VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV AUTOMOBILNÍHO A DOPRAVNÍHO INŽENÝRSTVÍ
INSTITUTE OF AUTOMOTIVE ENGINEERING

MOŽNOSTI ANALYTICKÉHO ŘEŠENÍ DOPRAVNÍCH ÚLOH MATERIÁLOVÉHO TOKU

POSSIBILITIES OF ANALYTICAL SOLUTION OF THE TRANSPORT TASKS FOR MATERIAL FLOW

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE
BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE Ing. Michal Chaloupka
AUTHOR

VEDOUCÍ PRÁCE Ing. Jaroslav Kašpárek, Ph.D.
SUPERVISOR

BRNO 2020

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

Zadání bakalářské práce

Ústav:	Ústav automobilního a dopravního inženýrství
Student:	**Ing. Michal Chaloupka**
Studijní program:	Strojírenství
Studijní obor:	Stavba strojů a zařízení
Vedoucí práce:	**Ing. Jaroslav Kašpárek, Ph.D.**
Akademický rok:	2019/20

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Možnosti analytického řešení dopravních úloh materiálového toku

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Studie možností analytického pohledu na řešení dopravních úloh pro materiálový tok. Studie obsahuje kritický pohled na řešení úloh a metodiku výběru aplikovatelné metody. Součástí studie je vzorový příklad s porovnáním složitosti vstupních parametrů postupu.

Cíle bakalářské práce:

Popis dopravní úlohy a požadavky na vstupní parametry a kritéria.
Metody analytického řešení dopravní úlohy.
Vzorový příklad a metodický postup řešení jednotlivými metodami.
Porovnání složitosti řešení jednotlivých metod a porovnání výsledků.

Seznam doporučené literatury:

PRECLÍK, Vratislav. Průmyslová logistika. Praha: Nakladatelství ČVUT, 2006. ISBN 80-01-03-449-6.

HLOSKA, Jiří. Optimalizace materiálového toku v hromadné výrobě simulačními metodami: zkrácená verze Ph.D. Thesis. V Brně: [Vysoké učení technické], [2015]. ISBN 978-80-214-5305-0.

SYROVÝ, Otakar. Doprava v zemědělství. 1. vyd. Praha: Profi Press, 2008. ISBN 9788086726304.

BIGOŠ, Peter. Materiálové toky a logistika II: logistika výrobných a technických systémov. V Košiciach: Technická univerzita v Košiciach, Strojnícka fakulta, c2005. ISBN 80-8073-263-9.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2019/20

V Brně, dne

L. S.

prof. Ing. Josef Štětina, Ph.D. ředitel ústavu	doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D. děkan fakulty

ABSTRAKT

Tato bakalářská práce se věnuje možností využití metod lineárního programování v dopravních úlohách. Práce se skládá ze dvou částí. První část se věnuje podstatě lineárního programování, pomocí kterého lze řešit celou řadu optimalizačních úloh, v této práci jsou stěžejní dopravní úlohy. Druhá část se zabývá porovnáním metod optimalizace dopravních úloh. Cílem této práce je vyhodnotit nejvhodnější metodu, která může najít uplatnění v podnikové praxi. Pomocí metod lineárního programování budou nalezeny výchozí řešení úloh ke zjištění množství a vynaložených nákladů při distribuci zboží od dodavatelů k odběratelům. Poté budou nalezena optimální řešení.

KLÍČOVÁ SLOVA

Dopravní úlohy, metoda severozápadního rohu, indexní metoda, Vogelova aproximační metoda

ABSTRACT

This bachelor thesis deals with the possibility of using linear programming methods in transport tasks. The work consists of two parts. The first part deals with the essence of linear programming, which can be used to solve a number of optimization problems, in this work are the key transport problems. The second part deals with the comparison of methods for optimizing transport tasks. The aim of this work is to evaluate the most suitable method that can find application in business practice. Using the methods of linear programming, initial solutions to tasks will be found to determine the quantity and cost incurred in the distribution of goods from suppliers to customers. Then optimal solutions will be found.

KEYWORDS

Transport tasks, northwest corner method, index method, Vogel approximation method

BIBLIOGRAFICKÁ CITACE

CHALOUPKA, Michal. *Možnosti analytického řešení dopravních úloh materiálového toku* [online]. Brno, 2020 [cit. 2020-06-22]. Dostupné z: https://www.vutbr.cz/studenti/zav-prace/detail/124550. Bakalářská práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav automobilního a dopravního inženýrství. Vedoucí práce Jaroslav Kašpárek.

ČESTNÉ PROHLÁŠENÍ

Prohlašuji, že tato práce je mým původním dílem, zpracoval jsem ji samostatně pod vedením Jaroslava Kašpárka a s použitím informačních zdrojů uvedených v seznamu.

V Brně dne 22. června 2020 ……..……..…………………………………………..

Jméno a přímení

PODĚKOVÁNÍ

Na tomto místě bych rád poděkoval vedoucímu mojí bakalářské práce Jaroslavu Kašpárkovi za poskytnuté cenné rady a připomínky při psaní této závěrečné práce.

OBSAH

ÚVOD

Distribuce zboží od dodavatelů k zákazníkům má pro každý podnikatelský subjekt neopomenutelný význam a je nutné věnovat této oblasti patřičnou pozornost. Podstatou podnikajících subjektů je transformace vstupů na výstupy. Každý podnikající subjekt je součástí trhu a je v interakci dodavatelsko-odběratelského řetězce. Správný přístup k řešení optimalizace logistických tras vede k šetření nejen nákladů, ale i k úspoře času. Je tedy na místě se zamyslet, jak dosáhnout optimalizace logistických tras pomocí různých metod, které jsou snadné na pochopení a snadno se implementují do každodenních pracovních činností souvisejících s dopravou mezi stanovišti. Každá úspora nákladů se pozitivně promítne do fungování společnosti, jelikož volné finanční prostředky lze investovat do inovací a zvýšení konkurenceschopnosti na trhu. Být silnou a konkurenceschopnou společností je jednou ze základních vizí podnikatelských subjektů. V dnešní době mohou společnosti působit na globálním trhu a mít své dodavatele a odběratele na různých místech v rámci regionů, států či světa. Útvar logistiky proto čelí velké výzvě, jak optimálně zkoordinovat jednotlivé toky zboží a materiálů, aby nedocházelo ke zbytečným logistickým operacím, což se v důsledku promítne v čase i ve vynaložených nákladech. Cílem logistiky je nejen plánování a realizace jednotlivých toků, ale i rovněž hledání úspor v čase a ve vynaložených nákladech.

1 LINEÁRNÍ PROGRAMOVÁNÍ

Lineární programování je jedna z více metod používaných v rámci operačního výzkumu a pro svoji jednoduchost nalézá široké možnosti uplatnění nejen v podnikové praxi.

Lineární programování se soustředí na hledání optimálního (nejlepšího) řešení při současném splnění daných omezujících podmínek, které jsou zapsány pomocí lineárních rovnic a nerovnic. Kritérium optimálnosti je vyjádřeno lineární funkcí. Všechny vazby v modelech lineárního programování jsou pouze vazbami lineárními [7].

1.1 OBECNÝ TVAR ÚLOHY LINEÁRNÍHO PROGRAMOVÁNÍ

Výchozím předpokladem pro řešení úloh lineárního programování je sestavení matematického modelu, který představuje zjednodušení reálného problému. Na zjednodušený matematický model lze poté aplikovat metody lineární algebry. Což v mnoha případech k popisu reálných problémů zcela dostačuje.

Matematický model představuje matematické schéma sloužící k popsání určité neprázdné, definované množiny prvků a vazeb, které jsou pro zkoumaný ekonomický problém podstatné [9].

Při tvoření matematického modelu se využívá matematické programování, které je zaměřeno na řešení optimalizačních úloh s cílem nalezení extrému daného kritéria vymezeného ve formě kriteriální funkce *n* proměnných na množině variant daných soustavou omezujících podmínek, které jsou zadány ve tvaru lineárních nebo nelineárních rovnic nebo nerovnic [2].

Každou úlohu lineárního programování lze zapsat pomocí rovnic a nerovnic [1]:

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \lesseqgtr b_i \tag{2}$$

$$x_j \geq 0 \tag{3}$$

$$(i = 1, \ldots\ldots, m), (j = 1, \ldots\ldots, n)$$

Jednotlivé symboly představují následující významy [6]:

c_j koeficient účelové funkce náležící k j-té proměnné

Tento koeficient může reprezentovat například variabilní náklady na jednotku produkce či ceny výrobků.

x_j strukturní (optimalizovaná) proměnná

Veličina představující optimální úroveň jako předpoklad k dosažení cíle řešení rozhodovací situace. V praxi tyto veličiny mohou mít podobu objemu přepravovaného množství zboží nebo objemu produkce výrobků.

a_{ij} strukturní (technicko-ekonomický) koeficient

Koeficient vyjadřující vztah mezi i-tou omezující podmínkou a j-tou proměnnou.

b_i pravá strana i-té vlastní omezující podmínky

Může mít podobu kapacitního omezení nebo podoby požadavků zákazníků například na minimální objem produkce anebo maximální prodejní množství.

1.2 STRUKTURA MATEMATICKÉHO MODELU

- účelová funkce z neboli kriteriální funkce v podobě lineárního mnohočlenu;
- vlastní omezující podmínky představující soustavu lineárních rovnic a nerovnic, jež jsou lineárně nezávislé, přičemž platí $m < n$;
- podmínky nezápornosti [10].

Podstatou každé úlohy lineárního programování je nalezení takových strukturních proměnných x_i, aby hodnota účelové funkce nabývala extrémní hodnoty. Je-li požadavek na nalezení řešení s nejvyšší hodnotou účelové funkce, jedná se o úlohu maximalizační. Má-li být nalezeno řešení s nejnižší hodnotou účelové funkce, jde o úlohu minimalizační, která je typická pro řešení minimalizace celkových nákladů.

1.3 ZÁKLADNÍ POJMY

Přípustné řešení – jedná se o každý vektor řešení $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, který vyhovuje vlastním omezujícím podmínkám a rovněž i podmínkám nezápornosti.

Optimální řešení – představuje přípustné řešení, pro které je hodnota účelové funkce maximální.

Bazické řešení – představuje takové přípustné řešení úlohy, ve které $\vec{x}$ má nejvýše tolik kladných složek, kolik má úloha lineárně nezávislých vlastních omezujících podmínek. Pokud má úloha přípustné řešení, pak rovněž má i bazické řešení.

Degenerované řešení – má-li aspoň jedna ze základních proměnných nulovou hodnotu, nazývá se takové řešení vektoru $\vec{x}$ jako degenerované [10; 1].

1.4 DISTRIBUČNÍ ÚLOHY

Distribuční úlohy patří mezi specifické optimalizační metody lišící se způsobem sestavování matematického modelu. K řešení distribučních úloh lze přistupovat prostřednictvím využití všeobecného postupu pomocí Simplexovy metody nebo lze použít speciální metody, které řeší daný typ úlohy zjednodušeným algoritmem.

Tento typ úloh je zaměřen na minimalizaci veličin, mezi které lze zmínit například vynaložené výdaje, ujetou vzdálenost či čas strávený na cestách spojený s distribucí materiálu. Tento přístup vede v důsledku ke snižování vynaložených celkových nákladů. Hlavním smyslem distribučních úloh je zajištění přepravy nákladu z místa jeho lokace, do místa, kde je náklad poptáván.

1.4.1 PODSKUPINY DISTRIBUČNÍCH ÚLOH

PŘIŘAZOVACÍ PROBLÉM

V tomto typu úlohy se jedná o nalezení vzájemně jednoznačného přiřazení dvojice jednotek ze dvou skupin tak, aby toto přiřazení přineslo co největší efekt. Úloha počítá se dvěma skupinami jednotek, které mají stejný počet prvků, čehož se dá snadno dosáhnout doplněním o fiktivní jednotky [2].

PROBLÉM OBCHODNÍHO CESTUJÍCÍHO

Problém obchodního cestujícího bývá často označován jako okružní problém, který pomocí optimalizačních metod nalézá nejkratší vzdálenosti mezi jednotlivými body.

Podstata této úlohy spočívá v postupných návštěvách jednotlivých stanovišť, kde se začíná a končí ve výchozím stanovišti a cílem obchodního cestujícího je návštěva všech zákazníků, aby délka celkové trasy byla nejkratší. Kromě minimalizace délky trasy může jít například o nejkratší dobu jízdy či minimalizování nákladů. Tento typ úloh má význam v případech, kdy se jedná o pravidelný rozvoz či svoz nákladu [11].

KONTEJNEROVÝ DOPRAVNÍ PROBLÉM

Kontejnerový dopravní problém vychází ze základní podstaty dopravních úloh, kde v případě kontejnerového problému se přeprava mezi dodavateli a odběrateli uplatňuje pouze pomocí kontejnerů o určité kapacitě [11].

OBECNÝ DOPRAVNÍ PROBLÉM

Obecný distribuční problém se na rozdíl od dopravního problému vyznačuje tím, že kapacity zdrojů a požadavky odběratelů nejsou uváděny ve stejných jednotkách. Tudíž pro jejich vzájemnou porovnatelnost je třeba doplnit model o určité převodní koeficienty [2].

DOPRAVNÍ ÚLOHY

Dopravní úlohy spadají do kategorie distribučních úloh, které lze řešit pomocí lineárního programování.

Dopravní úlohy nalézají uplatnění v případech, kdy se jedná o rozvržení rozvozu materiálu nebo zboží z dodavatelských míst k odběratelům s cílem zajistit, aby byly minimalizovány celkové náklady spojené s přepravou. Cílem řešení dopravního problému je naplánovat přepravu mezi zdroji a cílovými místy, což v podstatě znamená stanovit objem přepravy mezi každou dvojici zdroj – cílové místo tak, aby nebyly překročeny kapacity zdrojů a aby byly uspokojeny požadavky cílových míst [1].

1.5 OBECNÉ VYMEZENÍ DOPRAVNÍCH ÚLOH

1.5.1 VÝCHOZÍ PŘEDPOKLADY ŘEŠENÍ DOPRAVNÍCH ÚLOH

- zboží nebo materiál dopravovaný mezi všemi dodavateli nebo odběrateli je stejného druhu;
- distribuce je realizována jedním druhem dopravního prostředku;
- kapacity dopravních cest nejsou omezené;
- distribuce se uskutečňuje od dodavatele k odběrateli pouze po jedné cestě;

- náročnost distribuce vzrůstá úměrně přepravovanému množství zboží nebo materiálu [1].

1.5.2 ÚČASTNICI

Každá úloha dopravního problému zahrnuje m dodavatelů D_1, D_2, …, D_m. Přitom každý dodavatel je schopen pro dané období poskytnout pouze omezené množství zboží, které je ovlivněno kapacitami výroby nebo skladovými kapacitami. Kapacity dodavatelů jsou předem známé, označují se a_1, a_2, …, a_m. Velikost kapacit lze měřit v různých jednotkách například v kusech nebo v kilogramech. Od dodavatelů putuje zboží či materiál k odběratelům značených jako O_1, O_2, …, O_n. Přepravované množství je dáno požadavky, které mají jednotliví odběratelé, tyto požadavky jsou značeny b_1, b_2, …, b_n a jsou měřeny ve stejných jednotkách jako kapacity. Úloha ve své podstatě umožňuje, aby zboží nebo materiál byl dopravován od kteréhokoli dodavatele k libovolnému odběrateli a přitom náročnost přepravy je ohodnocena ve všech možných kombinacích mezi odběratelem a dodavatelem. Ohodnocení náročnosti dopravy prostřednictvím koeficientu c_{ij} může být vyjádřena například vzdáleností obou lokalit nebo náklady na dopravu jednotky zboží od i-tého dodavatele k j-tému odběrateli [1].

Smyslem dopravních úloh je zajištění, aby nebyly překročeny kapacity jednotlivých dodavatelů a rovněž byly uspokojeny požadavky všech odběratelů.

1.5.3 MATEMATICKÝ MODEL

Na základě vymezení podstaty dopravního problému lze sestavit matematický model zohledňující uvedené charakteristiky úlohy.

Matematický model má podobu:

$$z_{min} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \tag{4}$$

Účelová funkce je minimalizační, což vyplývá z podstaty minimalizace dopravní náročnosti. Její úloha spočívá ve vyjádření vzájemného vztahu mezi strukturou přepravy a celkovými dopravními náklady [6].

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i \tag{5}$$

Soustava m vlastních omezujících podmínek umožňuje splnění předpokladu, že žádný dodavatel neodveze více než je jeho kapacita. Soustava n vlastních omezujících podmínek zajišťuje uspokojení všech požadavků kladených odběrateli [1].

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \tag{6}$$

Poslední podmínka zaručuje dodání nezáporného množství zboží či materiálu [1].

$$x_{ij} \geq 0 \tag{7}$$

Matematický model vyrovnané dopravní úlohy, v němž se vyskytuje m dodavatelů a n odběratelů, je tvořen $m + n$ vlastními omezujícími podmínkami, tedy počtu rovnic. Tato soustava omezujících podmínek obsahuje $m \times n$ podmínek nezápornosti a proměnných $x_{i,j}$ představující objem přepravy mezi i-tým dodavatelem a j-tým odběratelem [1].

Každé řešení vyhovující vlastním omezujícím podmínkám a zároveň i podmínkám nezápornosti se považuje za přípustné řešení dopravní úlohy. Soustava o $m + n$ lineárních rovnicích, kde je $m + n - 1$ lineárně nezávislých rovnic, tvoří bazické řešení úlohy $m + n - 1$ bazických proměnných x_{ij}. Pokud jsou všechny bazické proměnné kladné, jde o nedegenerované bazické řešení. Jestliže je v bazickém řešení jedna nebo více bazických proměnných rovny nule, jedná se o řešení bazické degenerované. Tedy, je-li počet proměnných nižší než $m + n - 1$, jedná se o degenerované řešení [1].

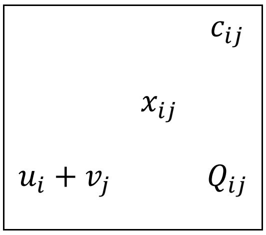
1.6 METODY ŘEŠENÍ DOPRAVNÍCH ÚLOH

K řešení dopravních úloh lze použít celou řadu metod od jednoduchých až po náročné metody, k jejichž řešení je nutné použít výpočetní techniku. Jednodušší metody se uplatňují k nalezení přípustného řešení, které však nemusí být optimální. K ověření, jestli dané přípustné řešení je již optimální se používají další metody, mezi které lze zařadit zejména modifikované distribuční metody (MODI). Pokud je pomocí testu optimality ověřeno, že dané řešení není optimální, přechází se na lepší řešení pomocí změny báze s lepší hodnotou účelové funkce [2].

K vyřešení jednoduchých úloh stačí úlohu přepsat do tabulky a posléze aplikovat jednu z metod řešení úlohy.

Obvyklý zápis úlohy je následující:

Dodavatelé jsou přiřazeni do jednotlivých řádků tabulky představující řádkové omezení a odběratelé zaujímají pozice sloupců tabulky reprezentující sloupcové omezení. V průsečíku řádku a sloupce se nachází políčko tabulky v podobě proměnné x_{ij}.



Obrázek 1 Rozložení informací v políčku

Tabulka 1 Model dopravní úlohy znázorněný ve formě tabulky [7]

	O_1	**O_2**	**……**	**O_n**	**Kapacity**
D_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	……	c_{1n} x_{1n}	a_1
D_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	……	c_{2n} x_{2n}	a_2
:	:	:	……	:	:
D_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	……	c_{mn} x_{mn}	a_m
Požadavky	b_1	b_2	……	b_n	

Každá vnitřní buňka tabulky se skládá jednak z hodnoty náročnosti dopravy jedné jednotky zboží například cenových sazeb od *i*-tého dodavatele k *j*-tému odběrateli, jedná se o koeficient účelové funkce c_{ij}. A dále množství přepravovaného zboží ze skladů x_{ij} mezi *i*-tým dodavatelem a *j*-tým odběratelem [1].

Pravý poslední sloupec tabulky znázorňuje kapacitu jednotlivých dodavatelů a_i. Poslední řádek tabulky reprezentuje požadavky jednotlivých odběratelů b_j.

1.6.1 FORMULACE MODELU DOPRAVNÍ ÚLOHY

Výchozím krokem řešení dopravních úloh je podle [1] ověření řešitelnosti úloh, který spočívá v porovnání celkové kapacity všech zdrojů a součtu všech požadavků odběratelů. Smyslem dopravních úloh je vyhovění požadavků všech odběratelů. Musí být tedy splněna jedna z těchto podmínek:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j \tag{8}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \tag{9}$$

Jsou-li tyto podmínky splněny, lze úlohu považovat za řešitelnou a existují dva typy dopravních úloh, které jsou tématem následující podkapitoly.

1.7 TYPY DOPRAVNÍCH ÚLOH

- vyvážená či vyrovnaná dopravní úloha,
- nevyvážená či nevyrovnaná dopravní úloha.

Vyvážené dopravní úlohy se vyznačují rovností součtu kapacit všech dodavatelů a součtu rovnosti všech požadavků odběratelů. Nastane-li tento případ, budou všechny kapacity dodavatelů vyčerpány a všechny požadavky odběratelů uspokojeny. Lze tedy formulovat matematický model, který je vyrovnaný.

V případě druhého typu dopravní úlohy, kde se jedná o nevyvážené dopravní úlohy, neplatí rovnost součtu všech kapacit dodavatelů a součtu všech požadavků odběratelů. Tuto úlohu je potřeba upravit následujícím způsobem.

Jestliže je součet kapacit dodavatelů vyšší než součet požadavků odběratelů, přidá se do úlohy fiktivní odběratel, který odebere přebytečné kapacity dodavatelů. Jeho požadavek je roven rozdílu:

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j \tag{10}$$

Náročnosti dodávek tomuto odběrateli jsou ohodnoceny nulou. Dodávka nikam neputuje a zůstává ve skladech dodavatelů, jejichž kapacity nejsou vyčerpané. Jedná se o případ převisu nabídky [1].

Je-li součet kapacit dodavatelů nižší než součet požadavků odběratelů, úloha se rozšíří o fiktivního dodavatele, kterému jsou přiřazeny přebytečné požadavky odběratelů. Náročnosti dodávek fiktivního dodavatele jsou ohodnoceny nulou, jelikož zboží nikam neputuje. Tento případ představuje převis poptávky [1].

$$a_{n+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i \tag{11}$$

1.8 ZÁKLADNÍ METODICKÝ POSTUP ŘEŠENÍ DOPRAVNÍCH ÚLOH

K řešení dopravních úloh lze využít univerzální metody v podobě simplexové metody anebo metody speciální určené přímo ke snadnému řešení dopravních úloh.

Obecně lze postupovat při řešení dopravních úloh postupem podle [1]:

- ověření, zda je úloha řešitelná;
- ověření úlohy, jestli je vyvážená;
- nalezení výchozího bazického řešení;
- ověření nedegenerovanosti bazického řešení;
- pokud je řešení degenerované, následuje odstranění degenerace;
- testování optimality bazického řešení;
- je-li nesplněn test optimality, je nutné změnit bázi takto:
    - stanovení proměnné zařazené do nové báze,
    - stanovení proměnné vystupující z nové báze,
    - přepočet úlohy na novou bázi,
- opakování postupu tolikrát, dokud není nalezeno bazické řešení splňující test optimality.

1.9 PŘÍSTUPY K NALEZENÍ VÝCHOZÍHO ŘEŠENÍ

Podstatou dopravních úloh je nalézt způsoby, jak by se mohla realizovat distribuce zboží mezi dodavateli a odběrateli včetně určení přepravovaného množství s ohledem na zadaná omezení. Bez využití vhodného přístupu k danému problému by bylo potřeba vyzkoušet výpočtem všechny možné možnosti distribuce zboží mezi dodavateli a odběrateli a následně zvolit to, které vyhovuje nejlépe zadaným podmínkám. Tento postup je však zdlouhavý. Proto se využívají různé metody, jak tyto problémy jednoduše řešit, dokonce i bez využití výpočetní techniky.

Výchozí řešení přestavuje vyplnění numerických hodnot do jednotlivých políček tabulky ve smyslu, aby sloupcové a řádkové součty byly v souladu s požadavky odběratelů a kapacitami dodavatelů. Výchozí krok představuje zvolení základní (bazické) proměnné. Této proměnné je přidělena nejvyšší numerická hodnota, která není vyšší než řádkový nebo sloupcový součet. Tento postup končí, jakmile je určeno $m+n-1$ proměnných [2].

Dosažení optimálního řešení předchází nalezení výchozího bazického řešení, které musí splňovat tyto požadavky:

- počet bazických proměnných, které jsou v tabulce obsazeny, nesmí být více než $m+n-1$;
- součet hodnot proměnných v každém z řádků tabulky je roven kapacitě příslušného dodavatele;
- součet hodnot proměnných v každém ze sloupců tabulky je roven požadavku příslušného odběratele;
- nesmí dojít k tomu, že bazické proměnné budou vytvářet uzavřený cyklus. Tedy obsazená políčka v tabulce nesmí jít pospojovat vodorovnými a svislými čarami do uzavřeného geometrického obrazce, ve kterém vrcholy tvoří obsazená políčka [7].

Ze srovnání dvou následujících tabulek je patrné, že tabulka číslo 2 poukazuje na výchozí bazické řešení, ve kterém obsazená políčka nevytváří uzavřený cyklus. Nelze jimi vést pomyslné svislé a vodorovné čáry, v němž budou tvořit vrcholy obsazená políčka.

Tabulka 2 Výchozí řešení splňující zadaná kritéria

	+	+
+		
+	+	

Tabulka 3 Výchozí řešení nesplňující kritérium absence uzavřeného cyklu

+		+
+	+	+

K nalezení řešení, které by splňovalo uvedené požadavky, lze využít různých metod, které se liší ve způsobu obsazovaní jednotlivých políček, avšak shodují se v určování jejich hodnot.

Postup určení hodnoty obsazeného políčka je podle [1] následující:

Zvolené políčko pomocí určité metody se obsazuje vždy maximální možnou hodnotou x_{ij}. Pokud je obsazováno políčko D_iO_j, proměnná x_{ij} musí mít hodnotu, která splňuje aspoň jeden z požadavků:

- zcela vyčerpá kapacitu a_i dodavatele D_i;
- zcela uspokojí požadavek b_j odběratele O_j;
- zcela vyčerpá kapacitu D_i a zároveň bezezbytku uspokojí požadavky O_j.

Pokud nastane situace, že obsazené políčko D_iO_j vyčerpá kapacitu a_i dodavatele D_i, dodává vše, co má k dispozici odběrateli O_j, tudíž nemůže žádnému ze zbývajících odběratelů už nic nabídnout. V tabulce v místě řádku D_i bude mít kladnou hodnotu jen proměnná x_{ij}, ostatní políčka se proškrtnou a již se s nimi dále nezabývá při následných výpočtech.

Jestliže obsazené políčko D_iO_j uspokojí bezezbytku požadavek O_j, ve sloupci O_j v tabulce, bude mít kladnou hodnotu pouze proměnná x_{ij}, zbylá políčka je třeba proškrtnout, protože od zbylých dodavatelů nelze nic přijmout.

V případě obsazeného políčka D_iO_j dojde k současnému vyčerpání kapacity D_i a zároveň k úplnému uspokojení požadavků O_j, následně v řádku D_i a ve sloupci O_j se bude nacházet pouze proměnná x_{ij} s kladnou hodnotou a zbylá políčka zůstanou proškrtnuta.

1.10 Metody nalezení výchozího řešení

1.10.1 Metoda severozápadního rohu

Metoda severozápadního rohu přistupuje k výběru obsazovaného políčka vždy od první proměnné nacházející se co nejvíce v levém horním rohu tabulky maximální možnou hodnotou x_{11} rovnající se menší z hodnot kapacity dodavatele a_1 a požadavku odběratele b_1. Tímto krokem se sníží kapacita prvního dodavatele a požadavek prvního odběratele. Dojde-li k vyčerpání množství u dodavatele nebo odběratele, proškrtne se celý řádek či sloupec. Tímto postupem se dále pokračuje ve výpočtu výběrem dalšího políčka, které se nově nachází nejvíce vlevo nahoře. Takto jsou obsazovány políčka až do stavu, kdy zbyde poslední volné políčko, které odebere zbývající zbytek požadavku posledního odběratele. Tento požadavek musí být shodný se zbývající kapacitou posledního dodavatele. Počet obsazených políček by měl být roven $m + n - 1$ [3; 4].

Nevýhodou této metody může být získání degenerovaného bazického řešení, v tomto případě nastává situace, kdy počet nenulových bazických proměnných je nižší než $m + n - 1$. Příčinou je rovnost kapacity a požadavku. Poté se změní některá nebazická proměnná s nulovou hodnotou na bazickou a přistupuje se k ní jako k bazické proměnné [5].

Výchozí řešení získané touto metodou nezohledňuje při výpočtu cenové sazby (koeficienty účelové funkce), tudíž získané řešení se liší od řešení optimálního. Proto se využívají metody založené na aproximaci a poskytují tak mnohem kvalitnější řešení blížící se optimálnímu.

1.10.2 INDEXNÍ METODA

Indexní metoda je založena na výběru cest, které jsou nejvýhodnější ze zadaných hledisek, například s ohledem na vzdálenosti či náklady. Obsazování políček se řídí hodnotou koeficientu účelové funkce, která může představovat jednotkové náklady. Políčko, které má nejnižší kladnou hodnotu c_{ij}, je obsazeno nejvyšší možnou hodnotou x_{ij}. Pokud je těchto políček s minimální hodnotou c_{ij} více, lze si mezi nimi zvolit libovolné políčko. Jako poslední jsou obsazována políčka s nulovým koeficientem účelové funkce, jedná se o políčka patřící k fiktivním odběratelům [1].

Uvedený postup se opakuje výběrem políčka s nejnižší hodnotou koeficientu účelové funkce z dosud nevyškrtnutých polí. Stejně tak, jako u předchozí metody, pokud dojde k vyčerpání množství u dodavatele nebo odběratele, proškrtne se celý řádek či sloupec. Tímto postupem se dále pokračuje ve výpočtu výběrem dalšího políčka s nejnižší hodnotou účelové funkce. Takto jsou obsazovány políčka až do stavu, kdy zbyde poslední volné políčko, které odebere zbývající zbytek požadavku posledního odběratele [1].

1.10.3 VOGELOVA APROXIMAČNÍ METODA

Vogelova aproximační metoda je jednou z metod lineárního programování sloužící k nalezení výchozího přípustného řešení. K určení pořadí obsazování jednotlivých políček se využívá rozdílu mezi dvěma nejnižšími koeficienty účelové funkce [8].

Indexní metoda zohledňovala pouze absolutní velikosti příslušných sazeb (proměnné s nejmenším cenovým koeficientem), naopak Vogelova aproximační metoda zohledňuje relativní výhodnost. Přednost v obsazování políček mají ta políčka s nízkou sazbou, od které se nejblíže vyšší sazba v odpovídající řadě, tedy v řádku nebo sloupci, co nejvíce liší. Pokud by tohle políčko nebylo obsazeno, tak obsazení políčka s nejblíže vyšší sazbou by docházelo ke značnému zvýšení hodnoty účelové funkce [7].

Vogelova aproximační metoda dokáže poskytnout výchozí řešení úlohy, které se obvykle jen málo liší od optimálního řešení, případně je shodné s optimálním řešením. Ve většině případech v praxi je toto výchozí řešení postačující, a tedy lze ho považovat za výsledné řešení [10].

Pro obsazování políček se využívá následující postup dle [10; 7]:

- Pro každý řádek a rovněž i sloupec se vypočítá diference mezi dvěma nejnižšími sazbami (kladnými hodnotami c_{ij}) v rámci řady v dosud neproškrtnutých políčkách, pokud jsou sazby stejné, diference je nulová.
  Jestliže se nachází v tabulce řádek fiktivního dodavatele nebo sloupec fiktivního odběratele, uvažují se i nulové sazby v těchto řadách.
  Zvolí se řada s nejvyšší diferencí a v ní se najde políčko s nejnižší sazbou c_{ij}, které se přednostně obsadí maximální hodnotou x_{ij}. Pokud je diference stejná pro více řad, hledá se v nich tzv. sedlový bod, což je políčko s nejmenší sazbou z hlediska řádku i sloupce. Pokud je více sedlových bodů, obsazuje se ten, pro který je součet řádkové a sloupcové diference nejvyšší. V případě, že sedlový bod neexistuje, stanoví se druhé diference. Druhá diference se spočítá jako rozdíl mezi druhou nejnižší sazbou v řadě a mezi nejnižší sazbou v řadě kolmé na původní. Zvolí se řada s nejvyšší druhou diferencí a v ní se obsadí políčko s nejnižší sazbou.

- V případě, že obsazené políčko D_iO_j způsobilo vyčerpání kapacity a_i nebo uspokojení požadavku b_j anebo současně k oběma jevům, proškrtnou se zbývající políčka v i-tém řádku nebo j-tém sloupci anebo v obou řadách zároveň.
- Opět se v upravené tabulce vypočte diference mezi dvěma nejnižšími sazbami. Vybírají se však pouze neobsazená či neproškrtnutá políčka. Došlo-li k vynechání řádku či sloupce, přepočítají se sloupcové, resp. řádkové diference.
  Uvedený postup je třeba opakovat tolikrát, dokud v tabulce nezbyde pouze jeden nevyplněný řádek nebo sloupec. Na závěr stačí obsadit neproškrtnutá políčka v této řadě zbylými kapacitami nebo požadavky.

Pohledem na výše popsané metody sloužící k nalezení výchozího bazického řešení je zřejmé, že nejméně přesné řešení poskytuje metoda severozápadního rohu, která umožňuje nalézt řešení splňující podmínky, avšak nezohledňuje koeficienty účelové funkce, které mohou znázorňovat například jednotkové náklady. Z toho je patrné, že pro praxi v dopravě mají tyto náklady nezastupitelný význam a je třeba je brát v potaz. Nejkvalitnější výchozí bazické řešení poskytuje Vogelova aproximační metoda, která umožňuje nalézt řešení blízké optimálnímu řešení.

1.11 OVĚŘENÍ POČTU OBSAZENÝCH POLÍČEK

Jakmile je získáno výchozí bazické řešení pomocí některé z uvedených metod, následuje další krok, kterým je ověření, zda výchozí bazické řešení je degenerované či nikoli. Pokud není počet obsazených políček roven počtu $m + n - 1$, jedná se o degenerované řešení a je třeba učinit kroky vedoucí k odstranění degenerovaného řešení.

Degenerace lze odstranit zvýšením počtu obsazených políček na počet $m + n - 1$. Toho se docílí tím způsobem, že se vybere jedno či více neobsazených políček a do nich se vloží velmi malá kladná hodnota blížící se nule. Tato hodnota se označuje ε. Umístěním ε do pole D_iO_j musí být velikost ε_{ij} v porovnání s kapacitou a_i a rovněž i požadavkem natolik malá, aby tyto hodnoty neovlivnily. Vodítkem pro výběr neobsazeného políčka hodnotou ε je podmínkou výběr takového políčka, které nevytvoří s ostatními obsazenými políčky uzavřený obvod [1].

1.12 NALEZENÍ OPTIMÁLNÍHO ŘEŠENÍ DOPRAVNÍ ÚLOHY

Metody sloužící k nalezení výchozího bazického řešení poskytují řešení, které je více či méně vzdálené od řešení optimálního. Proto přichází na řadu další část v rámci okruhu dopravních úloh, kterou je ověření, zda je získané řešení optimální. Pro tento účel se využívají testy optimality.

K testování optimality lze využít dvě metody, kterými jsou:

- Dantzigova metoda,
- Modifikovaná metoda.

1.12.1 DANTZIGOVA METODA

Tato metoda popsaná v publikaci [1] využívá k provedení testu optimality indexní čísla Δ_{ij}. Indexní čísla udávají informaci, o kolik by se změnila hodnota účelové funkce v případě zařazení jedné jednotky nebazické proměnné x_{ij} do řešení. Tato čísla je třeba vypočítat pro všechny nebazické proměnné, tedy pro všechna neobsazená políčka.

Indexní čísla mohou podle [1] prakticky nabývat pouze těchto hodnot:

- **$\Delta_{ij} > 0$**
  Obsazení políčka D_iO_j jednou jednotkou x_{ij} má za následek vzrůst hodnoty účelové funkce o Δ_{ij}. Vzhledem k tomu, že se jedná o dopravní úlohy, kde je žádoucí minimalizovat hodnoty, lze dojít k závěru, že obsazování konkrétního políčka, tedy zařazení proměnné x_{ij} do báze, je nevhodné.
- **$\Delta_{ij} = 0$**
  Je-li obsazeno políčko D_iO_j jednou jednotkou x_{ij}, tento krok nemá žádný vliv na hodnotu účelové funkce.
- **$\Delta_{ij} < 0$**
  Obsazení políčka D_iO_j jednou jednotkou x_{ij} by mělo za následek pokles hodnoty účelové funkce o Δ_{ij}. Z toho plyne, že zařazení této proměnné do řešení umožní zlepšení řešení dopravní úlohy.

Z výpočtů indexních čísel vyplývají následující závěry:

- Pokud jsou všechny vypočítané hodnoty $\Delta > 0$, je zřejmé, že řešení je optimální a pouze jedno.
- V případě, že platí pro všechna indexní čísla vztah $\Delta \geq 0$, jedná se o řešení úlohy, které je jedno z mnoha optimálních řešení.
- Jakmile je alespoň jedno indexní číslo záporné, jedná se o případ, že testované řešení není optimální, tudíž lze ho zlepšit [1].

1.12.2 VÝPOČET INDEXNÍCH ČÍSEL

Indexní čísla nebazických proměnných lze vypočítat pomocí Dantzigova uzavřeného obvodu, nazývaný též Dantzigův cyklus, který se používá jako nástroj k zjištění kvality výchozího bazického řešení a ke změnám báze. K sestavení obvodu se používají lomené čáry složené z vodorovných a svislých čar. Lomené čáry vycházejí z neobsazeného políčka, lámou se v obsazených políčkách a končí ve výchozím políčku. Ke každému výchozímu nedegenerovanému řešení v dopravní úloze existuje ke každému neobsazenému políčku pouze jeden Dantzigův uzavřený obvod [1].

Pro vytvoření obvodu k výpočtu Δ_{ij} se vychází z neobsazeného pole D_iO_j a dále se pokračuje po vrcholech obvodu, který tvoří obsazená pole. Vrcholy uzavřeného obvodu mohou tvořit sousední políčka nebo se mezi nimi mohou vyskytovat obsazená či neobsazená pole.

K výpočtu indexních čísel slouží koeficienty účelové funkce c_{ij} políček, jež tvoří vrcholy uzavřeného obvodu. Platí pravidlo, že koeficient účelové funkce neobsazeného políčka má znaménko + a ostatní vrcholy mají střídavě znaménka -, + [1].

1.12.3 MODIFIKOVANÁ METODA

Tato metoda využívá při testování výchozího bazického řešení teorii duality a vztahů mezi duálně sdruženými úlohami. Pokud je výchozí řešení přípustné, musí být rovněž duálně přípustné, což je předpoklad, aby řešení mohlo být optimální. Získané výchozí řešení je vždy přípustné a nikdy není porušena podmínka nezápornosti. Tudíž stačí testovat pouze přípustnost sdružené úlohy pomocí duálních proměnných. A na tomto principu je založena modifikovaná metoda, zkráceně MODI metoda [4].

Vychází-li se z poznatku, že všechna vlastní omezení dopravních úloh jsou ve tvaru rovnic a rovněž že se jedná o úlohu minimalizační, tudíž žádná z duálních proměnných nemusí splňovat podmínky nezápornosti a všechna vlastní omezení duální úlohy jsou vyjádřena nerovnicemi. Sdružené dopravní úlohy jsou tedy nesymetrické [7].

Test optimality se nejlépe provádí v tabulce, ve které bylo jednou z metod nalezeno výchozí bazické řešení. Tabulku je potřeba rozšířit o jeden sloupec pro výpočet u_i a o jeden řádek, pro výpočet v_j.

Výchozím krokem při aplikaci MODI metody je vytvoření sdružené úlohy k primární úloze, jak je uvedeno v [7]:

Primární úloha

$$z_{min} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \tag{12}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad (i = 1,2, \dots, m) \tag{13}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad (j = 1,2, \dots, n) \tag{14}$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1,2, \dots, m), (j = 1,2, \dots, n) \tag{15}$$

Duální proměnné vztažené k omezujícím podmínkám dodavatelů jsou označovány jako $u_1, u_2, \dots, u_m$.

Duální proměnné vztažené k omezujícím podmínkám odběratelů jsou označovány jako $v_1, v_2, \dots, v_n$.

Duální úloha

$$f_{max} = \sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j \tag{16}$$

$$u_i \in R \quad (i = 1,2, \dots, m)$$

$$v_j \in R \quad (j = 1,2, \dots, m)$$

$$u_i + v_j \leq c_{i,j} \quad (i = 1,2, \dots, m), (j = 1,2, \dots, n) \tag{17}$$

Duální proměnné u_i a v_j slouží k testování jednotlivých bazických řešení.

Věty o teorii duality poukazují na následující závěry dle [7; 1]:

- Hodnoty $\vec{x}$ odpovídají optimálnímu řešení primární úlohy v případě, pokud pro duální proměnné platí $u_i + v_j \leq c_{ij}$ pro všechny hodnoty i, j.
- Nerovnost $u_i + v_j \leq c_{ij}$ představuje kritérium optimality v modifikované metodě.
- Pro obsazená políčka primární úlohy, kde $x_{ij} > 0$ platí $u_i + v_j = c_{ij}$.
- V nedegenerovaném řešení primární úlohy, kde se nachází m dodavatelů a n odběratelů, je počet obsazených polí roven počtu $m + n - 1$. Což odpovídá rovněž i počtu rovnic pro výpočet duálních proměnných.
- V této soustavě rovnic se nachází $m + n$ duálních proměnných u_i, v_j.
- Soustava s jednou volnou neznámou se vyřeší tak, že se libovolně zvolí velikost jedné z duálních proměnných a zbývající počet $m + n - 1$ proměnných se dopočítá dosazením do soustavy $u_i + v_j = c_{ij}$.
- Dosazením duálních proměnných u_i, v_j do vlastních omezujících podmínek se ověří, zda řešení je optimální, pokud budou platit nerovnosti $u_i + v_j \leq c_{ij}$ pro všechna neobsazená políčka.

1.12.4 Dílčí kroky modifikované metody

- Výpočet duálních proměnných u_i, v_j dosazením do vztahu pro obsazená pole $u_i + v_j = c_{ij}$, přitom jednu proměnnou si lze libovolně zvolit.
- Výpočet součtu $t_{ij} = u_i + v_j$ pro neobsazená políčka, pomocí kterého se provede test optimality [1].

1.12.5 Podoby výsledků testu optimality

- Testované bazické řešení je optimální a zároveň jediné, pokud platí pro všechna neobsazená políčka vztah $u_i + v_j = t_{ij} < c_{ij}$.
- Jestliže pro většinu neobsazených políček platí vztah $t_{ij} < c_{ij}$, avšak pro některá z nich platí $t_{ij} = c_{ij}$, lze tedy dojít k závěru, že testované bazické řešení primární úlohy je optimální, avšak ne jediné, protože existuje další optimální řešení se shodnou hodnotou účelové funkce.
- Pokud alespoň pro jedno neobsazené políčko platí vztah $t_{ij} > c_{ij}$, z toho vyplývá závěr, že test optimality není splněn, a tudíž testované řešení primární úlohy není optimální [1].

1.13 Přechod na nové základní řešení

Dojde-li se k závěru, že na základě použití testu optimality není výchozí bazické řešení optimální, dalším krokem je přechod na nové bazické řešení s nižší hodnotou účelové funkce pomocí obměny báze [10]:

- Vyhledání v dopravní tabulce výchozího bazického řešení neobsazené pole s největším rozdílem Δ_{ij}, které bude nově obsazeno.
- Mezi obsazenými poli ve výchozím bazickém řešení se vyhledá pole tvořící s nově obsazeným polem uzavřený okruh. Nedegenerované řešení je tvořeno pouze jediným okruhem.

- Do nově obsazeného pole se umístí přeprava t, která se poté se na polích uzavřeného okruhu střídavě odečítá a přičítá.
- Přeprava t se určí jako nejmenší přeprava umístěná na polích uzavřeného kruhu, kde se t odečítá. Tento krok povede k nezápornosti nového řešení a nové řešení bude opět výchozí, jelikož na uzavřeném okruhu se jedno z polí stane neobsazeným a tím se okruh přeruší.

Přechod na nové bazické řešení lze použít jak pro řešení získané Dantzigovou metodou, tak i modifikovanou metodou.

Do báze se zařadí pouze políčko, které neprošlo testem optimality. V případě Dantzigovy metody je test optimality porušen pro neobsazené políčko, pro které platí $\Delta_{ij} < 0$. V rámci modifikované metody je porušen test optimality u neobsazeného políčka, kde platí $t_{ij} > c_{ij}$. Pokud test optimality nesplňuje více políček zároveň, nejdříve se obsadí políčko, ve kterém je nejvíce porušen test optimality. U Dantzigovy metody je to políčko, u něhož odpovídá min Δ_{ij} ze všech $\Delta_{ij} < 0$. A u modifikované metody je to políčko, kde je rozdíl $t_{ij} - c_{ij}$ největší [1].

Pomocí Dantzigova obvodu se určí políčko, které bude při změně báze vyjmuto. Uplatňuje se stejný postup jako v kroku testování optimality Dantzigovou metodou. Uzavřený obvod se vytváří k nově obsazovanému políčku, kde bude platit, že zbývající vrcholy zaujímají obsazená políčka. Políčkům v těchto vrcholech se přidělí znaménka $+$, $-$ tím způsobem, že neobsazenému políčku se přiřadí $+$. Z báze je vyřazeno políčko splňující dvě kritéria, jednak které je označeno znaménkem $-$ a přitom má minimální hodnotu $x_{ij} > 0$. Pokud by tahle kritéria splňovalo více políček zároveň, stalo by se řešení degenerovaným [1].

Na nové bazické řešení se přejde tak, že minimální hodnotu x_{ij} z uvolněného políčka je nezbytné přesunout v obvodu. Minimální hodnota x_{ij} se v jednotlivých vrcholech k dosavadním hodnotám bazických proměnných přičítá nebo odečítá v závislosti na značení znaménky. Tímto postupem lze dojít k novému bazickému řešení, v němž má nově zařazená bazická proměnná hodnotu proměnné vyřazené z báze. Pokud při změně báze je jedno políčko nově obsazeno a jedno uvolněno, je nové bazické řešení nedegenerované. Na druhé straně, jestliže změna báze vede k obsazení jednoho políčka a zároveň k uvolnění dvou a více políček, je tohle řešení degenerované, i když je řešení zlepšené [1].

2 APLIKACE METOD LINEÁRNÍHO PROGRAMOVÁNÍ

V této kapitole bude vypracován metodický postup aplikace dopravních úloh lineárního programování na konkrétním zjednodušeném příkladě. Bude tedy vysvětlen dopravní problém, na který budou aplikovány teoretické poznatky řešení dopravních úloh s cílem nalézt optimální řešení této úlohy, které je pro danou společnost nejvýhodnější z hlediska minimalizace nákladů na distribuci. K nalezení optimálního řešení povede několik dílčích kroků, které budou okomentovány a vyvozeny dílčí závěry.

2.1 POPIS ZADANÉHO PŘÍKLADU

Pro účely této práce je zvolen názorný příklad podniku zabývající se montáží elektrických generátorů. Tento podnik řeší otázku, jak nejlépe zásobovat pět odběratelů, kteří jsou rozmístěni v těchto městech: Brno (O_1), Zlín (O_2), Svitavy (O_3), Prostějov (O_4), Kroměříž (O_5). Dodavatele 1 až 4 reprezentují v uvedeném pořadí tato města: Znojmo (D_1), Hodonín (D_2), Břeclav (D_3), Jihlava (D_4).

Předmětem zájmu podniku je minimalizování logistických nákladů spojených s distribucí od od *i*-tého dodavatele k *j*-tému odběrateli. Cílem zájmu podniku je naplánování těchto tras mezi dodavateli a odběrateli, aby byly celkové náklady co nejnižší. Úloha je zjednodušena na pouze jeden produkt, aby se daly využít algoritmy užívané v lineárním programování.

Náklady na distribuci jsou dány jednotkovými náklady, které jsou vykalkulované pro přepravu 1 generátoru na 1 ujetý kilometr. Čím je vzdálenost mezi městy delší, tím lineárně rostou náklady spojené s distribucí generátorů. Jednotkové náklady jsou ohodnoceny sazbou 24 Kč za ujetý kilometr. Podstatou úlohy plánování logistických tras je uspokojení požadavků všech odběrných míst a vyčerpání všech skladových kapacit dodavatelů. Smyslem je tedy přeprava co nejvyššího počtu na nejkratší vzdálenost a co nejnižšího počtu přepravovaného zboží na dlouhé vzdálenosti, což vede k minimalizování nákladů.

Pro zvýšení přehlednosti budou jednotlivé koeficienty účelové funkce ohodnoceny pouze vzdálenostmi mezi městy. Získaná řešení budou optimalizovat ujetou vzdálenost, kterou lze snadno přepočítat na finanční vyjádření vynásobením ujeté vzdálenosti jednotkovou cenovou sazbou.

2.2 OVĚŘENÍ ŘEŠITELNOSTI A VYVÁŽENOSTI DOPRAVNÍ ÚLOHY

Ověření řešitelnosti dopravní úlohy je prvotním krokem, který určí, zda má význam úlohu řešit. Stačí pouze udělat součet jednotlivých kapacit dodavatelů a_i a porovnat je se součtem požadavků odběratelů b_j.

$$\sum 150 + 90 + 140 + 120 = \sum 120 + 80 + 100 + 90 + 110 \tag{18}$$

$$\sum 500 = \sum 500 \tag{19}$$

Z porovnání jednotlivých součtů vyplývá rovnost součtu kapacit dodavatelů a součtu požadavků odběratelů. Dále lze o této úloze zmínit skutečnost, že díky splnění rovnosti je tato úloha vyvážená. Není tedy potřebné zavádět fiktivního odběratele.

Díky splnění podmínek řešitelnosti a vyváženosti lze uplatnit algoritmy na úloze vedoucí k nalezení výchozího bazického řešení.

2.3 METODY VÝPOČTU VÝCHOZÍHO BAZICKÉHO ŘEŠENÍ

2.3.1 METODA SEVEROZÁPADNÍHO ROHU

Během aplikace této metody nebudou brány do úvahu hodnoty koeficientu účelové funkce. Výchozím krokem je obsazení políčka ležícího co nejvíce vlevo nahoře, tedy jedná se o políčko D_1O_1. Toto políčko se obsadí maximální hodnotou, která je menší z hodnot 150 nebo 120. Na základě toho bude obsazeno políčko D_1O_1 hodnotou 120, čímž se vyčerpá požadavek O_1, a tedy od dalších odběratelů již nepoptává zboží. Proto nemá smysl brát v dalších krocích do úvahu celý sloupec O_1. Dodavateli D_1 však ještě zůstane 30 kusů kapacity namísto 150 ks.

Principem této metody je obsazování políček schodovitě. Dalším obsazeným políčkem je políčko D_1O_2, které vyčerpá zbývající kapacitu D_1 o hodnotě 30 kusů. Tímto krokem dojde k úplnému vyčerpání kapacity D_1, v následujících krocích již se s touto kapacitou nepočítá. O_2 stále má své požadavky snížené o 30 kusů, tedy ve výši 50 kusů.

Třetím obsazeným políčkem je políčko D_2O_2, které má hodnotu 50 kusů. Dojde tedy k uspokojení odběratele O_2, který žádné další zboží už nepoptává. Dodavatel D_2 však má zbývající kapacitu 40 ks zboží, které je schopen dodat dalšímu odběrateli, protože v souladu s algoritmem je obsazeno políčku D_2O_3 hodnotou 40 ks, čímž se vyčerpají kapacity D_2 a odběrateli se sníží jeho poptávka na 60 ks.

Tímto postupem bude obsazeno políčko D_3O_3 60 ks, D_3O_4 80 ks, D_4O_4 10ks a posledním obsazeným políčkem je D_4O_5 hodnotou 110 ks.

Tabulka 4 Výchozí bazické řešení získané metodou severozápadního rohu

	Brno	Zlín	Svitavy	Prostějov	Kroměříž	a_i	1. krok	2. krok	3. krok	4. krok	5. krok	6. krok	7. krok
Znojmo	69 **120**	160 **30**	140	125	130	150	30						
Hodonín	73	71 **50**	148 **40**	96	67	90	90	90	40				
Břeclav	59	149	133 **60**	113 **80**	118	140	140	140	140	140	80		
Jihlava	96	188	97	152 **10**	157 **110**	120	120	120	120	120	120	120	110
b_j	120	80	100	90	110								
1. krok		80	100	90	110								
2. krok		50	100	90	110								
3. krok			100	90	110								
4. krok			60	90	110								
5. krok				90	110								
6. krok				10	110								
7. krok					110								

Dokončením obsazováním políček lze určit z tabulky směr pohybu a množství přepravovaného zboží od dodavatelů k odběratelům.

Tabulka 5 Výsledné řešení získané metodou severozápadního rohu

Dodavatel	Odběratel	Množství v ks	Dopravní náklady v Kč
Znojmo	Brno	120	198 720
Znojmo	Zlín	30	115 200
Hodonín	Zlín	50	85 200
Hodonín	Svitavy	60	142 080
Břeclav	Svitavy	60	191 520
Břeclav	Prostějov	80	216 960
Jihlava	Prostějov	10	36 480
Jihlava	Kroměříž	110	414 480

Cílem dopravní úlohy je rovněž zjistit náklady spojené s distribucí, k čemuž slouží hodnota účelové funkce daná součinem vzdáleností mezi městy, jednotkovou kalkulací nákladů za kilometr a množstvím přepravovaného zboží od *i*-tého dodavatele k *j*-tému odběrateli:

$$\begin{aligned}
&N_{ij} = c_{ij} \times 24 \times x_{ij} \\
&N_{11} = 69 \times 24 \times 120 = 198\ 720 Kč \\
&N_{12} = 160 \times 24 \times 30 = 115200\ Kč \\
&N_{22} = 71 \times 24 \times 50 = 85200\ Kč \\
&N_{23} = 148 \times 24 \times 40 = 142080\ Kč \\
&N_{33} = 133 \times 24 \times 60 = 191520\ Kč \\
&N_{34} = 113 \times 24 \times 80 = 216960\ Kč \\
&N_{44} = 152 \times 24 \times 10 = 36480\ Kč \\
&N_{45} = 157 \times 24 \times 110 = 414480\ Kč
\end{aligned} \tag{20}$$

Suma všech nákladů, které by společnost vynaložila za přepravu zboží mezi dodavateli a odběrateli na základě získaného výchozího řešení činí 1 400 640 Kč.

2.3.2 INDEXNÍ METODA

Tato metoda je založena na zohledňování hodnot koeficientů účelové funkce. Prvním obsazeným políčkem bude políčko s nejnižší hodnotou c_{ij} v celé tabulce. Tímto políčkem je D_3O_1, které se vyplní hodnotou 120 ks, čímž se vyčerpá požadavek O_1 a zbývající dodavatelé již tomuto odběrateli nic dodávat nebudou. Dodavatel D_3 stále má k dispozici 20 ks zboží pro zbývající odběratele.

Druhé obsazené políčko je D_2O_5, které zaujímá hodnotu 90 ks. Dojde tedy k vyčerpání kapacity dodavatele D_2 a celý druhý řádek se proškrtne. O_5 stále schází 20 ks.

Třetím obsazeným políčkem je D_4O_3, protože koeficient účelové funkce o hodnotě 97 je třetí nejnižší. Políčko zaujímá hodnotu 100 ks, což je maximum, o co má odběratel O_3 zájem. Jeho požadavky jsou v tomto kroku bezezbytku uspokojeny.

Jako čtvrté políčko je obsazeno D_3O_4 20 ks, jedná se o maximum zboží, které je schopen dodat dodavatel D_3, odběratel O_4 stále však poptává ještě 70 ks.

Pátým obsazeným políčkem je D_1O_4, jelikož koeficient ve výši 125 je pátým nejvyšším. Tímto krokem dojde k uspokojení všech požadavků odběratele O_4, celý sloupec již nemá v dalších výpočtech význam.

Šestým obsazeným políčkem je políčko D_1O_5 hodnotou 20 ks, čímž se uspokojí požadavky odběratele O_5 a žádné zboží již nepožaduje, tedy celý sloupec O_5 do dalších výpočtů nevstupuje.

Sedmým obsazeným políčkem je políčko D_1O_2 s koeficientem účelové funkce o hodnotě 160. Dodavatel D_1 stále má k dispozici 60 ks zboží na skladě a toto zboží dodá odběrateli O_2. Za povšimnutí stojí skutečnost, že v tomto kroku se obsazuje políčko s vysokou hodnotou účelové funkce, tedy s velkou logistickou vzdáleností a je na tuto vzdálenost dopravováno 60 ks zboží. Bez kontrolních výpočtů lze snadno odhadnout, že se jedná o nehospodárné vynaložení nákladů za distribuci zboží. Zde je však názorně vidět hlavní nevýhoda indexní metody.

Posledním obsazeným políčkem je políčko D_4O_2, protože D_2 má stále volnou kapacitu ve výši 20 ks a odběratel O_2 poptává ještě 20 ks zboží. Distribuce mezi D_4 a O_2 se realizuje na dlouhou vzdálenost v podobě 188 km, je tedy žádoucí, aby k této dopravě nedošlo a nalezlo se jiné výhodnější řešení.

Při obsazování políček již nastaly neoptimální obsazování, kdy by mělo dojít k přepravě významného množství zboží na dlouhé vzdálenosti. Je tedy patrné, že k optimálnímu řešení nedochází a bude nutné získané výchozí bazické řešení podrobit dalšímu testování, což bude tématem další podkapitoly.

Tabulka 6 Výchozí bazické řešení získané indexní metodou

	Brno	Zlín	Svitavy	Prostějov	Kroměříž	a_i
Znojmo	69	160 **60**	140	125 **70**	130 **20**	150
Hodonín	73	71	148	96	67 **90**	90
Břeclav	59 **120**	149	133	113 **20**	118	140
Jihlava	96	188 **20**	97 **100**	152	157	120
b_j	120	80	100	90	110	

Umístění obsazených políček do souhrnné tabulky znázorňující pohyb zboží od *i*-tého dodavatele k *j*-tému odběrateli vypadá takto:

Tabulka 7 Výsledné řešení získané indexní metodou

Dodavatel	Odběratel	Množství v ks	Dopravní náklady v Kč
Znojmo	Zlín	60	230 400
Znojmo	Prostějov	70	210 000
Znojmo	Kroměříž	20	62 400
Hodonín	Kroměříž	90	144 720
Břeclav	Brno	120	169 920
Břeclav	Prostějov	20	54 240
Jihlava	Zlín	20	90 240
Jihlava	Svitavy	100	232 800

Jednotlivé náklady spojené s distribucí od *i*-tého dodavatele k *j*-tému odběrateli vycházejí následovně:

$$\begin{aligned} N_{ij} &= c_{ij} \times 24 \times x_{ij} \\ N_{12} &= 160 \times 24 \times 60 = 230400\ Kč \\ N_{14} &= 125 \times 24 \times 70 = 210000\ Kč \\ N_{15} &= 130 \times 24 \times 20 = 62400\ Kč \\ N_{25} &= 67 \times 24 \times 90 = 144720\ Kč \\ N_{31} &= 59 \times 24 \times 120 = 169920\ Kč \\ N_{34} &= 113 \times 24 \times 20 = 54240\ Kč \\ N_{42} &= 188 \times 24 \times 20 = 90240\ Kč \\ N_{43} &= 97 \times 24 \times 100 = 232800\ Kč \end{aligned} \tag{21}$$

Celkové náklady na distribuci vycházejí ve výši 1 194 720 Kč. Ve srovnání s předcházející metodou se jedná o řešení kvalitnější s nižšími celkovými náklady, a tedy nižší hodnotou koeficientu účelové funkce.

2.3.3 VOGELOVA APROXIMAČNÍ METODA

Vogelova aproximační metoda využívá k nalézání obsazovaných políček diference mezi dvěma nejmenšími kladnými hodnotami koeficientů účelové funkce v každém řádku i sloupci tabulky. Je tedy nutné výchozí tabulku rozšířit o další sloupce a řádky sloužící k zápisu diferencí. Počet řádků a sloupců lze určit na základě počtu obsazených políček. Má-li tabulka 4 řádky a 5 sloupců, bude vypočteno až 8 diferencí.

Pro vyhledání **prvního políčka** se provedou výpočty jednotlivých diferencí, které se zapíšou do 1. rozšířeného sloupce a řádku, tedy rozdíly:

- diference 1. řádku ($\Delta ř.1$)

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= 125 - 69 = 56 \\ \Delta_1 &= 71 - 67 = 4 \\ \Delta_1 &= 113 - 59 = 54 \\ \Delta_1 &= 97 - 96 = 1 \end{aligned}$$

- diference 1. sloupce ($\Delta sl. 1$)

$$\Delta_1 = 69 - 59 = 10$$
$$\Delta_1 = 149 - 71 = \mathbf{78}$$
$$\Delta_1 = 133 - 97 = 36$$
$$\Delta_1 = 113 - 96 = 17$$
$$\Delta_1 = 118 - 67 = 51$$

Z vypočítaných řádkových a sloupcových diferencí se vybere pouze jedna diference, ta s nejvyšší hodnotou, kterou je rozdíl hodnot roven 78. Jedná se o sloupcovou diferenci, z toho vyplývá, že se budou uspokojovat požadavky druhého odběratele. V rámci druhého sloupce se tedy vybere políčko s koeficientem účelové funkce s nejnižší hodnotou, v tomto případě se jedná o hodnotu 71 a toto políčko se obsadí množstvím, které zcela nebo co nejvíce uspokojí požadavky druhého odběratele. Pro políčko D_2O_2 je k dispozici 90 ks zboží, které může být dopraveno 2. dodavatelem, avšak požadováno je 2. odběratelem 80 ks zboží. Zvolí se menší hodnota z nich, jelikož odběratel nadbytečné zboží nepoptává. Obsazením tohoto políčka hodnotou 80 ks dojde k naplnění požadavků druhého odběratele, který již další zboží nepoptává. S celým sloupcem se proto již v dalších krocích nepočítá a lze na něj pohlížet, jako kdyby tam nebyl. Hlavním smyslem úlohy je přepravit co nejvíce zboží podle požadavků a disponibilních možností na co nejkratší vzdálenost.

Pro určení druhého políčka se bude postupovat stejným způsobem jako při obsazování prvního políčka, avšak s rozdílem, že dodavatel D_2 má k dispozici jen 10 kusů zboží a odběratel O_2 žádné zboží nepožaduje. Proto v celém sloupci se neberou do úvahy žádné koeficienty účelové funkce, z toho vyplývá skutečnost nutnosti přepočítat v druhém kroku řádkové diference následujícím způsobem:

- diference 2. řádku ($\Delta ř. 2$)

$$\Delta_2 = 125 - 69 = \mathbf{56}$$
$$\Delta_2 = 73 - 67 = 6$$
$$\Delta_2 = 113 - 59 = 54$$
$$\Delta_2 = 97 - 96 = 1$$

- diference 2. sloupce ($\Delta sl. 2$)

$$\Delta_2 = 69 - 59 = 10$$
$$\Delta_2 = 133 - 97 = 36$$
$$\Delta_2 = 113 - 96 = 17$$
$$\Delta_2 = 118 - 67 = 51$$

Oproti předcházejícímu kroku došlo ke změně výpočtů diferencí. U řádkových diferencí se již nepočítalo s hodnotami v druhém sloupci a u sloupcových diferencí vypadl druhý sloupec. Z výsledných diferencí se opět vybere ta nejvyšší, tedy hodnota 56, obsazovat se bude políčko v prvním řádku a dojde k úbytku skladových zásob prvního dodavatele. K určení, k jakému odběrateli zboží poputuje a v jakém množství, se vyhledá nejnižší hodnota políčka koeficientu účelové funkce, kterým je políčko D_1O_1 s hodnotou 69. Toto políčko se obsadí maximálním množstvím zboží, které co nejvíce uspokojí požadavky O_1 s ohledem na skladové zásoby prvního dodavatele. Odběratel požaduje 120 ks zboží, dodavatel je schopen dodat 150 ks. Políčko se tudíž obsadí hodnotou 120, čímž se uspokojí všechny požadavky prvního odběratele a dodavateli zůstane pro další odběratele ještě 30 ks zboží. S prvním sloupcem se proto v dalších výpočtech nepočítá.

Uvedeným postupem se spočítají rovněž i následující diference se zápisem jednotlivých dílčích kroků do rozšířené tabulky. Jedná se o systematický postup. Za povšimnutí však stojí situace v rámci pátého obsazování políčka, kdy dojde k výpočtu stejných diferencí, které jsou nejvyšší a dochází k volbě, které políčko obsadit. V tomto případě platí pravidlo, že se vybere políčko, kde je minimální hodnota koeficientu účelové funkce, v rámci možných políček připadají do úvahy políčka D_3O_4 s hodnotou 113 a D_3O_5 s hodnotou 118. Přednostně se vybere políčko D_3O_4 a obsadí se 90 ks.

Po vypočítání poslední diference a obsazení posledního políčka lze přejít k závěrům. V následující tabulce je zobrazen pohyb zboží mezi dodavateli a odběrateli včetně vyčíslení jednotlivých nákladů:

Tabulka 8 Výsledné řešení získané Vogelovou aproximační metodou

Dodavatel	**Odběratel**	**Množství v ks**	**Dopravní náklady v Kč**
Znojmo	Brno	120	198 720
Znojmo	Kroměříž	30	93 600
Hodonín	Zlín	80	136 320
Hodonín	Kroměříž	10	16 080
Břeclav	Prostějov	90	244 080
Břeclav	Kroměříž	50	141 600
Jihlava	Svitavy	100	232 800
Jihlava	Kroměříž	20	75 360

Jednotlivé náklady spojené s distribucí od *i*-tého dodavatele k *j*-tému odběrateli vypadají takto:

$$\begin{aligned} N_{ij} &= c_{ij} \times 24 \times x_{ij} \\ N_{11} &= 69 \times 24 \times 120 = 198\ 720 Kč \\ N_{15} &= 130 \times 24 \times 30 = 93600\ Kč \\ N_{22} &= 71 \times 24 \times 80 = 136320\ Kč \\ N_{25} &= 67 \times 24 \times 10 = 16080\ Kč \\ N_{34} &= 113 \times 24 \times 90 = 244080\ Kč \\ N_{35} &= 118 \times 24 \times 50 = 141600\ Kč \\ N_{43} &= 97 \times 24 \times 100 = 232800\ Kč \\ N_{45} &= 157 \times 24 \times 20 = 75360\ Kč \end{aligned} \tag{22}$$

Na základě vyčíslení celkových nákladů za distribuci lze učinit srovnání jednotlivých metod. Nejnižší celkové náklady ve výši 1 138 560 Kč vycházejí u Vogelovy aproximační metody. Výchozí bazické řešení nalezené touto metodou má proto blíže k optimálnímu řešení než předchozí metody. Z toho vyplývá skutečnost, že výchozí bazická řešení nalezená předchozími metodami nejsou optimálními. Zdali je řešení pomocí Vogelovy aproximační metody přímo optimální, lze zjistit pomocí testu optimality.

Tabulka 9 Výchozí bazické řešení získané Vogelovou aproximační metodou

	Brno	Zlín	Svitavy	Prostějov	Kroměříž	a_i	Δř. 1	Δř. 2	Δř. 3	Δř. 4	Δř. 5	Δř. 6	Δř. 7	Δř. 8
Znojmo	69 **120**	160	140	125	130 **30**	150	56	**56**	5	5	5	130	**130**	
Hodonín	73	71 **80**	148	96	67 **10**	90	4	6	29	29				
Břeclav	59	149	133	113 **90**	118 **50**	140	54	54	5	5	5	118	118	**118**
Jihlava	96	188	97 **100**	152	157 **20**	120	1	1	**55**	5	5	**157**		
b_j	120	80	100	90	110									
Δsl. 1	10	**78**	36	17	51									
Δsl. 2	10		36	17	51									
Δsl. 3			36	17	51									
Δsl. 4				17	**51**									
Δsl. 5				**12**	12									
Δsl. 6					12									
Δsl. 7					12									
Δsl. 8														

2.4 OVĚŘENÍ NEDEGENEROVANOSTI VÝCHOZÍHO BAZICKÉHO ŘEŠENÍ

Jednotlivými metodami byla obsazena políčka v dopravní tabulce, která tvoří výchozí bazické řešení. Vzhledem k tomu, že tabulka má 4 řádky a 5 sloupců, je přípustné, aby řešení mělo obsazeno $m + n - 1$ políček, tedy $4 + 5 - 1 = 8$ obsazených políček. Je-li tato podmínka splněna, jedná se o řešení nedegenerované. Všechna tři výchozí bazická řešení poskytla řešení o 8 nalezených bazických proměnných, čímž lze řešení považovat za nedegenerované.

Dále je nutné zkontrolovat, zda obsazená políčka v jednotlivých dopravních tabulkách nevytváří uzavřený obvod. Pohledem na rozmístění obsazených políček výchozích bazických řešení u žádné metody nevytváří obsazená políčka uzavřený obvod, nelze je tedy spojit svislými a vodorovnými čarami do uzavřeného obrazce, kde vrcholy tvoří obsazená políčka.

2.5 TESTOVÁNÍ OPTIMALITY BAZICKÉHO ŘEŠENÍ

Po získání výchozích bazických řešení jednotlivými metodami se dále provádí test optimality, aby se ověřilo, jestli jsou daná řešení optimální či nikoli. Nejnižší hodnoty účelové funkce bylo dosaženo Vogelovou metodou, lze tedy předpokládat, že bude mít nejblíže k optimálnímu řešení oproti zbylým metodám. Jestli toto řešení je přímo optimální anebo nikoli, bude ověřeno Dantzigovou metodou a MODI metodou. Testu optimality bude podrobeno rovněž i řešení získané indexní metodou, u kterého bylo patrné obsazování nevýhodných políček.

2.5.1 DANTZIGOVA METODA

Tato metoda je založena na výpočtu indexních čísel pro všechna neobsazená políčka, ke kterým se vytvoří Dantzigův uzavřený obvod. Následující tabulky, reprezentující výchozí bazické řešení získané Vogelovou metodou a indexní metodou, mají 8 obsazených políček a 12 neobsazených políček. Každé neobsazené políčko tedy bude otestováno.

TESTOVÁNÍ VÝCHOZÍHO BAZICKÉHO ŘEŠENÍ ZÍSKANÉHO VAM

Tabulka 10 Testování výchozího bazického řešení získaného VAM pomocí Dantzigovy metody

	Brno	Zlín	Svitavy	Prostějov	Kroměříž	a_i
Znojmo	69 **120**	+ 160	140	125	− 130 **30**	150
Hodonín	73	− 71 **80**	148	96	+ 67 **10**	90
Břeclav	59	149	133	113 **90**	118 **50**	140
Jihlava	96	188	97 **100**	152	157 **20**	120
b_j	120	80	100	90	110	

$$\Delta_{12} = 160 - 130 + 67 - 71 = 26$$

$$\Delta_{13} = 140 - 130 + 157 - 100 = 67$$

$$\Delta_{14} = 125 - 130 + 118 - 90 = 23$$

$$\Delta_{21} = 73 - 69 + 130 - 67 = 67$$

$$\Delta_{23} = 148 - 67 + 157 - 100 = 138$$

$$\Delta_{24} = 96 - 67 + 118 - 113 = 34$$

$$\Delta_{31} = 59 - 118 + 130 - 69 = 2$$

$$\Delta_{32} = 149 - 118 + 67 - 71 = 91$$

$$\Delta_{33} = 135 - 118 + 157 - 97 = 77$$

$$\Delta_{41} = 96 - 157 + 130 - 69 = 0$$

$$\Delta_{42} = 188 - 157 + 67 - 71 = 27$$

$$\Delta_{44} = 152 - 157 + 118 - 113 = 0$$

Prvním neobsazeným políčkem je políčko v prvním řádku a druhém sloupci Δ_{12}, ke kterému se sestrojí uzavřený obrazec, jehož vrcholy tvoří obsazená políčka s tím, že se budou znaménka střídat u koeficientů účelové funkce. Tímto způsobem je proveden výpočet i pro zbylá neobsazená políčka. Vzhledem k tomu, že všechna indexní čísla jsou nezáporná, lze toto řešení považovat za optimální. V případě Δ_{41}a Δ_{44} vycházejí indexní čísla nulová představující další optimální řešení neměnící hodnotu účelové funkce.

TESTOVÁNÍ VÝCHOZÍHO BAZICKÉHO ŘEŠENÍ ZÍSKANÉHO INDEXNÍ METODOU

Tabulka 11 Testování výchozího bazického řešení získaného indexní metodou pomocí Dantzigovy metody

	Brno	Zlín	Svitavy	Prostějov	Kroměříž	a_i
Znojmo	69	160 **60**	140	− 125 **70**	+ 130 **20**	150
Hodonín	+ 73	71	148	96	67 − **90**	90
Břeclav	59 − **120**	149	133	113 + **20**	118	140
Jihlava	96	188 **20**	97 **100**	152	157	120
b_j	120	80	100	90	110	

$$\Delta_{11} = 69 - 125 + 113 - 59 = -2$$

$$\Delta_{13} = 140 - 97 + 188 - 160 = 71$$

$$\Delta_{21} = 73 - 67 + 130 - 125 + 113 - 59 = 65$$

$$\Delta_{22} = 71 - 67 + 130 - 160 = -26$$

$$\Delta_{23} = 148 - 97 + 188 - 160 + 130 - 67 = 142$$

$$\Delta_{24} = 96 - 67 + 130 - 125 = 34$$

$$\Delta_{32} = 149 - 113 + 125 - 160 = 1$$

$$\Delta_{33} = 133 - 97 + 188 - 160 + 70 - 113 = 21$$

$$\Delta_{35} = 118 - 130 + 125 - 113 = 0$$

$$\Delta_{41} = 96 - 188 + 160 - 125 + 113 - 59 = -3$$

$$\Delta_{44} = 152 - 188 + 160 - 125 = -1$$

$$\Delta_{45} = 157 - 130 + 160 - 188 = -1$$

Stejně jako v případě testování předešlého výchozího bazického řešení jsou spočítána stejným způsobem indexní čísla tvořící uzavřený geometrický obrazec. Některé obrazce mohou tvořit složitější tvary, avšak vždy je možné vytvořit pouze jeden obrazec ke každému políčku. Z jednotlivých výpočtů vychází pro indexní čísla Δ_{11}, Δ_{22}, Δ_{41}, Δ_{44}, Δ_{45} záporné hodnoty. Závěrem lze konstatovat, že dané řešení není optimální a lze ho postupnými kroky zlepšit.

2.5.2 MODI METODA

MODI metoda je další metodou k testování optimality výchozího bazického řešení. Tabulku s výchozím řešením je vhodné rozšířit o sloupec a řádek pro zápis duálních proměnných u_i a v_j.

TESTOVÁNÍ VÝCHOZÍHO BAZICKÉHO ŘEŠENÍ ZÍSKANÉHO VAM

Tabulka 12 Testování výchozího bazického řešení získaného VAM pomocí MODI metody

	Brno	Zlín	Svitavy	Prostějov	Kroměříž	a_i	u_i
Znojmo	69 **120**	160 134	140 70	125 125	130 **30**	150	$u_1 = 0$
Hodonín	73 6	71 **80**	148 7	96 62	67 **10**	90	$u_2 = -63$
Břeclav	59 57	149 122	133 58	113 **90**	118 **50**	140	$u_3 = -12$
Jihlava	96 96	188 161	97 **100**	152 152	157 **20**	120	$u_4 = 27$
b_j	120	80	100	90	110		
v_j	$v_1 = 69$	$v_2 = 134$	$v_3 = 70$	$v_4 = 125$	$v_5 = 130$		

Poté lze přejít k výpočtu jednotlivých duálních proměnných pro obsazená políčka. Ke každému obsazenému políčku náleží jedna rovnice daná vztahem: $u_i + v_j = c_{ij}$. Vzhledem k tomu, že počet duálních proměnných je 9 a počet obsazených políček je 8, je nutné si jednu duální proměnnou libovolně zvolit. Nejsnadnější volbou je přiřazení k u_1 nulovou hodnotu a na základě vymezení u_1 dopočítat druhou duální proměnnou dosazením do vztahu, kdy součet duálních proměnných dává hodnotu koeficientu účelové funkce příslušného obsazeného políčka. Má-li být pro políčko D_1O_1 součet roven 69, lze snadno určit v_1, jelikož u_1 je rovna nule, a tedy v_1 je rovno 69, tato hodnota se zapíše do tabulky. Druhá obsazená proměnná je D_1O_5, tudíž součet duálních proměnných $u_1 + v_5$ je roven 130. Duální proměnná u_1 je rovna nule a dopočtem v_5 je rovna 130. Třetím obsazeným políčkem je políčko D_2O_2, které je však vymezené duálními proměnnými u_2, v_2, které ještě nebyly spočteny. Proto je třeba vypočítat nejdříve políčko D_2O_5 tvořené součtem $u_2 + v_5 = 67$, kde je již v_5 známá, rovna 130. U_2 proto vychází -63. Nyní lze dopočítat v_2 ve třetí rovnici, jejíž součet dává 71, v_2 z dopočtu vychází 134. Tímto způsobem se vypočítají zbylé duální proměnné a zapíšou se do rozšířené tabulky.

$$u_1 + v_1 = 69$$
$$u_1 + v_5 = 130$$
$$u_2 + v_2 = 71$$
$$u_2 + v_5 = 67$$
$$u_3 + v_4 = 113$$
$$u_3 + v_5 = 118$$
$$u_4 + v_3 = 97$$
$$u_4 + v_5 = 157$$

V dalším kroku se provede výpočet $t_{ij} = u_i + v_j$ pro všechna neobsazená políčka a posléze se tento součet zapíše do příslušných políček do levého dolního rohu. Pro neobsazené políčko D_1O_2 se vypočítá součet $u_1=0$ a $v_2=134$, který je roven hodnotě 134. Tímto názorným postupem jsou vypočítány součty duálních proměnných pro zbylá neobsazená políčka.

Nyní se porovnají t_{ij} a c_{ij} u všech neobsazených políček. Pokud by platil vztah $t_{ij} > c_{ij}$, test optimality by nebyl splněn. Na základě procházení tabulky jsou v případě všech neobsazených políček hodnoty koeficientů účelové funkce vyšší než součty duálních proměnných anebo jsou součtům duálních proměnných rovny. Z toho vyplývá závěr, že výchozí bazické řešení získané pomocí VAM je optimální.

TESTOVÁNÍ VÝCHOZÍHO BAZICKÉHO ŘEŠENÍ ZÍSKANÉHO INDEXNÍ METODOU

Tabulka 13 Testování výchozího bazického řešení získané indexní metodou pomocí MODI metody

	Brno	Zlín	Svitavy	Prostějov	Kroměříž	a_i	u_i
Znojmo	69 71	160 **60**	140 69	125 **70**	130 **20**	150	$u_1 = 0$
Hodonín	73 8	71 97	148 6	96 62	67 **90**	90	$u_2 = -63$
Břeclav	59 **120**	149 148	133 57	113 **20**	118 118	140	$u_3 = -12$
Jihlava	96 99	188 **20**	97 **100**	152 153	157 158	120	$u_4 = 28$
b_j	120	80	100	90	110		
v_j	$v_1 = 71$	$v_2 = 160$	$v_3 = 69$	$v_4 = 125$	$v_5 = 130$		

Analogicky se postupuje při testování výchozího řešení získaného pomocí indexní metody. Opět se na začátek vymezí duální proměnná $u_1 = 0$ a pomocí ní se dopočítá u políčka D_1O_2 duální proměnná v_2. Součet těchto dvou proměnných musí být roven hodnotě koeficientu účelové funkce, tedy hodnotě 160. Dopočtem v_2 je rovno 160 a tato hodnota spolu s u_1 se zapíšou do rozšířené tabulky. Tento postup se aplikuje i na následující obsazená políčka a provede se výpočet neznámých proměnných z rovnic.

$$u_1 + v_2 = 160$$
$$u_1 + v_4 = 125$$
$$u_1 + v_5 = 130$$
$$u_2 + v_5 = 90$$
$$u_3 + v_1 = 59$$
$$u_3 + v_4 = 113$$
$$u_4 + v_2 = 188$$
$$u_4 + v_3 = 97$$

Jakmile je vyčísleno všech 9 duálních proměnných, lze pokračovat výpočtem $t_{ij} = u_i + v_j$ pro všechna neobsazená políčka a poté se tento součet zapíše do příslušných políček do levého dolního rohu. Pro první neobsazené políčko D_1O_1 se vypočítá součet $u_1=0$ a $v_1=71$, který vychází 71. Prostřednictvím tohoto postupu jsou vypočítány součty duálních proměnných pro zbývající neobsazená políčka.

Následně lze přejít k provedení testu optimality, kdy se porovnají t_{ij} a c_{ij} u všech neobsazených políček. Jestliže dojde k platnosti nerovnosti $t_{ij} > c_{ij}$, test optimality by nebyl splněn. Porovnání koeficientu účelové funkce a součtu duálních proměnných v jednotlivých neobsazených políčcích vychází následovně:

D_1O_1: $71 > 69$

D_1O_3: $69 < 140$

D_2O_1: $8 < 73$

D_2O_2: $97 > 71$

D_2O_3: $6 < 148$

D_2O_4: $62 < 96$

D_3O_2: $148 < 149$

D_3O_3: $57 < 133$

D_3O_5: $118 = 118$

D_4O_1: $99 > 96$

D_4O_4: $153 > 152$

D_4O_5: $158 > 157$

Celkem v pěti případech vychází nerovnost $t_{ij} > c_{ij}$, z čehož jasně plyne, že test optimality nebyl splněn pro políčka D_1O_1, D_2O_2, D_4O_1, D_4O_4, D_4O_5.

Na závěr lze konstatovat, že výchozí bazické řešení získané pomocí indexní metody není optimální a lze ho zlepšit.

2.6 PŘECHOD NA NOVÉ BAZICKÉ ŘEŠENÍ

Výchozí bazické řešení získané VAM bylo vyhodnoceno prostřednictvím Dantzigovy metody a rovněž i modifikované metody jako optimální řešení, není nutné přecházet na lepší řešení, které nepovede ke zlepšení hodnoty účelové funkce, lze jen nalézt další optimální řešení, které však nezlepší hodnotu účelové funkce.

Výchozí bazické řešení získané indexní metodou bylo shledáno jako neoptimální, jelikož pět neobsazených políček porušovalo test optimality. V následující části budou popsány jednotlivé kroky vedoucí k postupnému lepšímu řešení, kdy na konci bude dosaženo optimální řešení.

Za nově obsazené políčko je vybráno to, které nejvíce nesplňuje test optimality. Celkem je na výběr 5 políček nesplňující test optimality, mezi které patří tato políčka: D_1O_1, D_2O_2, D_4O_1, D_4O_4, D_4O_5. Při výběru políčka zařazeného do řešení je vhodné se vrátit zpět k testu optimality a nalézt políčko, které má minimální hodnotu indexního čísla ze všech záporných indexních čísel v případě Dantzigovy metody. Tímto políčkem je políčko D_2O_2, jelikož má indexní číslo $\Delta_{22} = -26$, což je minimální hodnota ze všech políček se záporným indexem. S přihlédnutím k testu optimality provedeného MODI metodou se vybere políčko s maximálním rozdílem $t_{ij} - c_{ij}$. Maximální rozdíl se vyskytuje opět u políčka D_2O_2, kde je tento rozdíl roven hodnotě $97 - 71 = 26$. Nově obsazeným políčkem v tabulce je tedy políčko D_2O_2.

Bazických proměnných může být v tabulce pouze 8, k nim přibude nové políčko D_2O_2, celkem se jedná o 9 políček. Z toho plyne, že je nutné jedno políčko vyřadit pomocí Dantzigova obvodu.

K políčku D_2O_2 se vytvoří uzavřený obvod v následující tabulce, jehož vrcholy tvoří obsazená políčka. Uzavřený obvod má počátek v políčku D_2O_2 a prochází následujícími políčky tvořící vrcholy: $+D_2O_2$, $-D_1O_2$, $+D_1O_5$, $-D_2O_5$. Výchozí políčko má vždy kladnou hodnotu a následně se znaménka střídají. V tabulce číslo 14 je názorně vidět uzavřený obvod k políčku D_2O_2. V rámci tohoto obvodu se vybere ta hodnota proměnné x_{ij}, která je označena znaménkem minus a má minimální hodnotu. Znaménka minus jsou přítomna u dvou hodnot: 60 a 90. Z těchto dvou hodnot se vybere hodnota, která je nejnižší, tedy 60, což odpovídá políčku D_1O_2, které je tímto způsobem z báze uvolněno. Proměnná $x_{12} = 60$ políčka D_1O_2 se přesune do políčka D_2O_2. V rámci tohoto kroku se dále pokračuje přepočítáním hodnot řešení zbylých obsazených políček, jež byly součástí uzavřeného obrazce tak, aby byly uspokojeny všechny požadavky odběratelů a vyčerpány všechny kapacity dodavatelů bezezbytku. Políčko D_2O_2 v tabulce číslo 15 nově zaujímá $x_{2,2} = 60$. Řádkový součet je roven kapacitě druhého dodavatele ve výši 90 ks. Tudíž pro obsazené políčko D_2O_5 zbývá 30 ks, aby byla splněna podmínka řádkového součtu. Dále musí být přepočítán sloupcový součet pro pátý sloupec. Celkový požadavek pátého odběratele je 110 ks, 30 ks dodává D_2. Pro obsazené políčko D_1O_5 dopočtem zbývá 80 ks. Pro kontrolu je vhodné udělat řádkový součet prvního řádku.

Tabulka 14 Vytvoření uzavřeného obrazce k políčku D_2O_2

	Brno	Zlín	Svitavy	Prostějov	Kroměříž	a_i
Znojmo	69	− 160 **60**	140	125 **70**	+ 130 **20**	150
Hodonín	73	71 +	148	96	− 67 **90**	90
Břeclav	59 **120**	149	133	113 **20**	118	140
Jihlava	96	188 **20**	97 **100**	152	157	120
b_j	120	80	100	90	110	

Tabulka 15 Přesun políčka D_1O_2 do D_2O_2 v rámci aplikace Dantzigovy metody

	Brno	Zlín	Svitavy	Prostějov	Kroměříž	a_i
Znojmo	69	160	140	125 **70**	130 **80**	150
Hodonín	73	71 **60**	148	96	67 **30**	90
Břeclav	59 **120**	149	133	113 **20**	118	140
Jihlava	96	188 **20**	97 **100**	152	157	120
b_j	120	80	100	90	110	

2.7 TESTOVÁNÍ OPTIMALITY NOVÉHO BAZICKÉHO ŘEŠENÍ PO OBSAZENÍ D_2O_2

Tabulka číslo 15 představuje nové výchozí bazické řešení po přesunu hodnoty proměnné $x_{1,2} = 60$ do políčka D_2O_2 o hodnotě proměnné $x_{2,2} = 60$. Po této úpravě je proveden test optimality Dantzigovou metodou, aby se zjistilo, zda je řešení již optimální nebo stále ještě není.

Pro každé neobsazené políčko se vypočítá nová hodnota indexního čísla po změně báze pomocí Dantzigova uzavřeného obvodu následovně:

$$\Delta_{11} = 69 - 125 + 113 - 59 = -2$$

$$\Delta_{12} = 160 - 71 + 67 - 130 = 33$$

$$\Delta_{13} = 140 - 97 + 188 - 71 + 67 - 130 = 97$$

$$\Delta_{21} = 73 - 67 + 130 - 125 + 113 - 59 = 65$$

$$\Delta_{23} = 148 - 71 + 188 - 97 = 168$$

$$\Delta_{24} = 96 - 67 + 130 - 125 = 34$$

$$\Delta_{32} = 149 - 71 + 67 - 130 + 125 - 113 = 27$$

$$\Delta_{33} = 133 - 97 + 188 - 71 + 67 - 130 + 125 - 113 = 102$$

$$\Delta_{35} = 118 - 130 + 125 - 113 = 0$$

$$\Delta_{41} = 96 - 59 + 113 - 125 + 130 - 67 + 71 - 188 = \mathbf{-29}$$

$$\Delta_{44} = 152 - 188 + 71 - 67 + 130 - 125 = -27$$

$$\Delta_{45} = 157 - 67 + 71 - 188 = -27$$

Prvním neobsazeným políčkem, u něhož je proveden test optimality, je políčko v prvním řádku a prvním sloupci s indexním číslem Δ_{11}, k tomuto políčku se sestrojí uzavřený obrazec, jehož vrcholy tvoří obsazená políčka se střídáním znamének u koeficientů účelové funkce. Další neobsazené políčko je nově políčko D_1O_2, u kterého se rovněž spočítá indexní číslo Δ_{12} pomocí Dantzigova uzavřeného obvodu. Tímto způsobem je proveden výpočet indexních čísel i pro zbylá neobsazená políčka. Příklad sestrojení Dantzigova uzavřeného obvodu pro indexní číslo Δ_{33} je znázorněn v tabulce číslo 16.

Tabulka 16 Sestrojení Dantzigova uzavřeného obvodu pro indexní číslo Δ_{33}

	Brno	Zlín	Svitavy	Prostějov	Kroměříž	a_i
Znojmo	69	160	140	+ 125 **70**	− 130 **80**	150
Hodonín	73	− 71 **60**	148	96	+ 67 **30**	90
Břeclav	59 **120**	149	+ 133	113 − **20**	118	140
Jihlava	96	188 + **20**	97 − **100**	152	157	120
b_j	120	80	100	90	110	

Po výpočtu všech indexních čísel není řešení stále optimální a lze ho zlepšit. Celkem 4 políčka nesplňují kritérium optimality, jelikož indexní čísla vycházejí záporně. Z těchto políček je vybráno políčko s minimální hodnotou indexního čísla ze všech záporných indexních čísel. Proto políčkem zařazeným do báze je políčko D_4O_1 s indexním číslem Δ_{41}.

K tomuto políčku se vytvoří uzavřený obvod, jehož vrcholy tvoří obsazená políčka. Uzavřený obvod má počátek v políčku D_4O_1 a prochází postupně políčky tvořící vrcholy: $+D_4O_1$, $-D_4O_2$, $+D_2O_2$, $-D_2O_5$, $+D_1O_5$, $-D_1O_4$, $+D_3O_4$, $-D_3O_1$. V tabulce číslo 17 je takový uzavřený obvod k políčku D_4O_1 sestrojen. V tomto obvodu je vybrána ta hodnota proměnné x_{ij}, která je označena znaménkem minus a má minimální hodnotu. Znaménka minus se vyskytují u čtyřech hodnot: 20; 70; 30; 120. Z těchto hodnot je zvolena hodnota, která je nejnižší, tedy 20, jedná se o políčko D_4O_2, které se z báze vyřadí. Proměnná $x_{4,2} = 20$ políčka D_4O_2 se přesune do políčka D_4O_1. Dále je nutné přepočítat hodnoty řešení zbylých obsazených políček, které byly součástí uzavřeného obrazce způsobem, aby byly uspokojeny všechny požadavky odběratelů a vyčerpány všechny kapacity dodavatelů bezezbytku. Políčko D_4O_1 v tabulce číslo 18 po změně zaujímá $x_{4,1} = 20$. Řádkový součet je roven kapacitě čtvrtého dodavatele ve výši 120 ks, podmínka řádkového součtu je splněna. Dále musí být přepočítán sloupcový součet pro první sloupec, který dává hodnotu 120 ks, z toho 20 ks zaujímá políčko D_4O_1, proto pro políčko D_3O_1 zbývá 100 ks. Aby byl splněn řádkový součet pro třetí řádek, musí políčko D_3O_4 být zaplněno hodnotou 40 ks. Do sloupcového součtu pro čtvrtý sloupec zbývá 50 ks pro D_1O_4 a pro řádkový součet pro první řádek zbývá doplnit políčko D_1O_5 hodnotou 80 ks.

Tabulka 17 Vytvoření uzavřeného obrazce k políčku D_4O_1

	Brno	Zlín	Svitavy	Prostějov	Kroměříž	a_i
Znojmo	69	160	140	− 125 **70**	+ 130 **80**	150
Hodonín	73	+ 71 **60**	148	96	− 67 **30**	90
Břeclav	− 59 **120**	149	133	113 + **20**	118	140
Jihlava	96 +	− 188 **20**	97 **100**	152	157	120
b_j	120	80	100	90	110	

Tabulka 18 Přesun políčka D_4O_2 do D_4O_1 v rámci aplikace Dantzigovy metody

	Brno	Zlín	Svitavy	Prostějov	Kroměříž	a_i
Znojmo	69	160	140	125 **50**	130 **100**	150
Hodonín	73	71 **80**	148	96	67 **10**	90
Břeclav	59 **100**	149	133	113 **40**	118	140
Jihlava	96 **20**	188	97 **100**	152	157	120
b_j	120	80	100	90	110	

2.8 Testování optimality nového bazického řešení po obsazení D_4O_1

Tabulka číslo 18 znázorňuje vylepšené výchozí bazické řešení po přesunu hodnoty proměnné $x_{4,2} = 20$ do políčka D_4O_1 o hodnotě proměnné $x_{4,1} = 20$. Po této úpravě je nutné provést test optimality Dantzigovou metodou vedoucí k ověření, jestli je řešení již optimální nebo stále ještě není.

Pro každé neobsazené políčko se vypočítá nová hodnota indexního čísla po změně báze pomocí Dantzigova uzavřeného obvodu následujícím způsobem:

$$\Delta_{11} = 69 - 125 + 113 - 59 = \mathbf{-2}$$

$$\Delta_{12} = 160 - 130 + 67 - 71 = 33$$

$$\Delta_{13} = 140 - 125 + 113 - 59 + 96 - 97 = 68$$

$$\Delta_{21} = 73 - 67 + 130 - 125 + 113 - 59 = 65$$

$$\Delta_{23} = 148 - 67 + 130 - 125 + 113 - 59 + 96 - 97 = 139$$

$$\Delta_{24} = 96 - 67 + 130 - 125 = 34$$

$$\Delta_{32} = 149 - 71 + 67 - 130 + 125 - 113 = 27$$

$$\Delta_{33} = 133 - 97 + 96 - 59 = 73$$

$$\Delta_{35} = 118 - 130 + 125 - 113 = 0$$

$$\Delta_{42} = 188 - 96 + 59 - 113 + 125 - 130 + 67 - 71 = 29$$

$$\Delta_{44} = 152 - 113 + 59 - 96 = 2$$

$$\Delta_{45} = 157 - 96 + 59 - 113 + 125 - 130 = 2$$

Po výpočtu všech indexních čísel není řešení stále optimální a lze ho zlepšit. Políčko D_1O_1 nesplňuje test optimality kvůli záporné hodnotě indexního čísla rovnající se číslu -2. Stane se proto políčkem zařazeným do nové báze.

Stejně jako v předešlých postupech při hledání vystupujícího políčka z báze se vytvoří uzavřený obvod tentokrát k políčku D_1O_1. Uzavřený obvod začíná v políčku D_1O_1, z kterého vycházejí rovné a svislé čáry procházející políčky, které tvoří vrcholy: $+D_1O_1$, $-D_1O_4$, $+D_3O_4$, $-D_3O_1$. V rámci sestrojeného obvodu je vybrána ta hodnota proměnné x_{ij}, která je označena znaménkem minus a má minimální hodnotu. Znaménka minus jsou přítomna u dvou hodnot: 50; 100. Z uvedených hodnot se vybere nižší hodnota, tedy 50, což odpovídá políčku D_1O_4. Tím dojde k vyřazení této hodnoty z báze. Proměnná $x_{1,4} = 50$ políčka D_1O_4 se přemístí do políčka D_1O_1. S tímto krokem je spojeno přepočítání hodnot řešení zbylých obsazených políček, které byly součástí uzavřeného obrazce, aby byly splněny základní podmínky pro dopravní úlohu. Políčko D_1O_1 v tabulce číslo 20 po změně představuje hodnotu proměnné $x_{1,1} = 50$. Řádkový součet je roven kapacitě prvního dodavatele ve výši 150 ks, pro odběratele D_1O_5 proto zbývá 100 ks zboží. Dále musí být přepočítán sloupcový součet pro první sloupec, který dává hodnotu 120 ks, z toho 50 ks se nachází v políčku D_1O_1, políčko D_4O_1 zůstává beze změny s 20 ks. Aby byl splněn sloupcový součet pro první řádek, musí políčko D_3O_1 mít hodnotu 50 ks. Zbývá doplnit hodnotu proměnné D_3O_4, pro kterou zbývá 90 ks, aby byl splněn řádkový součet.

Tabulka 19 Vytvoření uzavřeného obrazce k políčku D_1O_1

	Brno	Zlín	Svitavy	Prostějov	Kroměříž	a_i
Znojmo	+ 69	160	140	− 125 **50**	130 **100**	150
Hodonín	73	71 **80**	148	96	67 **10**	90
Břeclav	− 59 **100**	149	133	+ 113 **40**	118	140
Jihlava	96 **20**	188	97 **100**	152	157	120
b_j	120	80	100	90	110	

Tabulka 20 Přesun políčka D_1O_4 do D_1O_1 v rámci aplikace Dantzigovy metody

	Brno	Zlín	Svitavy	Prostějov	Kroměříž	a_i
Znojmo	69 **50**	160	140	125	130 **100**	150
Hodonín	73	71 **80**	148	96	67 **10**	90
Břeclav	59 **50**	149	133	113 **90**	118	140
Jihlava	96 **20**	188	97 **100**	152	157	120
b_j	120	80	100	90	110	

2.9 Testování optimality nového bazického řešení po obsazení D_1O_1

V tabulce číslo 20 se vyskytuje vylepšené výchozí bazické řešení po přesunu hodnoty proměnné $x_{1,4} = 50$ do políčka D_1O_1 o hodnotě proměnné po změně $x_{1,1} = 50$. Opět tento krok vede k provedení nového testu optimality Dantzigovou metodou s cílem zjistit, jestli je řešení konečně optimální nebo stále ještě není.

Test optimality stále spočívá ve výpočtu hodnot indexních čísel pro každé neobsazené políčko po změně báze. K tomuto účelu se pro každé neobsazené políčko vytvoří Dantzigův uzavřený obvod:

$$\Delta_{12} = 160 - 71 + 67 - 130 = 33$$

$$\Delta_{13} = 140 - 69 + 96 - 97 = 70$$

$$\Delta_{14} = 125 - 113 + 59 - 69 = 2$$

$$\Delta_{21} = 73 - 69 + 130 - 67 = 67$$

$$\Delta_{23} = 148 - 97 + 96 - 69 + 130 - 67 = 141$$

$$\Delta_{24} = 96 - 113 + 59 - 69 + 130 - 67 = 36$$

$$\Delta_{32} = 149 - 59 + 69 - 130 + 67 - 71 = 25$$

$$\Delta_{33} = 133 - 97 + 96 - 59 = 73$$

$$\Delta_{35} = 118 - 130 + 69 - 59 = \mathbf{-2}$$

$$\Delta_{42} = 188 - 71 + 67 - 130 + 69 - 96 = 27$$

$$\Delta_{44} = 152 - 113 + 59 - 96 = 2$$

$$\Delta_{45} = 157 - 130 + 69 - 96 = 0$$

Výpočet indexních čísel opět dokazuje, že řešení není ještě optimální a lze pokračovat v jeho zlepšování. Políčko D_3O_5 nesplňuje test optimality, jelikož se u něj vyskytuje záporná hodnota indexního čísla rovnající se číslu -2. Jedná se tedy o políčko zařazené do nové báze.

Pro zjištění políčka vyřazeného z báze se využije sestrojení uzavřeného obvodu k políčku D_3O_5. Uzavřený obvod se sestavuje k políčku D_3O_5, z kterého vycházejí rovné a svislé čáry procházející políčky, které tvoří vrcholy: +D_3O_5, -D_1O_5, +D_1O_1, -D_3O_1. Dále se pokračuje vyhledáním hodnoty proměnné x_{ij}, která je označena znaménkem minus a má minimální hodnotu v uzavřeném obvodu. Znaménka minus lze nalézt u dvou hodnot: 50; 100. Z uvedených hodnot se vybere nižší hodnota, tedy 50 reprezentující políčko D_3O_1, které opustí bázi. Proměnná $x_{3,1} = 50$ políčka D_3O_1 se přesune do políčka D_3O_5. Následně musí dojít k přepočítání hodnoty řešení zbylých obsazených políček, které byly součástí uzavřeného obrazce. Políčko D_3O_5 v tabulce číslo 22 po změně znázorňuje hodnotu proměnné $x_{3,5} = 50$. Součet kapacit třetího řádku je roven 140 ks, dochází pouze k přemístění hodnoty proměnné 50 ks v rámci třetího řádku. Uvolnění hodnoty proměnné políčka D_3O_1 představuje nepokrytou poptávku prvního odběratele. Proto políčko D_1O_1 se zvýší na 100 ks, aby seděl sloupcový součet prvního sloupce. V rámci prvního řádku musí dojít ke snížení hodnoty proměnné D_1O_5 na 50 ks, aby byl zachován řádkový součet ve výši 150 ks.

Tabulka 21 Vytvoření uzavřeného obrazce k políčku D_3O_5

	Brno	Zlín	Svitavy	Prostějov	Kroměříž	a_i
Znojmo	+ 69 **50**	160	140	125	− 130 **100**	150
Hodonín	73	71 **80**	148	96	67 **10**	90
Břeclav	59 − **50**	149	133	113 **90**	118 +	140
Jihlava	96 **20**	188	97 **100**	152	157	120
b_j	120	80	100	90	110	

Tabulka 22 Přesun políčka D_3O_1 do D_3O_5 v rámci aplikace Dantzigovy metody

	Brno	Zlín	Svitavy	Prostějov	Kroměříž	a_i
Znojmo	69 **100**	160	140	125	130 **50**	150
Hodonín	73	71 **80**	148	96	67 **10**	90
Břeclav	59	149	133	113 **90**	118 **50**	140
Jihlava	96 **20**	188	97 **100**	152	157	120
b_j	120	80	100	90	110	

2.10 TESTOVÁNÍ OPTIMALITY NOVÉHO BAZICKÉHO ŘEŠENÍ PO OBSAZENÍ D_3O_5

Tabulka číslo 22 znázorňuje vylepšené výchozí bazické řešení po přesunu hodnoty proměnné $x_{3,1} = 50$ do políčka D_3O_5 o hodnotě proměnné po změně $x_{3,5} = 50$. Jestli tato úprava představuje již finální optimální řešení či nikoli, pomůže ověřit opět testování optimality řešení prostřednictvím Dantzigovy metody. Opětovně se přepočítají hodnoty indexních čísel všech neobsazených políček pomocí Dantzigova uzavřeného obvodu:

$$\Delta_{12} = 160 - 71 + 67 - 130 = 33$$

$$\Delta_{13} = 140 - 69 + 96 - 97 = 70$$

$$\Delta_{14} = 125 - 113 + 118 - 130 = 0$$

$$\Delta_{21} = 73 - 69 + 130 - 67 = 67$$

$$\Delta_{23} = 148 - 97 + 96 - 69 + 130 - 67 = 141$$

$$\Delta_{24} = 96 - 67 + 118 - 113 = 34$$

$$\Delta_{31} = 59 - 118 + 130 - 69 = 2$$

$$\Delta_{32} = 149 - 118 + 67 - 71 = 27$$

$$\Delta_{33} = 133 - 118 + 130 - 69 + 96 - 97 = 75$$

$$\Delta_{42} = 188 - 71 + 67 - 130 + 69 - 96 = 27$$

$$\Delta_{44} = 152 - 113 + 118 - 130 + 69 - 96 = 0$$

$$\Delta_{45} = 157 - 130 + 69 - 96 = 0$$

Po konečném počtu dílčích úprav báze je na základě testu optimality řešení získané indexní metodou optimální. Všechna indexní čísla jsou kladná se třemi hodnotami indexních čísel rovnými nule, jedná se tedy o optimální řešení s třemi dalšími bazickými řešeními se stejnou hodnotou účelové funkce.

Umístění obsazených políček do souhrnné tabulky znázorňující pohyb zboží od *i*-tého dodavatele k *j*-tému odběrateli vypadá takto:

Tabulka 23 Výsledné řešení získané indexní metodou

Dodavatel	**Odběratel**	**Množství v ks**	**Dopravní náklady v Kč**
Znojmo	Brno	100	165 600
Znojmo	Kroměříž	50	156 000
Hodonín	Zlín	80	136 320
Hodonín	Kroměříž	10	16 080
Břeclav	Prostějov	90	244 080
Břeclav	Kroměříž	50	141 600
Jihlava	Brno	20	46 080
Jihlava	Svitavy	100	232 800

Vyčíslení jednotlivých distribučních nákladů od i-tého dodavatele k j-tému odběrateli jsou uvedeny v následujícím přehledu:

$$\begin{aligned} N_{ij} &= c_{ij} \times 24 \times x_{ij} \\ N_{11} &= 69 \times 24 \times 100 = 165600\ Kč \\ N_{15} &= 130 \times 24 \times 50 = 156000\ Kč \\ N_{22} &= 71 \times 24 \times 80 = 136320\ Kč \\ N_{25} &= 67 \times 24 \times 10 = 16080\ Kč \\ N_{34} &= 90 \times 24 \times 113 = 244080\ Kč \\ N_{35} &= 118 \times 24 \times 50 = 141600\ Kč \\ N_{41} &= 96 \times 24 \times 20 = 46080\ Kč \\ N_{43} &= 97 \times 24 \times 100 = 232800\ Kč \end{aligned} \tag{23}$$

Celkové náklady na distribuci mezi místy představují sumu ve výši 1 138 560 Kč. Jedná se o minimální hodnotu účelové funkce, která je výsledkem optimalizačních metod lineárního programování.

Stejné celkové částky za distribuci bylo rovněž dosaženo v rámci aplikace Vogelovy aproximační metody při výpočtu výchozího bazického řešení, jelikož tato metoda dokáže poskytnout řešení blízké či dokonce optimální řešení. I když je tato metoda oproti metodě severozápadního rohu a indexní metodě náročnější na výpočet, lze ji více doporučit při řešení dopravních úloh lineárního programování než ostatní metody. V případech výchozích řešení získaných metodou severozápadního rohu nebo indexní metodou, která by byla ověřena testem optimality jako neoptimální, vedlo by více dílčích kroků při obměnách bází k získaní optimálního řešení než v případě Vogelovy aproximační metody. Na základě uskutečněných výpočtů bylo dosaženo VAM a následně i ověřeno, že lze nalézt optimální řešení bez nutnosti provádění dílčích úprav báze.

Tabulka 24 Srovnání řešení získaná jednotlivými metodami

Zvolená metoda	**Celkové náklady na distribuci v Kč**	**Konečný stav**
Výchozí řešení získané MSR	1 400 640	Neoptimální
Výchozí řešení získané IM	1 194 720	Neoptimální
Výchozí řešení získané VAM	1 138 560	Optimální
Konečné řešení získané IM po obměně báze	1 138 560	Optimální

ZÁVĚR

Tato bakalářská práce byla věnována možnostmi aplikace metod lineárního programování při řešení dopravních úloh. První kapitola byla věnována teoretickým východiskům, které vymezují podstatu a metodický postup při řešení dopravních úloh. Rovněž byly vymezeny a vysvětleny základní pojmy využívané v lineárním programování.

Druhá kapitola byla zaměřena na aplikace dopravních úloh lineárního programování na konkrétním příkladě, který řeší distribuci svých výrobků od skladů s omezenou kapacitou nacházející se ve čtyřech městech k pěti odběrným místům, která mají konkrétní požadavky.

Hlavní podstatou dopravních úloh je zvolení optimálních tras, které přestavují optimální řešení vedoucí k nejnižším nákladům na distribuci zboží mezi jednotlivými dodavatelskými a odběrnými místy. V případě výchozího bazického řešení získaného metodou severozápadního rohu vyšla hodnota účelové funkce ve výši 1 400 640 Kč. Tato metoda slouží k rychlému nalezení výchozího bazického řešení, avšak nezohledňuje koeficienty účelové funkce při obsazování jednotlivých políček. Indexní metodou bylo nalezeno podstatně optimálnější výchozí bazické řešení s hodnotou účelové funkce 1 194 720 Kč. Porovná-li se tato suma nákladů s hodnotou účelové funkce získané Vogelovou aproximační metodou, poskytovala indexní metoda méně kvalitní řešení, což má za následek výběr méně vhodných tras a množství přepravovaného zboží. V posledních krocích byly totiž obsazovány vysoké hodnoty koeficientů účelové funkce, jelikož políčka s nižšími hodnotami koeficientů byla proškrtnuta z předešlých kroků. Tato políčka proto byla postupně nahrazena výhodnějšími políčky. VAM umožnila nalézt výchozí bazické řešení s hodnotou účelové funkce 1 138 560 Kč. Toto řešení je přímo optimální již ve výchozím stavu. Pokud by útvar logistiky zvažoval využívat metody lineární programování při plánování logistických operací a řešení materiálových toků, lze doporučit zejména Vogelovu aproximační metodu, která umožňuje nalézt řešení blízké optimálnímu nebo dokonce přímo optimální řešení, jak bylo ověřeno v zadaném příkladě.

Po získání výchozích bazických řešení jednotlivými metodami byla ověřena degenerovanost řešení a poté byl aplikován test optimality na řešení získané indexní a Vogelovou aproximační metodou. Řešení obdržené pomocí indexní metody nebylo optimální, jelikož test optimality nebyl splněn u pěti políček, což bylo ověřeno jak pomocí Dantzigovy metody, tak i pomocí MODI metody. Iteračními kroky bylo řešení modifikováno, byla vyjmuta z řešení políčka s vysokými hodnotami koeficientů účelové funkce a byla nahrazena výhodnějšími políčky. Přitom po každém uskutečněném kroku vedoucí ke změně báze byl proveden test optimality pomocí Dantzigovy metody. Nakonec bylo dosaženo optimálního řešení s hodnotou účelové funkce 1 138 560 Kč. Vzhledem k existenci nulových indexních čísel u třech políček, lze získat další optimální řešení s třemi alternativními bazickými řešeními se stejnou hodnotou účelové funkce. Zaleží proto na dalších skutečnostech založených na reálných zkušenostech z distribuce zboží, protože optimalizační metody v základní podobě nezohledňují profily cest či dodatečné poplatky.

V dnešní době se využívají v podnikové praxi přístupy řízení založené na principech štíhlé výroby, a právě lineární programování v celém spektru podob včetně dopravních úloh je vhodným nástrojem optimalizace výrobních procesů. Lineární programování nalézá široké uplatnění v oblastech, kde se sledují hodnoty určitých ukazatelů, kterých se dá dosáhnout aplikací systémového přístupu. Každý výrobní podnik se nachází v pozici jak dodavatele, tak i odběratele, a tudíž oběma pozicím musí věnovat patřičnou pozornost, aby byl podnik úspěšný a měl své pevné místo na trhu.

POUŽITÉ INFORMAČNÍ ZDROJE

[1] HOLOUBEK, Josef. *Ekonomicko-matematické metody*. 2., nezměn. vyd. V Brně: Mendelova univerzita, 2010. ISBN 978-80-7375-411-2.

[2] JABLONSKÝ, Josef. *Operační výzkum: kvantitativní modely pro ekonomické rozhodování*. 3. vyd. Praha: Professional Publishing, 2007. ISBN 978-80-86946-44-3.

[3] LAGOVÁ, Milada a Josef JABLONSKÝ. *Lineární modely*. Vyd. 2., přeprac. Praha: Oeconomica, 2009. 302 s. ISBN 978-80-245-1511-3.

[4] LAGOVÁ, Milada a Josef JABLONSKÝ. Lineární modely. Praha: Vysoká škola ekonomická, 1999. ISBN 80-7079-959-5.

[5] LINDA, Bohdan a Josef VOLEK. *Lineární programování*. Vyd. 4. Pardubice: Univerzita Pardubice, 2011. ISBN 978-80-7395-426-0.

[6] PLEVNÝ, Miroslav a Miroslav Žižka *Modelování a optimalizace v manažerském rozhodování* Vyd. 2. Plzeň: Západočeská univerzita v Plzni, 2010, 296 s. ISBN 978-80-7043-933-3.

[7] STOLÍN, Radek. *Matematika pro ekonomy*. Jihlava: Vysoká škola polytechnická Jihlava, 2008. ISBN 978-80-87035-17-7.

[8] ŠMEREK, Michal a Jiří MOUČKA. *Ekonomicko-matematické metody: učební text pro distanční studium*. Brno: Univerzita obrany, 2008. ISBN 978-80-7231-526-0.

[9] ŠUBRT, Tomáš a Pavlína LANGROVÁ. *Systémová podpora projektů*. Praha: Credit, 2003. ISBN 80-213-0996-2.

[10] ZIMOLA, Bedřich. *Operační výzkum*. Vyd. 2. nezměn. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta managementu a ekonomiky ve Zlíně, 2000. ISBN 80-214-1664-5.

[11] JABLONSKÝ, Josef. *Operační výzkum: kvantitativní modely pro ekonomické rozhodování*. Brno: Professional Publishing, 2002. ISBN 80-86419-23-1.

SEZNAM POUŽITÝCH ZKRATEK A SYMBOLŮ

IM	Indexní metoda
Kč	Koruna Česká
Ks	Kus
MSR	Metoda severozápadního rohu
VAM	Vogelova aproximační metoda

SEZNAM OBRÁZKŮ A TABULEK

SEZNAM OBRÁZKŮ

SEZNAM TABULEK