



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ  
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ  
ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A  
BIOMECHANIKY

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING  
INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND  
BIOMECHANICS

## DEFORMAČNÍ ANALÝZA PŘÍMÝCH NOSNÍKŮ S VLVIVEM POSUNUTÍ PODPOR

STRAIN ANALYSIS OF STRAIGHT BEAMS WITH INFLUENCE OF SUPPROT DISPLACEMENT

### BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE  
AUTHOR

VÍT ŠTOURÁČ

VEDOUCÍ PRÁCE  
SUPERVISOR

Ing. PETR NAVRÁTIL

BRNO 2011



Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství

Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky

Akademický rok: 2010/2011

## **ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE**

student(ka): Vít Štourač

který/která studuje v **bakalářském studijním programu**

obor: **Strojní inženýrství (2301R016)**

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

### **Deformační analýza přímých nosníků s vlivem posunutí podpor**

v anglickém jazyce:

### **Strain analysis of straight beams with influence of support displacement**

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Řešení deformace staticky neurčitého nosníku s postupným přidáváním kloubů až na úroveň jeho statické určitosti. Posouzení vlivu posunutí podpor na VVÚ. Řešení bude prováděno pomocí Castiglianovy věty, případně pomocí jiných metod.

Cíle bakalářské práce:

Nastudování dané problematiky, řešení vzorové úlohy a studie vlivu posunutí podpor pro prizmatický nosník.

Seznam odborné literatury:

1. Janíček P., Ondráček E., Vrbka J., Burša J.: Mechanika těles - Pružnost a pevnost I, VUT Brno, FSI, 2004
2. Gere J.M., Timoshenko S.P.: Mechanics of Materials, Chapman & Hall, 1991
3. Höschl C.: Pružnost a pevnost ve strojírenství, SNTL Praha, 1971
4. Kadlčák, J., Kytýr, J. Statika stavebních konstrukcí I. Brno : VUTIUM, 2001
5. Kadlčák, J., Kytýr, J. Statika stavebních konstrukcí II. Brno : VUTIUM, 2001

Vedoucí bakalářské práce: Ing. Petr Navrátil

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2010/2011.

V Brně, dne 12.1.2011

L.S.

---

prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc.

Ředitel ústavu

---

prof. RNDr. Miroslav Doupovec, CSc.

Děkan fakulty

## **Abstrakt**

Tato práce je zaměřena na řešení přímých staticky neurčitě uložených nosníků a vlivu posunutí jejich podpor na výsledné řešení. K řešení bylo použito metod *Castiglianovy věty*, *diferenciální rovnice ohybové čáry* a *nosníku s vnitřními klouby (Gerberův nosník)*. Jako příklad byl zvolen nosník o dvou polích a třech podporách, zatížený po celé jeho délce liniovým zatížením.

## **Klíčová slova**

nosník, liniové zatížení, deformace, podpora, *Castiglianova věta*, *diferenciální rovnice ohybové čáry*, *nosník s vnitřními klouby (Gerberův nosník)*

## **Abstract**

These work is focused on the solutions to straight beams statically stored indefinitely and the influence of displacement their support to the final solution. The solution was used *Castigliano's theorem*, *fluxional equation of bend line* methods and *beam with internal joints (Gerber beam)*. As an example, he was elected the two boxes - beam about three supports loaded for the entire length of a line load.

## **Key words**

beam, line load, strain, support, *Castigliano's theorem*, *fluxional equation of bend line*, *beam with internal joints (Gerber's beam)*

### **Bibliografická citace**

ŠTOURAČ, V. *Deformační analýza přímých nosníků s vlivem posunutí podpor*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2011. 59 s.  
Vedoucí bakalářské práce Ing. Petr Navrátil.

### **Prohlášení o původnosti práce**

Já, Vít Štourač, čestně prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a že jsem uvedl všechny použité prameny a literaturu.

V Brně dne 26.5.2011

---

Vít Štourač

## **Poděkování**

Předem bych chtěl poděkovat svému vedoucímu bakalářské práce Ing. Petru Navrátilovi za jeho ochotu, podporu a pomoc při řešení této práce. Rád bych také poděkoval svým rodičům za podporu při studiu, a za možnost zpracovat tuto práci.



# Obsah

<b>Obsah .....</b>	<b>9</b>
<b>1 Úvod.....</b>	<b>11</b>
<b>2 Předpoklady řešení .....</b>	<b>12</b>
2.1 Lineárně pružné těleso .....	12
2.2 Materiálové charakteristiky .....	12
2.3 Prutové předpoklady .....	12
2.4 Smyková napětí.....	12
2.5 Vzorový příklad .....	13
<b>3 Castiglianova věta .....</b>	<b>14</b>
3.1 Odvození Castiglianovy věty .....	14
3.2 Castiglianova věta pro prostý ohyb prutů .....	18
3.3 Znaménková konvence pro otevřené přímé pruty .....	20
3.4 Řešení vzorového příkladu pomocí Castiglianovy věty .....	20
3.4.1 Úplné uvolnění .....	21
3.4.2 Rovnice statické rovnováhy a statický rozbor .....	21
3.4.3 Částečné uvolnění.....	22
3.4.4 Určení stykové výslednice v místě uvolněné podpory B .....	23
3.4.5 Určení stykových výslednic v místě podpory A a C .....	25
3.4.6 Průběhy VVÚ .....	25
3.5 Vliv posunutí podpor .....	26
3.5.1 Určení stykové výslednice v místě uvolněné podpory B .....	26
3.5.2 Určení stykových výslednic v místě podpor A a C .....	27
3.6 Ztráta funkce podpor .....	27
3.6.1 Ztráta funkce podpory B.....	27
3.6.2 Průběh VVÚ při ztrátě funkce podpory B.....	28
3.6.3 Ztráta funkce podpor A a C .....	29
3.6.4 Průběh VVÚ při ztrátě funkce podpor A a C .....	30
<b>4 Diferenciální rovnice ohybové čáry.....</b>	<b>31</b>
4.1 Odvození diferenciální rovnice ohybové čáry .....	31
4.2 Znaménková konvence pro diferenciální rovnici ohybové čáry .....	32
4.3 Řešení vzorového příkladu pomocí diferenciální rovnice ohybové čáry.....	33
4.3.1 Diferenciální rovnice pro jednotlivé úseky .....	33
4.3.2 Okrajové podmínky .....	34
4.3.3 Řešení okrajových podmínek a určení stykové výslednice v místě uvolněné podpory B .....	34
4.3.4 Grafické znázornění ohybové čáry .....	36
4.4 Vliv posunutí podpor .....	36
4.4.1 Okrajové podmínky .....	37

4.4.2	Řešení okrajových podmínek a určení stykové výslednice v místě uvolněné podpory B .....	37
4.4.3	Určení stykových výslednic v místě podpor A a C .....	38
4.5	Ztráta funkce podpor .....	38
4.5.1	Ztráta funkce podpory B .....	38
4.5.2	Grafické znázornění ohybové čáry při ztrátě funkce podpory B .....	39
4.5.3	Ztráta funkce podpor A a C .....	40
4.5.4	Grafické znázornění ohybové čáry při ztrátě funkce podpor A a C .....	41
<b>5</b>	<b>Nosník s vnitřními klouby (Gerberův nosník) .....</b>	<b>42</b>
5.1	Teoretický úvod nosníku s vnitřními klouby .....	42
5.1.1	Podmínka vkládání kloubů .....	43
5.1.2	Základní a vedlejší části nosníku .....	43
5.2	Řešení vzorového příkladu pomocí vložení kloubu .....	44
5.2.1	Vložení kloubu .....	44
5.2.2	Úplné uvolnění .....	44
5.2.3	Rovnice statické rovnováhy a statický rozbor .....	44
5.2.4	Určení stykových výslednic .....	46
5.2.5	Průběhy VVÚ .....	47
5.2.6	Grafické znázornění průběhů VVÚ .....	49
5.3	Vliv posunutí podpor a ztráta jejich funkce .....	50
5.4	Diferenciální rovnice ohybové čáry pro nosník s kloubem .....	50
5.4.1	Diferenciální rovnice pro jednotlivé úseky .....	50
5.4.2	Okrajové podmínky .....	51
5.4.3	Řešení okrajových podmínek .....	52
5.4.4	Grafické znázornění ohybové čáry .....	53
5.5	Vliv posunutí podpor na tvar ohybové čáry .....	53
5.5.1	Grafické znázornění ohybové čáry .....	54
<b>6</b>	<b>Závěr a zhodnocení .....</b>	<b>56</b>
	<b>Seznam použitých symbolů a značek .....</b>	<b>57</b>
	<b>Seznam použité literatury .....</b>	<b>58</b>
	<b>Seznam příloh .....</b>	<b>59</b>

# 1 Úvod

V praxi se setkáváme s mnoha případy součástí, kdy je třeba řešit jejich staticky neurčitě uložení. Časté jsou i případy, kdy lze mezi těmito součástmi najít takové, které lze modelovat jako přímé, staticky neurčitě uložené nosníky. Cílem této práce bylo porovnat řešení těchto nosníků pomocí metod *Castiglianovy věty* a *diferenciální rovnice ohybové čáry*, které jsou vhodné pro oblast strojního inženýrství a strojní součásti a dále pomocí *nosníku s vnitřními klouby (Gerberova nosníku)*, který je vhodný pro oblast stavebního inženýrství a stavební konstrukce. Nedílnou součástí této práce bylo také posouzení vlivu posunutí podpor nosníku na výsledné řešení.

## 2 Předpoklady řešení

### 2.1 Lineárně pružné těleso

Charakteristickou vlastností lineárně pružného tělesa je lineární závislost mezi zatížením, napětími, deformacemi a posuvy. U lineárně pružného tělesa závisí napjatost pouze na zatížení, deformace na zatížení (a materiálu tělesa), které na těleso v daném okamžiku působí a není tedy závislé na historii zatěžování [1].

Těleso lze prohlásit za lineárně pružné za těchto předpokladů [1]:

- materiál tělesa je lineárně pružný
- deformace tělesa je malá
- složky tenzoru přetvoření jsou malé
- okrajové podmínky jsou lineární

### 2.2 Materiálové charakteristiky

Výchozím předpokladem pružnosti a pevnosti jako součásti mechaniky těles je předpoklad o spojitosti tělesa. Má-li být spojitě těleso tělesem modelovým, pak podstatné vlastnosti materiálu reálných těles musí být vyjádřeny konstitutivními vztahy a materiálovými charakteristikami, které musí být určovány experimentálně, nejčastěji způsobem tlakové a tahové zkoušky [1].

### 2.3 Prutové předpoklady

Prut v pružnosti a pevnosti je teoretickým modelem reálného tělesa z hlediska napjatosti a deformace a je modelem nejjednoduššího typu. Musí splňovat jisté geometrické, deformační a napjatostní předpoklady tzv. prutové předpoklady [1]:

- předpoklady geometrické
- předpoklady vazbové a zatěžovací
- předpoklady deformační
- předpoklady napjatostní

### 2.4 Smyková napětí

U prostého ohybu jsou v závislosti pohybu příčných průřezů při zatěžování, zachovány pravé úhly prvku uvolněného z prutu namáhaného ohybem. Této deformační podmínce pak odpovídá deformační charakteristika, že úhlová přetvoření jsou nulová [1]:

$$\gamma_{xy} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \quad (2.1)$$

S využitím konstitutivního vztahu  $\tau = G \cdot \gamma$  a podmínky  $\frac{L}{D} > 10$  pro homogenní, lineárně pružný materiál pro smyková napětí v příčném průřezu pak platí [1]:

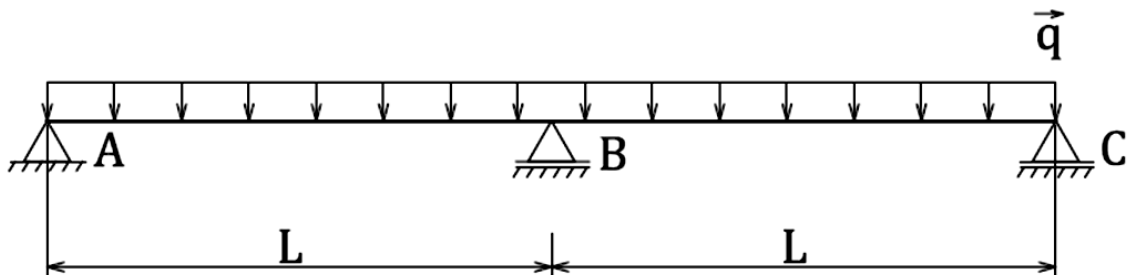
$$\tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad (2.2)$$

Lze tedy konstatovat:

U prostého ohybu jsou smyková napětí  $\tau$  nulová

## 2.5 Vzorový příklad

Jako vzorový příklad *Obr. 2.1* jsme zvolili nosník o dvou polích a třech podporách, který je zatížený po celé jeho délce liniovým zatížením. Takto jsme volili pro jednoduchost matematických výpočtů a velmi názorné srovnání použitých metod.



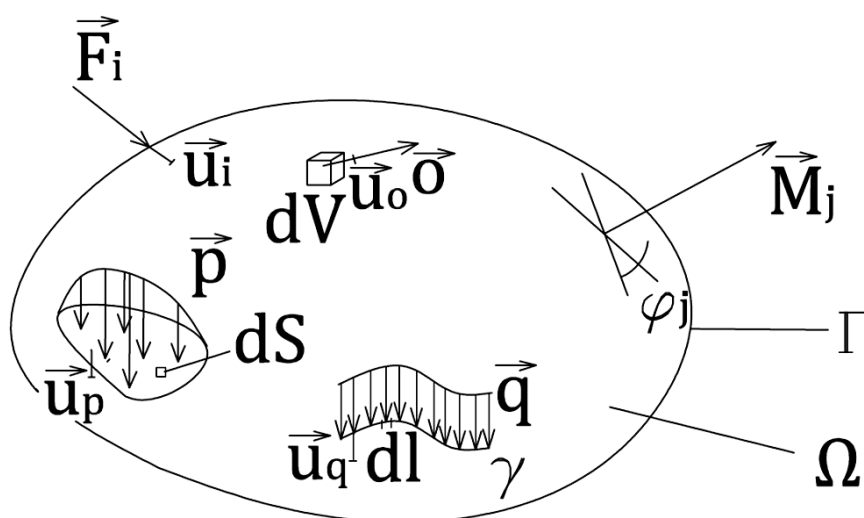
*Obr. 2.1*

### 3 Castiglianova věta

#### 3.1 Odvození Castiglianovy věty

Uvažujme těleso, které je v lineárně pružném stavu, na které působí obecná silová soustava  $\pi$  a jedna osamělá síla  $\vec{F}_K$ . Tato soustava vykonala deformační práci  $A$ , která je rovna energii napjatosti  $W$  v tomto tělese akumulované. Ta je v tělese rozložena spojitě a je stavovou funkcí. To znamená, že nezávisí na historii zatěžování, pak [1]:

$$W(\pi) = A(\pi) = \frac{1}{2} \left[ \sum_{i=1}^n F_i \cdot u_i + \sum_{j=1}^m M_j \cdot \varphi_j + \int_{\Gamma} p \cdot u \cdot dS + \int_{\Gamma} m_p \cdot \varphi \cdot dS + \int_{\Omega} o \cdot u \cdot dV + \int_{\gamma} q \cdot u \cdot dl + \int_{\gamma} m_q \cdot \varphi \cdot dl \right] \quad (3.1)$$

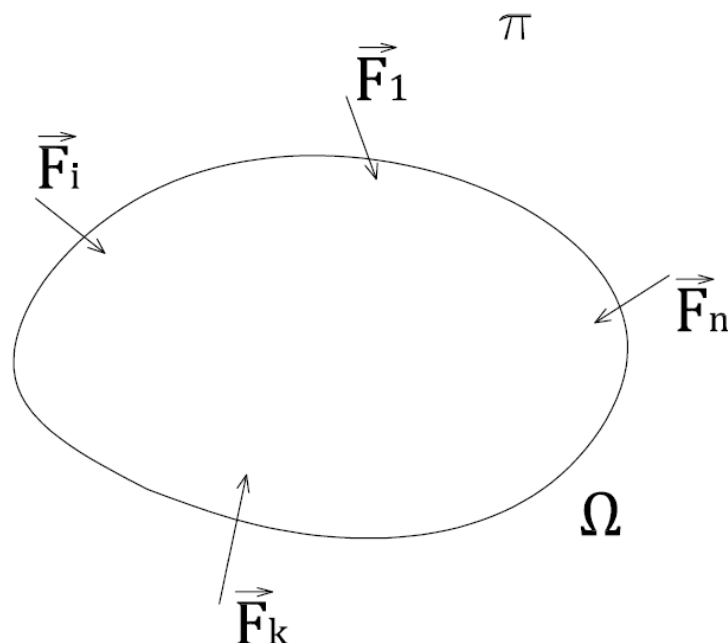


Obr. 3.1

,kde jsou  $\vec{F}_1.. \vec{F}_n$  - osamělé síly,  $\vec{M}_1.. \vec{M}_m$  - osamělé silové dvojice,  $\vec{p}$  - plošné síly,  $\vec{m}_p$  - plošné silové dvojice,  $\vec{o}$  - objemové síly,  $\vec{q}$  - liniové síly,  $\vec{m}_q$  - liniové dvojice a  $\vec{u}$  - posuv působíště osamělých nebo elementárních sil ve směru jejich nositelek,  $\varphi$  - změna úhlu přímky pevně spojené s působíštěm osamělé nebo elementární silové dvojice [1].

Pro jednoduchost budeme uvažovat soustavu  $\pi$ :

$$\pi = \{\vec{F}_1, \vec{F}_2 \dots \vec{F}_i \dots \vec{F}_k \dots \vec{F}_n\} \quad (3.2)$$



Obr. 3.2

je pak energie napjatosti v tělese, od stavu nezatíženého do stavu hodnot soustavy  $\pi$ :

$$W(\pi) = A(\pi) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n F_i \cdot u_i \quad (3.3)$$

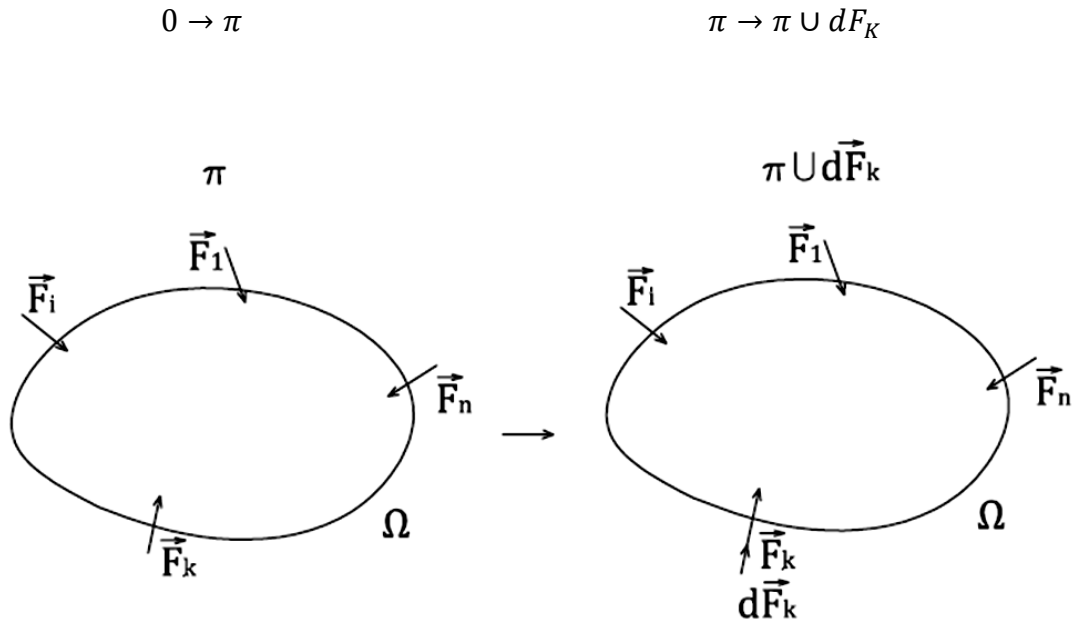
Zvětšíme-li velikost sil  $\vec{F}_i$  o diferenciální přírůstek síly  $d\vec{F}_i$ , je pak diferenciální přírůstek energie napjatosti tělesa  $dW(\pi)$  daný totálním diferenciálem [1]:

$$dW(\pi) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial W(\pi)}{\partial F_i} dF_i \quad (3.4)$$

Nyní zvolíme dvě rozdílné zatěžovací historie, kde si každou rozdělíme na dvě různé zatěžovací fáze:

### První historie zatěžování

V první fázi zatížíme těleso ze stavu nezatíženého do stavu zatíženého silovou soustavou  $\pi$ . V druhé fázi zvětšíme velikost síly  $\vec{F}_K$  o diferenciální přírůstek  $d\vec{F}_K$  [1].



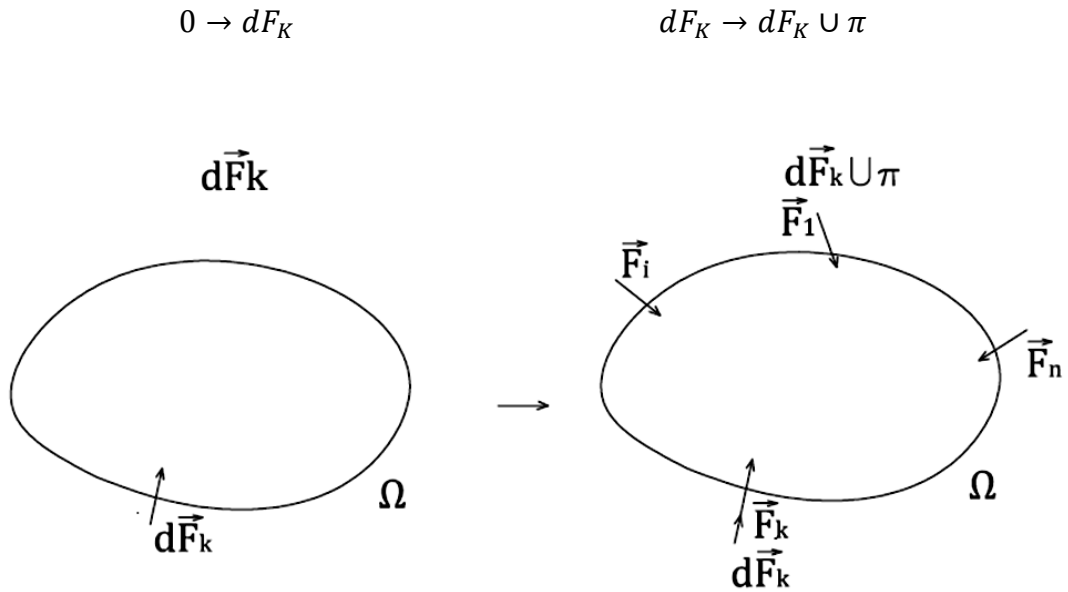
Obr. 3.3

Na konci tohoto zatěžovacího procesu je energie napjatosti akumulovaná v tělese dána rovnicí:

$$W(\pi \cup dF_K) = W(\pi) + \frac{\partial W(\pi)}{\partial F_K} \cdot dF_K \quad (3.5)$$

### Druhá historie zatěžování

V první fázi zatížíme těleso ze stavu nezatíženého do stavu zatíženého silou o diferenciální velikosti  $d\vec{F}_K$ . V druhé fázi k diferenciální síle  $d\vec{F}_K$  přidáme silovou soustavu  $\pi$  [1].



Obr. 3.4

Na konci tohoto zatěžovacího procesu je energie napjatosti akumulovaná v tělese dána rovnicí:

$$W(dF_K \cup \pi) = \frac{1}{2} dF_K \cdot du_K + W(\pi) + dF_K \cdot u_K \quad (3.6)$$

Protože člen  $\frac{1}{2} dF_K \cdot du_K$  z rovnice (3.6) je složen ze dvou diferenciálně malých prvků, jeho velikost se oproti ostatním členům blíží nule a lze jej tedy zanedbat. Rovnici (3.6) pak můžeme přepsat do tvaru [1]:

$$W(dF_K \cup \pi) = W(\pi) + dF_K \cdot u_K \quad (3.7)$$

Dostali jsme dvě rovnice (3.5) a (3.7) pro energii napjatosti akumulované v daném tělese. Za předpokladu, že energie napjatosti je stavovou funkcí, tzn. je nezávislá na zatěžovací historii, lze tyto rovnice položit sobě rovny [1]:

$$W(\pi) + \frac{\partial W(\pi)}{\partial F_K} \cdot dF_K = W(\pi) + dF_K \cdot u_K \quad (3.8)$$

Vyjádříme-li z rovnice (3.8) posuv  $\vec{u}_K$  od síly  $\vec{F}_K$  dostaneme pak:

$$u_K = \frac{\partial W(\pi)}{\partial F_K} \quad (3.9)$$

Deformační posuv působíště osamělé síly  $\vec{F}_K$  po její nositelce je roven parciální derivaci energie napjatosti  $W(\pi)$  podle  $\vec{F}_K$  [1].

Orientace posuvu  $\vec{u}_K$  je souhlasná s orientací působící síly  $\vec{F}_K$ .

Analogicky lze odvodit Castiglianovu větu pro natočení:

$$\varphi_j = \frac{\partial W(\pi)}{\partial M_j} \quad (3.10)$$

Deformační natočení  $\varphi_j$ , přímkou pevně spojené s působíštěm osamělé silové dvojice  $\vec{M}_j$  je rovno parciální derivaci energie napjatosti  $W(\pi)$  podle  $\vec{M}_j$  [1].

Orientace natočení  $\varphi_j$  je souhlasná s orientací působící silové dvojice  $\vec{M}_j$ .

### 3.2 Castiglianova věta pro prostý ohyb prutů

U lineárně pružných prutů, lze obecně vyjádřit deformační posuv působíště osamělé síly  $\vec{F}_K$  po její nositelce pomocí Castiglianovy věty takto [1]:

Energie napjatosti akumulovaná v lineárně pružném prutu:

$$W = \int_0^l \frac{M_{oy}^2 \cdot dx}{2 \cdot E \cdot J_y} + \int_0^l \frac{M_{oz}^2 \cdot dx}{2 \cdot E \cdot J_y} \quad (3.11)$$

Není-li  $M_{o(x)}$  spojitou funkcí, je důležité pro řešení deformačních charakteristik střednice prutu pomocí Castiglianovy věty, postup integrace po spojitých úsecích. Energie napjatosti pak [1]:

$$W = \sum_{i=1}^n \left[ \int_0^{l_i} \frac{M_{oyi}^2 \cdot dx}{2 \cdot E \cdot J_{yi}} + \int_0^{l_i} \frac{M_{ozi}^2 \cdot dx}{2 \cdot E \cdot J_{yi}} \right] \quad (3.12)$$

Po dosazení rovnice (3.12) do rovnice (3.9), deformační posuv působíště osamělé síly  $\vec{F}_K$ , pak [1]:

$$u_K = \frac{\partial}{\partial F_K} \cdot \sum_{i=1}^n \left[ \int_0^{l_i} \frac{M_{oyi}^2 \cdot dx}{2 \cdot E \cdot J_{yi}} + \int_0^{l_i} \frac{M_{ozi}^2 \cdot dx}{2 \cdot E \cdot J_{yi}} \right] \quad (3.13)$$

Rovnici (3.13) lze zjednodušit úpravou, která se označuje jako *Maxwell-Mohrova varianta*. Tato varianta je z hlediska pracnosti odvozování jednodušší, také nejpoužívanější. Je však založena na těchto dvou předpokladech [1]:

- materiálové a geometrické charakteristiky ( $E$ ,  $J_y$ ) ve výrazech (3.11), (3.12) pro energii napjatosti závisí na veličinách  $F$ ,  $M$ , dle kterých se derivuje.
- složky VVÚ závisí na veličinách  $F$ ,  $M$  lineárně

Po úpravě rovnice pak:

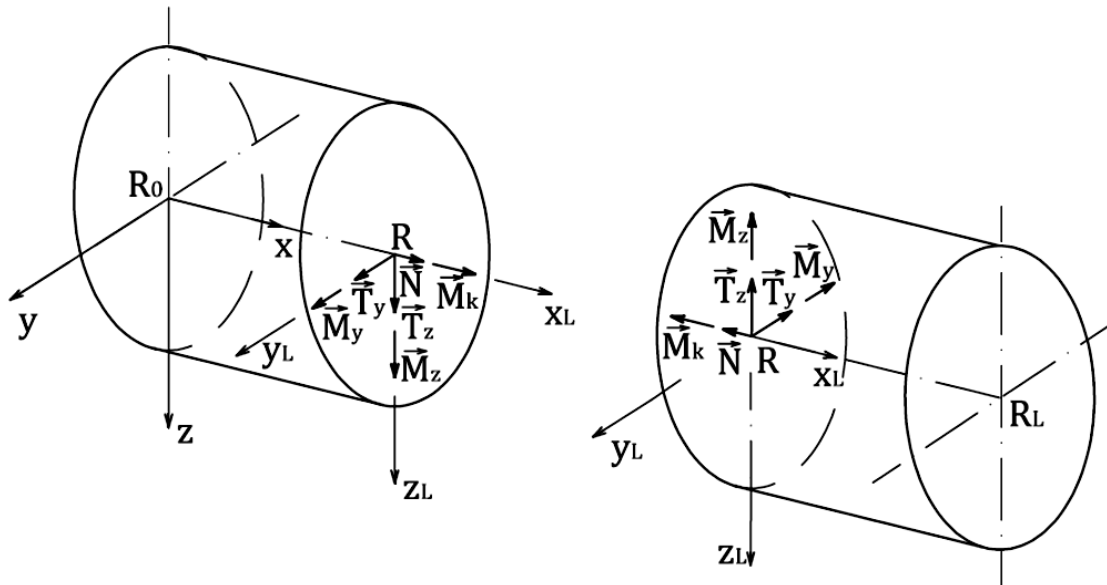
$$u_K = \sum_{i=1}^n \left[ \int_0^{l_i} \frac{M_{oyi}}{E \cdot J_{yi}} \cdot \frac{\partial M_{oyi}}{\partial F_K} \cdot dx + \int_0^{l_i} \frac{M_{ozi}}{E \cdot J_{zi}} \cdot \frac{\partial M_{ozi}}{\partial F_K} \cdot dx \right] \quad (3.14)$$

Analogicky lze odvodit Castiglianovu větu pro natočení přímky pevně spojené s působíštěm osamělé silové dvojice  $\vec{M}_j$  [1]:

$$\varphi_j = \sum_{i=1}^n \left[ \int_0^{l_i} \frac{M_{oyi}}{E \cdot J_{yi}} \cdot \frac{\partial M_{oyi}}{\partial M_j} \cdot dx + \int_0^{l_i} \frac{M_{ozi}}{E \cdot J_{zi}} \cdot \frac{\partial M_{ozi}}{\partial M_j} \cdot dx \right] \quad (3.15)$$

### 3.3 Znaménková konvence pro otevřené přímé pruty

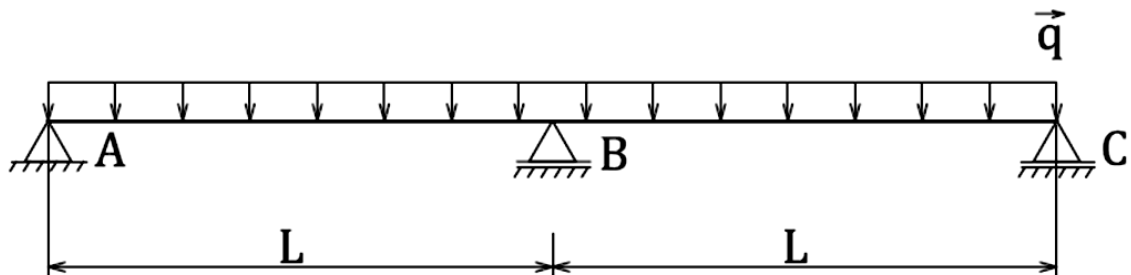
Na Obr. 3.5 je uvedena znaménková konvence pro kladné složky VVÚ, při orientaci kladné osy  $x$  zprava doleva a naopak [1].



Obr. 3.5

### 3.4 Řešení vzorového příkladu pomocí Castiglianovy věty

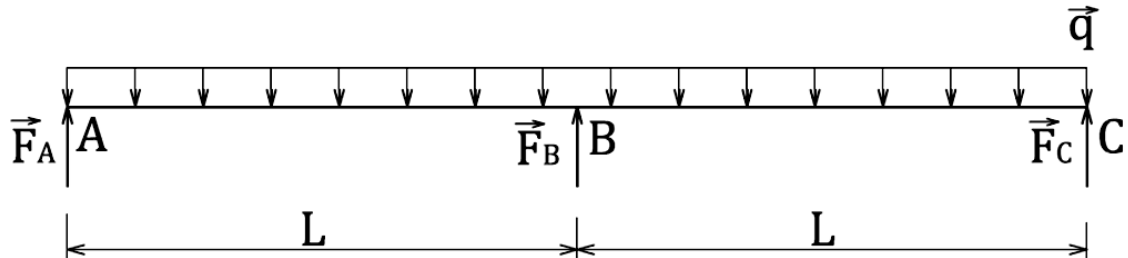
Vzorový příklad Obr. 3.6.



Obr. 3.6

### 3.4.1 Úplné uvolnění

Jako první krok při řešení vzorového příkladu je třeba nosník řádně uvolnit. Úplné uvolnění je provedeno dle Obr. 3.7.



Obr. 3.7

### 3.4.2 Rovnice statické rovnováhy a statický rozbor

Abychom mohli provést statický rozbor, je třeba znát počet použitelných statických podmínek rovnováhy. Obecně platí, že v prostoru  $\nu = \nu_F + \nu_M = 3 + 3 = 6$ . V našem případě, kdy se jedná o rovinnou úlohu a síly se pohybují po rovnoběžných nositelkách, pak  $\nu = \nu_F + \nu_M = 1 + 1 = 2$ .

Rovnice statické rovnováhy:

$$\Sigma F_z = 0: \quad 2 \cdot q \cdot L - F_A - F_B - F_C = 0 \quad (3.16)$$

$$\Sigma M_{yA} = 0: \quad F_B \cdot L + F_C \cdot L - 2 \cdot q \cdot L^2 = 0 \quad (3.17)$$

Neznámé parametry:

$$NP = \{F_A, F_B, F_C\} \rightarrow \mu = \mu_F + \mu_M = 3 + 0 = 3 \quad (3.18)$$

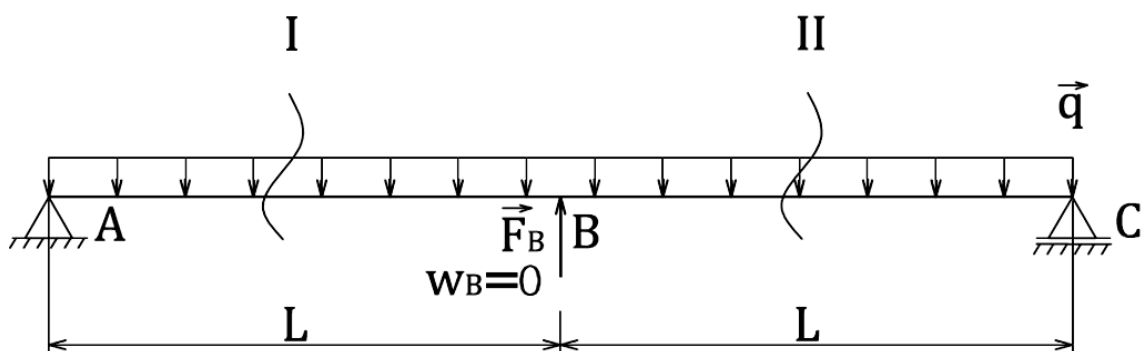
Stupeň statické neurčitosti určíme dle rovnice:

$$s = \mu - \nu = 3 - 2 = 1 \quad (3.19)$$

### 3.4.3 Částečné uvolnění

Z rovnice (3.19) vyplývá, že  $\mu < \nu$ . Úloha je tedy 1x staticky neurčitá a je třeba úlohu uvolnit částečně až na úroveň statické určitosti. V našem případě je třeba nahradit jednu vazbu staticky ekvivalentní silou  $\vec{F}_B$  a předepsat vazbovou deformační podmínku, aby byla zachována stejná deformace.

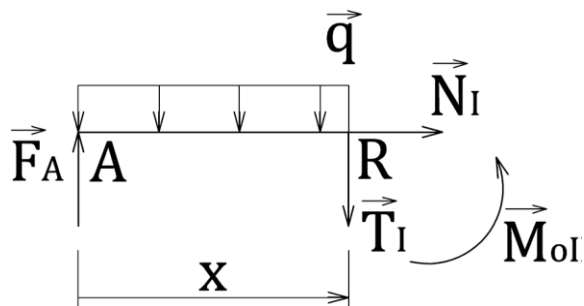
Úlohu je dále třeba rozdělit na spojité úseky dle Obr. 3.8. Pro každý z nich vyjádříme posouvající sílu  $\vec{T}$  a ohybový moment  $\vec{M}_o$ .



Obr. 3.8

Úsek I  $\in (0, L)$

$x \in (0, L)$



Obr. 3.9

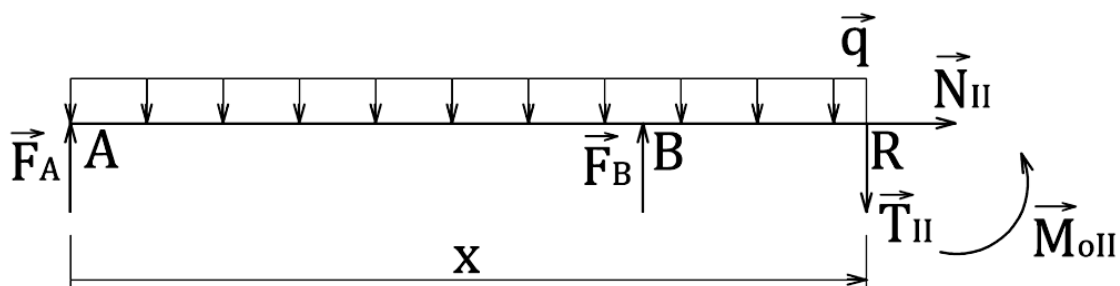
Rovnice statické rovnováhy pro úsek I:

$$\begin{aligned} \Sigma F_z = 0: \quad T_I - F_A + q \cdot x &= 0 \\ T_I &= F_A - q \cdot x \end{aligned} \tag{3.20}$$

$$\begin{aligned} \Sigma M_y = 0: \quad M_{oI} - F_A \cdot x + \frac{q \cdot x^2}{2} &= 0 \\ M_{oI} &= F_A \cdot x - \frac{q \cdot x^2}{2} \end{aligned} \tag{3.21}$$

Úsek II  $\in (L, 2L)$

$x \in (0, 2L)$



Obr. 3.10

Rovnice statické rovnováhy pro úsek II:

$$\begin{aligned} \Sigma F_z = 0: \quad T_{II} - F_A - F_B + q \cdot x &= 0 \\ T_{II} &= F_A + F_B - q \cdot x \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} \Sigma M_y = 0: \quad M_{oII} - F_A \cdot x - F_B \cdot (x - L) + \frac{q \cdot x^2}{2} &= 0 \\ M_{oII} &= F_A \cdot x + F_B \cdot (x - L) - \frac{q \cdot x^2}{2} \end{aligned} \quad (3.23)$$

### 3.4.4 Určení stykové výslednice v místě uvolněné podpory B

Energie napjatosti akumulovaná v tělese je funkcí závislou na  $\vec{q}$  a  $\vec{F}_B$ ,  $W = W(q, F_B)$ . Musíme tedy neznámou vazbovou sílu  $\vec{F}_A$  vyjádřit také jako funkci  $\vec{q}$  a  $\vec{F}_B$ , pak:

$$\begin{aligned} F_A &= F_A(q, F_B) \\ F_A &= q \cdot L - \frac{F_B}{2} \end{aligned} \quad (3.24)$$

Pak ohybové momenty  $\vec{M}_{oI}$  a  $\vec{M}_{oII}$ :

$$M_{oI} = \left( q \cdot L - \frac{F_B}{2} \right) \cdot x - \frac{q \cdot x^2}{2} \quad (3.25)$$

$$M_{oII} = \left( q \cdot L - \frac{F_B}{2} \right) \cdot x + F_B \cdot (x - L) - \frac{q \cdot x^2}{2} \quad (3.26)$$

Vazbová deformační podmínka:

$$w_B = \frac{\partial W(\pi)}{\partial F_B} = \frac{1}{E \cdot J_y} \left[ \int_0^L M_{oI} \cdot \frac{\partial M_{oI}}{\partial F_B} \cdot dx + \int_L^{2 \cdot L} M_{oII} \cdot \frac{\partial M_{oII}}{\partial F_B} \cdot dx \right] = 0 \quad (3.27)$$

Jedná se o homogenní vazbovou deformační podmínku, u níž deformační parametr v místě podpory uvolněné částečným uvolněním má nulovou hodnotu.

Řešení vazbové deformační podmínky:

Derivace ohybových momentů podle vazbové síly  $\vec{F}_B$ :

$$\frac{\partial M_{oI}}{\partial F_B} = -\frac{x}{2} \qquad \frac{\partial M_{oII}}{\partial F_B} = \frac{x}{2} - L$$

Jednotlivé integrály:

$$\begin{aligned} \int_0^L M_{oI} \cdot \frac{\partial M_{oI}}{\partial F_B} \cdot dx &= \int_0^L \left( \left( q \cdot L - \frac{F_B}{2} \right) \cdot x - \frac{q \cdot x^2}{2} \right) \cdot \left( -\frac{x}{2} \right) \cdot dx = \\ &= -\frac{5}{48} \cdot q \cdot L^4 + \frac{1}{12} \cdot L^3 \cdot F_B \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned} \int_L^{2 \cdot L} M_{oII} \cdot \frac{\partial M_{oII}}{\partial F_B} \cdot dx &= \int_L^{2 \cdot L} \left( \left( q \cdot L - \frac{F_B}{2} \right) \cdot x + F_B \cdot (x - L) - \frac{q \cdot x^2}{2} \right) \cdot \left( \frac{x}{2} - L \right) \cdot dx = \\ &= -\frac{5}{48} \cdot q \cdot L^4 + \frac{1}{12} \cdot L^3 \cdot F_B \end{aligned} \quad (3.29)$$

Dosadíme do rovnice (3.27) a vyjádříme stykovou výslednici  $\vec{F}_B$ :

$$\frac{1}{E \cdot J_y} \left[ -\frac{5}{24} \cdot q \cdot L^4 + \frac{1}{6} \cdot L^3 \cdot F_B \right] = 0 \quad (3.30)$$

$$F_B = \frac{5 \cdot q \cdot L}{4} \quad (3.31)$$

### 3.4.5 Určení stykových výslednic v místě podpory A a C

Po určení stykové výslednice  $\vec{F}_B$  jsme schopni vyjádřit stykové výslednice  $\vec{F}_A$  a  $\vec{F}_C$  z rovnic rovnováhy (3.16),(3.17):

$$F_A = \frac{3 \cdot q \cdot L}{8} \quad (3.32)$$

$$F_C = \frac{3 \cdot q \cdot L}{8} \quad (3.33)$$

Je jasné, že se jedná o symetrickou úlohu, tedy  $\vec{F}_A = \vec{F}_C$ .

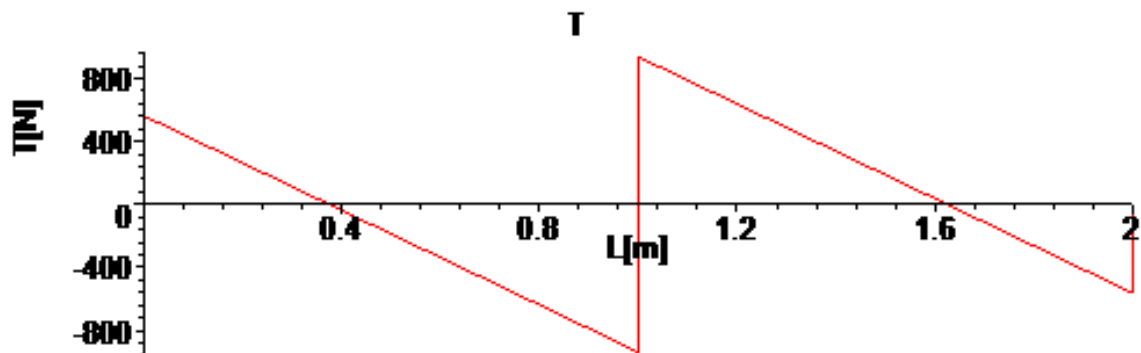
### 3.4.6 Průběhy VVÚ

Aby bylo možné vykreslit průběhy posouvající síly  $\vec{T}$  a ohybového momentu  $\vec{M}$  nosníku dle Obr. 3.11, bylo nutné zvolit si vzorové hodnoty:

$$q = 1500 \text{ [N]}$$

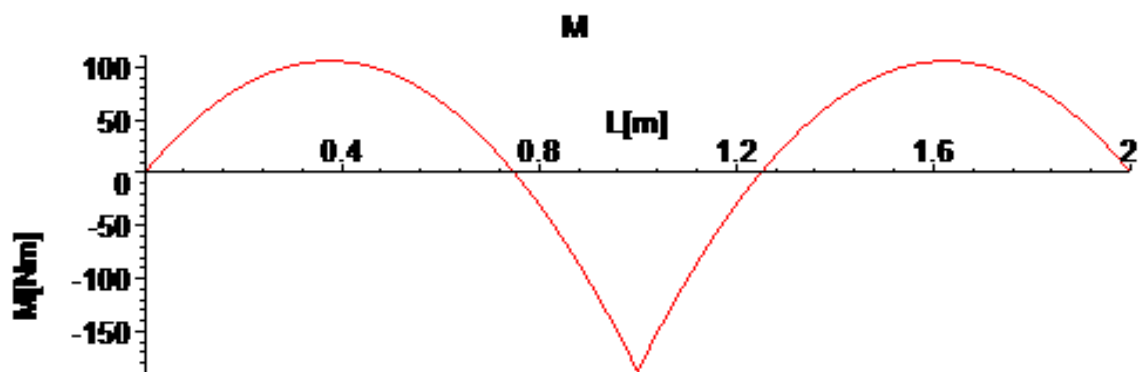
$$L = 1 \text{ [m]}$$

Průběh posouvající síly  $\vec{T}$ :



Obr. 3.11

Průběh ohybového momentu  $\vec{M}$ :



Obr. 3.12

### 3.5 Vliv posunutí podpor

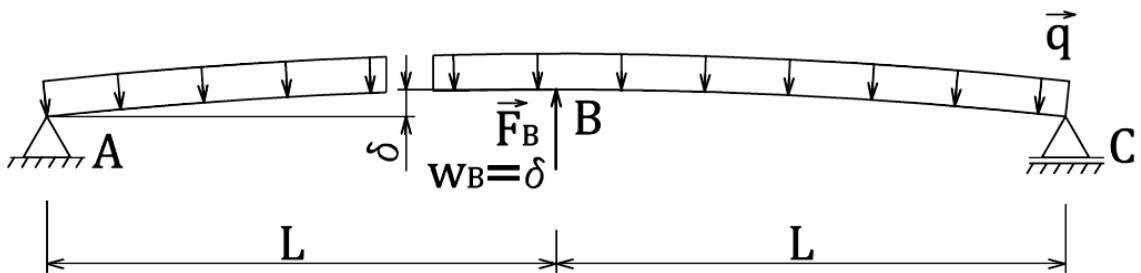
Jako objekt posuzování volíme podporu v místě podpory B. Postup posuzování je stejný jako v předchozí podkapitole 3.4. Vazbová deformační podmínka se však změní z homogenní na nehomogenní. To znamená, že deformační parametr má v místě podpory nenulovou hodnotu.

$$w_B = \delta,$$

kde  $\delta = \text{posunutí podpory}$

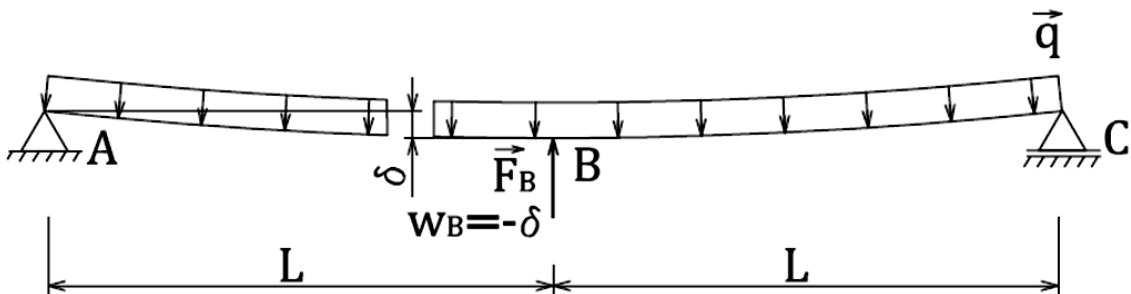
Znaménková konvence:

$\delta > 0$  – podpora se posunula ve směru působící vazbové síly  $\vec{F}_B$



Obr. 3.13

$\delta < 0$  – podpora se posunula proti směru působící vazbové síly  $\vec{F}_B$



Obr. 3.14

#### 3.5.1 Určení stykové výslednice v místě uvolněné podpory B

Deformační okrajová podmínka s posunutím podpory:

$$w_B = \frac{\partial W(\pi)}{\partial F_B} = \frac{1}{E \cdot J_y} \left[ \int_0^L M_{oI} \cdot \frac{\partial M_{oI}}{\partial F_B} \cdot dx + \int_L^{2L} M_{oII} \cdot \frac{\partial M_{oII}}{\partial F_B} \cdot dx \right] = \delta \quad (3.34)$$

Ohybové momenty  $\vec{M}_{oI}$  a  $\vec{M}_{oII}$  jsou určeny rovnicemi (3.25),(3.26), pak:

$$\frac{1}{E \cdot J_y} \left[ -\frac{5}{24} \cdot q \cdot L^4 + \frac{1}{6} \cdot L^3 \cdot F_B \right] = \delta \quad (3.35)$$

Dostaneme velikost vazbové síly  $\vec{F}_B$  v závislosti na posunutí podpory  $\delta$  a tuhosti v ohybu příčného průřezu  $E \cdot J_y$ :

$$F_B = \frac{24 \cdot \delta \cdot E \cdot J_y + 5 \cdot q \cdot L^4}{4L^3} \quad (3.36)$$

### 3.5.2 Určení stykových výslednic v místě podpor A a C

Určení stykových výslednic v místě podpor A a C je pak analogické jako v kapitole 3.4.5.

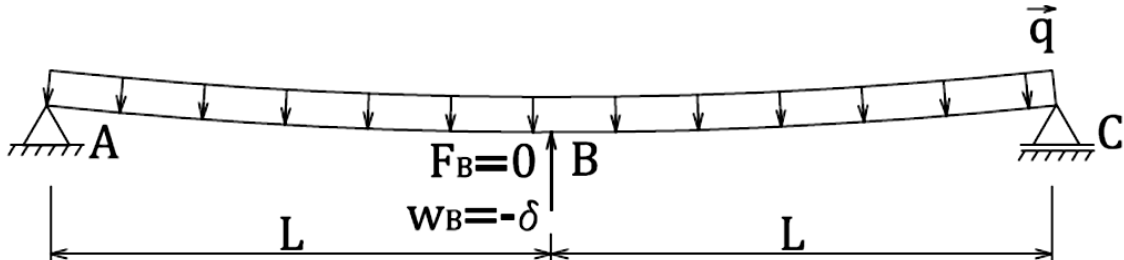
$$F_A = q \cdot L - \frac{24 \cdot \delta \cdot E \cdot J_y + 5 \cdot q \cdot L^4}{8 \cdot L^3} \quad (3.37)$$

$$F_C = q \cdot L - \frac{24 \cdot \delta \cdot E \cdot J_y + 5 \cdot q \cdot L^4}{8 \cdot L^3} \quad (3.38)$$

## 3.6 Ztráta funkce podpor

### 3.6.1 Ztráta funkce podpory B

Podpora B se bude posunovat ve směru osy z. V okamžiku, kdy vazbová síla  $F_B = 0$ , nepůsobí na vazbu žádná síla *Obr. 3.15*, nazýváme tento mezní stav jako ztrátu funkce podpory.



*Obr. 3.15*

Dosadíme tedy  $F_B = 0$  do rovnice (3.36) a vyjádříme  $\delta$ , při kterém ztratí vazba B svou funkci:

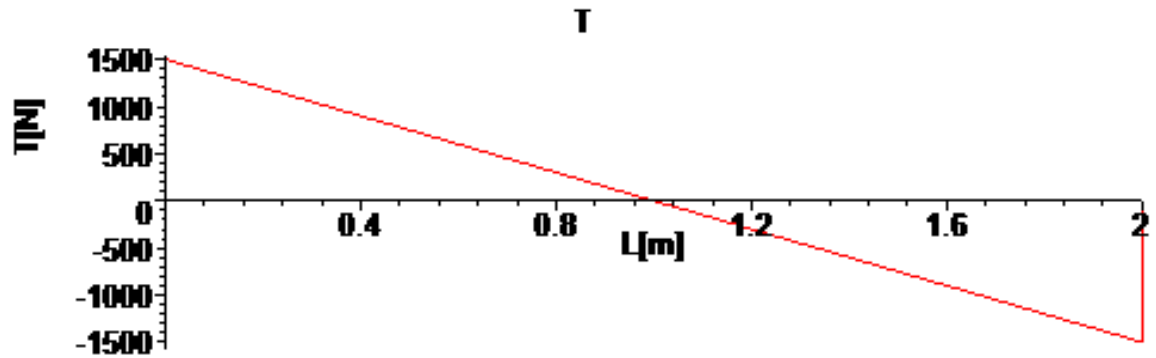
$$0 = \frac{24 \cdot \delta \cdot E \cdot J + 5 \cdot q \cdot L^4}{4L^3} \quad (3.39)$$

$$\delta = -\frac{5 \cdot q \cdot L^4}{24 \cdot E \cdot J_y} \quad (3.40)$$

### 3.6.2 Průběh VVÚ při ztrátě funkce podpory B

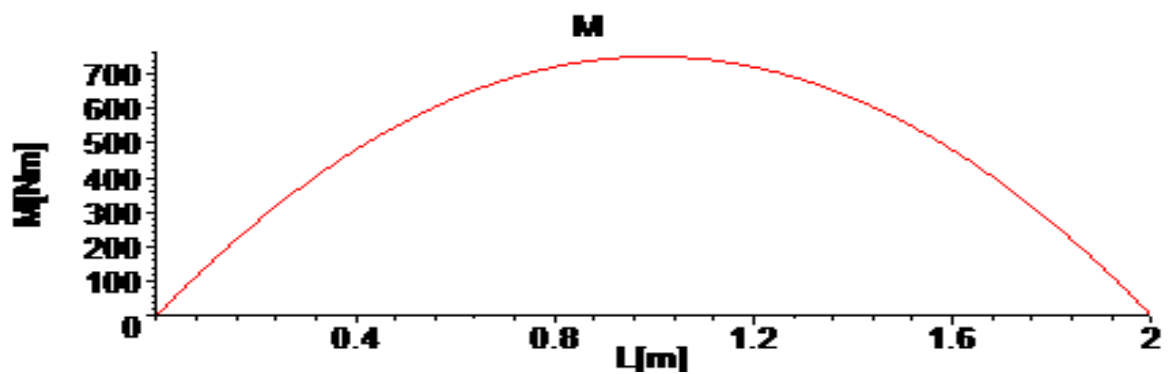
Pro grafické znázornění byly použity stejné vzorové hodnoty, jako jsou uvedené v kapitole 3.4.6.

Průběh posouvající síly  $\vec{T}$ :



Obr. 3.16

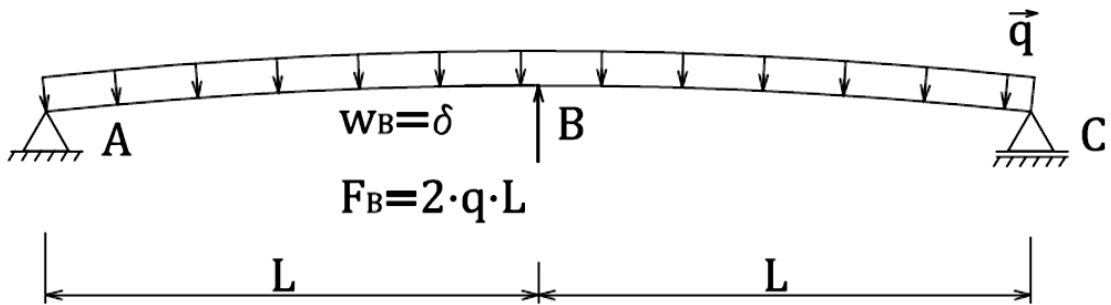
Průběh ohybového momentu  $\vec{M}$ :



Obr. 3.17

### 3.6.3 Ztráta funkce podpor A a C

Podpora B, opačně jako v kapitole 3.6.1, se bude posunovat proti směru osy z. V okamžiku, kdy na vazbu B působí veškeré zatížení působící na nosník ve směru osy z, (v našem případě vazbová síla  $F_B = 2 \cdot q \cdot L$  Obr. 3.18), nepůsobí na vazby A a C žádné zatížení, nazýváme tento mezní stav jako ztrátu funkce podpor.



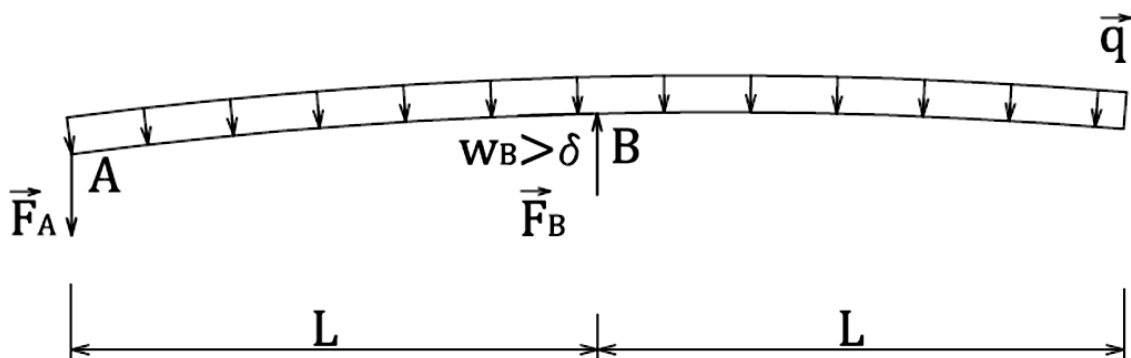
Obr. 3.18

Dosadíme tedy  $F_B = 2 \cdot q \cdot L$  do rovnice (3.36) a vyjádříme  $\delta$ , při kterém ztratí podpory A a C svou funkci:

$$2 \cdot q \cdot L = \frac{24 \cdot \delta \cdot E \cdot J + 5 \cdot q \cdot L^4}{4L^3} \quad (3.41)$$

$$\delta = \frac{q \cdot L^4}{8 \cdot E \cdot J_y} \quad (3.42)$$

**Poznámka:** Podpora A ztratí svou funkčnost pouze v případě posunutí podpory B o  $\delta$  dle rovnice (3.42). Podpora A je pevnou podporou. Pokud se tedy vazba B posune o hodnotu  $> \delta$ , styková výslednice v místě podpory A bude mít opačný směr dle Obr. 3.19.

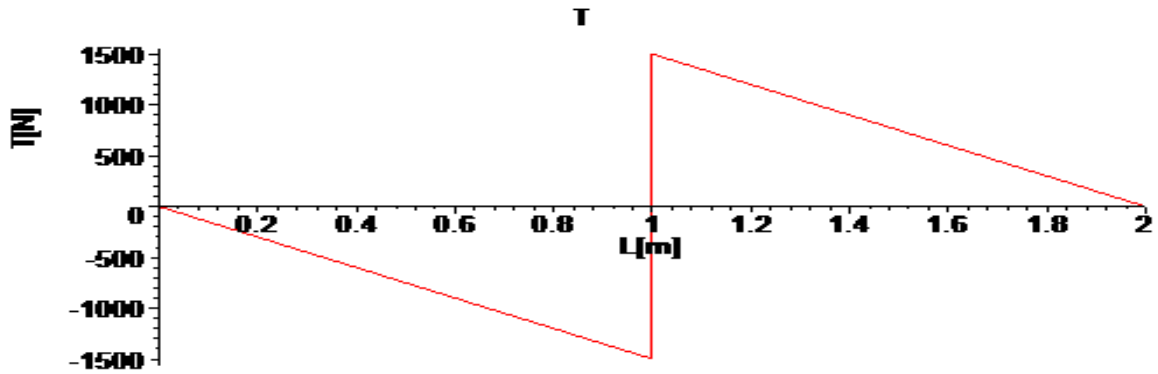


Obr. 3.19

### 3.6.4 Průběh VVÚ při ztrátě funkce podpor A a C

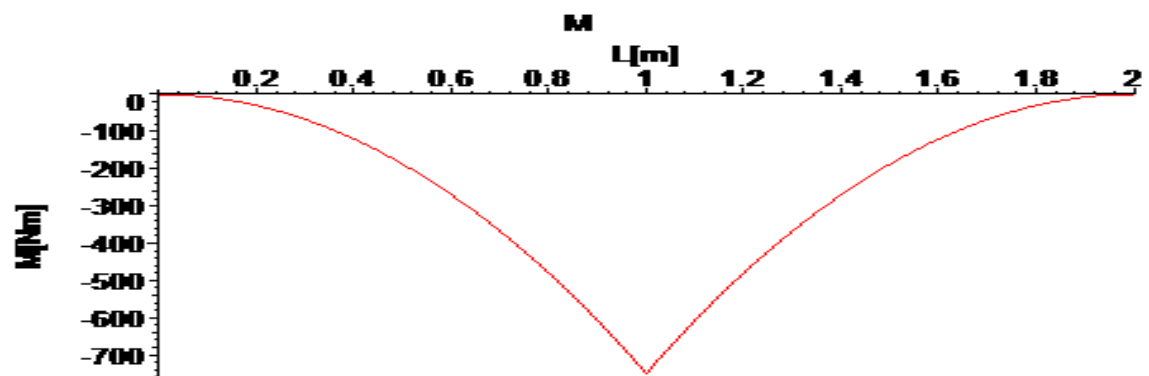
Pro grafické znázornění byly použity stejné vzorové hodnoty, jako jsou uvedené v kapitole 3.4.6.

Průběh posouvající síly  $\vec{T}$ :



Obr. 3.20

Průběh ohybového momentu  $\vec{M}$ :



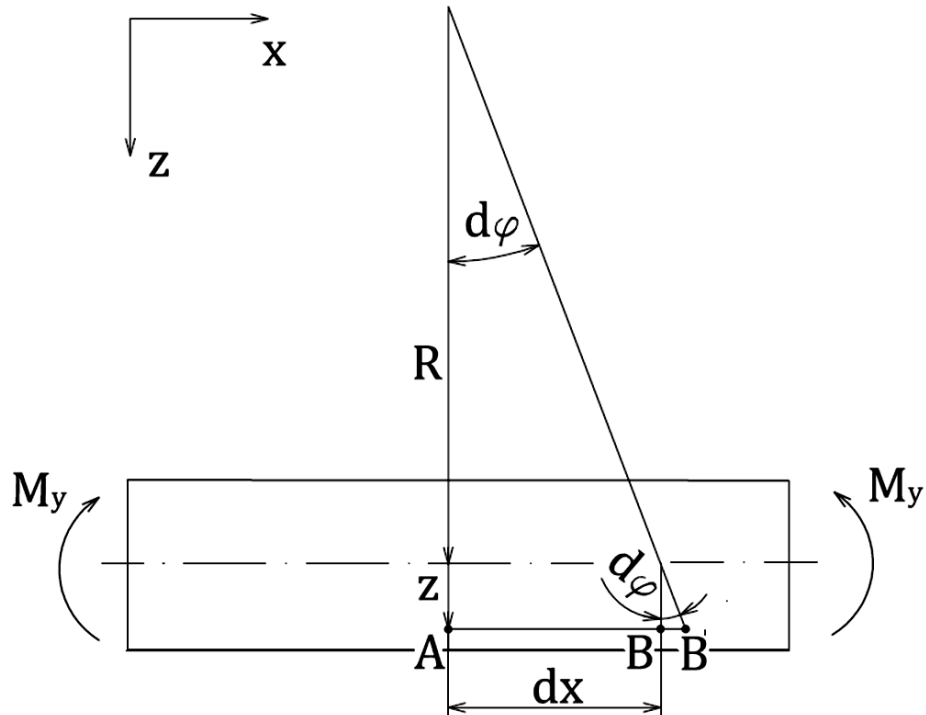
Obr. 3.21

## 4 Diferenciální rovnice ohybové čáry

### 4.1 Odvození diferenciální rovnice ohybové čáry

Při ohybovém namáhání přímého prizmatického prutu se jeho střednice ohýbá a vytváří tzv. ohybovou čáru. Podle prutových předpokladů příčné průřezy zůstávají rovinnými a kolnými k ohybové čáře. Z toho je zřejmé, že přetvoření libovolného bodu příčného průřezu můžeme určit, budeme-li znát rovnici ohybové čáry[1].

Předpokládáme základní ohyb kolem osy  $y$



Obr. 4.1

Poměrné délkové přetvoření  $\varepsilon_x$  délky  $dx$  [1]:

$$\varepsilon_x(z) = \frac{\overline{BB'}}{\overline{AB}} = \frac{z \cdot d\phi}{R \cdot d\phi} = \frac{z}{R} \quad (4.1)$$

Pro poměrné délkové přetvoření také platí[1]:

$$\varepsilon_x(z) = \frac{M_y}{E \cdot J_y} \cdot z \quad (4.2)$$

Porovnáním výrazů (4.1), (4.2) dostaneme vztah pro křivost:

$$\frac{1}{R} = \frac{M_y}{E \cdot J_y} \quad (4.3)$$

V diferenciální geometrii se pro křivost rovinné křivky v souřadnicovém systému (x,y) odvozuje vztah[1]:

$$\frac{1}{R} = \pm \frac{w''}{(1 + w'^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (4.4)$$

,kde pro malé průhyby  $w'(x) \rightarrow 0$ :

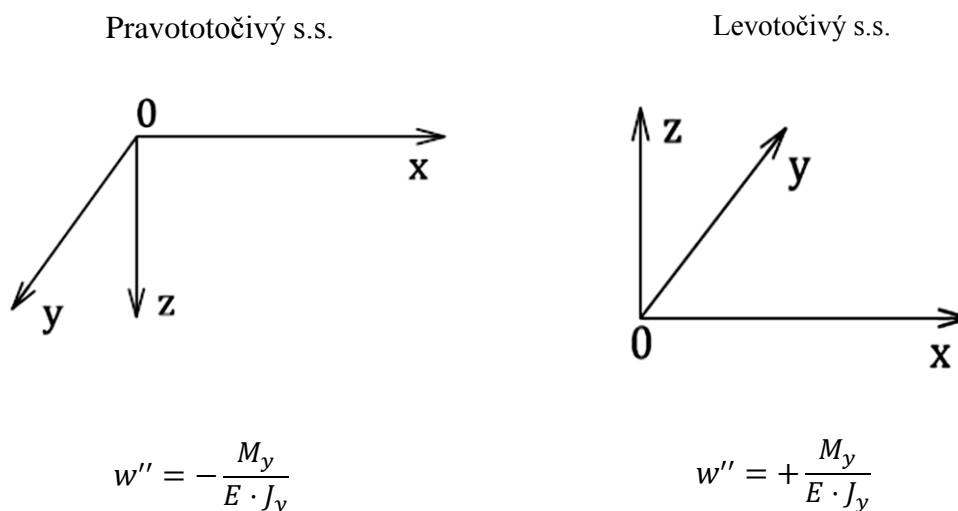
$$\frac{1}{R} = \pm w'' \quad (4.5)$$

Po dosazení rovnice (4.5) do (4.3) dostáváme *Diferenciální rovnici ohybové čáry*:

$$w'' = \pm \frac{M_y}{E \cdot J_y} \quad (4.6)$$

## 4.2 Znaménková konvence pro diferenciální rovnici ohybové čáry

Bude-li osa +z orientována směrem dolů (nahoru), bude ve vztazích (4.4), (4.5), (4.6) záporné (kladné) znaménko dle *Obr. 4.2* [1].



*Obr. 4.2*

Pokud působí na prut silová soustava nebo jde o prut po úsecích nehomogenní, potom musíme zvlášť formulovat diferenciální rovnici ohybové čáry pro každý úsek, ve kterém je ohybový moment spojitou funkcí. Integrační konstanty se potom určují na základě okrajových podmínek pro celý prut a podmínek spojitosti posuvů a natočení na hranicích příslušných úseků [1].

### 4.3 Řešení vzorového příkladu pomocí diferenciální rovnice ohybové čáry

U řešení pomocí diferenciální rovnice ohybové čáry je část algoritmu řešení shodná s algoritmem v předchozí podkapitole 3.4. Proto úplné uvolnění, rovnice statické rovnováhy, statický rozbor a částečné uvolnění je popsáno v podkapitolách 3.4.1, 3.4.2, a 3.4.3.

#### 4.3.1 Diferenciální rovnice pro jednotlivé úseky

V podkapitole 3.4.3, je úloha rozdělena na dva spojitě úseky I a II. Pro každý úsek formulujeme samostatnou diferenciální rovnici ohybové čáry. Následnou první integrací dostaneme rovnici pro natočení střednice prutu  $w'$  a druhou integrací průhyb střednice prutu  $w$ .

Úsek I  $\in (0, L)$

$x \in (0, L)$

$$w''_I = \frac{-M_{oI}}{E \cdot J_y} = \frac{(-2 \cdot q \cdot L + F_B + q \cdot x) \cdot x}{2 \cdot E \cdot J_y} \quad (4.7)$$

$$w'_I = \int w''_I \cdot dx = \frac{(2 \cdot q \cdot x - 6 \cdot q \cdot L + 3 \cdot F_B) \cdot x^2}{12 \cdot E \cdot J_y} + C_1 \quad (4.8)$$

$$w_I = \int w'_I \cdot dx = \frac{(q \cdot x^3 - 4 \cdot x^2 \cdot q \cdot L + 2 \cdot x^2 \cdot F_B) \cdot x}{24 \cdot E \cdot J_y} + C_1 \cdot x + C_2 \quad (4.9)$$

Úsek II  $\in (L, 2L)$

$x \in (0, 2L)$

$$w''_{II} = \frac{-M_{oII}}{E \cdot J_y} = \frac{-2 \cdot x \cdot q \cdot L - x \cdot F_B + 2 \cdot F_B \cdot L + q \cdot x^2}{2 \cdot E \cdot J_y} \quad (4.10)$$

$$w'_{II} = \int w''_{II} \cdot dx = \frac{(-6 \cdot x \cdot q \cdot L - 3 \cdot x \cdot F_B + 12 \cdot F_B \cdot L + 2 \cdot q \cdot x^2) \cdot x}{12 \cdot E \cdot J_y} + C_3 \quad (4.11)$$

$$w_{II} = \int w'_{II} \cdot dx = \frac{(q \cdot x^3 - 4 \cdot x^2 \cdot q \cdot L - 2 \cdot x^2 \cdot F_B + 12 \cdot F_B \cdot L \cdot x) \cdot x}{24 \cdot E \cdot J_y} + C_3 \cdot x + C_4 \quad (4.12)$$

### 4.3.2 Okrajové podmínky

Aby bylo možno určit neznámé parametry, je nutné formulovat okrajové podmínky. Řešení pak musí tyto podmínky splňovat.

$$x = 0$$

$$w_I(0) = 0 \tag{4.13}$$

$$x = L$$

$$w_I(L) = w_{II}(L) \tag{4.14}$$

$$w'_I(L) = w'_{II}(L) \tag{4.15}$$

$$w_{II}(L) = 0 \tag{4.16}$$

$$x = 2 \cdot L$$

$$w_{II}(2 \cdot L) = 0 \tag{4.17}$$

### 4.3.3 Řešení okrajových podmínek a určení stykové výslednice v místě uvolněné podpory B

Dostali jsme soustavu pěti lineárních rovnic o pěti neznámých parametrech ( $C1$ ,  $C2$ ,  $C3$ ,  $C4$ ,  $F_B$ ). Soustavu budeme řešit Gauss-Jordanovou eliminační metodou. Ta je modifikací Gaussovy eliminační metody [3]. Soustavu je třeba nejprve převést na maticový zápis:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}^T = \mathbf{b}^T, \text{ kde}$$

$\mathbf{A}$  - matice soustavy

$\mathbf{x}^T$  - vektor neznámých parametrů

$\mathbf{b}^T$  - vektor pravých stran

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ L & 1 & -L & -1 & \frac{L^3}{3 \cdot E \cdot J_y} \\ 1 & 0 & -1 & 0 & \frac{L^2}{2 \cdot E \cdot J_y} \\ 0 & 0 & 2 \cdot L & 1 & -\frac{4 \cdot L^3}{3 \cdot E \cdot J_y} \\ 0 & 0 & L & 1 & -\frac{5 \cdot L^3}{12 \cdot E \cdot J_y} \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}^T = \begin{bmatrix} C1 \\ C2 \\ C3 \\ C4 \\ F_B \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{2 \cdot q \cdot L^4}{3 \cdot E \cdot J_y} \\ -\frac{q \cdot L^4}{8 \cdot E \cdot J_y} \end{bmatrix} \tag{4.18}$$

Úpravou soustavy rovnic (4.18) dostaneme matici  $\mathbf{A}$  v jednotkovém tvaru (jediné nenulové hodnoty matice jsou jedničky na hlavní diagonále) a vektor  $\mathbf{b}^T$  s hodnotami neznámých parametrů vektoru  $\mathbf{x}^T$ .

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}^T = \begin{bmatrix} C1 \\ C2 \\ C3 \\ C4 \\ F_B \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}^T = \begin{bmatrix} -\frac{q \cdot L^3}{48 \cdot E \cdot J_y} \\ 0 \\ \frac{29 \cdot q \cdot L^3}{48 \cdot E \cdot J_y} \\ 5 \cdot q \cdot L^4 \\ -\frac{24 \cdot E \cdot J_y}{4} \\ \frac{5 \cdot q \cdot L}{4} \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

Ze soustavy rovnic (4.19) pak styková výslednice  $\overrightarrow{F_B}$ :

$$F_B = \frac{5 \cdot q \cdot L}{4} \quad (4.20)$$

Určení stykových výslednic v místě podpor A a C je pak analogické jako v kapitole 3.4.5.

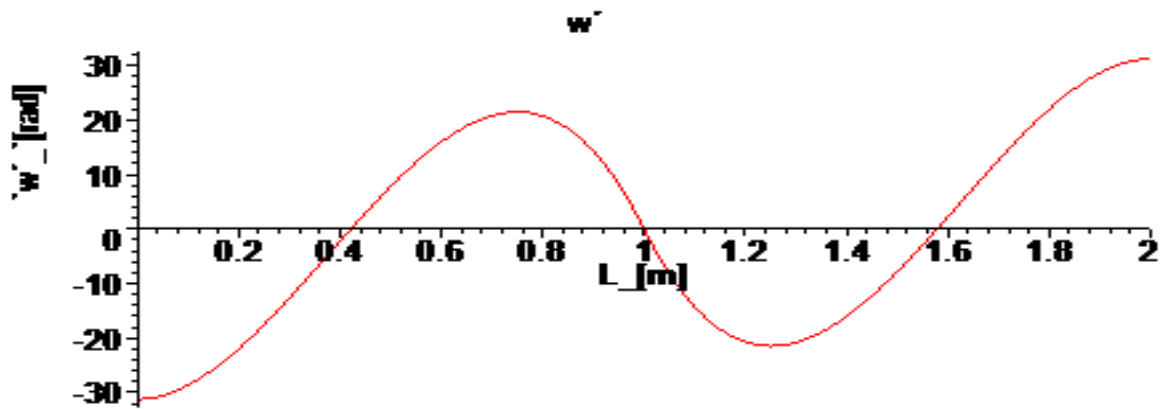
$$F_A = \frac{3 \cdot q \cdot L}{8} \quad (4.21)$$

$$F_C = \frac{3 \cdot q \cdot L}{8} \quad (4.22)$$

#### 4.3.4 Grafické znázornění ohybové čáry

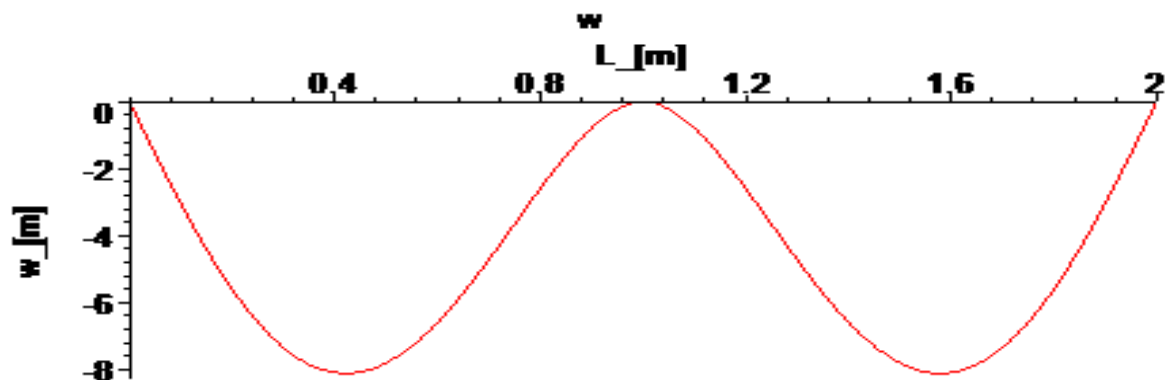
Grafické znázornění ohybové čáry bude provedeno pro stejné vzorové hodnoty jako v kapitole 3.4.6. U grafického znázornění ohybové čáry je třeba zvažovat i tuhost prutu v ohybu  $E \cdot J_y$ . Volena je tuhost jednotková  $E \cdot J_y = 1$ .

Natočení  $w'$ :



Obr. 4.3

Průhyb  $\vec{w}$ :



Obr. 4.4

#### 4.4 Vliv posunutí podpor

Teorie vlivu posunutí podpor je stejná jako v kapitole 3.5. Výpočet je stejný jako v kapitole 4.3, až po formulaci okrajových podmínek. Diferenciální rovnice ohybové čáry má oproti Castiglianově větě jednu velikou výhodu. Známe deformaci celé střednice a díky okrajovým podmínkám lze určit vliv posunutí libovolné podpory bez toho, abychom museli v každém místě provádět složitý výpočet.

#### 4.4.1 Okrajové podmínky

$$x = 0$$

$$w_I(0) = 0 \quad (4.23)$$

$$x = L$$

Posuzujeme posunutí podpory B o posunutí  $\delta$ , tedy okrajová podmínka pro posunutí bodu střednice v místě podpory B odpovídá rovnici (4.26).

$$w_I(L) = w_{II}(L) \quad (4.24)$$

$$w'_I(L) = w'_{II}(L) \quad (4.25)$$

$$w_{II}(L) = \delta \quad (4.26)$$

$$x = 2L$$

$$w_{II}(2L) = 0 \quad (4.27)$$

#### 4.4.2 Řešení okrajových podmínek a určení stykové výslednice v místě uvolněné podpory B

Řešení provedeme analogicky dle kapitoly 4.3.3. Soustava rovnic převedená do maticového tvaru pak:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{0}{L^3} \\ L & 1 & -L & -1 & \frac{0}{3 \cdot E \cdot J_y} \\ 1 & 0 & -1 & 0 & \frac{L^2}{2 \cdot E \cdot J_y} \\ 0 & 0 & 2 \cdot L & 1 & -\frac{4 \cdot L^3}{3 \cdot E \cdot J_y} \\ 0 & 0 & L & 1 & -\frac{5 \cdot L^3}{12 \cdot E \cdot J_y} \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}^T = \begin{bmatrix} C1 \\ C2 \\ C3 \\ C4 \\ F_B \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{2 \cdot q \cdot L^4}{3 \cdot E \cdot J_y} \\ \delta - \frac{q \cdot L^4}{8 \cdot E \cdot J_y} \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

Úpravou dostaneme:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}^T = \begin{bmatrix} C1 \\ C2 \\ C3 \\ C4 \\ F_B \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}^T = \begin{bmatrix} \frac{72 \cdot \delta \cdot E \cdot J_y - q \cdot L^4}{48 \cdot L \cdot E \cdot J_y} \\ 0 \\ \frac{216 \cdot \delta \cdot E \cdot J_y + 29 \cdot q \cdot L^4}{48 \cdot L \cdot E \cdot J_y} \\ \frac{24 \cdot \delta \cdot E \cdot J_y + 5 \cdot q \cdot L^4}{24 \cdot E \cdot J_y} \\ \frac{24 \cdot \delta \cdot E \cdot J_y + 5 \cdot q \cdot L^4}{4 \cdot L^3} \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

Ze soustavy rovnic (4.29) pak styková výslednice  $\vec{F}_B$ :

$$F_B = \frac{24 \cdot \delta \cdot E \cdot J_y + 5 \cdot q \cdot L^4}{4 \cdot L^3} \quad (4.30)$$

#### 4.4.3 Určení stykových výslednic v místě podpor A a C

Určení stykových výslednic v místě podpor A a C je pak analogické jako v kapitole 3.4.5.

$$F_A = q \cdot L - \frac{24 \cdot \delta \cdot E \cdot J_y + 5 \cdot q \cdot L^4}{8 \cdot L^3} \quad (4.31)$$

$$F_C = q \cdot L - \frac{24 \cdot \delta \cdot E \cdot J_y + 5 \cdot q \cdot L^4}{8 \cdot L^3} \quad (4.32)$$

### 4.5 Ztráta funkce podpor

#### 4.5.1 Ztráta funkce podpory B

Teoreticky postupujeme analogicky dle kapitoly 3.6.1. Podmínku ztráty funkce podpory B, tedy  $\vec{F}_B = 0$ , však dosazujeme do okrajových podmínek (4.23), (4.24), (4.25), (4.26), (4.27). Z rovnic nám vypadne neznámý parametr  $\vec{F}_B$ , novým neznámým parametrem je ale posunutí  $\delta$ . Následné řešení je analogické s řešením v kapitole 4.3.3. Soustava rovnic převedená do maticového tvaru pak:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ L & 1 & -L & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \cdot L & 1 & 0 \\ 0 & 0 & L & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}^T = \begin{bmatrix} C1 \\ C2 \\ C3 \\ C4 \\ \delta \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{2 \cdot q \cdot L^4}{3 \cdot E \cdot J_y} \\ -\frac{q \cdot L^4}{8 \cdot E \cdot J_y} \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

Úpravou dostaneme:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}^T = \begin{bmatrix} C1 \\ C2 \\ C3 \\ C4 \\ \delta \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}^T = \begin{bmatrix} \frac{-q \cdot L^3}{3 \cdot E \cdot J_y} \\ 0 \\ \frac{q \cdot L^3}{3 \cdot E \cdot J_y} \\ 0 \\ \frac{5 \cdot q \cdot L^4}{24 \cdot E \cdot J_y} \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

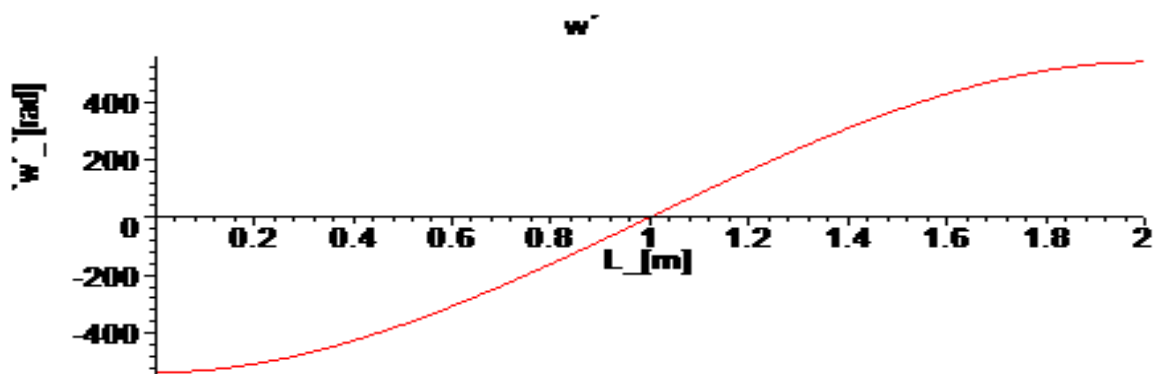
Ze soustavy rovnic (4.34) pak posunutí  $\delta$ , při kterém ztratí podpora B svou funkci:

$$\delta = -\frac{5 \cdot q \cdot L^4}{24 \cdot E \cdot J_y} \quad (4.35)$$

#### 4.5.2 Grafické znázornění ohybové čáry při ztrátě funkce podpory B

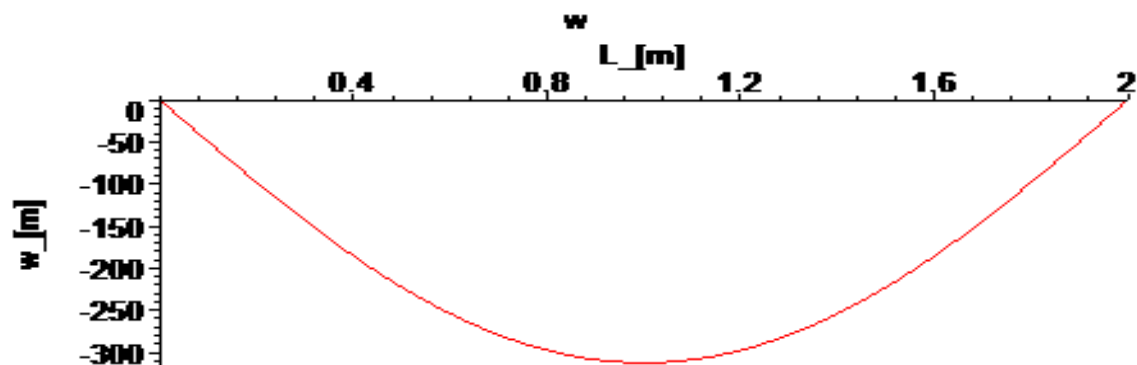
Grafické znázornění ohybové čáry bude provedeno analogicky tak, jako v kapitole 4.3.4.

Natočení  $w'$ :



Obr. 4.5

Průhyb  $\vec{w}$ :



Obr. 4.6

### 4.5.3 Ztráta funkce podpor A a C

Teoreticky postupujeme analogicky dle kapitoly 3.6.3. Podmínku  $\overline{F}_B = 2 \cdot q \cdot L$  však dosazujeme do okrajových podmínek (4.23), (4.24), (4.25), (4.26), (4.27). Z rovnic nám vypadne neznámý parametr  $\overline{F}_B$ , novým neznámým parametrem je ale posunutí  $\delta$ . Následné řešení je analogické s řešením v kapitole 4.3.3. Soustava rovnic převedená do maticového tvaru pak:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ L & 1 & -L & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \cdot L & 1 & 0 \\ 0 & 0 & L & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}^T = \begin{bmatrix} C1 \\ C2 \\ C3 \\ C4 \\ \delta \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}^T = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2 \cdot q \cdot L^4}{3 \cdot E \cdot J_y} \\ -\frac{q \cdot L^3}{E \cdot J_y} \\ \frac{2 \cdot q \cdot L^4}{E \cdot J_y} \\ \frac{17 \cdot q \cdot L^4}{24 \cdot E \cdot J_y} \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

Úpravou dostaneme:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}^T = \begin{bmatrix} C1 \\ C2 \\ C3 \\ C4 \\ \delta \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}^T = \begin{bmatrix} \frac{q \cdot L^3}{6 \cdot E \cdot J_y} \\ 0 \\ \frac{7 \cdot q \cdot L^3}{6 \cdot E \cdot J_y} \\ \frac{q \cdot L^4}{3 \cdot E \cdot J_y} \\ -\frac{q \cdot L^4}{8 \cdot E \cdot J_y} \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

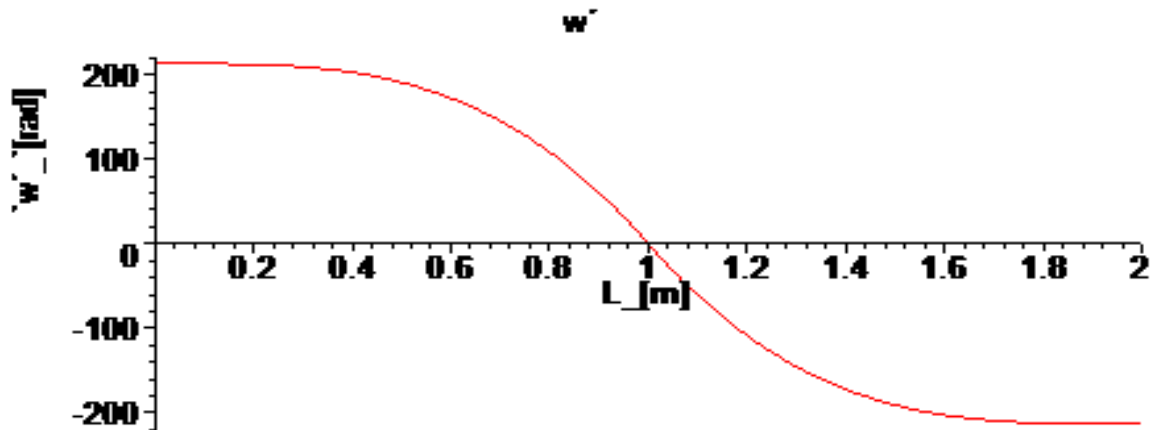
Ze soustavy rovnic (4.37) pak posunutí  $\delta$  při kterém ztratí podpory A a C svou funkci je:

$$\delta = \frac{q \cdot L^4}{8 \cdot E \cdot J_y} \quad (4.38)$$

#### 4.5.4 Grafické znázornění ohybové čáry při ztrátě funkce podpor A a C

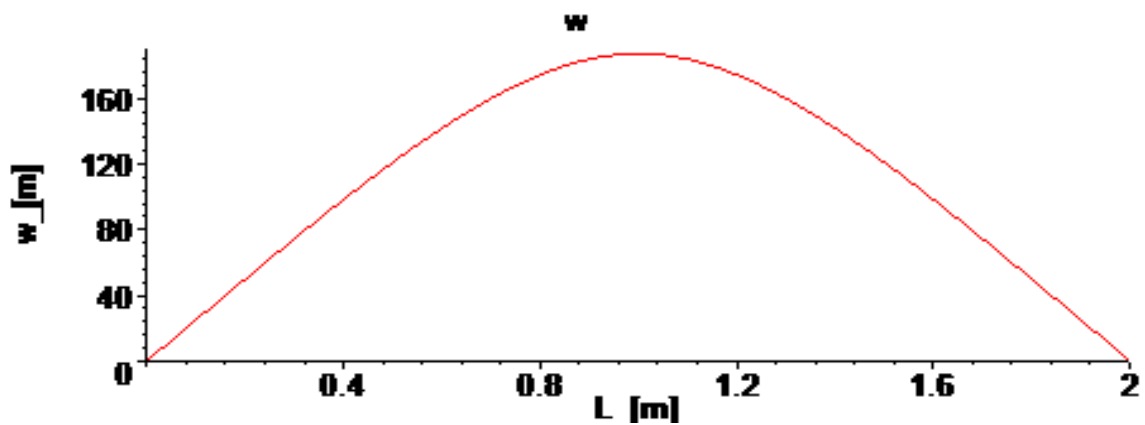
Grafické znázornění ohybové čáry bude provedeno analogicky tak, jako v kapitole 4.3.4.

Natočení  $w'$ :



Obr. 4.7

Průhyb  $w$ :



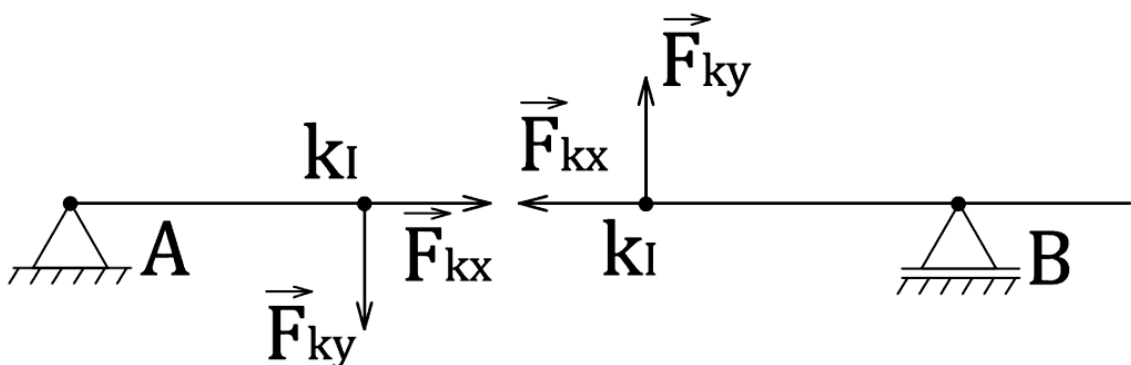
Obr. 4.8

## 5 Nosník s vnitřními klouby (Gerberův nosník)

### 5.1 Teoretický úvod nosníku s vnitřními klouby

Jednou z možností, jak řešit spojitě staticky neurčitý nosník, je vkládání vnitřních kloubů. Staticky neurčitý spojitý nosník lze vhodným vložением vnitřních kloubů převést až na úroveň jeho statické určitosti. Vložением vnitřního kloubu přidáváme ke třem statickým podmínkám rovnováhy celku další statickou podmínku, a to *„ohybový moment ve vloženém kloubu má nulovou hodnotu“*. Máme-li tedy staticky neurčitý nosník, je třeba do spojitého nosníku vložit tolik vnitřních kloubů, kolikrát je staticky neurčitý [2].

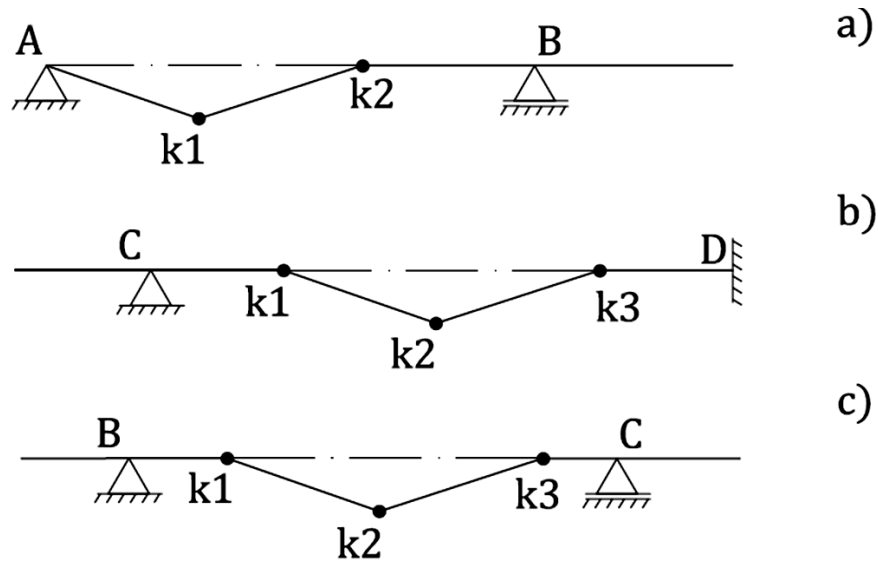
Obecně se pak vložением  $n - 1$  kloubů, nosník rozdělí na  $n$  hmotných uvolněných objektů. V místě vložení kloubu  $k$  zavedeme reakce  $\vec{F}_{kx}$  a  $\vec{F}_{ky}$ . Složky reakcí vnějších i vnitřních podpor složené rovinné soustavy řešíme ze statických podmínek rovnováhy silových soustav působících na jednotlivé uvolněné hmotné úseky. U interakcí vnitřních podpor kloubů je nutno si uvědomit, že podle *zákona akce a reakce*, dvě spolu vazbou spojené části působí na sebe navzájem silami stejně velkými, ale opačného smyslu viz. Obr. 5.1 [2].



Obr. 5.1

### 5.1.1 Podmínka vkládání kloubů

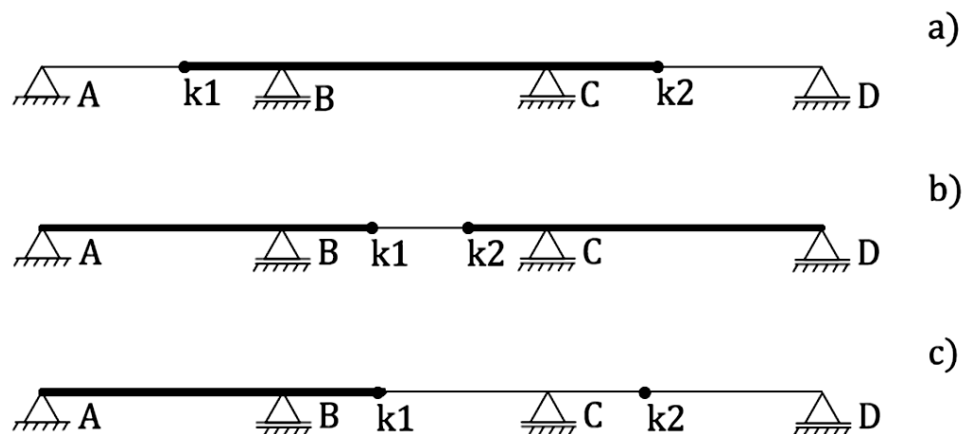
Vnitřní klouby, které vkládáme mezi podpory spojitého nosníku, nesmí být umístěny zcela libovolně, ale vždy tak, aby na nosníku nevznikala nestabilní část, tak jako na Obr. 5.2. Proto může být v krajním poli nosníku, zakončeném jedno nebo dvounásobnou vazbou, umístěn maximálně jeden vnitřní kloub a v krajním poli s vetknutým koncem, nebo ve vnitřním poli nosníku, mohou být vloženy maximálně dva vnitřní klouby. Dále platí, že v krajním poli nosníku s dokonale vetknutým koncem musí být vložen alespoň jeden vnitřní kloub. Není-li takto podmínka splněna, jedná se o staticky neurčitou úlohu [2].



Obr. 5.2

### 5.1.2 Základní a vedlejší části nosníku

Vložené klouby rozdělí nosník na části, které dělíme na *základní (podporující, nesoucí)* (Obr. 5.3 silně vyznačené) a *vedlejší (podporované, nesené)* (Obr. 5.3 slabě vyznačené). Montáž nosníků začíná vždy částmi základními a končí částmi vedlejšími. Výpočet složek reakcí a interakcí ale začínáme vždy na částech vedlejších a končíme ho pak na částech základních [2].

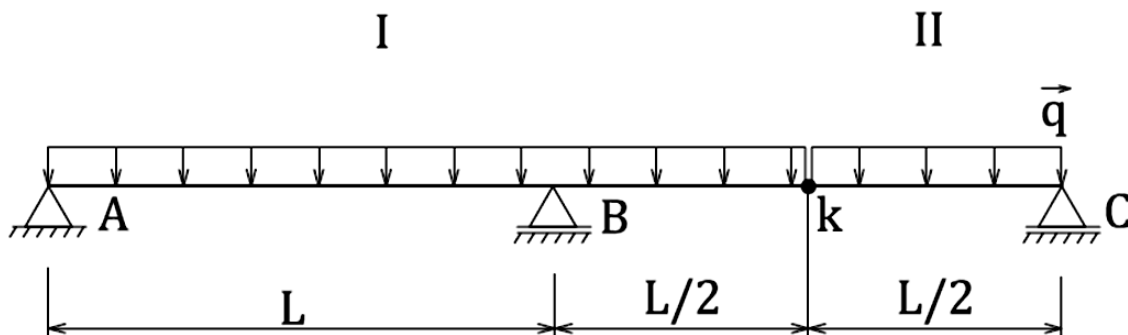


Obr. 5.3

## 5.2 Řešení vzorového příkladu pomocí vložení kloubu

### 5.2.1 Vložení kloubu

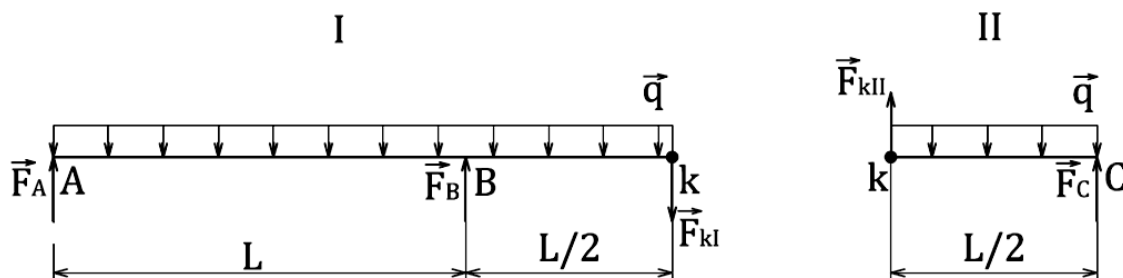
V předešlé kapitole 3.4.2, bylo určeno, že úloha je 1x staticky neurčitá. Je tedy třeba vložit 1 kloub. Kloub je možno vložit do libovolného ze dvou polí nosníku. Kloub je volen v polovině pole mezi podporami B a C dle Obr. 5.4. Tím je úloha rozdělena na základní část (úsek I) a vedlejší část (úsek II).



Obr. 5.4

### 5.2.2 Úplné uvolnění

Dále je třeba oba úseky uvolnit. V místě kloubu  $k$  zavedeme reakci  $\vec{F}_k$ .



Obr. 5.5

### 5.2.3 Rovnice statické rovnováhy a statický rozbor

Postup je stejný jako v kapitole 3.4.2. Rovnice statické rovnováhy sestavíme pro každý úsek zvlášť.

## Úsek I

Rovnice statické rovnováhy:

$$\Sigma F_{zI} = 0: \quad \frac{3}{2} \cdot q \cdot L - F_A - F_B + F_{kI} = 0 \quad (5.1)$$

$$\Sigma M_{yAI} = 0: \quad F_B \cdot L - \frac{3}{2} \cdot F_{kI} \cdot L - \frac{9}{8} \cdot q \cdot L^2 = 0 \quad (5.2)$$

Neznámé parametry:

$$NP_I = \{F_A, F_B, F_{kI}\} \rightarrow \mu_I = \mu_{FI} + \mu_{MI} = 3 + 0 = 3 \quad (5.3)$$

Stupeň statické neurčitosti určíme dle rovnice:

$$s_I = \mu_I - \nu = 3 - 2 = 1 \quad (5.4)$$

## Úsek II

Rovnice statické rovnováhy:

$$\Sigma F_{zII} = 0: \quad \frac{1}{2} \cdot q \cdot L - F_C - F_{kII} = 0 \quad (5.5)$$

$$\Sigma M_{yCII} = 0: \quad \frac{1}{8} \cdot q \cdot L^2 - \frac{1}{2} \cdot F_{kII} \cdot L = 0 \quad (5.6)$$

Neznámé parametry:

$$NP_{II} = \{F_C, F_{kII}\} \rightarrow \mu_{II} = \mu_{FII} + \mu_{MII} = 2 + 0 = 2 \quad (5.7)$$

Stupeň statické neurčitosti určíme dle rovnice:

$$s_{II} = \mu_{II} - \nu = 2 - 2 = 0 \quad (5.8)$$

#### 5.2.4 Určení stykových výslednic

Z rovnic (5.4), (5.8) vyplývá, že úsek I (základní část) je 1x staticky neurčitý  $s_I = 1$ , a proto v souladu s kapitolou 5.1.2, nejprve úsek II (vedlejší část), který je staticky určitý  $s_{II} = 0$ .

Úsek II

Z řešení soustavy dvou rovnic (5.5), (5.6) o dvou neznámých dostaneme:

$$F_{kII} = F_C = \frac{1}{4} \cdot q \cdot L \quad (5.9)$$

Dostaneme neznámý parametr  $\overrightarrow{F_{kII}}$ . Z Obr. 5.5 vyplývá  $F_{kII} = -F_{kl}$ . Pak neznámé parametry pro úsek I jsou:

Úsek I

Neznámé parametry:

$$NP_I = \{F_A, F_B\} \rightarrow \mu_{II} = \mu_{FII} + \mu_{MII} = 2 + 0 = 2 \quad (3.43)$$

Stupeň statické neurčitosti určíme dle rovnice:

$$s_{II} = \mu_{II} - \nu = 2 - 2 = 0 \quad (5.10)$$

Po dosazení rovnice (5.9), do rovnic (5.1), (5.2) pak:

$$\Sigma F_{zI} = 0: \quad -F_A - F_B + \frac{7}{4} \cdot q \cdot L = 0 \quad (5.11)$$

$$\Sigma M_{yAI} = 0: \quad F_B \cdot L - \frac{3}{2} \cdot q \cdot L^2 = 0 \quad (5.12)$$

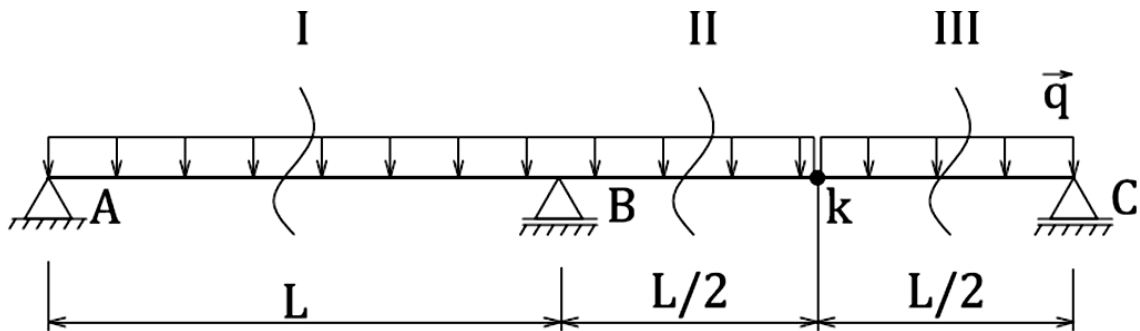
Z řešení soustavy dvou rovnic (5.11), (5.12) o dvou neznámých dostaneme:

$$F_A = \frac{1}{4} \cdot q \cdot L \quad (5.13)$$

$$F_B = \frac{3}{2} \cdot q \cdot L \quad (5.14)$$

### 5.2.5 Průběhy VVÚ

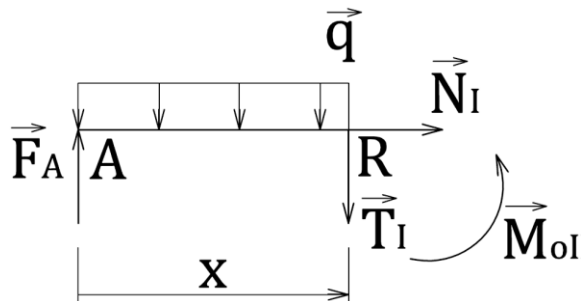
Aby bylo možno vykreslit průběhy VVÚ, je třeba si úlohu rozdělit na jednotlivé spojité úseky dle Obr. 5.6. Pro každý z nich vyjádříme posouvající sílu  $\vec{T}$  a ohybový moment  $\vec{M}_o$ .



Obr. 5.6

Úsek I  $\in (0, L)$

$x \in (0, L)$



Obr. 5.7

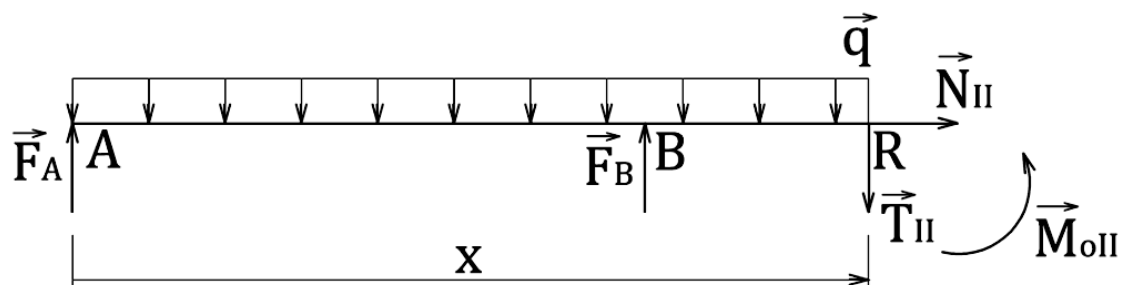
Rovnice statické rovnováhy pro úsek I a dosazení stykových výslednic:

$$\begin{aligned} \Sigma F_z = 0: \quad T_I - F_A + q \cdot x &= 0 \\ T_I &= \frac{1}{4} \cdot q \cdot L - q \cdot x \end{aligned} \quad (5.15)$$

$$\begin{aligned} \Sigma M_y = 0: \quad M_{oI} - F_A \cdot x + \frac{q \cdot x^2}{2} &= 0 \\ M_{oI} &= \frac{1}{4} \cdot q \cdot L \cdot x - \frac{q \cdot x^2}{2} \end{aligned} \quad (5.16)$$

Úsek II  $\in (L, \frac{3}{2}L)$

$x \in (0, \frac{3}{2}L)$



Obr. 5.8

Rovnice statické rovnováhy pro úsek II a dosazení stykových výslednic:

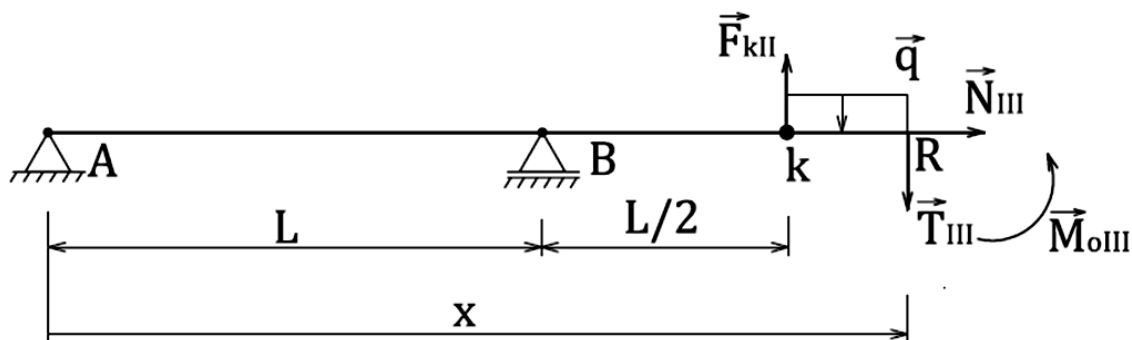
$$\begin{aligned} \Sigma F_z = 0: \quad T_{II} - F_A - F_B + q \cdot x &= 0 \\ T_{II} &= \frac{7}{4} \cdot q \cdot L - q \cdot x \end{aligned} \tag{5.17}$$

$$\begin{aligned} \Sigma M_y = 0: \quad M_{oII} - F_A \cdot x - F_B \cdot (x - L) + \frac{q \cdot x^2}{2} &= 0 \\ M_{oII} &= \frac{7}{4} \cdot q \cdot L \cdot x - \frac{3}{2} \cdot q \cdot L^2 - \frac{q \cdot x^2}{2} \end{aligned} \tag{5.18}$$

Úsek III  $\in (\frac{3}{2}L, 2L)$

Z důvodu grafického znázornění průběhu VVÚ ve výpočtovém programu Maple 12 je délková proměnná  $x$  volena od počátku nosníku v místě podpory A. Ve výpočtu však zatížení před kloubem  $k$  již nemůže být zahrnuto, neboť je reprezentováno silovou reakcí v místě kloubu  $\vec{F}_{kII}$ . Pak tedy:

$x \in (0, 2L)$



Obr. 5.9

Rovnice statické rovnováhy pro úsek III a dosazení stykových výslednic:

$$\Sigma F_z = 0: \quad T_{III} - F_{kII} + q \cdot \left(x - \frac{3}{2} \cdot L\right) = 0 \quad (5.19)$$

$$T_{III} = \frac{7}{4} \cdot q \cdot L - q \cdot x$$

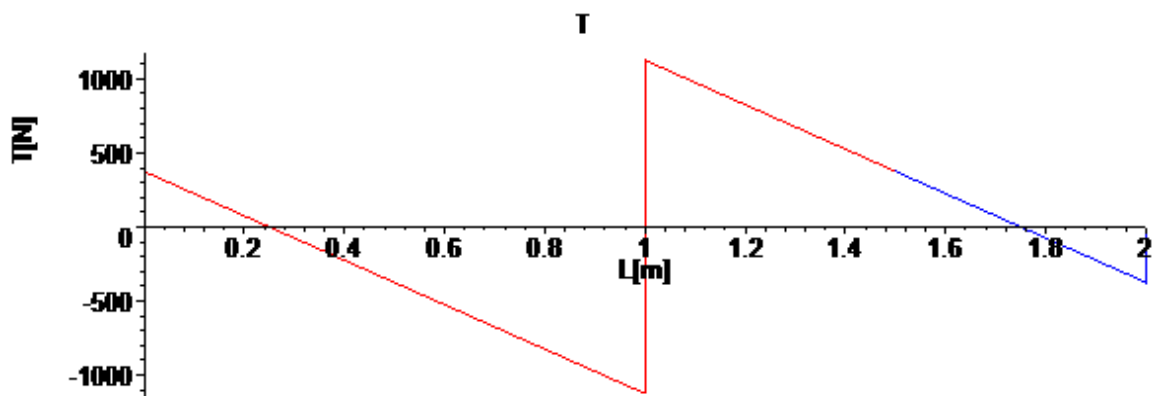
$$\Sigma M_y = 0: \quad M_{oIII} - F_{kII} \cdot \left(x - \frac{3}{2} \cdot L\right) + \frac{q \cdot \left(x - \frac{3}{2} \cdot L\right)^2}{2} = 0 \quad (5.20)$$

$$M_{oIII} = \frac{7}{4} \cdot q \cdot L \cdot x - \frac{3}{2} \cdot q \cdot L^2 - \frac{q \cdot x^2}{2}$$

### 5.2.6 Grafické znázornění průběhů VVÚ

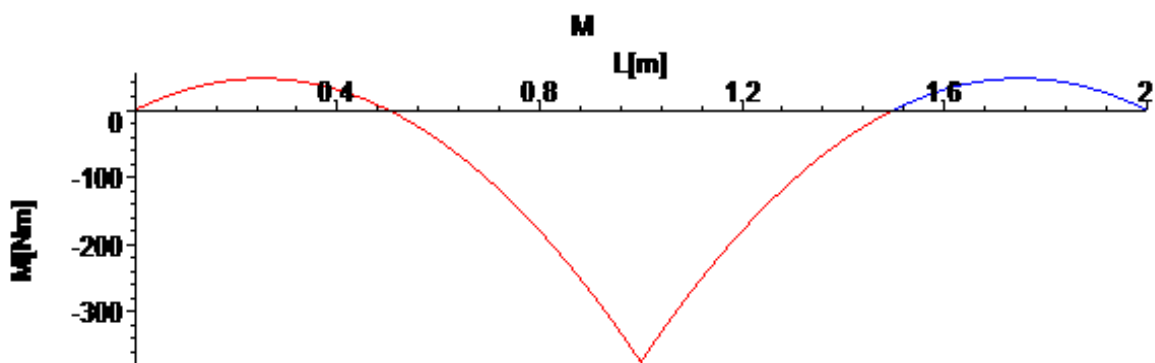
Pro grafické znázornění byly použity stejné vzorové hodnoty, jako jsou uvedené v kapitole 3.4.6.

Průběh posouvající síly  $\vec{T}$ :



Obr. 5.10

Průběh ohybového momentu  $\vec{M}$ :



Obr. 5.11

### 5.3 Vliv posunutí podpor a ztráta jejich funkce

Vzhledem k tomu, že je vložení kloubu úloha rozdělena na dva prosté nosníky, nemá při malých deformačních posuvech podpor  $\vec{w}$ , toto posunutí vliv na velikost stykových výslednic  $\vec{F}_A$ ,  $\vec{F}_B$ ,  $\vec{F}_C$ . Posunutí podpor bude mít vliv pouze na tvar ohybové čáry.

### 5.4 Diferenciální rovnice ohybové čáry pro nosník s kloubem

U výpočtu diferenciální rovnice ohybové čáry potřebujeme znát ohybové momenty jednotlivých úseků. Toto je řešeno v kapitole 5.2.5. Známe tedy  $\vec{M}_{oI}$ ,  $\vec{M}_{oII}$ ,  $\vec{M}_{oIII}$ .

#### 5.4.1 Diferenciální rovnice pro jednotlivé úseky

Pro každý úsek formulujeme samostatnou diferenciální rovnici ohybové čáry. Následnou první integrací dostaneme rovnici pro natočení střednice prutu  $w'$  a druhou integrací průhyb střednice prutu  $\vec{w}$ .

Úsek I  $\in (0, L)$

$x \in (0, L)$

$$w_I'' = \frac{-M_{oI}}{E \cdot J_y} = -\frac{q \cdot x \cdot (L - 2 \cdot x)}{4 \cdot E \cdot J} \quad (5.21)$$

$$w_I' = \int w_I'' \cdot dx = \frac{q \cdot x^2 \cdot (4 \cdot x - 3 \cdot L)}{24 \cdot E \cdot J} + C1 \quad (5.22)$$

$$w_I = \int w_I' \cdot dx = \frac{q \cdot x^3 \cdot (x - L)}{24 \cdot E \cdot J} + C1 \cdot x + C2 \quad (5.23)$$

Úsek II  $\in (L, \frac{3}{2}L)$

$x \in (0, \frac{3}{2}L)$

$$w_{II}'' = \frac{-M_{oII}}{E \cdot J_y} = \frac{q \cdot (-7 \cdot L \cdot x + 2 \cdot x^2 + 6 \cdot L^2)}{4 \cdot E \cdot J} \quad (5.24)$$

$$w_{II}' = \int w_{II}'' \cdot dx = -\frac{q \cdot x \cdot (21 \cdot x \cdot L - 4 \cdot x^2 - 36 \cdot L^2)}{24 \cdot E \cdot J} + C3 \quad (5.25)$$

$$w_{II} = \int w_{II}' \cdot dx = \frac{q \cdot x^2 \cdot (x^2 - 7 \cdot L \cdot x + 18 \cdot L^2)}{24 \cdot E \cdot J} + C3 \cdot x + C4 \quad (5.26)$$

Úsek III  $\in (\frac{3}{2}L, 2L)$

$x \in (0, 2L)$

$$w''_{III} = \frac{-M_{oIII}}{E \cdot J_y} = \frac{q \cdot (-7 \cdot L \cdot x + 2 \cdot x^2 + 6 \cdot L^2)}{4 \cdot E \cdot J} \quad (5.27)$$

$$w'_{III} = \int w''_{III} \cdot dx = -\frac{q \cdot x \cdot (21 \cdot L \cdot x - 4 \cdot x^2 - 36 \cdot L^2)}{24 \cdot E \cdot J} + C5 \quad (5.28)$$

$$w_{III} = \int w'_{III} \cdot dx = \frac{q \cdot x^2 \cdot (x^2 - 7 \cdot x \cdot L + 18 \cdot L^2)}{24 \cdot E \cdot J} + C6 \cdot x + C6 \quad (5.29)$$

#### 5.4.2 Okrajové podmínky

Aby bylo možno určit neznámé integrační konstanty  $C1, C2, C3, C4, C5, C6$ , potřebné k řešení jednotlivých diferenciálních rovnic z předešlé kapitoly 5.4.1, je nutno formulovat okrajové podmínky.

$x = 0$

$$w_I(0) = 0 \quad (5.30)$$

$x = L$

$$w_I(L) = w_{II}(L) \quad (5.31)$$

$$w'_I(L) = w'_{II}(L) \quad (5.32)$$

$$w_{II}(L) = 0 \quad (5.33)$$

$x = \frac{3}{2} \cdot L$

$$w_{II}\left(\frac{3}{2} \cdot L\right) = w_{III}\left(\frac{3}{2} \cdot L\right) \quad (5.34)$$

$x = 2 \cdot L$

$$w_{III}(2 \cdot L) = 0 \quad (5.35)$$

### 5.4.3 Řešení okrajových podmínek

Řešení provedeme analogicky dle kapitoly 4.3.3. Soustava rovnic převedená do maticového tvaru pak:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ L & 1 & -L & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \cdot L & 1 & -\frac{3}{2} \cdot L & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \cdot L & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}^T = \begin{bmatrix} C1 \\ C2 \\ C3 \\ C4 \\ C5 \\ C6 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}^T = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{q \cdot L^4}{2 \cdot E \cdot J_y} \\ \frac{3 \cdot q \cdot L^3}{4 \cdot E \cdot J_y} \\ \frac{q \cdot L^4}{2 \cdot E \cdot J_y} \\ 0 \\ \frac{4 \cdot q \cdot L^4}{3 \cdot E \cdot J_y} \end{bmatrix} \quad (5.36)$$

Úpravou dostaneme:

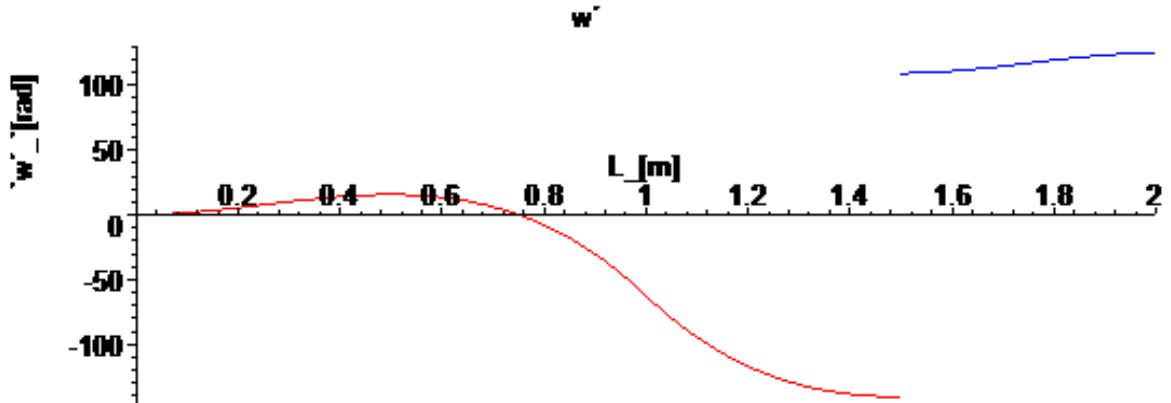
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}^T = \begin{bmatrix} C1 \\ C2 \\ C3 \\ C4 \\ C5 \\ C6 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{3 \cdot q \cdot L^3}{4 \cdot E \cdot J_y} \\ \frac{q \cdot L^4}{4 \cdot E \cdot J_y} \\ \frac{11 \cdot q \cdot L^3}{12 \cdot E \cdot J_y} \\ \frac{q \cdot L^4}{2 \cdot E \cdot J_y} \end{bmatrix} \quad (5.37)$$

Integrační konstanty dosadíme do jednotlivých diferenciálních rovnic a provedeme grafické znázornění ohybové čáry.

#### 5.4.4 Grafické znázornění ohybové čáry

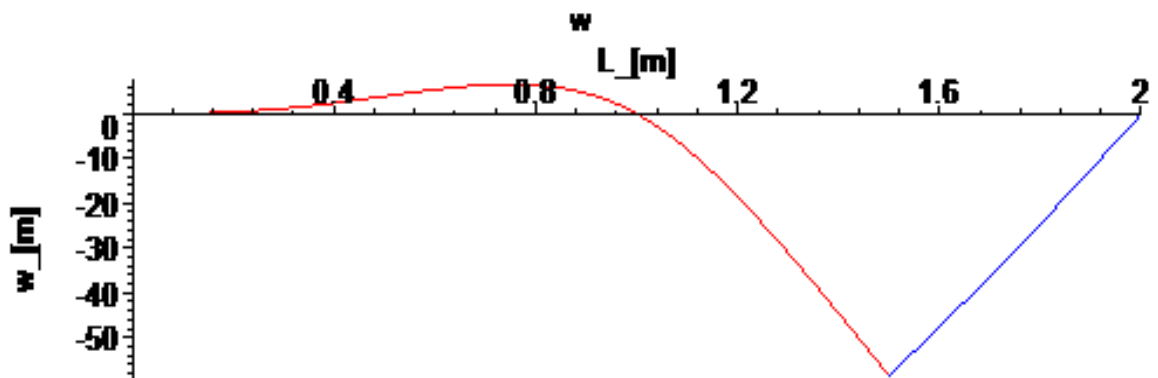
Grafické znázornění ohybové čáry bude provedeno analogicky tak, jako v kapitole 4.3.4

Natočení  $w'$ :



Obr. 5.12

Průhyb  $w$ :



Obr. 5.13

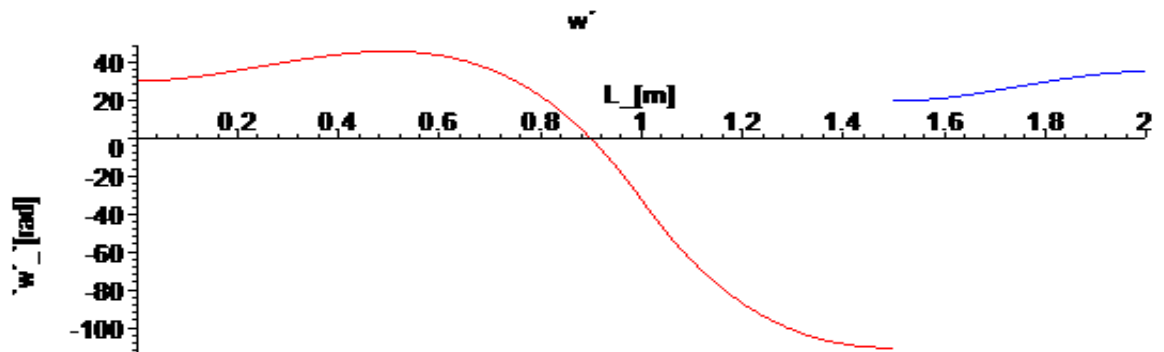
#### 5.5 Vliv posunutí podpor na tvar ohybové čáry

Budeme posuzovat vliv posunutí podpory B na tvar diferenciální rovnice ohybové čáry dle kapitoly 5.3.

### 5.5.1 Grafické znázornění ohybové čáry

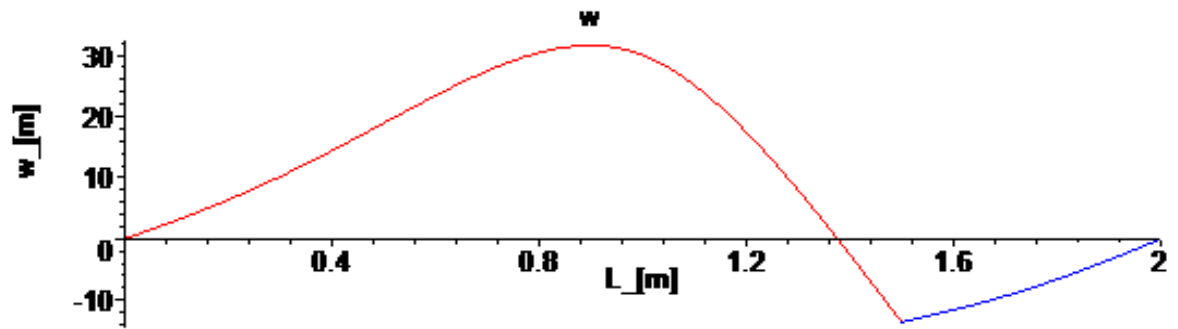
Posunutí podpory B proti směru osy z:

Natočení  $w'$ :



Obr. 5.14

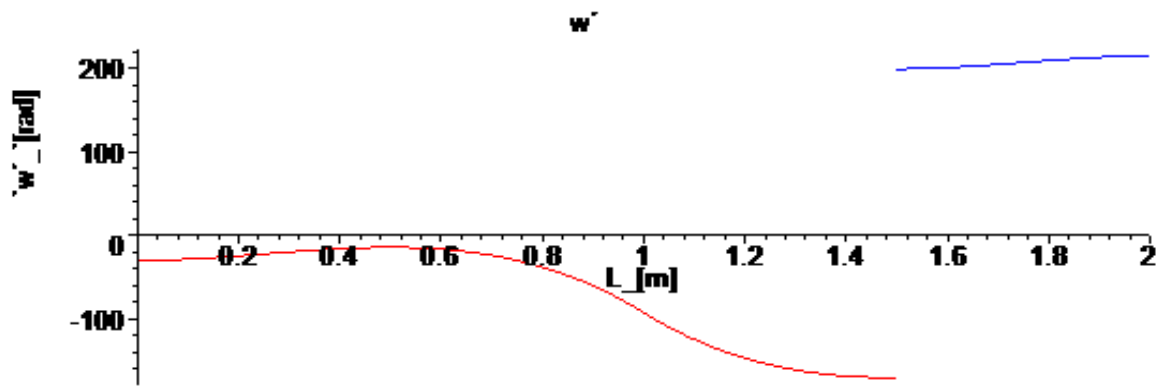
Průhyb  $\vec{w}$ :



Obr. 5.15

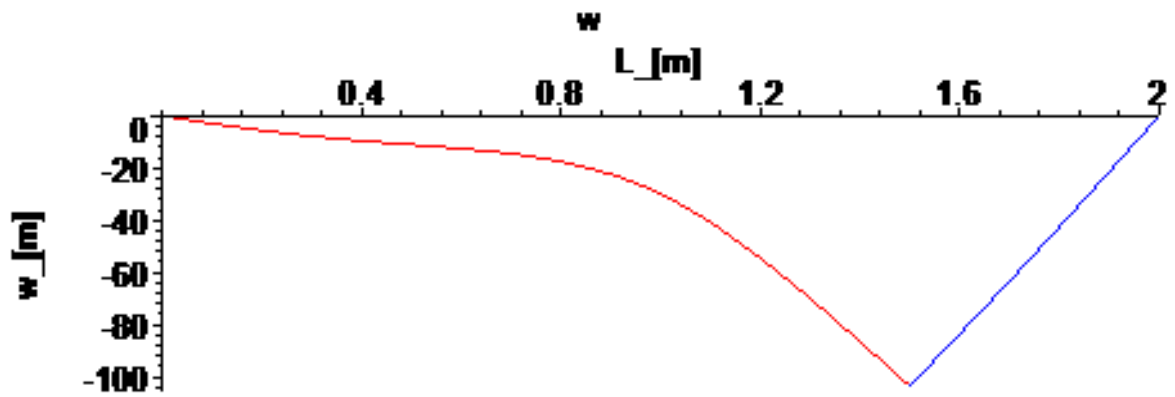
Posunutí podpory B po směru osy z:

Natočení  $w'$ :



Obr. 5.16

Průhyb  $w$ :



Obr. 5.17

## 6 Závěr a zhodnocení

Výsledky práce vedou k závěru, že stykové výslednice staticky neurčitého nosníku určené pomocí metody *Castiglianovy věty* jsou shodné se stykovými výslednicemi určenými pomocí metody *diferenciální rovnice ohybové čáry*. To platí i pro VVÚ těchto metod. Lze tedy konstatovat, že obě metody vedou ke shodným výsledkům, mají ale rozdílnou operační složitost výpočtu. U *nosníku s vnitřními klouby* jsou však stykové výslednice i VVÚ odlišné. To je způsobeno právě vnitřními klouby, které mění charakter zatížení podpor nosníku.

U nosníku bez vnitřních kloubů má posunutí podpor značný vliv na VVÚ a velikost stykových výslednic, v některých případech vede i ke ztrátě funkce podpor. Posunutí podpor mění také tvar střednice prutu vyobrazené pomocí metody *diferenciální rovnice ohybové čáry*. *Nosník s vnitřními klouby* má stykové výslednice i VVÚ při posunutí podpor stejné, nedojde tedy ke ztrátě funkce podpor. Posunutí podpor pouze mění tvar střednice prutu vyobrazené pomocí metody *diferenciální rovnice ohybové čáry*.

Vlastnost, že si *nosník s vnitřními klouby* zachovává stejnou velikost stykových výslednic, je využita především v oboru stavebního inženýrství, kdy se cíleně do nosníků vkládají vnitřní klouby proto, aby byla při nežádoucím posunutí některé z podpor zachována stabilita nosníku a velikost zatížení jednotlivých podpor.

## Seznam použitých symbolů a značek

$\gamma$ .....	úhlové přetvoření
$\tau$ .....	smykové napětí
$G$ .....	modul pružnosti ve smyku
$D$ .....	průměr
$q$ .....	liniové zatížení
$A, B, C$ .....	podpory
$F_A, F_B, F_C$ .....	stykové výslednice
$L$ .....	délkový rozměr
$F_K, F$ .....	osamělá síla
$W$ .....	energie napjatosti
$A$ .....	deformační práce
$\pi$ .....	silová soustava
$n, m, i, j$ .....	číselné indexy
$u$ .....	deformační posuv
$w$ .....	deformační posuv ve směru osy $z$ , průhyb
$M$ .....	osamělá silová dvojice
$\varphi$ .....	úhel natočení, deformační natočení
$p$ .....	plošná síla
$m_p$ .....	plošná silová dvojice
$o$ .....	objemová síla
$m_q$ .....	liniové dvojice
$dS$ .....	elementární plocha
$dV$ .....	elementární objem
$dl, dx$ .....	elementární délka
$\Gamma$ .....	hraniční plocha
$\Omega$ .....	teoretické těleso
$E$ .....	modul pružnosti v tahu
$J$ .....	kvadratický moment
$N$ .....	normálová síla
$T$ .....	posouvající síla
$R$ .....	bod střednice prutu, poloměr
$x, y, z$ .....	osy souřadnicového systému
$v$ .....	statická podmínka rovnováhy
$\mu$ .....	neznámý parametr
$\delta$ .....	posunutí podpory
$\varepsilon$ .....	poměrné délkové přetvoření
$C$ .....	integrační konstanta
$A$ .....	matice soustavy
$\mathbf{x}$ .....	vektor neznámých parametrů
$\mathbf{b}$ .....	vektor pravých stran
$k$ .....	kloub
VVÚ .....	výsledné vnitřní účinky

## Seznam použité literatury

- [1] JANÍČEK, P. - ONDRÁČEK, E. - VRBKA, J. - BURŠA, J. *Mechanika těles : Pružnost a pevnost I.* 3. vyd. Brno : CERM, 2004. 287 s.  
ISBN 80-214-2592-X.
- [2] KADLČÁK, J. - KYTÝR, J. *Statika I. Stavebních konstrukcí : Základy stavební mechaniky Staticky určené prutové konstrukce.* 2. dopl. vyd. Brno : VUTIUM, 2001. 349 s. ISBN 80-214-1877-X.
- [3] NEDOMA, J. *Matematika I.* 2. dopl. vyd. Brno : CERM, 2004. 267 s.  
ISBN 80-214-2700-0.
- [4] Sešity z přednášek a cvičení. *Pružnost a pevnost I.* VUT FSI Brno

## Seznam příloh

- Příloha 1. *Castiglian s posuvem podpor a ztrátou funkce podpor*, výpočet v programu Maple 12
- Příloha 2. *Nosník s kloubem a ohybová čára kloub*, výpočet v programu Maple 12
- Příloha 3. *Ohybová čára s posuvem podpory a ztrátou funkce podpory*, výpočet v programu Maple 12
- Příloha 4. CD s výpočty a vlastní prací ve formátu .pdf