení. Z grafu frekvenční odezvy funkce v závislosti na buďící frekvenci jsou určeny vlastní frekvence. Pro tyto vlastní frekvence jsou zobrazeny tvary vlastních kmitů.

6.2 Použité vybavení

Pro provedení experimentu bylo použito následující vybavení:

- piezoelektrický akcelerometr Brüel&Kjaer type 4374
- rázové kladívko Brüel&Kjaer type 8206 – 001

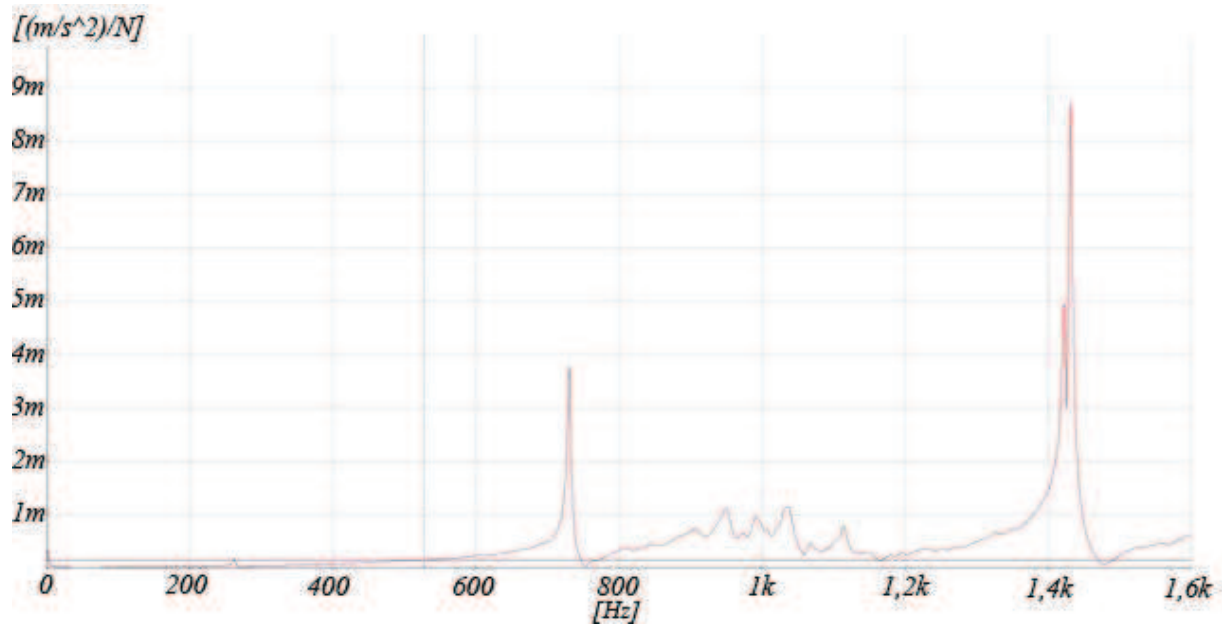
- předzesilovač
- dvoukanálový analyzátor Brüel&Kjaer PULSE 3560 – B – 140
- PC se softwarem Pulse Labshop ver. 15.1.0

6.3 Výsledky a porovnání

Experimentálně zjištěné hodnoty vlastních frekvencí a tvary vlastních kmitů byly porovnány s hodnotami vypočtenými výše popsanou funkcí *vetnos*.

6.3.1 Vlastní frekvence

Vlastní frekvence byly odečteny z grafu amplitudy frekvenční odezvy funkce v závislosti na budící frekvenci – viz obr. 9. V obrázku je vidět, že pro vlastní frekvence dosahuje frekvenční funkce lokálních maxim. Porovnání hodnot je provedeno v tab. 1, kde je také zapsána relativní odchylka od vypočtené hodnoty.



Obr. 9: Graf frekvenční odezvy funkce v závislosti na budící frekvenci

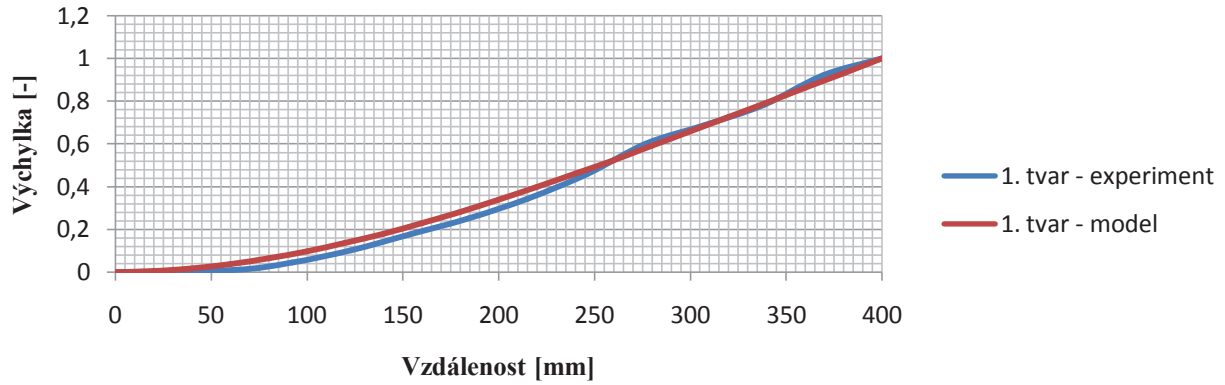
Tab. 1: Porovnání hodnot vlastních frekvencí

Pořadí	Změřená vl. frek. [Hz]	Vypočtená vl. frek. [Hz]	Relativní odchylka [%]
1.	42	41,78	0,53
2.	262,5	261,81	0,26
3.	728	733,06	0,69
4.	1431	1436,51	0,31

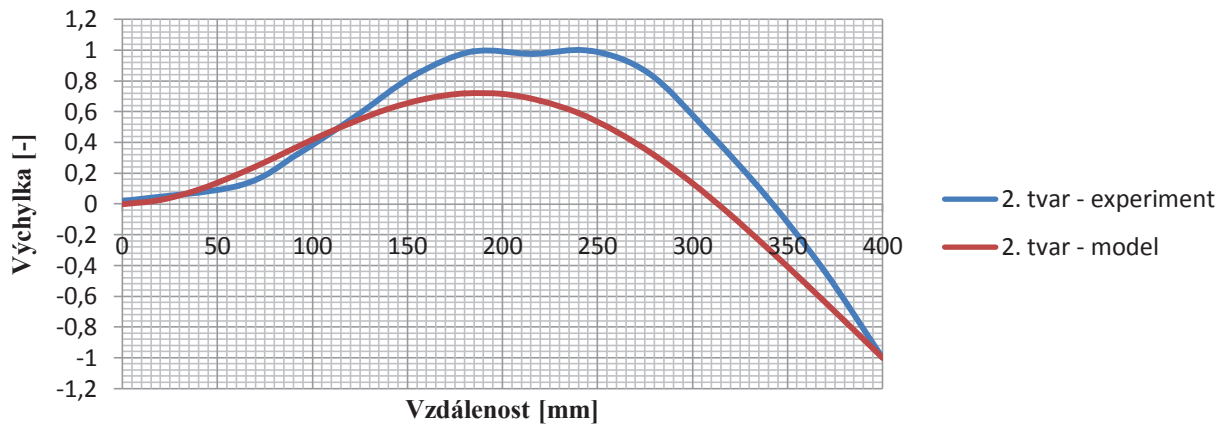
Je vidět, že odchylky vlastních frekvencí jsou do 1% vypočtené hodnoty. Lze tedy říct, že vlastní frekvence byly určeny správně. Odchylky mohou být způsobeny tím, že v modelu nebylo uvažováno tlumení soustavy a také nebyl přesně určen materiál, ze kterého byl vyroben použitý nosník.

6.3.2 Tvary vlastních kmitů

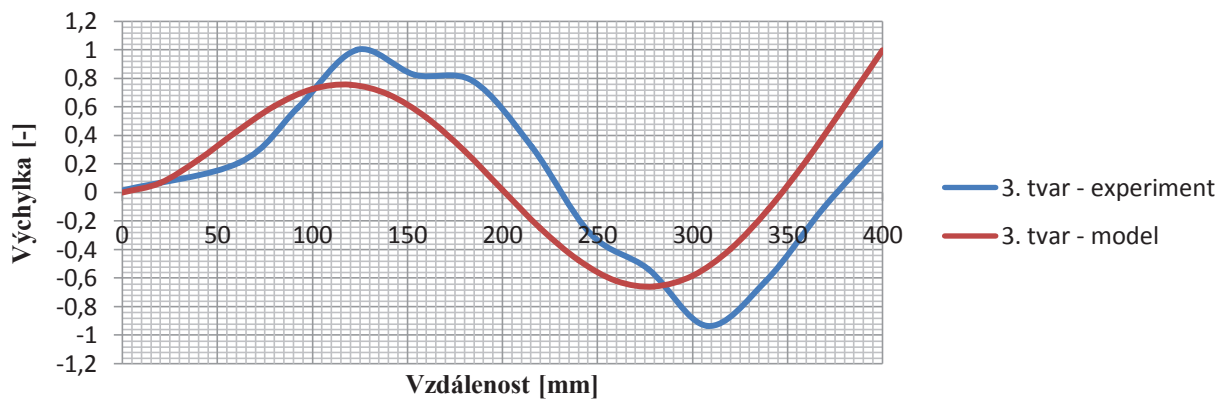
Tvary jsou získány pomocí hodnot frekvenční přenosové funkce v jednotlivých bodech na nosníku pro danou vlastní frekvenci. Pomocí programu Microsoft Office Excel byly vykresleny vlastní tvary zjištěné experimentálně a odečteny polohy uzlových bodů. Polohy uzlových bodů byly opět porovnány s vypočtenými polohami.



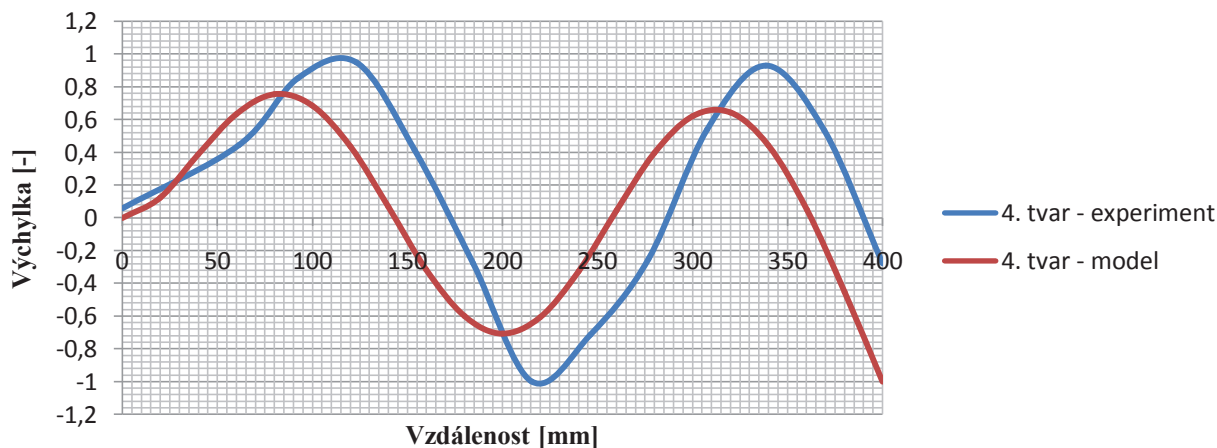
Obr. 10: Porovnání 1. tvaru vlastních kmitů



Obr. 11: Porovnání 2. tvaru vlastních kmitů



Obr. 12: Porovnání 3. tvaru vlastních kmitů



Obr. 13: Porovnání 4. tvaru vlastních kmitů

Porovnání poloh uzlových bodů bylo provedeno pouze pro druhý, třetí a čtvrtý tvar, protože první tvar má uzlový bod pouze jeden – ve vetknutí. Tento uzlový bod je pro všechny tvary stejný. U ostatních uzlových bodů byl vypočten také rozdíl vypočtené a experimentálně zjištěné hodnoty polohy. Porovnání je provedeno v tab. 2.

Tab. 2: Porovnání tvarů vlastních kmitů

Uzel	Změřená poloha [mm]	Vypočtená poloha [mm]	Rozdíl [mm]
2. tvar			
1.	342	313,38	28,62
3. tvar			
1.	230	201,42	28,58
2.	376	347,07	28,93
4. tvar			
1.	173	143,34	29,66
2.	287	257,64	29,36
3.	390	362,23	27,77

Tvary kmitů nosníku získané experimentálně přibližně odpovídají tvarům vypočteným. Velké odchylky hodnot mohou být způsobeny tím, že nosník nebyl přesně rozdělen na díly. Snímač odezvy navíc nebyl umístěn přímo ve vetknutí, což mohlo způsobit posun hodnot. Dále se při analýze mohly projevit i jiné než ohybové kmitů nosníku, např. torzní nebo podélné.

ZÁVĚR

Cílem práce bylo určit vlastní frekvence a tvary vlastních kmitů vetknutého nosníku na základě sestaveného matematického modelu. Tyto výsledky pak měly být porovnány s hodnotami zjištěnými pomocí experimentální modální analýzy.

Použitým matematickým modelem byla Bernoulliho-Eulerova teorie příčného ohybového kmitání nosníku. Tento model je modelem spojitým. Na základě Bernoulliho-Eulerovy teorie byla sestavena pohybová rovnice a bylo teoreticky odvozeno její řešení.

Poté byl realizován výpočet pomocí funkce naprogramované v prostředí MATLAB. Tato funkce numericky určí první čtyři vlastní frekvence, vykreslí tvary vlastních kmitů a vypočítá polohu uzlových bodů na nosníku. Takto sestavená funkce má také tu výhodu, že u ní lze snadno měnit vstupní parametry a tím analyzovat vetknutý nosník jiných rozměrů nebo jiného tvaru příčného průřezu.

Zároveň s výpočtem byla provedena experimentální modální analýza vetknutého nosníku. Z naměřených hodnot frekvenční odezvové funkce byly za pomoci softwaru Pulse Labshop určeny vlastní frekvence. Z hodnot frekvenčních odezvoových funkcí v jednotlivých bodech na nosníku byly v programu Microsoft Office Excel 2007 sestaveny tvary vlastních kmitů a odečteny polohy uzlových bodů.

Na závěr bylo provedeno porovnání získaných výsledků. Vlastní frekvence byly porovnány v tabulce a byla určena hodnota rozdílu vypočtené a naměřené frekvence. Pro první čtyři vlastní frekvence byla maximální odchylka 0,69% vypočtené hodnoty. Malé odchylky mohou být způsobeny nepřesným určením materiálu nosníku.

Tvary vlastních kmitů si přibližně odpovídaly tvarem, nicméně poloha uzlových bodů se lišila poměrně výrazně. Rozdíl se pohyboval v rozmezí 27,77 – 29,66 mm pro všechny polohy uzlových bodů. Tento rozdíl může být způsoben nepřesným rozdělením nosníku na díly. Také se mohlo projevit nepřesné umístění snímače, který nebyl umístěn přesně ve vetknutí, čímž došlo k celkovému posunu všech hodnot.

Využití této práce je plánováno v předmětu Počítačové metody mechaniky v dynamice (RPM).

SEZNAM POUŽITÝCH ZDROJŮ

- [1] Brepta, R., Půst, L., Turek F.: *Mechanické kmitání*, Sobotáles, Praha, 1994, 592 stran, ISBN 80-901684-8-5.
- [2] Stejskal, V., Okrouhlík, M.: *Kmitání s Matlabem*, Vydavatelství ČVUT, Praha, 2002, 376 stran, ISBN 80-01-02435-0.
- [3] Slavík, J.: *Počítačové metody mechaniky*, Akademické nakladatelství CERM, Brno, 2003, 118 stran, ISBN 80-214-2311-0.
- [4] Yang, B.: *Stress, strain and structural dynamics*, Elsevier Academic Press, San Diego, 2003, 961 stran, ISBN 0-12-787767-3.
- [5] Miláček, S.: *Modální analýza mechanických kmitů*, Vydavatelství ČVUT, Praha, 1996, 154 stran, ISBN 80-01-00872-X.
- [6] Døssing, O.: *Zkoušení mechanických soustav, část I: Měření pohyblivosti*, Brüel&Kjaer, Naerum, 1988, 47 stran.
- [7] Bilošová, A.: *Experimentální modální analýza* [online], [cit. 9. 5. 2011], dostupné z: http://www.337.vsb.cz/materialy/experimentalni_modalni_analyza/EMA_skripta.pdf.
- [8] MATLAB Help

SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ

Symbol	Význam
A	plocha příčného průřezu nosníku
a	zrychlení elementu nosníku
b	šířka příčného průřezu nosníku
c_0	rychlost podélných vln v nosníku
E	modul pružnosti v tahu
G	modul pružnosti ve smyku
$H(\omega)$	frekvenční odezvovalá funkce
h	výška příčného průřezu nosníku
I	moment setrvačnosti elementu nosníku
J	kvadratický moment průřezu
j	kvadratický poloměr průřezu
L	délka nosníku
M	ohybový moment
Q	posouvající síla
$q(x,t)$	vnější zatížení nosníku
S, T, U, V	Krylovovy funkce
$w(x,t)$	průhyb nosníku
w_0	průhyb vlastních tvarů kmitů
x	vzdálenost od vetknutí, x-ová osa
γ	úhlová přetvoření od posouvající síly
κ	součinitel smykové deformace
ρ	hustota materiálu nosníku
φ	úhel natočení elementu nosníku
ψ	natočení elementu nosníku od ohybového momentu
Ω_n	vlastní frekvence daného tvaru kmitů

SEZNAM PŘÍLOH

- | | |
|-----------|---|
| Příloha 1 | výpis zdrojového kódu funkce <i>vetnos</i> a skriptu <i>start</i> |
| Příloha 2 | funkce <i>vetnos.m</i> na přiloženém CD |
| Příloha 3 | soubor <i>start.m</i> obsahující startovací soubor se vstupními parametry funkce <i>vetnos</i> na přiloženém CD |
| Příloha 4 | soubor <i>tvary.xls</i> s naměřenými daty zpracovanými do grafů na přiloženém CD |

PŘÍLOHA 1 – VÝPIS ZDROJOVÉHO KÓDU

V této příloze jsou vypsány zdrojové kódy funkce *vetnos* a skriptu *start* pro její spuštění tak, jak byly vytvořeny v programovém prostředí MATLAB.

Funkce *vetnos*

```
function vetnos (b,h,L,ro,E,tvar,prurez)
%Funkce vetnos(b,h,L,ro,E,tvar,prurez) spočítá vlastní frekvence vetknutého
%nosníku zadaných parametrů, zobrazí první čtyři tvary vl. kmitů a určí
%polohu uzlových bodů, které zobrazí do grafů.
%Vstupní parametry jsou: b šířka průřezu nosníku v mm
%                               h výška průřezu nosníku v mm
%                               L délka nosníku v mm
%                               ro hustota materiálu nosníku v kg/m3
%                               E modul pružnosti v tahu v Pa
%                               tvar určuje jaký tvar vlastních kmitů chceme
%                               zobrazit: 1 1. tvar
%                                       2 2. tvar
%                                       3 3. tvar
%                                       4 4. tvar
%                               nebo 'vse' pro vsechny tvary
%                               prurez určuje, jestli je průřezem obdélník bxh
%'obdelnik'
%                               nebo kruh o průměru b 'kruh'
%                               Je-li průřezem kruh, pak zadáváme za b i za
%                               h stejnou hodnotu průměru.
%Ke spuštění funkce je vhodné použít spouštěcí skript start, ve kterém
%vyplníme parametry, uložíme a spustíme. Tento soubor pak zaovlá funkci
%vetnos s našimi parametry.

%Frekvenční rovnice pro vetknutý nosník je
frov = @(x) cosh(x)*cos(x) + 1;

%Numerický výpočet kořenů frek. rovnice
ymax = 11;
for y = 1:ymax
    kor(y) = fzero(frov,y);
end
eps = 1e-10;
j = 1;
koreny(j)=kor(j);
for y=1:(ymax-1)
    if abs(kor(y+1)-kor(y))>eps
        j=j+1;
        koreny(j)=kor(y+1);
    end
end
disp(['První čtyři kořeny frekvenční rovnice jsou ',num2str(koreny(1))','
',num2str(koreny(2))',' ','',num2str(koreny(3))',' ','',num2str(koreny(4))','.''])

%Převod na základní jednotky
b=b/1000;
h=h/1000;
L=L/1000;

%Výpočet vlastních frekvencí
switch prurez
    case 'obdelnik'
        J = (b*h^3)/12;
```

```

        A = b*h;
    case 'kruh'
        J = (pi*b^4)/64;
        A = (pi*b^2)/4;
    end

for n = 1:length(koreny)
    omega(n) = (sqrt(J/A))* (sqrt(E/ro))* ((koreny(n))^2)/(L1^2);
    omega(n) = omega(n)/(2*pi);
end
disp(['První čtyři vlastní frekvence nosníku jsou ', num2str(omega(1)), ' Hz, ', num2str(omega(2)), ' Hz, ', num2str(omega(3)), ' Hz, ', num2str(omega(4)), ' Hz.'])

%Hledání uzlových bodů prvních čtyř tvarů pomocí funkce fzero
nods = zeros(4,4);

for k = 2:4;
    bnl = koreny(k);
    bn = bnl/L;
    vych = @(x) cosh(bn*x) - cos(bn*x) - (cosh(bnl) + cos(bnl))/(sinh(bnl) + sin(bnl))*(sinh(bn*x)- sin(bn*x));
    lmax = L;
    nl = 1;
    for l=0:lmax;
        uz(nl) = fzero(vych,l);
        nl = nl+1;
    end
    eps;
    m = 1;
    uzly(m)=uz(m);
    pmax = length(uz);
    for p=1:(pmax-1)
        if abs(uz(p+1)-uz(p))>eps
            m=m+1;
            uzly(m)=uz(p+1);
        end
    end
    nods(k,1:k) = uzly;
end
nods;
disp('Uzlové body pro první čtyři tvary kmitání (udáno ve vzdálenostech od vetknutého konce v mm) jsou:')
disp(['1. tvar ', num2str(nods(1,1))])
disp(['2. tvar ', num2str(nods(2,1:2))])
disp(['3. tvar ', num2str(nods(3,1:3))])
disp(['4. tvar ', num2str(nods(4,1:4))])

%Vykreslení průběhů vlastních kmitů nosníku
x = [];
y = [];

for k = 1:length(koreny)
    bnl = koreny(k);
    bn = bnl/L;
    m = 1;
    for n = [0:0.1:L]
        x(k,m)=n;
        w = (cosh(bn*n) - cos(bn*n) - (cosh(bnl) + cos(bnl))/(sinh(bnl) + sin(bnl))*(sinh(bn*n)- sin(bn*n)));
    end
end

```

```

        y(k,m)=w;
        m = m+1;
    end
end

if tvar == 1
    x = x(1,1:end);
    y = y(1,1:end);
    plot(x,y,'blue');
    title(['1. tvar vlastních kmitů, vlastní frekvence
',num2str(omega(1)), ' Hz'])
    xlabel('Vzdálenost [mm]')
    ylabel('Výchylka [-]')
    grid on
elseif tvar == 2
    x = x(2,1:end);
    y = y(2,1:end);
    plot(x,y,'blue');
    hold on
    plot(nods(2,2),0,'-
mo','MarkerEdgeColor','r','MarkerFaceColor','r','MarkerSize',5)
    text(nods(2,2),0.25,['Uzel x = ',num2str(nods(2,2))])
    hold off
    title(['2. tvar vlastních kmitů, vlastní frekvence
',num2str(omega(2)), ' Hz'])
    xlabel('Vzdálenost [mm]')
    ylabel('Výchylka [-]')
    grid on
elseif tvar == 3
    x = x(3,1:end);
    y = y(3,1:end);
    plot(x,y,'blue');
    hold on
    plot(nods(3,2),0,'-
mo','MarkerEdgeColor','r','MarkerFaceColor','r','MarkerSize',5)
    text(nods(3,2),0.25,['Uzel x = ',num2str(nods(3,2))])
    plot(nods(3,3),0,'-
mo','MarkerEdgeColor','r','MarkerFaceColor','r','MarkerSize',5)
    text(nods(3,3),0.25,['Uzel x = ',num2str(nods(3,3))])
    hold off
    title(['3. tvar vlastních kmitů, vlastní frekvence
',num2str(omega(3)), ' Hz'])
    xlabel('Vzdálenost [mm]')
    ylabel('Výchylka [-]')
    grid on
elseif tvar == 4
    x = x(4,1:end);
    y = y(4,1:end);
    plot(x,y,'blue');
    hold on
    plot(nods(4,2),0,'-
mo','MarkerEdgeColor','r','MarkerFaceColor','r','MarkerSize',5)
    text(nods(4,2),0.25,['Uzel x = ',num2str(nods(4,2))])
    plot(nods(4,3),0,'-
mo','MarkerEdgeColor','r','MarkerFaceColor','r','MarkerSize',5)
    text(nods(4,3),0.25,['Uzel x = ',num2str(nods(4,3))])
    plot(nods(4,4),0,'-
mo','MarkerEdgeColor','r','MarkerFaceColor','r','MarkerSize',5)
    text(nods(4,4),0.25,['Uzel x = ',num2str(nods(4,4))])
    hold off

```

```

    title (['4. tvar vlastních kmitů, vlastní frekvence
',num2str(omega(4)), ' Hz'])
    xlabel ('Vzdálenost [mm]')
    ylabel ('Výchylka [-]')
    grid on
elseif tvar == 'vse'
    x1 = x(1,1:end);
    y1 = y(1,1:end);
    x2 = x(2,1:end);
    y2 = y(2,1:end);
    x3 = x(3,1:end);
    y3 = y(3,1:end);
    x4 = x(4,1:end);
    y4 = y(4,1:end);

    subplot(2,2,1)
    plot(x1,y1,'blue');
    title (['1. tvar vlastních kmitů, vlastní frekvence
',num2str(omega(1)), ' Hz'])
    xlabel ('Vzdálenost [mm]')
    ylabel ('Výchylka [-]')
    grid on

    subplot(2,2,2)
    plot(x2,y2,'blue');
    hold on
    plot(nods(2,2),0,'-
mo','MarkerEdgeColor','r','MarkerFaceColor','r','MarkerSize',5)
    text(nods(2,2),0.25,['Uzel x = ',num2str(nods(2,2))])
    hold off
    title (['2. tvar vlastních kmitů, vlastní frekvence
',num2str(omega(2)), ' Hz'])
    xlabel ('Vzdálenost [mm]')
    ylabel ('Výchylka [-]')
    grid on

    subplot(2,2,3)
    plot(x3,y3,'blue');
    hold on
    plot(nods(3,2),0,'-
mo','MarkerEdgeColor','r','MarkerFaceColor','r','MarkerSize',5)
    text(nods(3,2),0.25,['Uzel x = ',num2str(nods(3,2))])
    plot(nods(3,3),0,'-
mo','MarkerEdgeColor','r','MarkerFaceColor','r','MarkerSize',5)
    text(nods(3,3),-0.25,['Uzel x = ',num2str(nods(3,3))])
    hold off
    title (['3. tvar vlastních kmitů, vlastní frekvence
',num2str(omega(3)), ' Hz'])
    xlabel ('Vzdálenost [mm]')
    ylabel ('Výchylka [-]')
    grid on

    subplot(2,2,4)
    plot(x4,y4,'blue');
    hold on
    plot(nods(4,2),0,'-
mo','MarkerEdgeColor','r','MarkerFaceColor','r','MarkerSize',5)
    text(nods(4,2),0.25,['Uzel x = ',num2str(nods(4,2))])
    plot(nods(4,3),0,'-
mo','MarkerEdgeColor','r','MarkerFaceColor','r','MarkerSize',5)
    text(nods(4,3),-0.25,['Uzel x = ',num2str(nods(4,3))])

```

```

    plot(nods(4,4),0,'-
mo','MarkerEdgeColor','r','MarkerFaceColor','r','MarkerSize',5)
    text(nods(4,4),0.25,['Uzel x = ',num2str(nods(4,4))])
    hold off
    title(['4. tvar vlastních kmitů, vlastní frekvence
',num2str(omega(4)), ' Hz'])
    xlabel('Vzdálenost [mm]')
    ylabel('Výchylka [-]')
    grid on
end

```

Skript start

```

b = 8;          %b a h jsou rozměry příčného průřezu prutu, b je šířka, h je
výška
h = 8;          %rozměry zadáváme v milimetrech
L = 400;        %L je délka vetknutého prutu
E = 2.1e11;     %Modul pružnosti v tahu materiálu v Pa
ro = 7850;      %Hustota materiálu v kg/m3
tvar = 'vse';   %Proměnná tvar má hodnoty 1,2,3,4 nebo 'vse' a určuje který
tvar
                %vlastních kmitů chceme vykreslit - 1., 2., 3., 4., anebo
všechny do jednoho okna.
prurez = 'obdelnik'; %Proměnnou prurez zvolíme průřez nosníku - buď 'ob-
delnik' nebo 'kruh'.
                %Zvolíme-li 'kruh' pak musíme za hodnoty b i h
                %dosadit hodnotu průměru kruhového průřezu.
                %Pro více informací viz help vetnos.

```

```

vetnos(b,h,L,ro,E,tvar,prurez)

```