



**VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ**  
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



**FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ**  
**ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A**  
**BIOMECHANIKY**

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING  
INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND  
BIOMECHANICS

# **KRUT PRUTŮ S NEKRUHOVÝM PŘÍČNÝM PRŮŘEZEM**

A TORSION OF THE BEAM WITH NON-CIRCULAR CROSS-SECTION

**BAKALÁŘSKÁ PRÁCE**  
BACHELOR'S THESIS

**AUTOR PRÁCE**  
AUTHOR

**ONDŘEJ KALIVODA**

**VEDOUCÍ PRÁCE**  
SUPERVISOR

**doc. Ing. TOMÁŠ PROFANT, Ph.D.**

BRNO 2015



Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství

Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky

Akademický rok: 2014/15

## ZADANÍ BAKALÁŘSKE PRÁCE

Student(ka): Ondřej Kalivoda

který/která studuje v **bakalářském studijním programu**

obor: **Základy strojního inženýrství (2341R006)**

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

### **Krut prutů s nekruhovým příčným průřezem**

a anglickém jazyce:

### **A torsion of the beam with non-circular cross-section**

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Namáhání krutem u prutů nekruhového příčného průřezu je součástí klasické teorie prutů a vede na řešení harmonické resp. Poissonovy rovnice. Za předpokladu vhodné zvolené geometrie příčného průřezu prutu lze nalézt řešení v uzavřeném tvaru, avšak obecně jen za použití numerických metod. Cílem uchazeče bude studium teoretických základů krutu prutů nekruhového příčného průřezu a dostupných výpočetních metod.

Cíle bakalářské práce:

1. Seznámení se s teoretickými základy krutu prutů s nekruhovým průřezem.
2. Studium možností a dostupných metod řešení úloh krutu prutů s různou geometrií příčných průřezů.

Seznam odborné literatury:

- Valášek, M., Bauma, V., Šika, Z., Mechanika B (skripta), Praha, ČVUT, 2004.  
Katsikadelis, J. T., Boundary Elements: Theory and Applications, Elsevier, 2002.  
Oden, J. T., Mechanics of elastic structures, McGraw-Hill Book Company, 1967.

Vedoucí bakalářské práce: doc. Ing. Tomáš Profant, Ph.D.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2014/15.

V Brně, dne 21. 11. 2014

L.S.

Prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc.  
Ředitel ústavu

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.  
Děkan fakulty

## **Abstrakt**

Bakalářská práce se zabývá analytickými a numerickými způsoby řešení úloh krutu prutů s různou geometrií příčných průřezů. V první části práce jsou uvedeny teoretické základy problému borcení příčných průřezů. Následuje krátké seznámení se s možnostmi analytického řešení parciálních diferenciálních rovnic v případech jednoduchých geometrií příčných průřezů. Získané výsledky jsou srovnány s numerickým řešením v konečnoprvkovém softwaru ANSYS. Numerické výsledky jsou v závěrečné části práce doplněny případy prutů s obecnějšími tvary příčných průřezů.

## **Abstract**

Bachelor thesis deals with the analytical and numerical methods solving the problems of the torsion of bars with various geometries of cross-sections. The theoretical background of the problem is introduced in the beginning of the thesis. The possibilities of the analytical solution of the partial differential equations in the case of the simplified shapes of the cross-sections are discussed in the following part. These results are compared with the numerical ones received from the finite element analysis via the ANSYS software. The numerical results are extended to the cases of the generalized shapes of the beam cross-sections.

## **Klíčová slova**

Krut prutů, nekruhový průřez, Poissonova rovnice, Laplaceova rovnice, maximální smykové napětí.

## **Key words**

Torsion of bars, noncircular cross section, Poisson's equation, Laplace's equation, maximum shear stress.



## **Bibliografická citace**

KALIVODA, O. *Krut prutů s nekruhovým příčným průřezem*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2015. 49 s. Vedoucí bakalářské práce doc. Ing. Tomáš Profant, Ph.D.



## **Čestné prohlášení**

Prohlašuji, že tuto bakalářskou práci jsem vypracoval samostatně pod odborným vedením vedoucího práce a pouze s použitím uvedené literatury.

V Brně dne: 20.5.2015

.....

Kalivoda Ondřej



## **Poděkování**

Úvodem bych chtěl poděkovat především vedoucímu své bakalářské práce panu doc. Ing. Tomáši Profantovi, Ph.D. za ochotu, cenné rady a připomínky. Dále bych chtěl poděkovat Ing. Jakubu Mikulovi za rady při seznamování se softwarem ANSYS a v neposlední řadě rodině a všem svým blízkým za podporu během celého studia.



# Obsah

1 Úvod.....	15
2 Krut prutů s kruhovým příčným průřezem .....	16
3 Krut prutů s nekruhovým příčným průřezem .....	18
3.1 Laplaceova rovnice .....	21
3.2 Odvození Laplaceovy rovnice.....	22
3.3 Odvození Poissonovy rovnice.....	22
3.4 Znázornění složek smykového napětí .....	24
3.5 Okrajová podmínka .....	25
3.6 Výpočet krouticího momentu.....	26
4 Eliptický průřez.....	27
4.1 Výpočet maximálního smykového napětí .....	27
4.2 Výpočet posuvu vzniklého borbencím příčného průřezu.....	28
5 Tenkostěnné otevřené profily .....	29
5.1 Algoritmus pro řešení prutů s tenkostěnným otevřeným průřezem .....	29
6 Analytické řešení vybraných úloh krutu prutů s nekruhovým příčným průřezem .....	32
6.1 Porovnání maximálního smykového napětí kruhového a eliptického průřezu .....	32
6.2 Analytické řešení některých úloh krutu přímého prutu s příčným průřezem ve tvaru tenkostěnného profilu.....	34
7 Numerické řešení pomocí MKP .....	36
7.1 MKP analýza prutu s kruhovým a eliptickým příčným průřezem .....	37
7.2 MKP analýza složených tenkostěnných průřezů.....	40
8 Závěr .....	44
9 Seznam použitých zdrojů.....	45
10 Seznam použitých symbolů a zkratk.....	46
11 Seznam obrázků.....	48
12 Seznam tabulek .....	49



# 1 Úvod

Analýza vlastností, stavů a chování technických objektů je důležitým úkolem mechaniky a deformačně napěťová analýza pružných těles je její nedílnou součástí. Mechanika kontinua a především teorie pružnosti poskytuje matematické nástroje pro tuto analýzu. [1]

Deformačně napěťové analýzy prošly a stále procházejí výrazným rozvojem. Analytické přístupy, které v minulosti převládaly, se v současné době nahrazují numerickými nástroji, jako je např. metoda konečných prvků, metoda konečných objemů, hraničních prvků apod. Ve srovnání s klasickými metodami, jsou numerické metody univerzální v tom smyslu, že jejich použitelnost je nezávislá na geometrii součástí, materiálových charakteristikách a jiných, pro konkrétní případ důležitých vlastností. To by mohlo naznačovat, že období analytické pružnosti skončilo. To je však omyl. Existují důvody, proč je zapotřebí zvládat analytické i numerické přístupy. [1]

Numerické metody (např. MKP) umožňují spočítat hodnoty napětí či deformací konkrétního materiálu v jednotlivých bodech při konkrétních zatíženích. Na druhou stranu neposkytují žádné vzorce, které mohou být použity pro předpověď změny vypočtených hodnot v rámci změny zatížení, velikosti tělesa, tuhosti apod. Analytické metody naopak toto umožňují, avšak za cenu jednodušší geometrie, zatížení nebo jiných charakteristik řešeného problému. [1]

Také interpretace výsledků získaných numerickými výpočty vyžaduje základní znalosti matematické pružnosti. Její neznalost může v praxi způsobovat problémy s věrohodností získaných výsledků numerickou cestou. Navíc analytická teorie pružnosti může být nástrojem pro ověření numerických výsledků. Tyto znalosti, skryté ve vzorcích získaných analytickými metodami, jsou vhodným nástrojem pro zjištění nebezpečných míst zatížených těles. Například při kroucení prutů s různými tvary příčných průřezů. [1]

## 2 Krut prutů s kruhovým příčným průřezem

Přímý prizmatický<sup>1</sup> prut s kruhovým příčným průřezem je nejběžnějším konstrukčním prvkem zatěžovaným krutem. Jsou to například hřídele v rotačních prvcích motorů a jiných zařízení nebo základní vzorky pro zkoušky závislosti smykového napětí a smykové deformace u většiny kovů. [2]

Odvození vztahů mezi úhlem zkroucení, smykovým napětím a krouticím momentem prutu kruhového průřezu je poměrně jednoduché, díky symetrii jak průřezu, tak i zatížení. Vzhledem k symetrii, příčné průřezy zůstávají rovinné a kolmé ke střednici prutu i během deformace. Z toho vyplývá, že radiální přímka v příčném průřezu orientována v libovolném úhlu, nejčastěji vzhledem k ose  $z$ , zůstává přímkou i během deformace. V důsledku toho se smykové složky deformace (skosy)  $\gamma_{x\alpha}$  mění lineárně s rostoucí vzdáleností  $r$  od osy hřídele (obr 2.1). Touto poměrně jednoduchou závislostí deformace, se analýza kruhového hřídele v krutu redukuje na staticky určitý problém. [2]

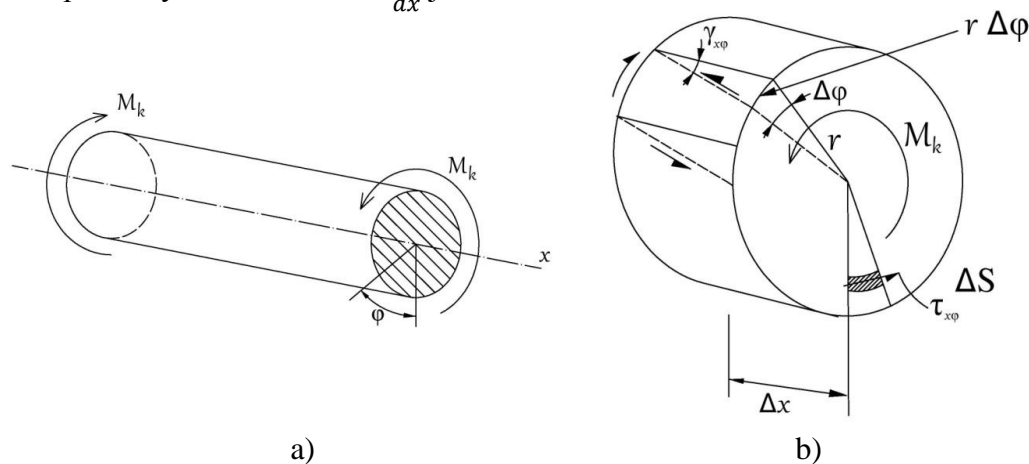
Uvažujme typický elementární prvek tyče s kruhovým příčným průřezem namáhaný prostým krutem (obr 2.1). Z geometrie deformovaného uvolněného prvku (označeno čárkovanou čarou) a Hookova zákona zjistíme, že

$$\gamma_{x\varphi} \Delta x = \frac{\tau_{x\varphi}}{G} \Delta x = r \Delta \varphi ,$$

kde  $\Delta \varphi$  je přírůstek úhlu  $\varphi$ , tj. přírůstek celkového úhlu zkroucení jakékoliv radiální přímky v příčném průřezu,  $\tau_{x\alpha}$  je odpovídající smykové napětí a  $G$  je modul pružnosti ve smyku. Z toho vyplývá, že

$$\tau_{x\varphi} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} Gr \frac{\Delta \varphi}{\Delta x} = Gr \frac{d\varphi}{dx} ,$$

kde tzv. poměrný úhel zkroucení  $\frac{d\varphi}{dx}$  je konstantní. [2]



Obr 2.1 (a) Prut kruhového příčného průřezu namáhaný prostým krutem; (b) uvolněný elementární prvek hřídele.

<sup>1</sup> Prut konstantního průřezu.

Krouticí moment dostaneme jako výslednici momentů od složek napětí  $\tau_{x\alpha}$

$$M_x = \iint_S r(\tau_{x\alpha} dS) = G \frac{d\varphi}{dx} \iint_S r^2 dS = G \frac{d\varphi}{dx} J_p ,$$

kde  $S$  je plocha příčného průřezu a  $J_p$  je polární kvadratický moment plochy příčného průřezu. Ze statické rovnováhy vidíme, že

$$M_x = M_k .$$

Přepsáním předchozích vztahů a zavedením výrazu

$$\theta = \frac{d\varphi}{dx}$$

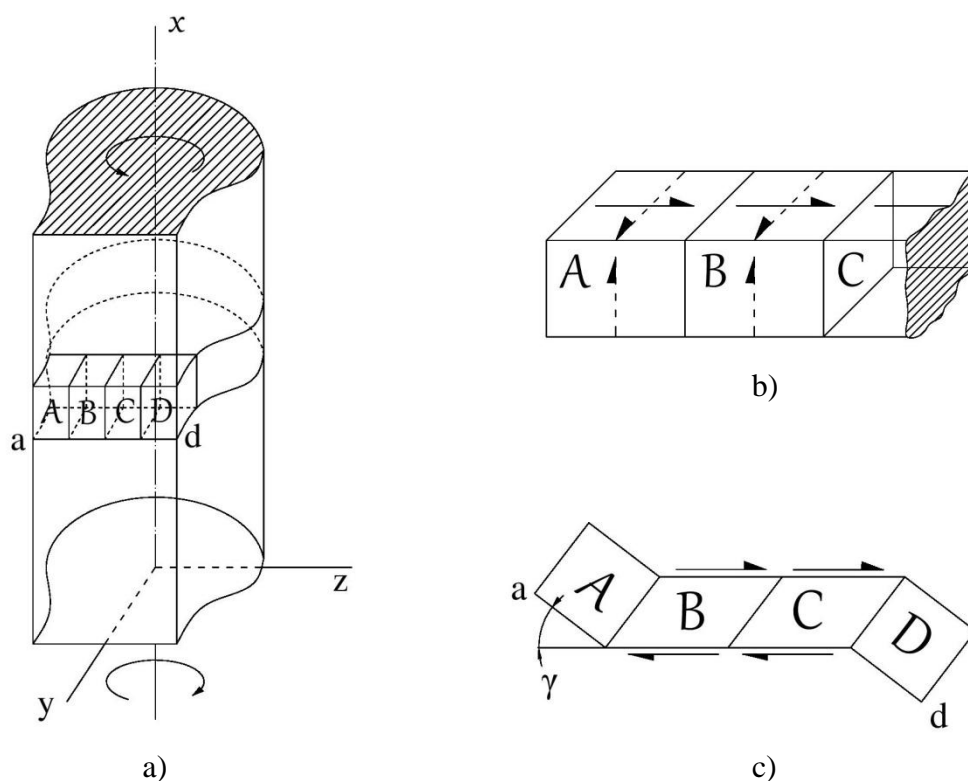
dojdeme ke vztahům klasické teorie kroucení prutů s kruhovým příčným průřezem

$$\tau_{x\alpha} = \frac{M_k r}{J_p} , \tag{2.1}$$

$$\theta = \frac{M_k}{G J_p} . \tag{2.2}$$

### 3 Krut prutů s nekuhovým příčným průřezem

V případě krutu prizmatických prutů nekuhového průřezu ztrácíme argumenty symetrie a spolu s nimi jednoduchost základní teorie. Například podmínka, že rovina příčného průřezu zůstává během deformace tou stejnou rovinou, již neplatí. Ukážeme si to na chování několika elementů prizmatického prutu na obrázku 3.1a. Pro jednoduchost, elementární prvky A a D se nachází v pravoúhlých rozích, tudíž smykové napětí na těchto prvcích nemůže existovat. Jakákoliv složka smykového napětí, například na elementu A, by vyžadovala vznik napětí na povrchu prutu, což je samozřejmě nemožné. V důsledku toho na tyto prvky nepůsobí žádné smykové napětí, což znamená, že jejich rohy budou mít i po deformaci pravé úhly. Na prvcích B a C ale smykové napětí vzniknout může ve směru hraniční čáry  $\overline{ad}$ . Důvodem je, že smykové napětí směřující kolmo k hranici je nulové a neexistuje na povrchu (obr. 3.1b). Z toho vyplývá, že když na stranách prvků B a C vznikne smykové napětí  $\tau$ , prvky A a D se musí natočit stejně, kvůli zachování spojitosti (kompatibility) materiálu. Proto vnější rohy prvků A a D jsou přemístěny ven z příčného průřezu, jak je uvedeno na obr 3.1c. Pokud zvýšíme počet prvků nade všechny meze a jejich rozměry přiblížíme k nule, deformovaný tvar hraniční čáry  $\overline{ad}$  se stane hladkou křivkou. Smykové napětí na hranicích je rovnoběžné s hraniční křivkou a je rovno nule v bodech  $a$  a  $d$ . [2]



Obr 3.1 (a) Prizmatický prut nekuhového průřezu; (b) elementy prutu s nemožným (čárkovaná čára) a možným (plná čára) smykovým napětím; (c) deformace rohových elementů prutu.

Předpokládáme, že na příčný průřez nepůsobí žádné vnější tlaky, které by mohly bránit jeho borcení. Takže neexistují žádné vnější síly ve směru osy  $x$ . Kromě toho, že se příčné průřezy bortí, je jednou z nejvýraznějších charakteristik chování prutů absence normálových napětí. Pokud v každém příčném průřezu je vnitřní krouticí moment  $M_k = konst.$ , borcení všech příčných průřezů je stejné. Potom poměrná deformace ve směru osy  $x$  je

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (3.1)$$

z čehož pro posunutí vyplývá

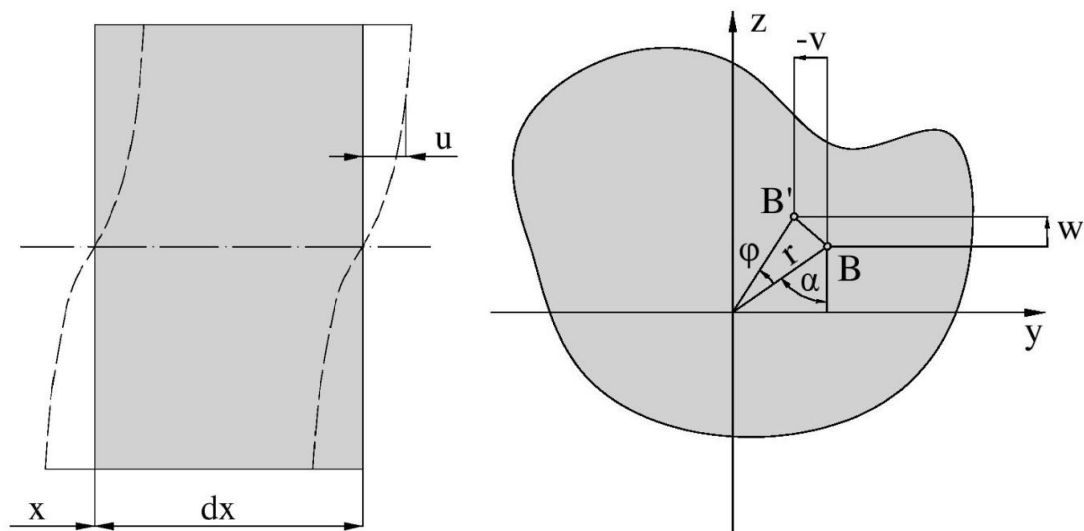
$$u = u(y, z).$$

Působením momentů se průřezy prutu natačejí, přičemž velikost natočení je úměrná vzdálenosti průřezů. Úhel natočení koncových průřezů prutu délky  $x$  je

$$\varphi = \theta x, \quad (3.2)$$

kde  $\theta$  je poměrný úhel zkroucení (zkroucení na jednotku délky). [2]

Libovolný bod  $B \equiv [x, y, z]$  se při natočení průřezu o úhel  $\varphi$  posune do nové polohy, viz obr. 3.2.



Obr. 3.2 Posuv bodu B.

Pokud úhel  $\varphi$  považujeme za velmi malý, posunutí  $v$  a  $w$  bodu B můžeme přibližně vyjádřit ve tvaru

$$v = -\varphi r \cos \alpha = -\theta x z, \quad (3.3)$$

$$w = \varphi r \sin \alpha = \theta x y. \quad (3.4)$$

Ve vztahu (3.3) je posunutí  $v$  záporné, protože kladný krouticí moment vyvolá posunutí bodu B v záporném směru osy  $y$ . [3]

Z výrazů (3.3) a (3.4) vyplývá

$$v = v(x, z), \quad (3.5)$$

$$w = w(x, y). \quad (3.6)$$

Poměrné deformace využitím vztahů (3.3) a (3.4) jsou

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (3.7)$$

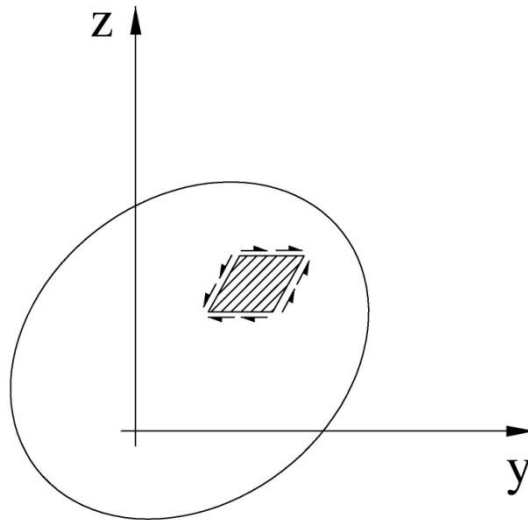
Pro skosy podle Hookova zákona pro čistý smyk platí

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} - \theta z,$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial z} + \theta y, \quad (3.8)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = -\theta x + \theta x = 0.$$

Za pozornost stojí skutečnost, že  $\gamma_{yz}$  je nula. Z čehož plyne, že příčné průřezy se ve svých rovinách nenarušují. Jinými slovy, úhel mezi dvěma přímkami, vedenými příčným průřezem, se v průběhu deformace nemění. To znamená, že deformace elementárního prvku, znázorněného na obr. 3.3 nenastane, a jakýkoliv bod v rovině  $yz$  se bude pouze natáčet kolem středu kroucení. [2]



Obr. 3.3 Deformace elementárního prvku, která nenastane, pokud je  $\gamma_{yz}$  nula.

### 3.1 Laplaceova rovnice

Laplaceova rovnice je parciální diferenciální rovnice druhého řádu

$$-\Delta u = 0, \quad (3.9)$$

kde  $\Delta$  je Laplaceův operátor, definován jako

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

na dvourozměrném prostoru, nebo

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

v případě trojrozměrného prostoru. Řešení Laplaceovy rovnice se nazývá harmonická funkce. [6]

Nehomogenní forma Laplaceovy rovnice

$$-\Delta u = f, \quad (3.10)$$

kde  $f$  je funkce definovaná na nějaké oblasti  $\Omega$ , se nazývá Poissonova<sup>2</sup> rovnice. [6]

Rovnice (3.9) a (3.10) jsou nejčastěji definovány na ohraničené oblasti  $\Omega$  v dvou nebo třírozměrném prostoru reálných čísel. [6]

Hranici oblasti  $\Omega$  označíme jako  $\partial\Omega$ . Například pokud  $f$  je funkce definována na  $\Omega$  a  $g$  je funkce definována na  $\partial\Omega$ , pak

$$-\Delta u = f \text{ na } \Omega, \quad (3.11)$$

$$u = g \text{ na } \partial\Omega \quad (3.12)$$

se nazývá Dirichletova úloha a rovnice (3.12) vyjadřuje Dirichletovu okrajovou podmínku. [6]

Kromě krutu prizmatických prutů má Laplaceova rovnice uplatnění při řešení mnoha problémů matematické fyziky, jako např. vedení tepla, kmitání či vlnění. Poissonova rovnice pak popisuje např. elektrický potenciál, difúzi nebo proudění tekutiny. [6]

---

<sup>2</sup> Poissonova rovnice je Laplaceova rovnice s nenulovou pravou stranou.

### 3.2 Odvození Laplaceovy rovnice

Základní informace o rozložení napětí v prutu vyplývají ze vztahů matematické teorie pružnosti [3], podle kterých normálová napětí z výrazů (3.1) a (3.7) jsou

$$\begin{aligned}\sigma_x &= 2G \left( \varepsilon_x + \frac{\mu}{1-2\mu} \varepsilon_v \right) = 0, \\ \sigma_y &= 2G \left( \varepsilon_y + \frac{\mu}{1-2\mu} \varepsilon_v \right) = 0, \\ \sigma_z &= 2G \left( \varepsilon_z + \frac{\mu}{1-2\mu} \varepsilon_v \right) = 0,\end{aligned}\tag{3.13}$$

kde

$$\varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z.$$

Pro smyková napětí platí

$$\begin{aligned}\tau_{xy} &= G\gamma_{xy} = G \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \theta z \right), \\ \tau_{xz} &= G\gamma_{xz} = G \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \theta y \right), \\ \tau_{zy} &= G\gamma_{zy} = 0.\end{aligned}\tag{3.14}$$

S využitím Cauchyho rovnic rovnováhy [3] a rovnic (3.13) a (3.14) dostaneme pro smyková napětí rovnice

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0\tag{3.15}$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} = 0\tag{3.16}$$

Pokud dosadíme rovnice (3.14) do rovnice (3.15), tedy po derivaci první z rovnic (3.14) podle  $y$  a druhé podle  $z$ , dostaneme vztah

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,\tag{3.17}$$

který je parciální diferenciální rovnicí borcení příčného průřezu prutu. [3]

### 3.3 Odvození Poissonovy rovnice

Při výpočtu prutů nekrhového průřezu namáhaného na krut je výhodné zavést napěťovou funkci  $\phi(y, z)$ , z které je možné určit rozložení smykových napětí v příčném průřezu. Funkce napětí musí splňovat následující podmínky [3]:

- napětí určené z napěťové funkce musí vyhovovat diferenciálním rovnicím rovnováhy (3.14) a (3.15),
- funkce napětí musí vyhovovat rovnicím kompatibility a okrajovým podmínkám konkrétní úlohy.

Uvedeným podmínkám vyhovuje funkce napětí, pro kterou platí

$$\tau_{xz} = \pm \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad \tau_{xy} = \pm \frac{\partial \phi}{\partial z}. \quad (3.18)$$

O tom, které znaménko ve výrazu (3.18) použijeme, rozhodneme na základě následující úvahy. Funkce  $\phi(y, z)$  představuje rovnici plochy nad příčným průřezem prutu (obr. 3.4). Derivace funkce  $\phi$  udávají směrnice tečen  $t_y$  a  $t_z$ .

Pokud funkce  $\phi(y, z)$  představuje vypouklou plochu, platí

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} < 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} < 0. \quad (3.19)$$

Pro složky smykových napětí v bodě B, při kladném krouticím momentu  $M_k$ , platí

$$\tau_{xz} > 0, \quad \tau_{xy} < 0. \quad (3.20)$$

Porovnáním vztahů (3.19) a (3.20) vyplývá z výrazu (3.18)

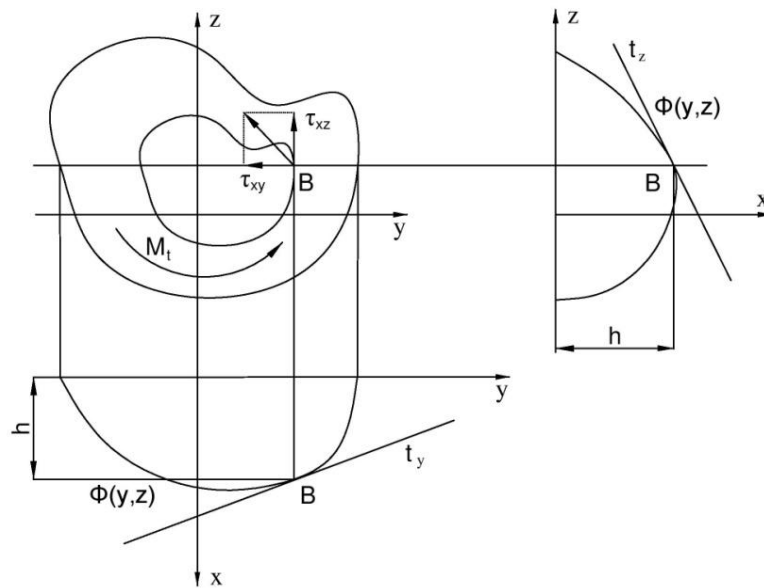
$$\tau_{xz} = -\frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad \tau_{xy} = \frac{\partial \phi}{\partial z}. \quad (3.21)$$

Když první rovnici (3.14) derivujeme podle  $z$ , druhou podle  $y$  a odečteme je od sebe, dostaneme

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} = -2G\theta. \quad (3.22)$$

Dosazením vztahů (3.21) do rovnice (3.22) dostaneme Poissonovu diferencialní rovnici pro kroucení prizmatických prutů nekruhového příčného průřezu ve tvaru

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = -2G\theta. \quad (3.23)$$



Obr. 3.4 Funkce  $\phi(y, z)$  znázorňující plochu nad příčným průřezem.

### 3.4 Znázornění složek smykového napětí

Pokud si představíme  $\phi$  jako zakřivený povrch nad příčným průřezem prutu, vidíme ze vztahu (3.21), že sklon povrchu ve směru  $z$  je smykové napětí ve směru  $y$  a sklon ve směru  $y$  je napětí v opačném směru osy  $z$ . Definujeme-li přímku  $n$  svírající s osou  $y$  úhel  $\alpha$  tak, jak vidíme na obrázku 3.5, můžeme napětí směřující kolmo k  $n$  vyjádřit jako

$$\tau_{xz} \cos \alpha - \tau_{xy} \sin \alpha .$$

Sklon plochy  $\phi$  ve směru přímky  $n$  je podle definice

$$\frac{d\phi}{dn} = \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{dy}{dn} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{dz}{dn}$$

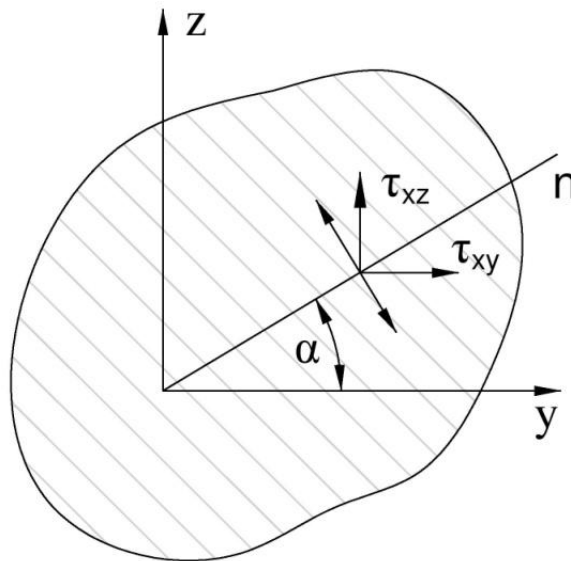
a při vyjádření  $\frac{dy}{dn}$  a  $\frac{dz}{dn}$  pomocí goniometrických funkcí

$$\frac{dy}{dn} = \cos \alpha , \quad \frac{dz}{dn} = \sin \alpha ,$$

se dostaneme k výrazu

$$\frac{d\phi}{dn} = -\tau_{xz} \cos \alpha + \tau_{xy} \sin \alpha . \quad (3.24)$$

Odtud pro sklon plochy  $\phi$  v jakémkoliv směru platí, že je rovný smykovému napětí kolmému na směr  $n$ . [3]



Obr. 3.5 Libovolný směr přímky  $n$  v příčném průřezu.

### 3.5 Okrajová podmínka

Hledaná funkce  $\phi(y, z)$  musí samozřejmě splňovat odpovídající okrajové podmínky. Na okraji průřezu musí mít smykové napětí  $\tau$  směr tečný k obrysové čáře  $s$  (obr. 3.6), což vyplývá ze zákona o sdruženosti smykových napětí. [2]

Takže pro složky napětí musí podle předchozího platit

$$-\tau_{xz} \sin \alpha + \tau_{xy} \cos \alpha = 0 . \quad (3.25)$$

Pokud platí že

$$\sin \alpha = \frac{dy}{ds}, \quad \cos \alpha = \frac{dz}{ds},$$

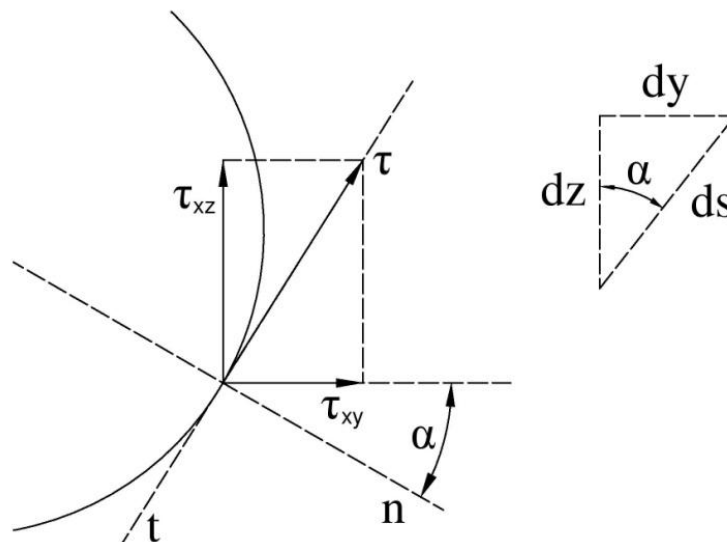
dosazením (3.21) do (3.25) dostaneme

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{dz}{ds} = 0 , \quad (3.26)$$

z čeho vyplývá

$$\frac{d\phi}{ds} = 0 \Rightarrow \phi(y, z) = konst \quad (3.27)$$

pro body  $s$   $y$  a  $z$  na obvodu příčného průřezu. [2]



Obr. 3.6 Znárodnění složek smykových napětí.

### 3.6 Výpočet krouticího momentu

Jakékoliv řešení rovnice (3.23) vyhovuje rovnicím rovnováhy a podmínkám kompatibility deformací v příčném průřezu jakéhokoliv tvaru. Aby bylo zajištěno, že vede také k napětím, které splňují okrajové podmínky na koncích prutu (nebo na jakémkoli průřezu vzhledem k povaze zatížení), musíme také vztáhnout  $\phi$  vzhledem ke krouticímu momentu zatěžující prut. Ze statické rovnováhy libovolného elementu prutu pro moment vyvinutý smykovým napětím kolem osy  $x$  musí platit

$$M_x = M_k = \iint_S (-\tau_{xy}z + \tau_{xz}y) dy dz ,$$

kde se integruje přes celou oblast příčného průřezu. Dosazením potenciálu  $\phi$  do tohoto vztahu dostáváme

$$M_k = - \iint_S \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} z + \frac{\partial \phi}{\partial y} y \right) dy dz .$$

Nyní přepíšeme integrál do tvaru

$$- \int \left( \int_A^B \frac{d\phi}{dz} z dz \right) dy - \int \left( \int_C^D \frac{d\phi}{dy} y dy \right) dz ,$$

kde A a B jsou hraniční body přímky  $y = konst.$  a C a D hraniční body přímky  $z = konst.$  Integrací per-partes dostaneme

$$M_k = - \int (\phi_B z_B - \phi_A z_A - \int \phi dz) dy - \int (\phi_D y_D - \phi_C y_C - \int \phi dy) dz ,$$

kde  $\phi_A, \phi_B, \phi_C$  a  $\phi_D$  jsou hodnoty  $\phi$  v hraničních bodech, které jsme výše zmínili. Proto tyto členy z integrálu vypadnou a dostáváme

$$M_k = 2 \iint_S \phi dy dz . \quad (3.28)$$

Výsledný krouticí moment je tedy roven dvojnásobku objemu pod plochou  $\phi$ . [2]

Dále vyjádříme krouticí moment pomocí třech nezávislých veličin podobně, jako tomu bylo u krutu prutu s kruhovým průřezem. Tedy modulem pružnosti ve smyku  $G$ , který je materiálovou charakteristikou, poměrným úhlem zkroucení  $\theta$ , a konstantou  $J$ , která je geometrickou charakteristikou průřezu. Tuto závislost můžeme vyjádřit jako

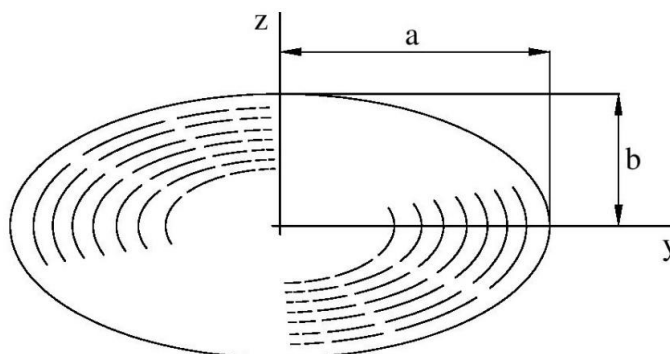
$$M_k = GJ\theta . \quad (3.29)$$

Z rovnic (3.28) a (3.29) lze konstantu  $J$  formulovat jako

$$J = \frac{2}{G\theta} \iint_S \phi dy dz . \quad (3.30)$$

## 4 Eliptický průřez

V této kapitole si ukážeme algoritmus pro výpočet maximálního smykového napětí a posuvu, vzniklého borbáním eliptického příčného průřezu prutu zatíženého krutem a vyšetříme vliv rozdílu rozměrů eliptického průřezu na rozložení napětí a posuvů v příčném průřezu. Zajímá se budeme také o limitní přechod ke kruhovému průřezu.



Obr. 4.1 Eliptický průřez.

### 4.1 Výpočet maximálního smykového napětí

K analyzování chování prutů různých průřezů při krutu je nutné získat přesné řešení rovnice (3.23), které často vede ke složitým řešením. Správná napěťová funkce  $\phi$  pro několik tvarů (kruh, elipsa, rovnostranný trojúhelník a další), lze získat vyjádřením rovnice hraniční křivky. [2]

Pro splnění podmínky (3.23) volíme funkci napětí ve tvaru

$$\phi = C \left( \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} - 1 \right), \quad (4.1)$$

kde  $C$  je zatím neznámá konstanta.

Substitucí funkce (4.1) do rovnice (3.23) získáme

$$C \left( \frac{2}{a^2} + \frac{2}{b^2} \right) = -2G\theta.$$

Funkce (4.1) je tedy správná pokud

$$C = -\frac{a^2 b^2 G\theta}{a^2 + b^2}. \quad (4.2)$$

Jestliže nyní dosadíme  $\phi$  do rovnice (3.28), dostaneme

$$M_k = \frac{2a^2 b^2 G\theta}{a^2 + b^2} \int_{-b}^b \int_{-\frac{a}{b}\sqrt{b^2-z^2}}^{\frac{a}{b}\sqrt{b^2-z^2}} \left( \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} - 1 \right) dy dz$$

a po integraci

$$M_k = G\theta \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2}. \quad (4.3)$$

Potom z rovnice (3.29) vyplývá

$$J = \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2} \quad (4.4)$$

a

$$C = -\frac{a^2 b^2 M_t}{J(a^2 + b^2)} = -\frac{M_k}{\pi a b}.$$

Nyní pomocí rovnic (3.21) přímo spočítáme smyková napětí:

$$\tau_{xy} = \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{2C}{b^2} z = -\frac{2M_k z}{\pi a b^3},$$

$$\tau_{xz} = -\frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{2C}{a^2} y = \frac{2M_k y}{\pi a^3 b}.$$

Jestliže  $b < a$ , pak maximální napětí je  $\tau_{xy}$  v bodech  $z = \pm b$ , tedy

$$\tau_{max} = \frac{2M_k}{\pi a b^2}. \quad (4.5)$$

## 4.2 Výpočet posuvu vzniklého borcením příčného průřezu

Na základě předchozích odvození smykových napětí, můžeme nyní z rovnic (3.14) vyjádřit vztah pro posuv  $u$  jako

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\tau_{xy}}{G} + \theta z = \frac{M_k}{G} \left( \frac{-2}{\pi a b^3} + \frac{1}{J} \right) z.$$

Po integraci a zjednodušení potom dostáváme

$$u = \frac{M_t}{\pi a b^3} (b^2 - a^2) y z + h(z),$$

kde  $h(z)$  je funkce souřadnice  $z$ . Podobně integrací druhé rovnice (3.14) a její úpravou dostaneme

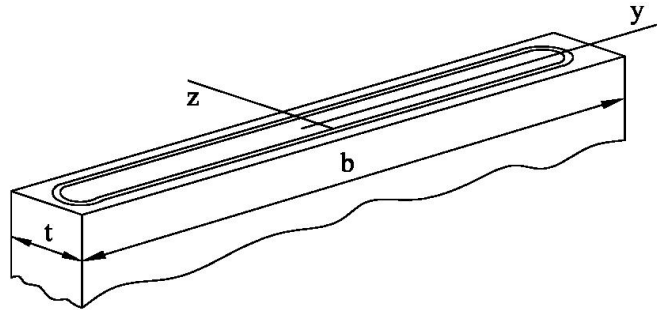
$$u = \frac{M_t}{\pi a b^3} (b^2 - a^2) y z + g(y).$$

Tyto vztahy jsou totožné pouze pokud  $g(y)$  a  $h(z)$  jsou rovny nule. Z čehož vyplývá, že

$$u = \frac{M_k}{\pi a b^3} (b^2 - a^2) y z. \quad (4.6)$$

## 5 Tenkostěnné otevřené profily

Základní charakteristika tenkostěnných otevřených příčných průřezů je, že tloušťka  $t$  profilu je mnohem menší než jeho ostatní rozměry. Otevřeným profilem se myslí profil, jehož tvar není uzavřená křivka. V praxi to jsou různé I, U, T a další profily.



Obr. 5.1 Tenkostěnný obdélníkový příčný průřez.

### 5.1 Algoritmus pro řešení prutů s tenkostěnným otevřeným průřezem

Podstatu řešení výše definovaných tenkostěnných prutů si ukážeme na nejjednodušším příčném průřezu, tedy obdélníku. Na obr. 5.1 jsou znázorněny vrstevnicové čáry povrchu funkce  $\phi(y,z)$ , které jsou podél osy  $z$  v podstatě rovnoběžné a ekvidistantní. Proto se předpokládá<sup>3</sup>, že  $\phi$  je funkcí pouze proměnné  $z$ . Tím pádem se nám rovnice (3.23) zjednoduší na tvar

$$\frac{d^2\phi}{dz^2} = -2G\theta.$$

Po integraci dostaneme

$$\phi = -G\theta z^2 + C_1 z + C_2, \quad (5.1)$$

kde  $C_1$  a  $C_2$  jsou integrační konstanty.

Za předpokladu, že v  $z = \pm t/2$  je napěťová funkce  $\phi$  nulová, pak

$$C_1 = 0 \quad \text{a} \quad C_2 = \frac{G\theta t^2}{4}.$$

Dosazením konstant zpět do rovnice (5.1) dostaneme

$$\phi = -G\theta \left( z^2 - \frac{t^2}{4} \right).$$

Z rovnic (3.21) poté vyjádříme smyková napětí jako

$$\tau_{xz} = -\frac{\partial\phi}{\partial y} = 0 \quad (5.2)$$

$$\tau_{xy} = \frac{\partial\phi}{\partial z} = -2G\theta z. \quad (5.3)$$

<sup>3</sup> Níže uvedené numerické výsledky v kapitole 7.2 získané metodou konečných prvků správnost tohoto předpokladu potvrzují.

Vidíme, že smyková napětí napříč tloušťkou se mění lineárně a v podélném směru jsou rovna nule. [2]

Dosazením výrazu pro  $\phi$  do rovnice (3.28) dostaneme

$$J = \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-t/2}^{t/2} (2z^2 - \frac{t^2}{2}) dy dz,$$

tedy

$$J = \frac{bt^3}{3}. \quad (5.4)$$

Na základě rovnice (3.29) můžeme přepsat rovnici (5.3) do tvaru

$$\tau_{xy} = -\frac{2M_k}{J} z. \quad (5.5)$$

Maximální hodnota  $\tau_{xy}$  je v bodech  $z = \pm t/2$  a má hodnoty

$$\tau_{max} = \pm \frac{M_k t}{J} = \pm \frac{3M_k}{bt^2} \quad (5.6)$$

Výrazy pro posuv  $u$  snadno dostaneme z rovnic (3.14):

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\theta y,$$

$$u = -\theta y z + h(y).$$

Porovnáním s výsledkem první rovnice (3.14) vidíme, že  $h(y)$  je rovno nule. Nahrazením  $\theta$  za  $\frac{M_k}{GJ}$  dostaneme

$$u = \frac{M_k}{GJ} y z. \quad (5.7)$$

Na základě těchto výsledků jsme nyní schopni řešit téměř jakékoliv tenkostěnné otevřené profily, pokud dokážeme průřez rozdělit na jednotlivé obdélníky. Dělením průřezu získáme geometrickou konstantu  $J$  jako součet dílčích konstant všech obdélníků. [2]

Na obrázku (5.2) můžeme vidět různé tvary otevřených tenkostěnných průřezů a jim odpovídajících vypočtených polárních momentů  $J$ .

Vztah pro výpočet polárního momentu složeného průřezu tedy můžeme formulovat jako

$$J = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n b_i t_i^3. \quad (5.8)$$

Maximální smykové napětí na jednotlivém prvku  $i$  spočítáme z rovnice (5.6). Neuvažujeme však celý krouticí moment, ale pouze jeho část, odpovídající míře  $J_i$  z celkového polárního momentu  $J$ . Tedy část odpovídající hodnotě

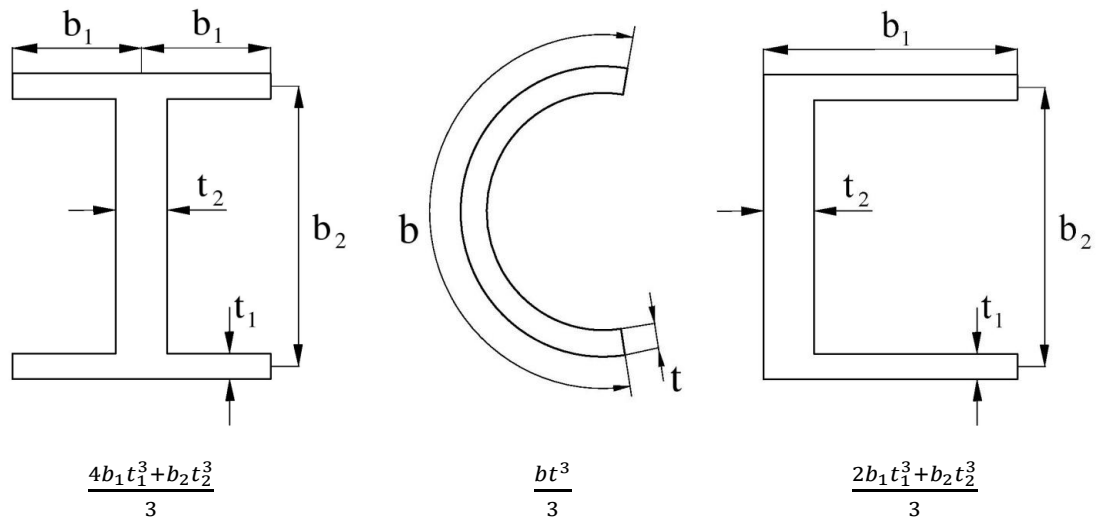
$$J_i M_k / J.$$

Pro prvek  $i$  tedy platí

$$(\tau_{max})_i = \frac{M_k J_i (t_i)_{max}}{J} = \frac{M_k (t_i)_{max}}{J} . \quad (5.9)$$

A celkové maximální smykové napětí je

$$\tau_{max} = \frac{M_k t_{max}}{J} . \quad (5.10)$$



Obr. 5.2 Typické tenkostěnné otevřené průřezy a jejich polární kvadratické momenty.

## 6 Analytické řešení vybraných úloh krutu prutů s nekruhovým příčným průřezem

V následující kapitole použití výše odvozených rovnic ilustrujeme na jednoduchých příkladech. První řešený příklad se bude týkat kruhového a eliptického příčného průřezu. Využijeme v něm tedy vztahů z kapitol 2 a 4. Geometrie těchto příčných průřezů je jednoduchá, proto by získané výsledky měly být velice přesné, samozřejmě za splnění podmínky platnosti předpokladů, za kterých byly výše popsány vzorce odvozeny. Další příklad se bude týkat tenkostěnných otevřených profilů. K jeho řešení nám poslouží vztahy odvozené v kapitole 5. Jelikož se již jedná o geometricky složitější průřezy a předpoklady analytického řešení jsou tudíž silnější, získané výsledky mohou kolidovat se skutečností. Správnost a šíře aplikace výše uvedených analytických vztahů zhodnotíme v dalších kapitolách, kde je srovnáme s numerickými výsledky získanými metodou konečných prvků.

### 6.1 Porovnání maximálního smykového napětí kruhového a eliptického průřezu

V této podkapitole si názorně ukážeme závislost smykového napětí při kroucení prutu kruhového průřezu při změně na eliptický průřez. Budeme tedy měnit poměr hlavních poloos z hodnot  $\frac{a}{b} = 1$  na  $\frac{a}{b} > 1$ . Zvětšování tohoto poměru budeme provádět za konstantní velikosti plochy průřezu  $S$ .

Mějme prut kruhového průřezu o ploše  $S$ , který je zatížen kroučícím momentem  $M_k$ . Naším úkolem je zjistit největší poměr hlavních poloos  $\frac{a}{b}$  při zachování velikosti plochy příčného průřezu  $S$  tak, aby se maximální smykové napětí vyvolané momentem  $M_k$  změnilo nejvýše o 10%. Tuto hodnotu změny napětí považujeme za únosnou chybu, při níž by se ještě mohl aplikovat algoritmus krutu prutů s kruhovým průřezem na problém krutu prizmatických prutů s eliptickým příčným průřezem. Mějme dány hodnoty geometrie prutu a jeho zatížení následovně

$$M_k = 10^5 \text{ Nmm}, S = 100 \text{ mm}^2$$

Pro poměr poloos  $\frac{a}{b} = 1$ , tedy kruh, spočítáme z velikosti plochy  $S$  poloměr  $r$

$$S = \pi r^2 \Rightarrow r = \sqrt{\frac{S}{\pi}} = \sqrt{\frac{100}{\pi}} \doteq 5.6419 \text{ mm}$$

Pro kruhový průřez, to znamená že  $a = b = r$  a z rovnice (4.5) plyne

$$\tau_{max1} = \frac{2M_k}{\pi r^3} = \frac{2 \cdot 100\,000}{\pi \cdot 5.6419^3} \doteq 354.49 \text{ MPa}$$

Pokud je maximální povolené napětí o 10% větší než u kruhového průřezu platí

$$\tau_{krit} = 1.1 \cdot \tau_{max1} = 1.1 \cdot 354.49 = 389.94 \text{ MPa}.$$

Jestliže plocha elipsy  $S_{elipsa} = \pi ab$ , pak  $a = \frac{S_{elipsa}}{\pi b}$ . Dosazením  $a$  do rovnice (4.5) dostaneme

$$\tau_{krit} = \frac{2M_k}{\pi \frac{S_{elipsa}}{\pi b} b^2}$$

Z toho můžeme vyjádřit  $b$  jako

$$b = \frac{2M_k}{\tau_{krit} S} = \frac{2 \cdot 100\,000}{389.94 \cdot 100} = 5.123 \text{ mm}$$

Dále pak dopočítáme  $a$

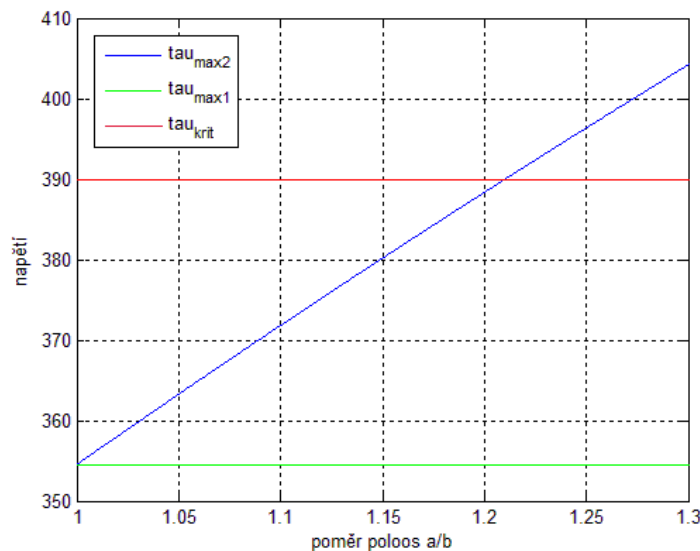
$$a = \frac{S_{elipsa}}{\pi b} = \frac{100}{\pi \cdot 5.123} = 6.213 \text{ mm}$$

Maximální poměr poloos elipsy při daných kriteriích a parametrech je tedy

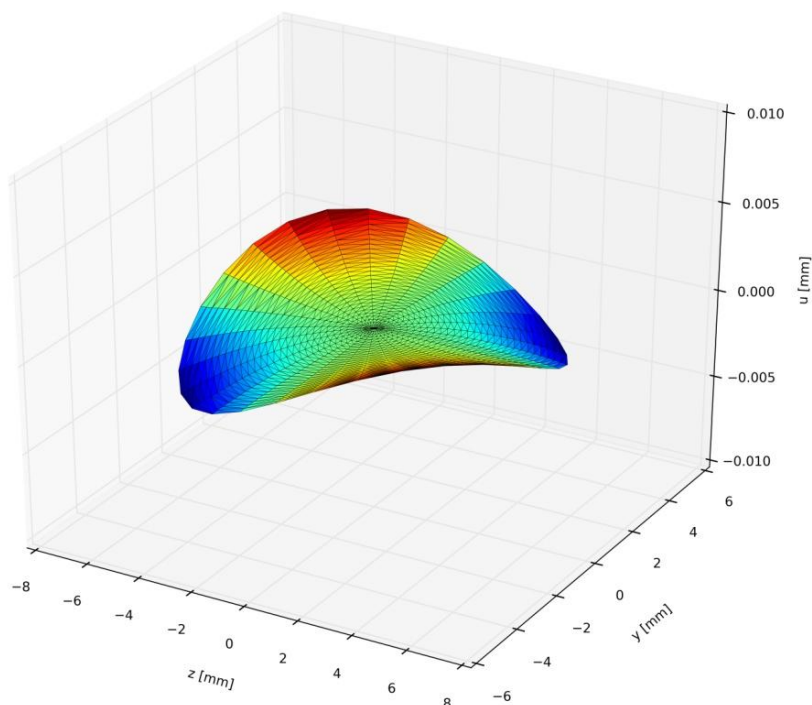
$$\frac{a}{b} = \frac{6.213}{5.123} = 1.21$$

Jednoduchý průběh maximálních hodnot smykových napětí v kruhovém příčném průřezu  $\tau_{max1}$  a eliptickém průřezu  $\tau_{max2}$  v závislosti na změně poměru velikosti poloos eliptického průřezu je zobrazen na obrázku 6.1. Napětí  $\tau_{max1}$  (zelená barva) znázorňuje hodnotu napětí pro případ kdy je poměr poloos roven jedné a průběh  $\tau_{max2}$  (modrá barva) se mění dle rovnice (4.5). Červenou barvou je vyznačena kritická hodnota změny napětí o 10% vzhledem k hodnotám napětí v kruhovém příčném průřezu.

Pro lepší představu co se přesně děje s eliptickým příčným průřezem při zatížení kritickým napětím, ukazuje obrázek 6.2, kde na svislé ose (osa z) je vyneseno posunutí ve směru střednice prutu. Obrázek názorně ukazuje borcení příčného průřezu a tedy porušování základního předpokladu zachování rovinnosti příčného průřezu prutu při jeho zatěžování.



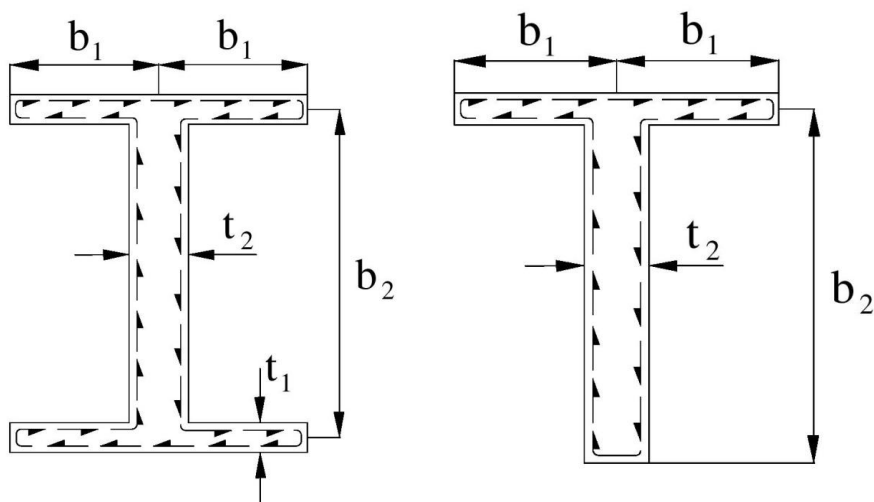
Obr. 6.1 Graf závislosti velikosti smykového napětí na poměru poloos  $\frac{a}{b}$ .



Obr. 6.2 Graf znázorňující borcení příčného eliptického průřezu.

## 6.2 Analytické řešení některých úloh krutu přímého prutu s příčným průřezem ve tvaru tenkostěnného profilu

Jak už název podkapitoly naznačuje, nyní si názorně předvedeme postup výpočtu krutu přímých prutů s příčným průřezem ve tvaru některých tenkostěnných profilů vyskytujících se v praxi. Zvolili jsme I a T profily, které se nejčastěji používají jako ocelové konstrukce, stropní překlady, stožáry elektrických rozvodů apod. Ukážeme si, jaký vliv na maximální smykové napětí bude mít jedna strana navíc u profilu I, oproti profilu tvaru T.



Obr. 6.3 Složené tenkostěnné I a T profily.

Mějme dva tenkostěnné otevřené profily podle obr. 6.3. Naším úkolem bude dle vztahů odvozených v kapitole 5. spočítat a porovnat maximální smyková napětí v těchto příčných průřezech prutu vyvolána kroutícím momentem  $M_k$ . Rozměry zakótovány v obrázku mají hodnoty:  $b_1 = 25 \text{ mm}$ ,  $b_2 = 50 \text{ mm}$ ,  $t_1 = 5 \text{ mm}$ ,  $t_2 = 8 \text{ mm}$ , velikost krouticího momentu je  $M_k = 100\,000 \text{ Nmm}$ .

Dle rovnice (5.8) spočítáme celkové polární momenty těchto složených profilů, viz tab.6.1.

I profil	T profil
$S = 2 \cdot (t_1 \cdot 2b_1) + t_2 \cdot (b_2 - t_1)$	$S = (t_1 \cdot 2b_1) + t_2 \cdot (b_2 - \frac{t_1}{2})$
$S = 2 \cdot (5 \cdot 2 \cdot 25) + 8 \cdot (50 - 5) = 860 \text{ mm}^2$	$S = (5 \cdot 2 \cdot 25) + 8 \cdot (50 - 2,5) = 630 \text{ mm}^2$
$J_I = \frac{4b_1t_1^3 + b_2t_2^3}{3}$	$J_T = \frac{2b_1t_1^3 + b_2t_2^3}{3}$
$J_I = \frac{4 \cdot 25 \cdot 5^3 + 50 \cdot 8^3}{3} = 12\,700 \text{ mm}^4$	$J_T = \frac{2 \cdot 25 \cdot 5^3 + 50 \cdot 8^3}{3} = 10\,616,667 \text{ mm}^4$

Tab. 6.1 Polární momenty profilů tvaru I a T.

Poté z rovnice (5.10) dostaneme maximální smyková napětí, viz tab. 6.2.

I profil	T profil
$\tau_{\max I} = \frac{M_t t_2}{J_I}$	$\tau_{\max T} = \frac{M_t t_2}{J_t}$
$\tau_{\max I} = \frac{100\,000 \cdot 8}{12\,700} = 62,992 \text{ MPa}$	$\tau_{\max T} = \frac{100\,000 \cdot 8}{10\,616,667} = 75,353 \text{ MPa}$

Tab. 6.2 Maximální smyková napětí profilu tvaru I a T.

Z výsledků vidíme, že díky většímu polárnímu momentu, má I profil téměř o 20% menší maximální smykové napětí. To však vzhledem k rozdílu velikosti ploch průřezů (necelých 37%) není až tak rapidní rozdíl a proto je někdy z hlediska snížení nákladů na materiál výhodné použít nosníky s příčným průřezem tvaru T.

## 7 Numerické řešení pomocí MKP

Metoda konečných prvků je obecná numerická metoda, která může být využita k řešení celé řady úloh. Kromě problémů mechaniky (statiky a dynamiky pevných a poddajných těles) se běžně využívá pro modelování proudění kapalin, pro úlohy vedení tepla, k analýze elektromagnetických polí apod. [4]

Atraktivita metody vyplývá z její poměrně velké univerzálnosti a schopnosti popsat i značně komplikované a rozsáhlé problémy. Metoda je také velmi snadno algoritmizovatelná. K určitým nevýhodám patří poměrně velká výpočetní náročnost – metodu nelze prakticky použít bez výpočetní techniky, a to ani pro úlohy, které by byly jinou metodou řešitelné ručním výpočtem. [4]

V nadcházejících kapitolách této práce si numericky spočítáme již výše analyticky řešené příklady. Modelování a výpočty budeme provádět v softwaru ANSYS Classic 15.0, který využívá metodu konečných prvků. Naším cílem bude porovnat tyto výsledky s analytickými výsledky uvedenými výše.

Pro modelování všech prutů budeme používat prvek BEAM188. Je to lineární<sup>4</sup> 3-D prvek se šesti stupni volnosti v každém uzlu. Patří mezi ně posuvy v osách  $x, y, z$  a rotace kolem těchto os. BEAM188 je vhodný pro analýzu štíhlých až středně tlustých prutů. Prvek je založen na teorii Timoshenkova<sup>5</sup> prutu. Prvek je vhodný pro řešení lineárních úloh, úloh s velkým natočením nebo nelineárních úloh s velkým přetvořením.[5]

---

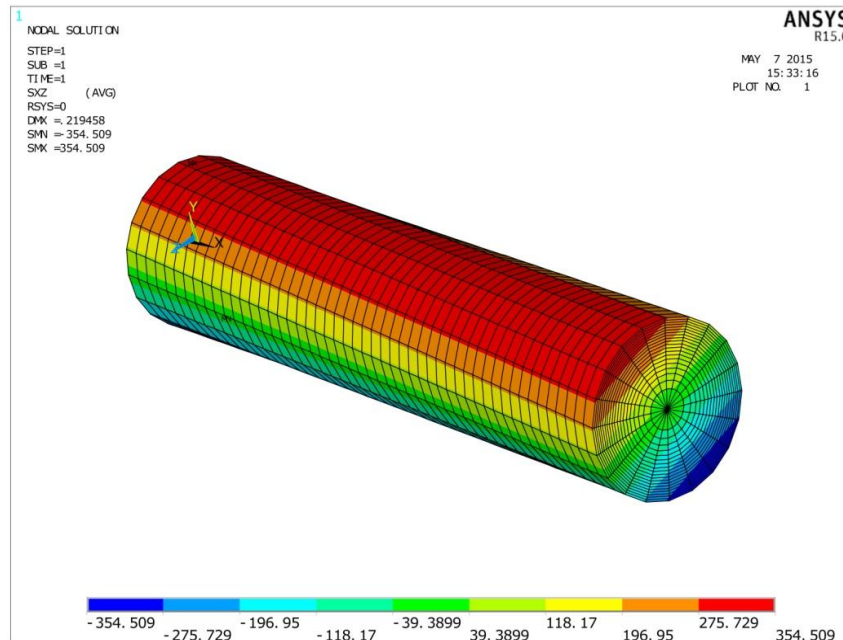
<sup>4</sup> Je definován dvěma uzly.

<sup>5</sup> Timoshenkova teorie prutu zahrnuje smykové účinky napětí na deformaci.

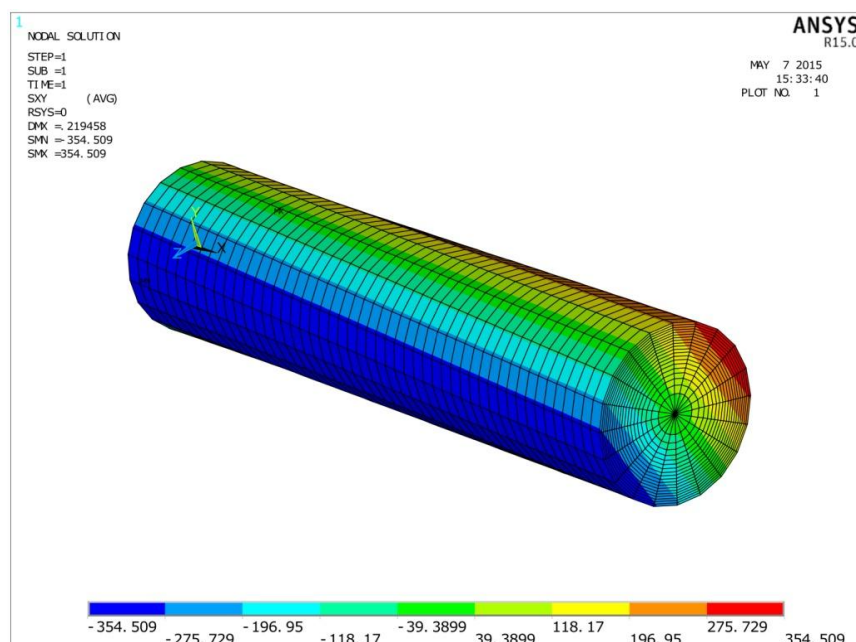
## 7.1 MKP analýza prutu s kruhovým a eliptickým příčným průřezem

Jako první jsme analyticky řešili příklad, ve kterém jsme hledali závislost změny napětí v příčném průřezu na poměru hlavních poloos elipsy.

Vycházeli jsme z kruhového průřezu, pro který jsme z rovnice (2.1) spočítali maximální smykové napětí. Platnost výroku, že u kruhového průřezu jsou smyková napětí na celém povrchu stejná, si můžeme ověřit vykreslením obou smykových napětí  $\tau_{xy}$  a  $\tau_{xz}$ .

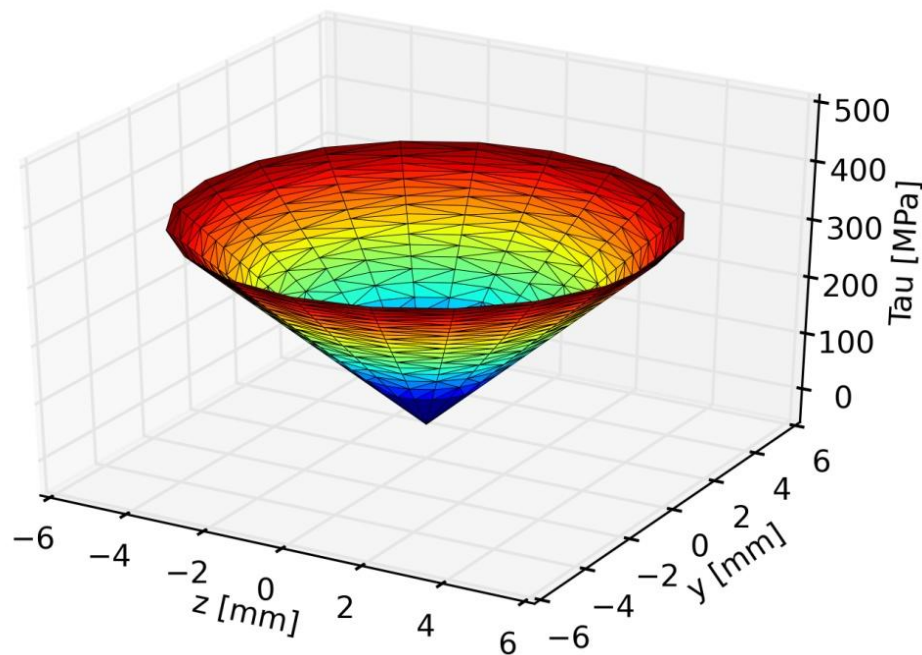


Obr. 7.1 Smyková napětí kruhového příčného průřezu  $\tau_{xz}$ .



Obr. 7.2 Smyková napětí kruhového příčného průřezu  $\tau_{xy}$ .

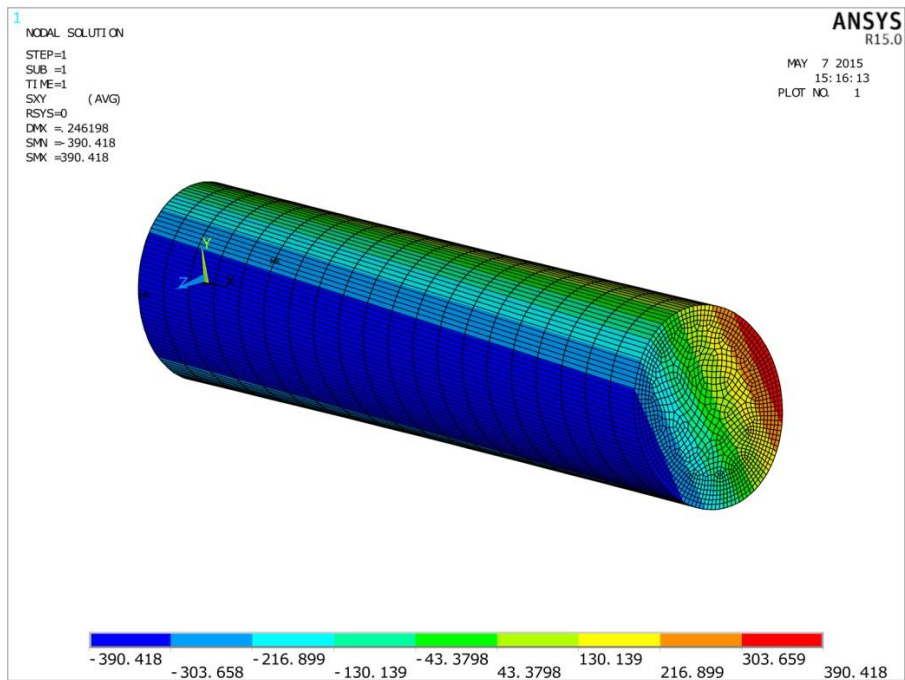
Na obr. 7.1 a 7.2 vidíme, že obě složky smykových napětí jsou opravdu stejné. Platí tedy tvrzení, že u prutů kruhových příčných průřezů jsou smyková napětí ve všech bodech stejně vzdálených od středu stejná. To si můžeme také znázornit na 3-D grafu, viz obr. 7.3. Ten jsme vytvořili na základě hodnot smykových napětí v jednotlivých uzlech sítě. Hodnoty jejich souřadnic jsou vyneseny na vodorovných osách grafu (ose  $y$  a  $z$ ). Na svislou osu jsme vynášely hodnoty smykových napětí. Kónický tvar grafu názorně ilustruje nulová napětí ve středu příčného průřezu a maximální hodnoty napětí podél obvodu průřezu. Pokud srovnáme výsledky analytického a numerického řešení, vyjde nám téměř nulový rozdíl. Tato nepatrná odchylka je v praxi zanedbatelná a proto vztah pro výpočet smykových napětí u prutů s kruhovým příčným průřezem lze běžně využívat.



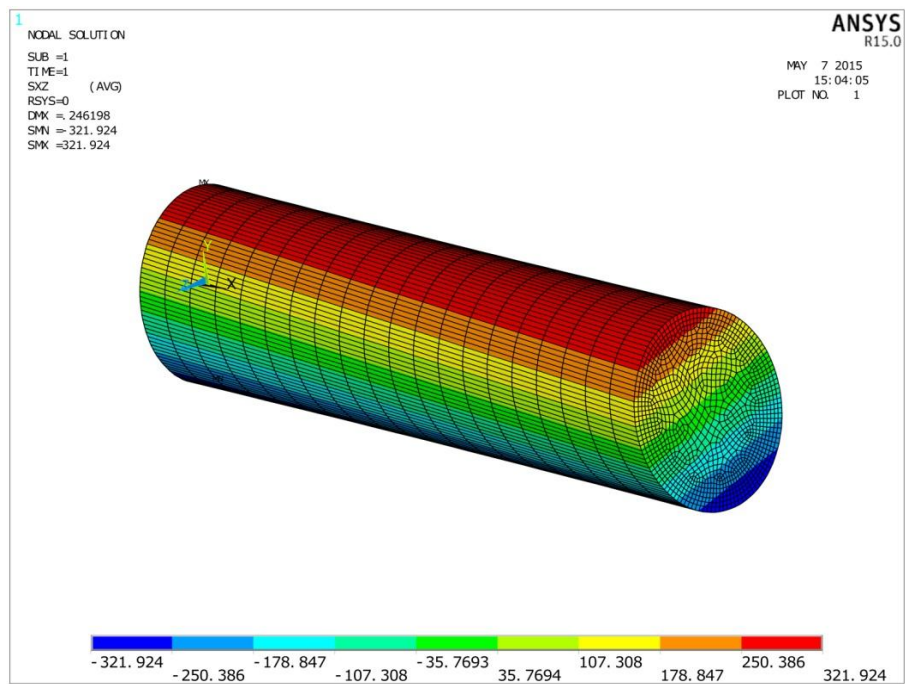
Obr. 7.3 Graf závislosti smykových napětí na souřadnicích kruhového příčného průřezu.

Nyní si zobrazíme analýzu prutu s eliptickým příčným průřezem a s velikostmi poloos, které jsme v kapitole 4.3 určili jako kritické.

Na obr. 7.4 a 7.5 jsou znázorněna smyková napětí tohoto průřezu. Maximální smykové napětí je v místě ležícím na kratší poloose, nejdál od středu. To je v souladu se vztahy odvozenými v kapitole 4.1. Srovnáním analytického řešení s výsledky získanými MKP dojdeme k rozdílu asi 0,5 MPa, což činí asi 0,1 %. Vzhledem k tomu, že při odvozování vztahů pro hodnoty maximálních smykových napětí u prutů s eliptickým příčným průřezem jsme nezavedli žádný dodatečný předpoklad vedoucí k zjednodušení úlohy a následného řešení, můžeme toto řešení považovat za přesné a chybu numerického výpočtu, ač nepatrnou, připsat na vrub metody MKP.



Obr. 7.4 Maximální smykové napětí  $\tau_{xy}$  eliptického příčného průřezu.



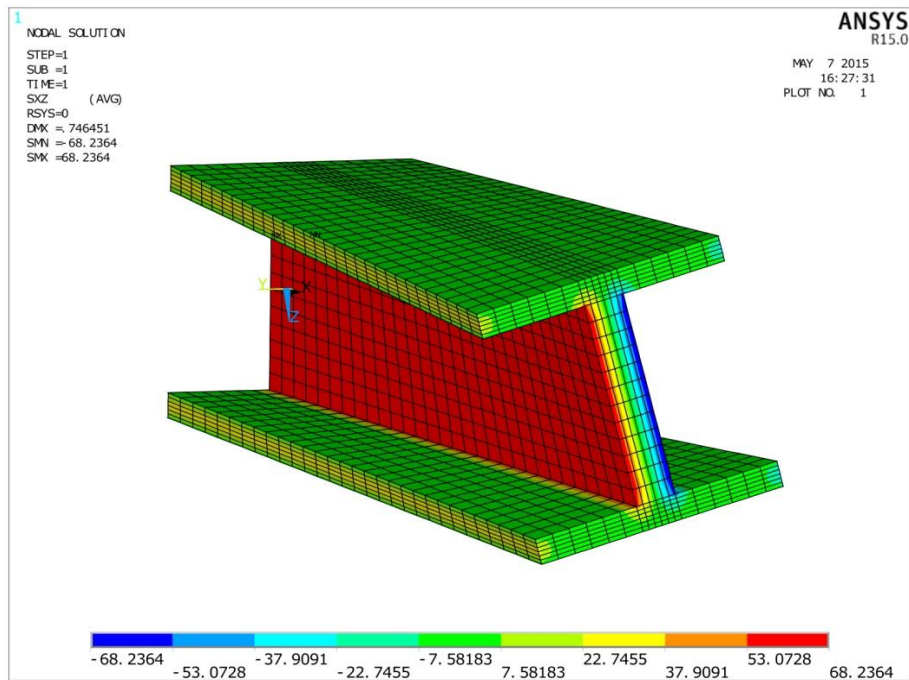
Obr. 7.5 Maximální smykové napětí  $\tau_{xz}$  eliptického příčného průřezu.

## 7.2 MKP analýza složených tenkostěnných průřezů

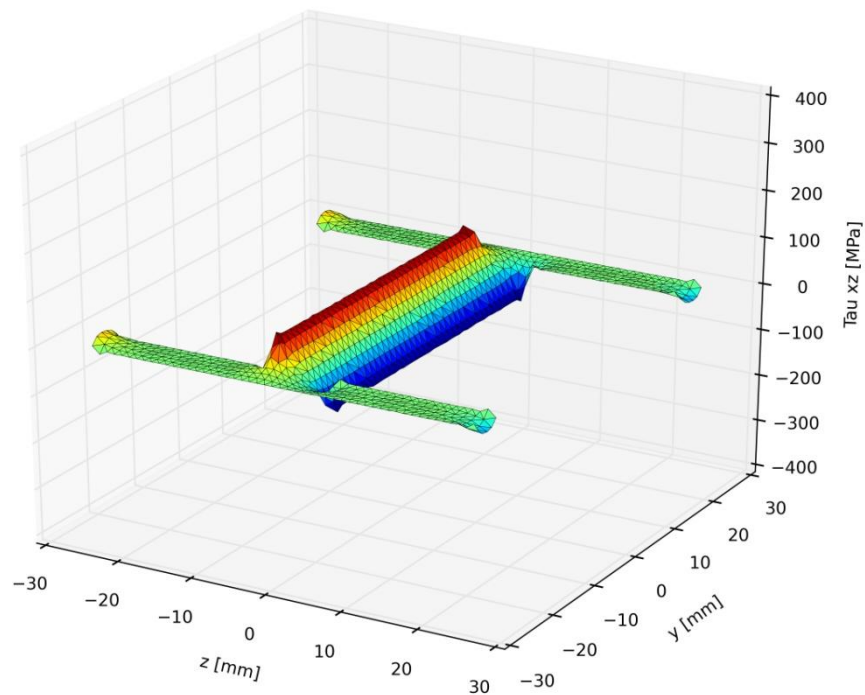
Další úlohou v části věnované analytickému odvození vztahů pro maximální smyková napětí v příčných průřezech byla problematika kroucení prutů s příčnými průřezy ve tvaru tenkostěnných profilů I a T. Na obr. 7.6 je analýza prutu s příčným průřezem tvaru I. Rozměry profilů a hodnoty zatížení prutu jsou dány v kapitole 5.1. V tomto příkladu již můžeme vidět větší odchylky mezi hodnotami získanými analyticky a numericky. Rozdíl maximálních hodnot smykových napětí v průřezu činí přibližně 8,3%. Na rozdíl od případu prutů s kruhovým a eliptickým příčným průřezem, větší spolehlivost výsledků určitě vykazuje numerický model MKP. Důvodem je zavedení zlehčujících předpokladů konstantního průběhu smykových napětí v podélném směru stojiny a pásnic v případě analytického řešení. Proto lze řešení MKP přikládat větší váhu, jelikož není zatížené žádnými dodatečnými předpoklady na řešení problému. Přesto chyba analytického řešení není nijak alarmující a v řadě případů akceptovatelná.

Pro lepší představu rozložení smykových napětí v příčném průřezu jsme v softwaru ANSYS nechali vypsát souřadnice jednotlivých uzlů prvků a v nich vyjádřené hodnoty smykových napětí  $\tau_{xz}$ . Vynesení těchto hodnot do 3-D grafu dobře ilustruje rozložení smykových napětí v příčném průřezu, viz obr. 7.7.

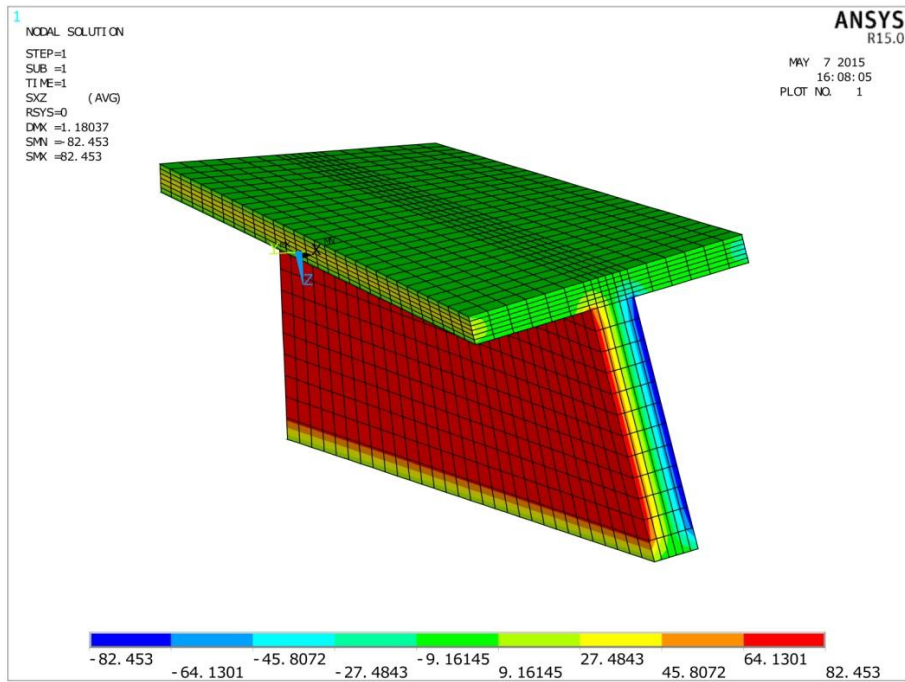
U T-profilu je rozdíl získaných hodnot smykových napětí ještě o něco větší. Zatímco jednoduchým vztahem (5.10) nám vyšlo přibližně 75,3 MPa, metoda MKP napětí vyčíslila lehce přes 82 MPa. Rozdíl hodnot získaných numerickým a analytickým přístupem je přibližně 9% v neprospěch analytického řešení. Zdůvodnění chyby analytického řešení je podobně jako v případě průřezu ve tvaru profilu I. Rozložení smykových napětí v příčném průřezu ilustrují obrázky 7.8 a 7.9.



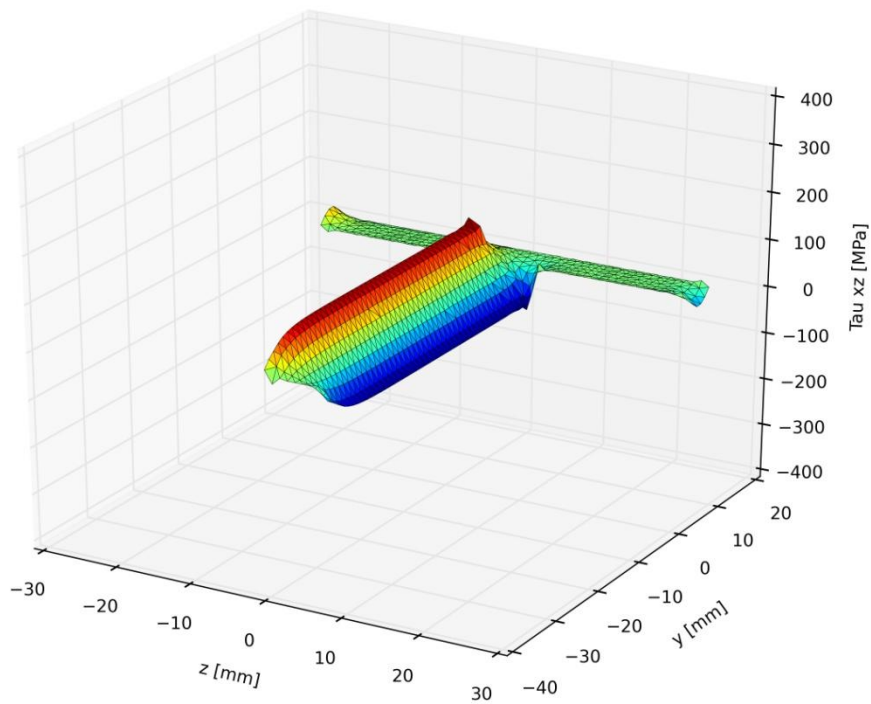
Obr. 7.6 Průběh smykového napětí  $\tau_{xz}$  příčného průřezu tvaru I.



Obr. 7.7 Graf velikostí smykového napětí  $\tau_{xz}$  v příčném průřezu tvaru I.



Obr. 7.8 Průběh smykového napětí  $\tau_{xz}$  příčného průřezu tvaru T.



Obr. 7.9 Graf velikostí smykového napětí  $\tau_{xz}$  v příčném průřezu tvaru T.

Shrnutí výsledků získaných analytickým a numerickým přístupem včetně absolutních a relativních rozdílů mezi nimi ukazuje tabulka 7.10.

Příčný průřez	Maximální smykové napětí		Rozdíl	
	Analytické řešení	MKP řešení		
	[MPa]	[MPa]	[MPa]	[%]
Kruh	354,49	354,509	0,019	0,005
Elipsa	389,94	390,418	0,478	0,12
I profil	62,992	68,2364	5,244	8,32
T profil	75,353	82,453	7,1	9,42

Tab. 7.10 Výsledky maximálních smykových napětí.

## 8 Závěr

Cílem práce bylo seznámení s problematikou kroucení prutů s nekruhovými příčnými průřezy, způsobem jejího řešení a dostupnými analytickými příp. numerickými nástroji umožňující tato řešení nalézt. Práce byla doplněna konkrétními řešeními krutu prutů s nekruhovými příčnými průřezy a to jak z analytického tak i numerického hlediska.

První část práce se věnovala odvození základních vzorců pro výpočet krutu prutů s kruhovým příčným průřezem. Tyto vztahy byly aplikovány na některé typické tvary příčných průřezů. Získané výsledky byly graficky zpracovány a zaneseny do tabulek. Následující část práce se věnovala numerickému přístupu řešení dané problematiky pomocí metody MKP. Na závěr tyto výsledky byly srovnány s výsledky analytickými. Kromě vzájemného srovnání výsledků získaných numerickou a analytickou cestou, v případě analytického výpočtu u kruhového a eliptického příčného průřezu bylo cílem popsat závislost změny smykových napětí na změně poměru hlavních poloos eliptického průřezu. Z odvozených vztahů plyne, že tato závislost je nelineární.

Jako další byly analyticky řešeny pruty s příčnými průřezy ve tvaru tenkostěnných otevřených profilů tvaru I a T, které se v praxi často vyskytují. Při stejném zatížení bylo maximální smykové napětí v profilu tvaru T téměř o 20% větší než u průřezů ve tvaru profilu I. Pokud však vezmeme v potaz úsporu materiálu (necelých 37%), může být nosník s tímto profilem mnohdy výhodnější.

Následující kapitoly se věnovaly numerické metodě MKP. V softwaru ANSYS Classic 15, který tuto metodu využívá, byly vymodelovány a spočítány pruty z předešlých úloh vedených v analytickém duchu. Při srovnání analytických a numerických výsledků kruhového a eliptického průřezu byl rozdíl takřka nulový. Je to z důvodu jednoduchosti geometrie příčného průřezu. Rozdíly však již byly patrné při srovnání analytiky a numeriky u prutů s tenkostěnnými příčnými průřezy. Zde vlivem složitější geometrie rozdíl narostl v případě T-profilu na necelých 9,5%.

Přestože analytický přístup řešení krutu prutů s nekruhovým příčným průřezem vyžaduje zjednodušující předpoklady řešení úloh s geometricky složitějšími tvary příčných průřezů, příklady uvedené v předkládané bakalářské práci ukazují, že lze toto řešení u specifických (nicméně v praxi běžných) příčných průřezů bezpečně použít. Nespornou výhodou analytického přístupu je jednoduchost odvozených vztahů a vyhnutí se nesporně složitějšímu, časově a finančně nákladnějšímu numerickému výpočtu. Dá se však předpokládat, že u komplikovanějších a těžko parametrizovatelných profilů je použití analytických výsledků značně omezené.

## 9 Seznam použitých zdrojů

- [1] FRANCŮ, J. – NOVÁČKOVÁ, P. – JANÍČEK, P. Torsion of a non-circular bar. *Engineering Mechanics*, 2012, vol. 19, no. 1, s. 45-60. ISSN: 1805-4633.
- [2] ODEN, J.T. – RIPPERGER, E.A.. Mechanics of elastic structures. 2d ed. New York: McGraw-Hill, 1981, 460 p. ISBN 0-07-047507-5.
- [3] TREBUŇA, F. – JURICA, V. – ŠIMČÁK, F. Pružnost' a pevnost' II., Košice, Viena, 2000
- [4] BROŽOVSKÝ, J., KONEČNÝ, P. Metoda konečných prvků ve stavební mechanice. [online]. Ostrava, 11.9.2012 [cit. 10.3.2015]. Dostupné z: [http://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/unit/metoda\\_konecných\\_prvku\\_stavebni\\_mechanika\\_interaktivne.pdf](http://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/unit/metoda_konecných_prvku_stavebni_mechanika_interaktivne.pdf)
- [5] ANSYS, Inc., *Ansys 15.0 Help*
- [6] GOCKENBACH, M. S. Understanding and implementing the finite element method. Philadelphia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2006, 363 p. ISBN 9780898716146.

## 10 Seznam použitých symbolů a zkratek

Symbol	Rozměr	Veličina
$S$	$[mm^2]$	plocha příčného průřezu
$a, b$	$[mm]$	hlavní poloosy elipsy
$b_1, b_2$	$[mm]$	rozměry tenkostěnných profilů
$C_1, C_2$	$[-]$	integrační konstanty
$G$	$[MPa]$	modul pružnosti ve smyku
$J_p$	$[mm^4]$	polární kvadratický moment kruhu
$J$	$[mm^4]$	polární kvadratický moment obecného průřezu
$J_I$	$[mm^4]$	polární kvadratický moment průřezu tvaru I
$J_T$	$[mm^4]$	polární kvadratický moment průřezu tvaru T
$M_k$	$[Nmm]$	krouticí moment
$n$	$[mm]$	libovolná přímka na příčném průřezu
$r$	$[mm]$	obecný poloměr
$s$	$[mm]$	hraniční křivka
$t_{1,2}$	$[mm]$	tloušťky profilů
$t_y$	$[mm]$	průmět tečny do roviny $xy$
$t_z$	$[mm]$	průmět tečny do roviny $xz$
$u$	$[mm]$	posuv ve směru osy $x$
$v$	$[mm]$	posuv ve směru osy $y$
$w$	$[mm]$	posuv ve směru osy $z$
$\gamma_{xy}$	$[^\circ]$	skos v rovině $xy$
$\gamma_{xz}$	$[^\circ]$	skos v rovině $xz$
$\gamma_{x\varphi}$	$[^\circ]$	skos v závislosti na úhlu zkroucení
$\gamma_{yz}$	$[^\circ]$	skos v rovině $yz$
$\Delta$	$[-]$	Laplaceův operátor
$\varepsilon_v$	$[-]$	celková poměrná deformace
$\varepsilon_x$	$[-]$	poměrná deformace ve směru osy $x$

$\varepsilon_y$	[-]	poměrná deformace ve směru osy $y$
$\varepsilon_z$	[-]	poměrná deformace ve směru osy $z$
$\theta$	[ $^\circ/mm$ ]	poměrný úhel zkroucení
$\mu$	[-]	Poissonův poměr
$\sigma_x$	[MPa]	normálové napětí ve směru osy $x$
$\sigma_y$	[MPa]	normálové napětí ve směru osy $y$
$\sigma_z$	[MPa]	normálové napětí ve směru osy $z$
$\tau_{krit}$	[MPa]	maximální povolené smykové napětí
$\tau_{max}$	[MPa]	maximální smykové napětí
$\tau_{max1}$	[MPa]	maximální smykové napětí kruhu
$\tau_{maxI}$	[MPa]	maximální smykové napětí profilu I
$\tau_{maxT}$	[MPa]	maximální smykové napětí profilu T
$\tau_{xy}$	[MPa]	smykové napětí v rovině $xy$
$\tau_{xz}$	[MPa]	smykové napětí v rovině $xz$
$\tau_{yz}$	[MPa]	smykové napětí v rovině $yz$
$\tau_{x\varphi}$	[MPa]	smykové napětí v závislosti na úhlu zkroucení
$\varphi$	[ $^\circ$ ]	úhel zkroucení
$\phi$	[-]	napět'ová funkce
$\Omega$	[ $mm^2$ ]	oblast kde je definována funkce $f$

## 11 Seznam obrázků

Obr. 2.1 a) Prut kruhového příčného průřezu namáhaný prostým krutem	16
Obr. 2.1 b) Uvolněný elementární prvek hřídele	16
Obr. 3.1 a) Prizmatický prut nekruhového průřezu	18
Obr. 3.1 b) Elementy prutu s nemožným (čárkovaná čára) a možným (plná čára) smykovým napětím	18
Obr. 3.1 c) Deformace rohových elementů prutu	18
Obr. 3.2 Posuv bodu B	19
Obr. 3.3 Deformace elementárního prvku, která nenastane, pokud je $\gamma_{yz}$ nula	20
Obr. 3.4 Funkce $\phi(y, z)$ znázorňující plochu nad příčným průřezem	23
Obr. 3.5 Libovolný směr přímky $n$ v příčném průřezu	24
Obr. 3.6 Znázornění složek smykových napětí	25
Obr. 4.1 Eliptický průřez	27
Obr. 5.1 Tenkostěnný obdélníkový příčný průřez	29
Obr. 5.2 Typické tenkostěnné otevřené průřezy a jejich polární kvadratické momenty	31
Obr. 6.1 Graf závislosti velikosti smykového napětí na poměru poloos $\frac{a}{b}$	33
Obr. 6.2 Graf znázorňující borcení příčného eliptického průřezu	34
Obr. 6.3 Složené tenkostěnné I a T profily	34
Obr. 7.1 Smyková napětí kruhového příčného průřezu $\tau_{xz}$	37
Obr. 7.2 Smyková napětí kruhového příčného průřezu $\tau_{xy}$	37
Obr. 7.3 Graf závislosti smykových napětí na souřadnicích kruhového příčného průřezu	38
Obr. 7.4 Maximální smykové napětí $\tau_{xy}$ eliptického příčného průřezu	39
Obr. 7.5 Maximální smykové napětí $\tau_{xz}$ eliptického příčného průřezu	39
Obr. 7.6 Průběh smykového napětí $\tau_{xz}$ příčného průřezu tvaru I	41
Obr. 7.7 Graf velikostí smykového napětí $\tau_{xz}$ v příčném průřezu tvaru I	41
Obr. 7.8 Průběh smykového napětí $\tau_{xz}$ příčného průřezu tvaru T	42
Obr. 7.9 Graf velikostí smykového napětí $\tau_{xz}$ v příčném průřezu tvaru T	42

## **12 Seznam tabulek**

Tab. 6.1 Polární momenty profilů tvaru I a T	35
Tab. 6.2 Maximální smyková napětí profilu tvaru I a T	35
Tab. 7.10 Výsledky maximálních smykových napětí	43