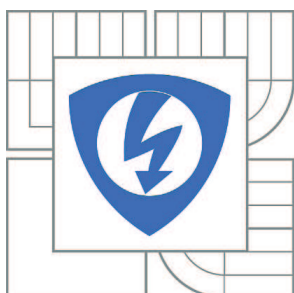


VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A KOMUNIKAČNÍCH
TECHNOLOGIÍ

ÚSTAV TELEKOMUNIKACÍ

FACULTY OF ELECTRICAL ENGINEERING AND COMMUNICATION
DEPARTMENT OF TELECOMMUNICATIONS

PROBLEMATIKA ZPRACOVÁNÍ SIGNÁLŮ V REÁLNÉM ČASE

REAL TIME SIGNAL PROCESSING

DIPLOMOVÁ PRÁCE

MASTER'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

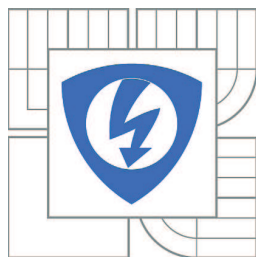
Bc. PAVEL NEPOVÍM

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Ing. PETR MLÝNEK

BRNO 2011



VYSOKÉ UČENÍ
TECHNICKÉ V BRNĚ

Fakulta elektrotechniky
a komunikačních technologií

Ústav telekomunikací

Diplomová práce

magisterský navazující studijní obor
Telekomunikační a informační technika

Student: Bc. Pavel Nepovím

ID: 72790

Ročník: 2

Akademický rok: 2010/2011

NÁZEV TÉMATU:

Problematika zpracování signálů v reálném čase

POKYNY PRO VYPRACOVÁNÍ:

Seznamte se s aplikační knihovnou Real Time Toolbox programu Matlab/Simulink a měřicí kartou AD622. Pomocí této knihovny a měřicí karty navrhnete laboratorní úlohu pro simulaci v reálném čase. Využijte vhodná vstupně/výstupní zařízení pro připojení pomocí Real Time Toolboxu k Matlabu. Vytvořenou úlohu teoreticky popište a vytvořte text laboratorní úlohy. Dále vytvořte úlohu na porovnání výpočetní náročnosti výpočtu FFT pomocí přímé metody a algoritmu.

DOPORUČENÁ LITERATURA:

- [1] Smékal, Z.: Číslíkové zpracování signálů. Skriptum VUT FEKT v Brně, 2009
- [2] Proakis, J., Ingle, K. : Digital Signal Processing using MATLAB (International Student Edition). Second Edition.. Thomson. 2007. ISBN: 0-495-24441-4
- [3] Proakis, J., Manolakis, D.: Digital signal processing: Principles, Algorithms, and Applications. Fourth Edition. Pearson Prentise Hall. 2007. ISBN 0-13-187374-1

Termín zadání: 7.2.2011

Termín odevzdání: 26.5.2011

Vedoucí práce: Ing. Petr Mlýnek

prof. Ing. Kamil Vrba, CSc.

Předseda oborové rady

UPOZORNĚNÍ:

Autor diplomové práce nesmí při vytváření diplomové práce porušit autorská práva třetích osob, zejména nesmí zasahovat nedovoleným způsobem do cizích autorských práv osobnostních a musí si být plně vědom následků porušení ustanovení § 11 a následujících autorského zákona č. 121/2000 Sb., včetně možných trestněprávních důsledků vyplývajících z ustanovení části druhé, hlavy VI. díl 4 Trestního zákoníku č.40/2009 Sb.

Abstrakt

Cílem diplomové práce je seznámit čtenáře s diskretní Fourierovou transformací DFT a jejím zavedením při spektrální analýze diskretních signálů. Dále pak popisuje efektivní výpočet DFT pomocí algoritmu rychlé Fourierovy transformace FFT a vlivy, které se objevují při DFT spektrální analýze, vliv délky DFT, vliv délky segmentu analyzovaného signálu a prosakování ve spektru.

Dále je vysvětlena problematika komplexní reprezentace reálných pásmově omezených signálů v základním pásmu, nazývaná komplexní obálkou signálů. Toto vyjádření využívá Hilbertovy transformace a analytického signálu. Práce také popisuje aplikační knihovnu Real Time Toolbox programového prostředí Matlab/Simulink, která s využitím měřicí karty AD622 umožňuje připojovat a zpracovávat skutečné signály v reálném čase. S využitím těchto prostředků je v programovém prostředí Matlab/Simulink vytvořena laboratorní úloha simulující komplexní vyjádření reálných pásmově omezených signálů v reálném čase.

Klíčová slova

diskretní Fourierova transformace DFT, rychlá Fourierova transformace FFT, Hilbertova transformace, komplexní obálka, Real Time Toolbox, měřicí karta AD622

Abstract

The aim of the master's thesis is to acquaint the reader with Discrete Fourier Transform DFT and its introduction to spectral analysis discrete time signals. Furthermore it describes efficient computation of the DFT using the algorithm Fast Fourier Transform FFT and effects that appear in the DFT spectral analysis, the effect of the length of the DFT, the effect of the length of the segment of the analysed signal and the leakage.

Next is explained the issue of the complex representation of real bandpass signals in the baseband, called the complex envelope of signals. This representation uses the Hilbert Transform and the analytic signal. The thesis also describes the application library Real Time Toolbox of the software Matlab/Simulink, that uses the data acquisition card AD622 allows to connect and process real signals in real time. In Matlab/Simulink with use this facilities is create the laboratory lesson, that simulating the complex representation of real bandpass signals in real time.

Keywords

Discrete Fourier Transform DFT, Fast Fourier Transform FFT, Hilbert Transform, Complex Envelope, Real Time Toolbox, Data Acquisition Card AD622

NEPOVÍM, P. *Problematika zpracování signálů v reálném čase*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií, 2011. 59 s. Vedoucí diplomové práce Ing. Petr Mlýnek.

Prohlášení

Prohlašuji, že svou diplomovou práci na téma „Problematika zpracování signálů v reálném čase“ jsem vypracoval samostatně pod vedením vedoucího diplomové práce s použitím odborné literatury a dalších informačních zdrojů, které jsou všechny uvedeny v seznamu literatury na konci práce.

Jako autor uvedené diplomové práce dále prohlašuji, že v souvislosti s vytvořením této diplomové práce jsem neporušil autorská práva třetích osob, zejména jsem nezasáhl nedovoleným způsobem do cizích autorských práv osobnostních a jsem si plně vědom následků porušení ustanovení § 11 a následujících autorského zákona č. 121/2000 Sb., včetně možných trestněprávních důsledků vyplývajících z ustanovení § 152 trestního zákona č. 140/1961 Sb.

V Brně dne 26. 5. 2011

.....
podpis autora

Poděkování

Děkuji vedoucímu diplomové práce Ing. Petru Mlýnkovi za velmi užitečnou metodickou pomoc a cenné rady při zpracování práce.

V Brně dne 26. 5. 2011

.....
podpis autora

Obsah

Úvod	10
1 Kmitočtová analýza signálů	11
1.1 Diskrétní Fourierova řada DTFS	11
1.2 Fourierova transformace diskretních signálů DTFT.....	12
1.3 Diskrétní Fourierova transformace DFT.....	12
1.3.1 Výpočet DTFT pomocí DFT.....	13
1.3.2 Výpočet DTFS pomocí DFT	13
1.3.3 Základní vlastnosti DFT	14
1.4 Efektivní výpočet DFT	16
1.4.1 Porovnání výpočetní náročnosti výpočtu DFT přímou metodou a algoritmem FFT	19
1.5 DFT spektrální analýza signálů	21
1.5.1 Vliv délky DFT N na podobu spektra	21
1.5.2 Vliv délky signálu L na N-bodové DFT spektru.....	22
1.5.3 Prosakování ve spektru (leakage)	25
1.5.4 Využití časových oken při DFT spektrální analýze	27
2 Reprezentace pásmově omezených signálů	30
2.1 Využití komplexních signálů pro reprezentaci pásmově omezených signálů.....	31
3 Real Time Toolbox	37
3.1 Práce s bloky	37
3.1.1 Vstupní bloky	38
3.1.2 Výstupní bloky.....	39
3.1.3 Bloky pro zvláštní použití	40
4 Závěr	41
Seznam literatury	42

Seznam obrázků

Obr. 1.1: Periodizace sekvence $x[n]$ při výpočtu DFT délky N : a) neperiodická sekvence $x[n]$ délky L , b) zperiodizovaná sekvence $x_p[n]$ s periodou $N > L$, c) zperiodizovaná sekvence $x_p[n]$ s periodou $N < L$ (časový aliasing).....	13
Obr. 1.2: Hodnoty komplexní exponenciály W_N na jednotkové kružnici pro: a) 4-bodovou DFT, b) 2-bodovou DFT.....	17
Obr. 1.3: 4-bodová DFT pomocí FFT.....	18
Obr. 1.4: Porovnání časové náročnosti výpočtu DFT algoritmem FFT a přímou metodou.	20
Obr. 1.5: N -bodové DFT obdélníkového okna délky L	22
Obr. 1.6: Vliv délky signálu L na DFT délky $N = 1000$ bodů, $f_{vz} = 1000$ Hz.	23
Obr. 1.7: Výřez animace demonstrující vliv délky DFT N , při konstantní délce signálu L na spektrální analýzu.....	24
Obr. 1.8: Výřez animace demonstrující vliv délky signálu L při konstantní délce DFT N na spektrální analýzu.....	24
Obr. 1.9: DFT spektrum signálu $x[n]$ délky, levý sloupec: celočíselného násobku periody, pravý sloupec: neceločíselného násobku periody.	25
Obr. 1.10: Vybraná časová okna a jejich spektra.	26
Obr. 1.11: Zperiodizovaný signál nesplňující podmínku (49) vynásobený: a) obdélníkovým oknem, b) Blackmanovým oknem.	27
Obr. 1.12: DFT spektrum signálu $x[n] = \cos[2\pi 240n]$: a) neváhovaného (obdélníkové okno), b) váhovaného Hammingovým oknem po normování.	28
Obr. 1.13: DFT spektrum signálu $x[n] = 5\cos[2\pi 240n] + 0,5\cos[2\pi 280n]$: a) neváhovaného (obdélníkové okno), b) váhovaného Hammingovým oknem.	29
Obr. 1.14: Výřez animace demonstrující vliv různých časových oken na časový průběh a spektrum signálu	29
Obr. 2.1: Amplitudové spektrum pásmově omezeného signálu.	30
Obr. 2.2: Výpočet analytického signálu pomocí Hilbertovy transformace.	33
Obr. 2.3: Kmitočtové charakteristiky Hilbertova transformátoru: a) amplitudové spektrum, b) fázové spektrum.	33
Obr. 2.4: Vývoj amplitudového spektra při komplexním vyjádření reálného pásmově omezeného signálu: a) amplitudové spektrum reálného pásmově omezeného signálu, b) amplitudové spektrum analytického signálu, c) amplitudové spektrum komplexní obálky.....	34
Obr. 2.5: Charakteristiky ideálního diskrétního Hilbertova transformátoru: a) impulsní charakteristika, b) amplitudové spektrum, c) fázové spektrum.....	36

Obr. 3.1: Knihovna bloků Real Time Toolbox.....	37
Obr. 3.2: Nastavení ovladače měřicí karty AD622.....	38

Úvod

Zpracování signálů je jedním z oborů, který umožnil prudký rozvoj moderních technologií, bez kterých si dnešní život nedokážeme představit (PC, televizní a multimediální technika, mobilní telefony, a další) a ovlivnil vývoj mnoha dalších oborů. Metody zpracování signálů se uplatňují v širokém spektru oborů, především v elektrotechnických oborech jako je telekomunikační a sdělovací technika, automatizace a měření a další. Velmi se také uplatňují ve zdravotnictví v diagnostické a zobrazovací technice, dále pak v meteorologii a také se využívají k vyhodnocování ekonomických údajů.

Pojem signál obecně vyjadřuje fyzikální veličinu (zprávu) nesoucí nějakou informaci. Sledováním a následnou analýzou parametrů signálů lze užitečnou informaci ze signálu získat. Parametry signálu se většinou v průběhu času mění. Zpracování signálů se tedy zabývá sledováním a následnou analýzou parametrů signálů, které popisují chování nějakého objektu (systému), ať už technického nebo biologického typu.

První část diplomové práce je zaměřena na kmitočtovou analýzu, jež je jednou z hlavních oblastí oboru zpracování signálů. Nejpoužívanějšími prostředky pro kmitočtovou analýzu jsou Fourierovy transformace, které popisují vztahy mezi vyjádřením signálů v časové a kmitočtové oblasti. Pozornost je především věnována diskrétní Fourierově transformaci DFT zpracovávající signály v diskrétní (číslíkové) formě. Je zde popsán algoritmus rychlé Fourierovy transformace FFT, který výrazně zefektivnil výpočet DFT a uvedena možnost měření jeho výpočetní efektivity oproti přímému výpočtu DFT. Práce dále popisuje vlivy, které ovlivňují podobu a následnou analýzu DFT spektra. Těmito vlivy jsou délka (počet bodů) DFT spektra, délka segmentu analyzovaného signálu a tzv. prosakování ve spektru. Práce je primárně určena pro studenty, kteří se s danou problematikou zpracování signálů seznamují, proto je kladen důraz na praktické ukázky a animace, které mohou sloužit jako výukové materiály v kurzech zabývajících se problematikou zpracování signálů.

V druhé části práce je pojednáno o možné reprezentaci reálných pásmově omezených signálů, které se velice často objevují v telekomunikačních systémech. Tyto signály se vyznačují úzkým spektrem soustředěným kolem nosného (středního) kmitočtu. Komplexní reprezentací lze tyto signály vyjádřit v základním pásmu, což je výhodné např. pro snadnější simulaci a snížení obvodových a výpočetních nároků telekomunikačních systémů. Toto vyjádření se nazývá komplexní obálkou signálu. Práce popisuje vyjádření komplexní obálky využitím Hilbertovy transformace a analytického signálu. Pro tuto problematiku je vytvořena v programovém prostředí Matlab/Simulink laboratorní úloha, ve které je jako vstupní rozhraní reálných signálů využita měřicí karta AD622. Simulaci v reálném čase zajišťuje aplikační knihovna Real Time Toolbox. Touto knihovnou se zabývá třetí část práce, kde jsou popisovány funkční bloky a jejich využití v modelech pro simulaci v reálném čase.

Hlavním výpočetním prostředkem daných metod zpracování signálů této práce je programové prostředí Matlab/Simulink, proto jsou všechny (není-li uvedeno jinak) uvedené poznatky vztahovány k diskrétnímu vyjádření signálů.

1 Kmitočtová analýza signálů

Reálné signály, které jsou v praxi získány např. měřením nebo zobrazené na stínítku osciloskopu, popisují chování zkoumaného systému v časové oblasti (nezávisle proměnnou je čas). Kmitočtová analýza umožňuje rozložit libovolný signál na jednotlivé kmitočtové složky a popsat tak chování zkoumaného systému v kmitočtové oblasti. Pomocí jednotlivých kmitočtových složek lze pak zpětně převést signál do časové oblasti. Přechod mezi vyjádřením signálu v časové (vzor) a kmitočtové (obraz) oblasti umožňují nejčastěji používané tzv. Fourierovy transformace (nebo řady) vyjadřující obraz signálu pomocí ortogonálních bázových funkcí (harmonických složek).

Pro analýzu spojitých periodických signálů je využívána Fourierova řada.

$$\mathbf{c}_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-jk2\pi f_0 t} dt, \quad (1.1)$$

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \mathbf{c}_k e^{jk2\pi f_0 t}. \quad (1.2)$$

Spektrum spojitého periodického signálu $x(t)$ s periodou T je diskrétní, neperiodické a je tvořeno komplexními koeficienty \mathbf{c}_k na k -násobcích základního harmonického kmitočtu $f_0 = 1/T$. Obraz spojitých neperiodických signálů je určen Fourierovou transformací.

$$\mathbf{X}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt, \quad (1.3)$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{X}(f) e^{j2\pi f t} df. \quad (1.4)$$

Spektrum $\mathbf{X}(f)$ neperiodického signálu $x(t)$ je spojitě a neperiodické [1].

1.1 Diskrétní Fourierova řada DTFS

Ze vztahu (1.2) plyne, že spojitý periodický signál $x(t)$ lze vyjádřit teoreticky nekonečným množstvím harmonických složek (koeficientů \mathbf{c}_k). Diskrétní periodické signály $x_p[n]$ s periodou N lze rozložit pouze do konečného počtu N harmonických složek. Tedy diskrétní Fourierova řada (DTFS – Discrete Time Fourier Series) je definovaná

$$\mathbf{c}_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_p[n] e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}, k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (1.5)$$

$$x_p[n] = \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{c}_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}, -\infty < n < \infty. \quad (1.6)$$

Diskrétní periodický signál $x_p[n]$ s periodou N je rozložen na N kmitočtových koeficientů \mathbf{c}_k vztažených k harmonickým složkám $e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$, $k = 0, 1, \dots, N - 1$. Spektrum je diskrétní a periodické s periodou N , tedy platí $\mathbf{c}_{k+N} = \mathbf{c}_k$ [1].

1.2 Fourierova transformace diskretních signálů DTFT

Fourierova transformace diskretního neperiodického $x[n]$ signálu je definovaná

$$\mathbf{X}(e^{j\omega}) = \sum_{-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}, \quad (1.7)$$

$$x[n] = \frac{1}{\omega_{vz}} \int_{-\frac{\omega_{vz}}{2}}^{\frac{\omega_{vz}}{2}} \mathbf{X}(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega. \quad (1.8)$$

Na rozdíl od spektra spojitých signálů s kmitočtovým rozsahem $(-\infty, \infty)$ je spektrum diskretních signálů vlivem navzorkování periodické s periodou $\omega_{vz} = 2\pi f_{vz}$ (v normovaném vyjádření 2π) a tedy kmitočtově omezené $-\frac{\omega_{vz}}{2}$ až $\frac{\omega_{vz}}{2}$ ($-\pi$ až π), kde f_{vz} je vzorkovací kmitočet [1].

1.3 Diskrétní Fourierova transformace DFT

V praxi jsou diskretní signály zpracovávány diskretními systémy implementovanými v signálových procesorech nebo ve formě výpočetního softwaru na osobním počítači. Kmitočtová analýza pomocí prostředků Fourierovy transformace s diskretním časem (1.7), (1.8) není v těchto systémech možná, jelikož spektrum diskretního signálu je spojitá funkce kmitočtu ω počítána z nekonečného množství vzorků. Proto se zavádí tzv. diskretní Fourierova transformace DFT, která pracuje s konečným počtem N vzorků v časové i kmitočtové oblasti [1].

$$\mathbf{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}, \quad k = 0, 1, \dots, N - 1 \quad (1.9)$$

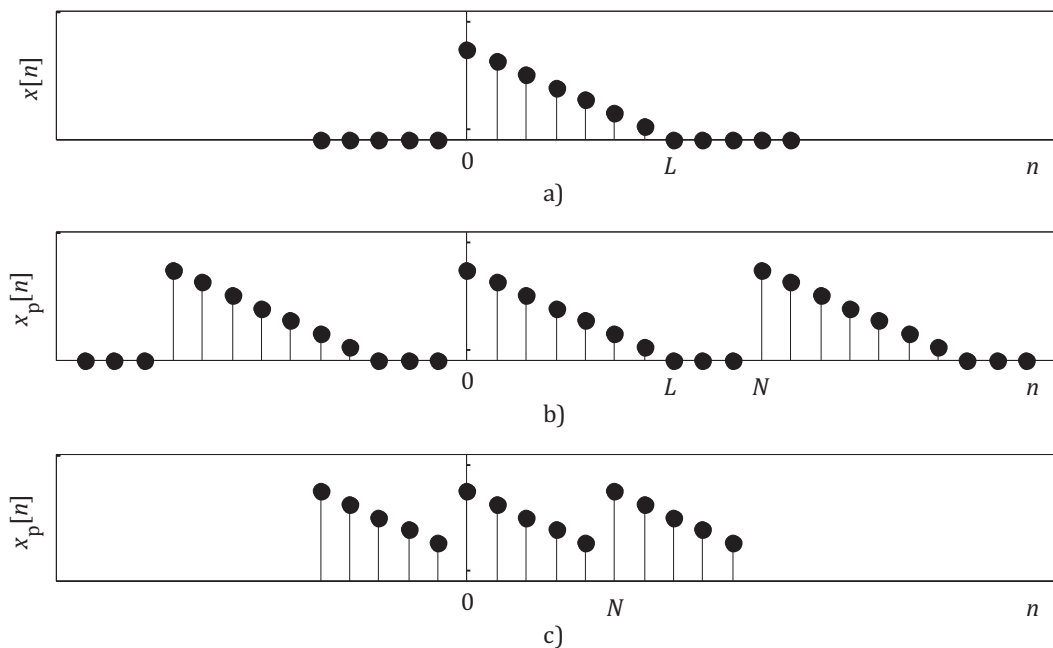
$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{X}[k] e^{jk\frac{2\pi}{N}n}, \quad n = 0, 1, \dots, N - 1 \quad (1.10)$$

Vztahy (1.9) a (1.10) vyjadřují N -bodovou přímou resp. zpětnou DFT. DFT spektrum $\mathbf{X}[k]$ diskretního signálu $x[n]$ délky N je diskretní, obecně komplexní a také délky N . Porovnáním (1.9) a (1.7) lze zjistit, že DFT spektrum vznikne navzorkováním jedné periody spojitého spektra DTFT $\mathbf{X}(e^{j\omega})$ s krokem

$$\frac{f_{vz}}{N}, \text{ normovaně } \frac{2\pi}{N}. \quad (1.11)$$

1.3.1 Výpočet DTFT pomocí DFT

Diskrétní spektrum obecně náleží periodickým signálům (viz Fourierova řada). Při výpočtu spektra pomocí DFT se předpokládá, že analyzovaný signál je periodický s periodou N . Tedy signál $x_p[n]$ vznikne periodickým opakováním s periodou N analyzovaného signálu $x[n]$. Aby vzorky spektra vypočítaného pomocí DFT na kmitočtech $\omega_k = k \frac{2\pi}{N}$, kde N je délka DFT přesně odpovídaly DTFT spektru signálu $x[n]$, musí platit, že délka analyzovaného signálu $L \leq N$, jinak dochází ke zkreslení analyzovaného signálu (časový aliasing) a tedy k nesprávnému určení jeho spektra (obr. 1.1) [1].



Obr. 1.1: Periodizace sekvence $x[n]$ při výpočtu DFT délky N : a) neperiodická sekvence $x[n]$ délky L , b) zperiodizovaná sekvence $x_p[n]$ s periodou $N > L$, c) zperiodizovaná sekvence $x_p[n]$ s periodou $N < L$ (časový aliasing).

1.3.2 Výpočet DTFS pomocí DFT

Periodická posloupnost vzorků $x_p[n]$ s periodou N_p je vyjádřena koeficienty c_k DTFS (1.6), které jsou určeny vztahem (1.5). Jestliže délka N analyzovaného signálu $x[n]$ bude definována jako celistvý násobek periody N_p signálu $x_p[n]$, $N = mN_p$, m je celé, pak budou složky DFT spektra a koeficienty DTFS ve vztahu

$$c_k = \frac{X[k]}{N}, \quad (1.12)$$

viz porovnání vztahů (1.9), (1.10) se vztahy (1.5), (1.6) [1].

1.3.3 Základní vlastnosti DFT

Výčet uvedených vlastností je čerpán z [1] a [2]. Vzor $x[n]$ a jeho DFT obraz ve spektru jsou ve vztahu dle (1.9) resp. (1.10), tento vztah bude dále značen jako

$$x[n] \xleftrightarrow{DFT} \mathbf{X}[k] \quad (1.13)$$

- Linearita

$$a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n] \xleftrightarrow{DFT} a_1 \mathbf{X}_1[k] + a_2 \mathbf{X}_2[k] \quad (1.14)$$

- Periodičnost

$$x[n + N] = x[n] \quad (1.15)$$

$$\mathbf{X}[k + N] = \mathbf{X}[k] \quad (1.16)$$

Funkce $x[n]$ a $\mathbf{X}[k]$ jsou periodické s periodou N .

- Kruhový časový posuv

$$x[n - n_0] \xleftrightarrow{DFT} \mathbf{X}[k] e^{-jk \frac{2\pi}{N} n_0}, n \text{ celé} \quad (1.17)$$

N -bodová DFT předpokládá periodické prodloužení $x[n]$ na $x_p[n]$ s periodou N . Nedochází tedy k prostému posuvu $x[n]$ (takto získaný signál by měl nenulové vzorky mimo interval $\langle 0, N-1 \rangle$), ale k posuvu periodického prodloužení $x[n]$, tedy $x_p[n - n_0]$. Tento posuv se dá představit jako, když vysouvané vzorky mimo interval $\langle 0, N-1 \rangle$ se objevují na začátku intervalu $\langle 0, N-1 \rangle$, jsou posouvány po kruhu, proto kruhový posuv.

- Kruhový kmitočtový posuv

$$x[n] e^{jn \frac{2\pi}{N} k_0} \xleftrightarrow{DFT} \mathbf{X}[k - k_0], k \text{ celé} \quad (1.18)$$

Obdobně jako v předchozím bodě, ale v kmitočtové oblasti.

- Kruhová konvoluce v časové oblasti

$$x_1[n] \circledast x_2[n] \xleftrightarrow{DFT} \mathbf{X}_1[k] \mathbf{X}_2[k], \quad (1.19)$$

$$x_1[n] \circledast x_2[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x_1[m] x_2[n - m] \quad (1.20)$$

Kruhová konvoluce se využívá k určení lineární konvoluce, viz [1], která popisuje výstupní signál lineárního časově invariantního systému definovaného impulsní charakteristikou. Samotný výpočet lineární konvoluce probíhá v kmitočtové

oblasti (1.19) s následným převodem do časové (1.10), tomuto postupu se říká rychlá konvoluce.

- Kruhová konvoluce v kmitočtové oblasti

$$x_1[n]x_2[n] \xleftrightarrow{DFT} \frac{1}{N} \mathbf{X}_1[k] \odot \mathbf{X}_2[k] \quad (1.21)$$

- DFT spektrum obrácené posloupnosti

$$x[N-n] \xleftrightarrow{DFT} \mathbf{X}[N-k] \quad (1.22)$$

- DFT spektrum reálné posloupnosti

$$x[n] \xleftrightarrow{DFT} \mathbf{X}[k] = \mathbf{X}^*[N-k] \quad (1.23)$$

Je-li $x[n]$ reálná, pak $\mathbf{X}[k]$ je konjugovaně sudá. Dále pro DFT spektrum reálné posloupnosti platí

$$\Re\{\mathbf{X}[k]\} = \Re\{\mathbf{X}[N-k]\}, \quad (1.24)$$

$$\Im\{\mathbf{X}[k]\} = -\Im\{\mathbf{X}[N-k]\}, \quad (1.25)$$

$$|\mathbf{X}[k]| = |\mathbf{X}[N-k]|, \quad (1.26)$$

$$\varphi[k] = -\varphi[N-k] \quad (1.27)$$

- DFT spektrum reálné sudé posloupnosti

$$x[n] \xleftrightarrow{DFT} \mathbf{X}[k] = \mathbf{X}[N-k] \quad (1.28)$$

Je-li $x[n]$ reálná sudá, pak $\mathbf{X}[k]$ je reálná sudá.

- DFT spektrum reálné liché posloupnosti

$$x[n] \xleftrightarrow{DFT} \mathbf{X}[k] = -\mathbf{X}[N-k] \quad (1.29)$$

Je-li $x[n]$ reálná lichá, pak $\mathbf{X}[k]$ je imaginární lichá.

- Výpočet IDFT pomocí DFT

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ \mathbf{X}^*[k] e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} \right\}^* \quad (1.30)$$

Vztah (1.30) umožňuje vypočítat IDFT pomocí algoritmu přímé DFT, což je výhodné při praktické implementaci algoritmu v signálových procesorech.

1.4 Efektivní výpočet DFT

Definiční vztahy přímé DFT a zpětné IDFT (1.9), resp. (1.10) lze zapsat ve tvaru

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn}, \quad W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}, \quad (1.31)$$

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] W_N^{-kn}. \quad (1.32)$$

Z definičních vztahů DFT a IDFT (1.9), (1.10) nebo (1.31), (1.32) vyplývá, že se jedná o lineární transformaci, kterou lze vyjádřit v maticovém tvaru

$$\begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ X[2] \\ \vdots \\ X[N-1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & W_N & W_N^2 & \dots & W_N^{N-1} \\ 1 & W_N^2 & W_N^4 & \dots & W_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & W_N^{N-1} & W_N^{2(N-1)} & \dots & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{bmatrix}. \quad (1.33)$$

Zápis (1.33) vyjadřuje výpočet N -bodové DFT (1.31), maticově zapsaný jako

$$\mathbf{X}_N = \mathbf{W}_N \mathbf{x}_N. \quad (1.34)$$

Pro maticový zápis výpočtu IDFT (1.32) bude zřejmě platit [1]

$$\mathbf{x}_N = \frac{1}{N} \mathbf{W}_N^* \mathbf{X}_N. \quad (1.35)$$

Vztahy (1.31) až (1.35) vyjadřují přímou metodu výpočtu DFT, resp. IDFT. Je patrné, že pro výpočet každého vzorku $X[k]$ je potřeba N komplexních násobení ($2N$ reálných násobení) a $N-1$ komplexních sčítání ($2N-2$ reálných sčítání) a tedy pro výpočet všech N hodnot DFT je třeba N^2 komplexních násobení a $N(N-1)$ komplexních sčítání. Tato kvadratická závislost počtu operací a tedy časové náročnosti výpočtu na délce analyzovaného signálu je značně neefektivní. Proto byly vyvinuty algoritmy, které se vyznačují téměř lineární závislostí počtu výpočetních operací na délce signálu. Algoritmů existuje několik a jsou souhrnně označovány jako algoritmy rychlé Fourierovy transformace FFT (Fast Fourier Transform). Tyto algoritmy jsou založeny na rozložení N -bodové DFT na několik menších M -bodových DFT s následnou kombinací výsledků jednotlivých M -bodových DFT. Redukce výpočetní náročnosti spočívá především v počtu komplexních násobení, které jsou obecně náročnější na výpočet než komplexní sčítání. Největší výpočetní úspory je dosaženo, jestliže pro délku analyzovaného signálu platí $N = 2^m$, m je celé, kdy dochází k postupnému rozkladu signálu na sudou a lichou část až jsou počítány 2-bodové DFT (algoritmus je označován jako radix 2). Tímto postupem je dosaženo téměř lineární závislosti počtu komplexních násobení $N/2 \log_2 N$ [1], [3], [4].

Algoritmy FFT využívají symetrické (1.36) a periodické (1.37) vlastnosti komplexní exponenciály W_N (viz obr. 1.2)

$$W_N^{k+N/2} = -W_N^k, \quad (1.36)$$

$$W_N^{k+N} = W_N^k. \quad (1.37)$$

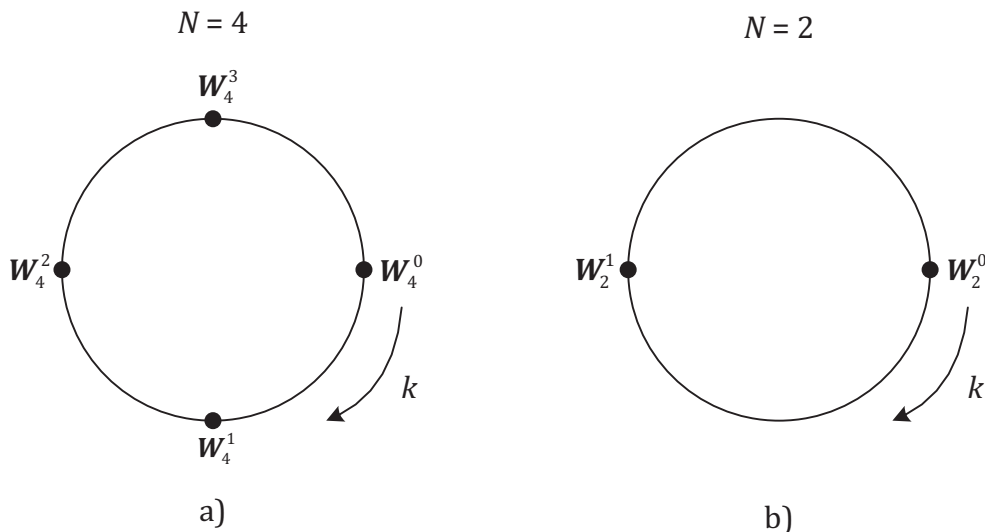
Pro ilustraci zde bude uveden postup výpočtu 4-bodové DFT pomocí FFT. Jak již bylo, řečeno FFT algoritmy redukují počet operací rozložením N -bodové DFT na menší M -bodové DFT. U 4-bodové DFT je tedy vstupní 4-bodová posloupnost rozložena na dvě 2-bodové, na které je pak aplikována klasická DFT a kombinací výsledků 2-bodových DFT je dána výsledná 4-bodová DFT. Tedy vstupní posloupnost $x[n]$ je rozložena na sudou část $x_1[n]$ a lichou část $x_2[n]$

$$x_1[n] = x[2n], \quad n = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} \quad (1.38)$$

$$x_2[n] = x[2n + 1], \quad n = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} \quad (1.39)$$

Výsledná 4-bodová DFT je dána součtem 2-bodových DFT sudé a liché části

$$X[k] = \sum_{n=0}^3 x[n]W_4^{kn} = \sum_{n=0}^1 x[2n]W_2^{kn} + \sum_{n=0}^1 x[2n + 1]W_2^{k(2n+1)}. \quad (1.40)$$



Obr. 1.2: Hodnoty komplexní exponenciály W_N na jednotkové kružnici pro: a) 4-bodovou DFT, b) 2-bodovou DFT.

Z obr. 1.2 je také patrná další vlastnost komplexní exponenciály W_N

$$W_N^{2k} = W_{N/2}^k. \quad (1.41)$$

Zavedením této vlastnosti a vyjádření (1.38), (1.39) do vztahu (1.40), pak je 4-bodová DFT dána

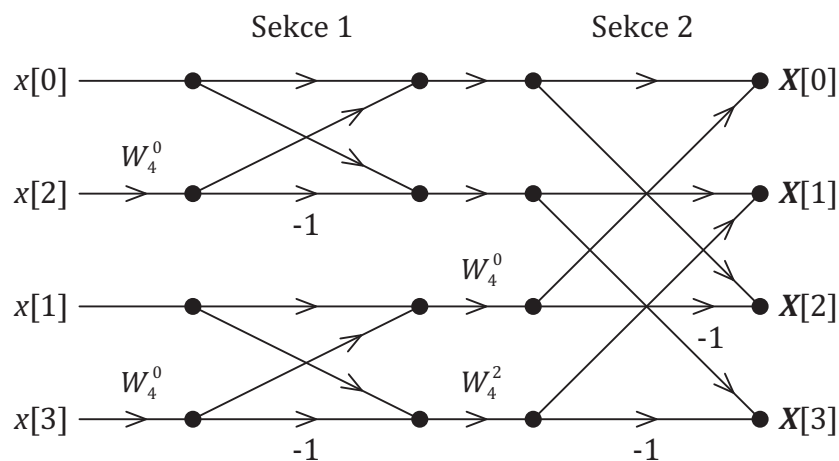
$$X[k] = \sum_{n=0}^1 x_1[n]W_2^{kn} + W_4^k \sum_{n=0}^1 x_2[n]W_2^{kn} = X_1[k] + W_4^k X_2[k], k = 0, 1, \dots, 3 \quad (1.42)$$

$X_1[k]$ a $X_2[k]$ jsou 2-bodové DFT posloupností $x_1[n]$ a $x_2[n]$ počítané pro $k = 0, 1$. Pro ostatní $k = 2, 3$ se využije toho, že $X_1[k]$ a $X_2[k]$ jsou periodické (viz 1.16) s periodou $N/2$ (tedy 2) a dále pak symetričnosti W_N (viz 1.36)

$$X[k] = X_1[k] + W_4^k X_2[k], \quad k = 0, 1 \quad (1.43)$$

$$X[k + 2] = X_1[k] - W_4^k X_2[k], \quad k = 0, 1 \quad (1.44)$$

Při delších posloupnostech ($N = 2^m$) by se dále postupovalo v rozkladu (na sudou a lichou část) až na 2-bodovou DFT. Popsaný postup výpočtu 4-bodové DFT pomocí algoritmu FFT je graficky znázorněn na obr. 1.3. Struktura výpočtu se skládá z obecně $\log_2 N$ sekcí, každá sekce obsahuje $N/2$ tzv. motýlkových struktur a v každé sekci je prováděno $N/2$ komplexních násobení, celkem tedy $N/2 \log_2 N$. Vstupní posloupnost je vlivem rozložení na sudou a lichou část v tzv. bitově reverzním pořadí, které je dosaženo přečtením binárního zápisu indexu vzorku pozpátku. Tímto zápisem je dosaženo, že výstupní vzorky DFT jsou ve správném pořadí.



Obr. 1.3: 4-bodová DFT pomocí FFT.

Výše popsáný algoritmus, kdy dochází k rozkladu vstupní posloupnosti na sudou a lichou část se nazývá decimace v čase DIT (Decimation In Time). Existuje i algoritmus, který ponechá vstupní posloupnost v nezměněném pořadí, pouze jí rozdělí na první a druhou polovinu, což má za následek, že výstupní DFT vzorky jsou v bitově reverzním pořadí. Tento algoritmus se nazývá decimace v kmitočtové oblasti DIF (Decimation In Frequency). Dále se algoritmy dělí dle velikosti prováděných DFT, např. radix 4 vyžadující posloupnost délky 4^m a další [1], [3], [4].

1.4.1 Porovnání výpočetní náročnosti výpočtu DFT přímou metodou a algoritmem FFT

V předchozí kapitole byl teoreticky popsán efektivní výpočet DFT pomocí algoritmu FFT. Výpočetní úspora FFT je především dána zredukováním počtu komplexních násobení. Největší úspory nastává, je-li délka vstupního signálu $N = 2^m$, kde m je celé. V této kapitole bude uvedeno praktické ověření efektivnosti výpočtu FFT.

Tab. 1.1 ukazuje úsporu výpočtů DFT algoritmem FFT oproti přímé metodě v závislosti na délce vstupního signálu N . Počet komplexních násobení při použití přímé metody roste kvadraticky s N , oproti tomu u FFT je tato závislost téměř lineární $N/2\log_2 N$. Z tabulky je dále vidět, že už při menších délkách vstupního signálu dochází k výrazné úspoře výpočetní náročnosti.

Tab. 1.1: Porovnání náročnosti výpočtu DFT přímou metodou a algoritmem FFT.

Délka signálu N	Počet komplexních násobení přímou DFT	Počet komplexních násobení algoritmem FFT	Výpočetní úspora [%]
4	16	4	75
8	64	12	81,25
16	256	32	87,50
32	1024	80	92,19
64	4096	192	95,31
128	16384	448	97,27
256	65536	1024	98,44
512	262144	2304	99,12
1024	1048576	5120	99,51
2048	4194304	11264	99,73

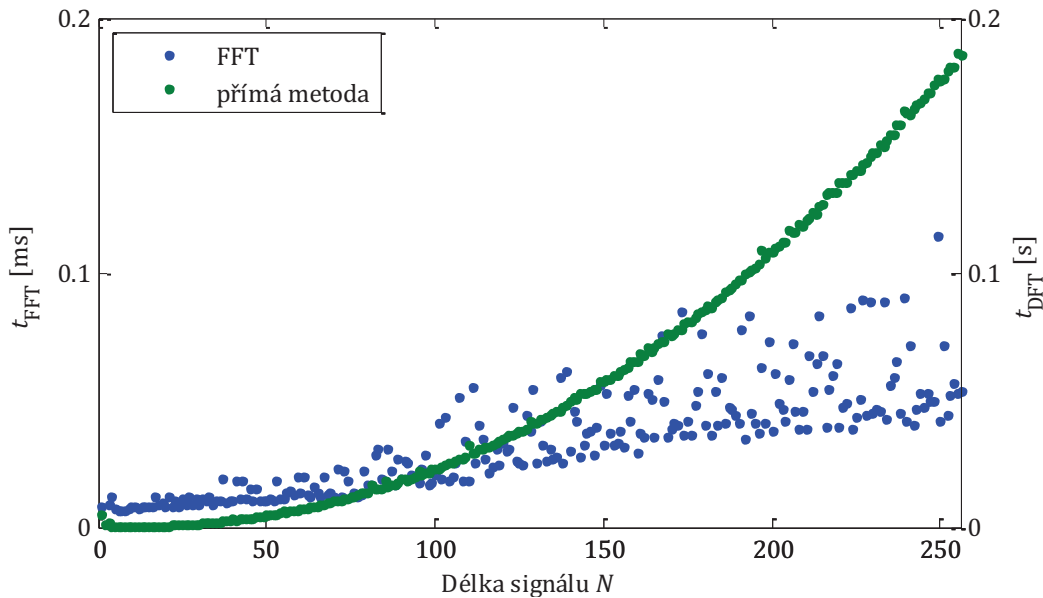
Výpočetní náročnost algoritmu přímo souvisí s celkovým časem výpočtu, který je klíčovým faktorem při implementaci algoritmu v aplikacích pracujících v reálném čase. Měření časové náročnosti výpočtu DFT bylo provedeno v Matlabu pomocí vestavěných funkcí `tic` a `toc`. Tyto funkce slouží k měření času potřebného pro vykonání určité sekvence příkazů (programu, funkcí atd.). Příkaz `tic` spustí časovač, příkazem `toc` je časovač zastaven a je vrácena hodnota časovače¹. Následující sekvence příkazů měří čas potřebný pro výpočet DFT vstupní posloupnosti x při použití algoritmu FFT a přímé metody výpočtu:

```
tic;           % spuštění časovače
    fft(x);    % výpočet DFT algoritmem FFT
t_fft = toc;   % zastavení časovače

tic;           % spuštění časovače
    dft(x);    % výpočet DFT přímou metodou
t_dft = toc;   % zastavení časovače
```

¹ Čas naměřený funkcemi `tic` a `toc` je závislý na výpočetním výkonu CPU, měřeno na CPU 1,7 GHz

Výpočet DFT pomocí FFT byl realizován vestavěnou funkcí `fft(x)`. K výpočtu DFT přímou metodou byla vytvořena funkce `dft(x)`, ve které je implementován maticový výpočet DFT (viz 1.33). Porovnání časové náročnosti obou přístupů k výpočtu DFT bylo provedeno skriptem `time`, jehož výstup je znázorněn na obr. 1.4.



Obr. 1.4: Porovnání časové náročnosti výpočtu DFT algoritmem FFT a přímou metodou.

Z obrázku jasně vyplývá exponenciální závislost časové náročnosti výpočtu DFT přímou metodou na rozdíl od téměř lineární závislosti při výpočtu algoritmem FFT. Obrázek 1.4 potvrzuje výpočty uvedené v tab. 1.1. Měření bylo prováděno do maximální délky 256 vzorků vstupního signálu², kdy výpočetní čas algoritmem FFT je v řádech setin milisekund, kdežto čas potřebný pro výpočet při použití přímé metody se pohybuje v desetinách sekund.

Funkce `dft` pro výpočet DFT přímou metodou a skript `time` pro porovnání náročnosti výpočtů DFT jsou předlohou pro upravené kódy `dft_exam` a `time_exam`. Tyto upravené kódy budou sloužit pro samostatnou práci studentů v počítačových cvičeních, v rámci kterých budou tyto kódy doplňovat a ověřovat tak efektivnost výpočtu DFT algoritmem FFT. Funkce `dft_exam` bude doplňována dle vztahu 1.33. Všechny výše uvedené funkce a skripty jsou obsaženy na příloženém CD.

² Při větších délkách vstupního signálu je výpočet přímou metodou velmi náročný, dochází k násobení matic velkých rozměrů

1.5 DFT spektrální analýza signálů

Kurčení spekter spojitych nebo diskretních signálů, obecně slouží Fourierovy transformace pro spojité či diskretní čas, které pro svůj výpočet vyžadují nekonečné množství hodnot signálu. Při spektrální analýze pomocí DFT (FFT) je ovšem k dispozici konečné množství vstupních dat, což ovlivňuje výsledný tvar spektra.

Analyzovaný signál $x[n]$, který byl získán navzorkováním spojitého signálu vzorkovacím kmitočtem f_{vz} je omezen na L vzorků, tedy $0 \leq n \leq L - 1$. Doba trvání signálu je $T = L T_{vz}$ (časové okno). Omezení signálu $x[n]$ na L vzorků odpovídá násobení původně neomezeného signálu $x[n]$ časovým oknem $w[n]$ délky L , čímž vznikne signál $x_w[n]$

$$x_w[n] = x[n]w[n]. \quad (1.45)$$

Násobení v čase odpovídá konvoluci ve spektru, tedy výsledné spektrum signálu $x_w[n]$ bude obecně dáno konvolucí spektra $x[n]$ a spektra $w[n]$ (viz 1.21), je tedy nutné znát spektrum okna, které je nejčastěji obdélníkové. S využitím vztahu pro součet N prvků geometrické řady a vyjádření funkce sinu pomocí komplexní exponenciály je N -bodová DFT obdélníkového okna délky L dána ([1], [3])

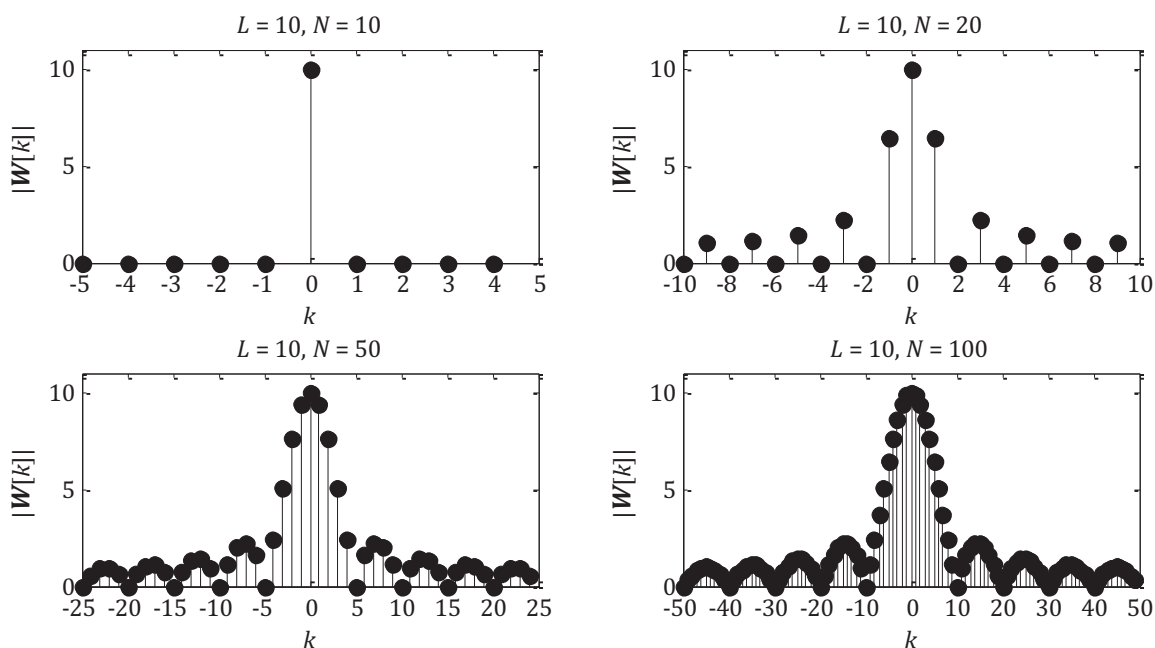
$$\begin{aligned} W[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} w[n] e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = \sum_{n=0}^{L-1} \left(e^{-jk\frac{2\pi}{N}} \right)^n = \frac{1 - e^{-jk\frac{2\pi}{N}L}}{1 - e^{-jk\frac{2\pi}{N}}} \\ &= e^{-jk\frac{2\pi}{N}(L-1)} \frac{\sin\left(k\frac{2\pi}{N}L\right)}{\sin\left(k\frac{2\pi}{N}\right)}. \end{aligned} \quad (1.46)$$

1.5.1 Vliv délky DFT N na podobu spektra

Jak již bylo zmíněno, jestliže platí $N \geq L$, tak N vzorků DFT kompletně reprezentuje posloupnost délky L . Jestliže $N = L$, bude pro spektrum obdélníkového okna platit

$$W[k] = \begin{cases} L, & k = 0 \\ 0, & k = 1, 2, \dots, L - 1 \end{cases} \quad (1.47)$$

Pro lepší vypovídací schopnost spektra se při jeho výpočtu volí $N > L$, čímž se zmenšuje rozdíl mezi jednotlivými vzorky spektra (1.11). Spektrum obdélníkového okna délky $L = 10$ pro různé délky N je znázorněno na obr. 1.5. Je vidět, že pro $N = L$ se ve spektru objeví pouze jeden vzorek hodnoty L (1.47). Se zvětšujícím se N dochází ke zmenšení odstupu mezi jednotlivými vzorky (1.11). Z průběhů je patrné, že tvar spektra zůstává zachován, pouze obsahuje více vzorků a je lépe čitelné. Šířka hlavního laloku spektra je dána $2N/L$ ($2f_{vz}/L$), nulové vzorky jsou na násobcích N/L (f_{vz}/L). Zvětšování N se dosáhne doplněním signálu délky L nulami na délku N , tedy doplněním $N - L$ nulami [1], [3].



Obr. 1.5: N -bodové DFT obdélníkového okna délky L .

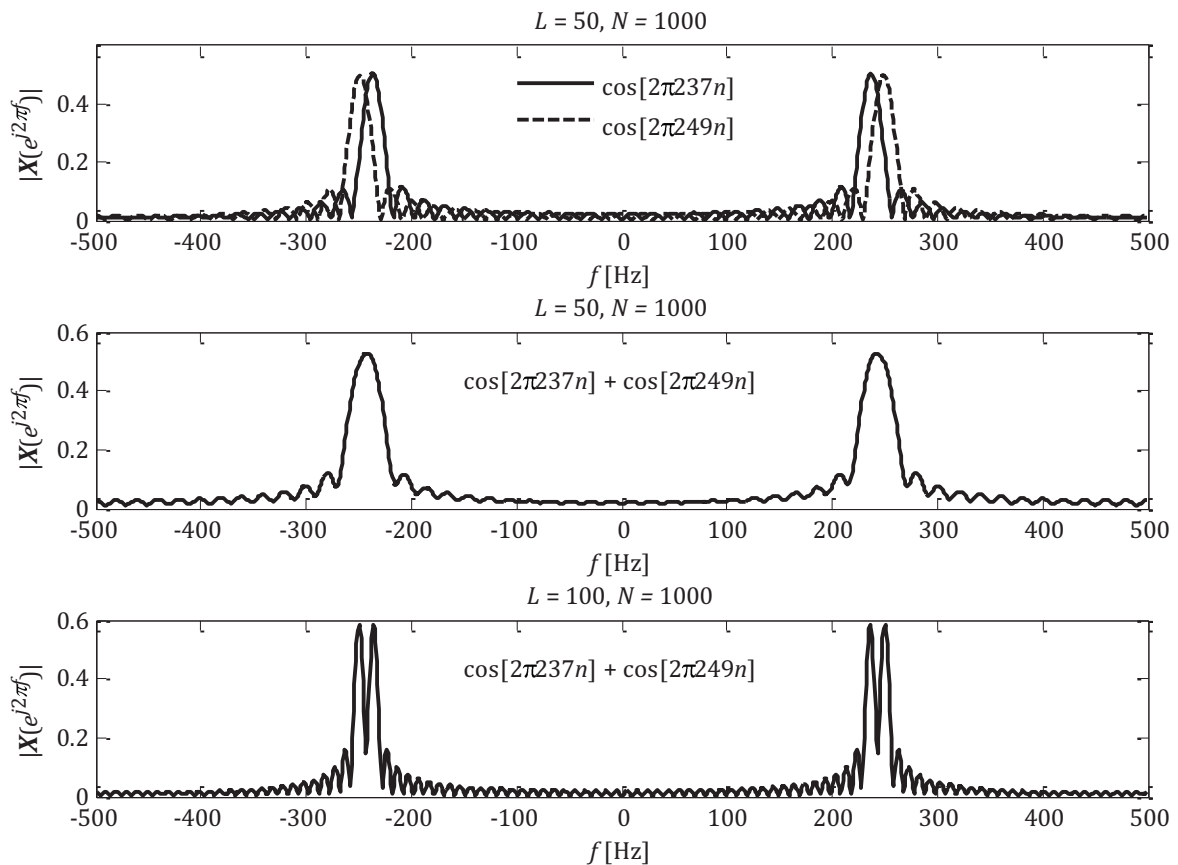
1.5.2 Vliv délky signálu L na N -bodové DFT spektru

Je dán navzorkovaný signál $x[n]$ (1.48) délky L , který se skládá ze dvou harmonických složek $f_1 = 237$ Hz a $f_2 = 249$ Hz. Vzorkovací kmitočet $f_{vz} = 1000$ Hz.

$$x[n] = \cos[2\pi f_1 n] + \cos[2\pi f_2 n]. \quad (1.48)$$

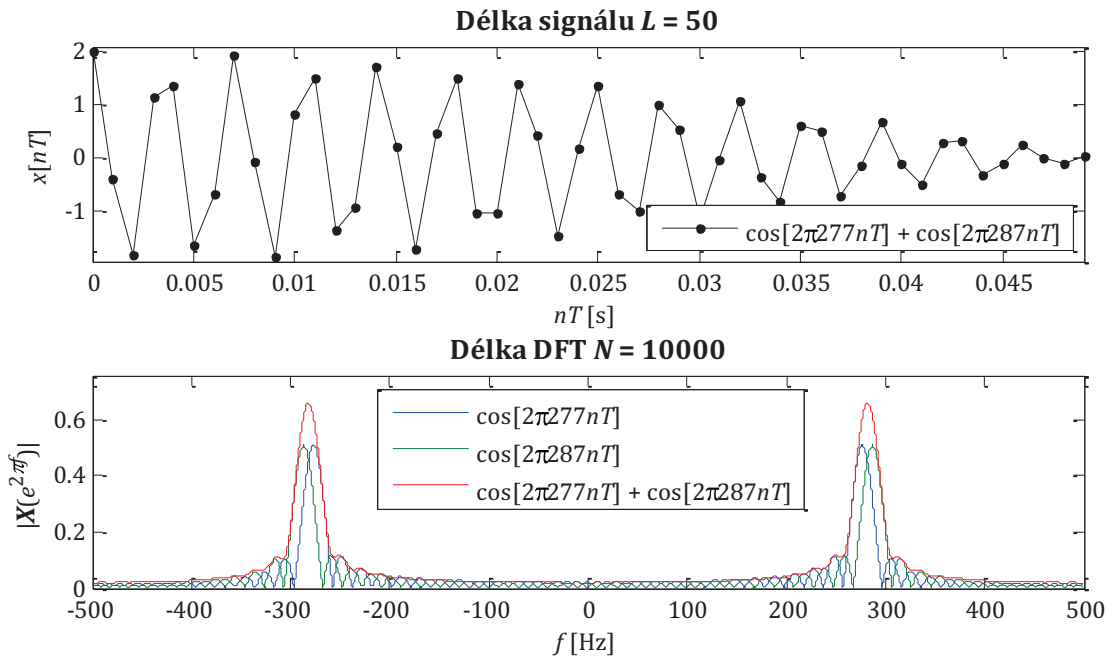
Signál bude podroben N -bodové DFT (výpočet pomocí FFT) spektrální analýze a bude prozkoumán vliv délky signálu L a na výslednou podobu N -bodového DFT spektra analyzovaného signálu.

Výsledné spektrum signálu $x[n]$ je dáno součtem dílčích spektrálních složek f_1 a f_2 . Při použití obdélníkového okna je šířka hlavních laloků jednotlivých spektrálních složek $2f_{vz}/L$. Jestliže bude platit $|f_1 - f_2| < f_{vz}/L$, spektra dílčích složek se budou překrývat a ve výsledném spektru nebudou jednotlivé složky rozeznatelné. Aby tedy bylo možné detekovat obě složky, musí platit $|f_1 - f_2| \geq f_{vz}/L$, čehož se dosáhne zvětšením délky L analyzovaného signálu, kdy dochází k zúžení hlavního laloku obdélníkového spektra. Vliv délky L analyzovaného signálu $x[n]$ na výslednou podobu N -bodového DFT ($N = 1000$) spektra je zobrazen na obr. 1.6. První dva průběhy odpovídají spektru pro signál délky $L = 50$ vzorků, třetí průběh pro $L = 100$ vzorků.

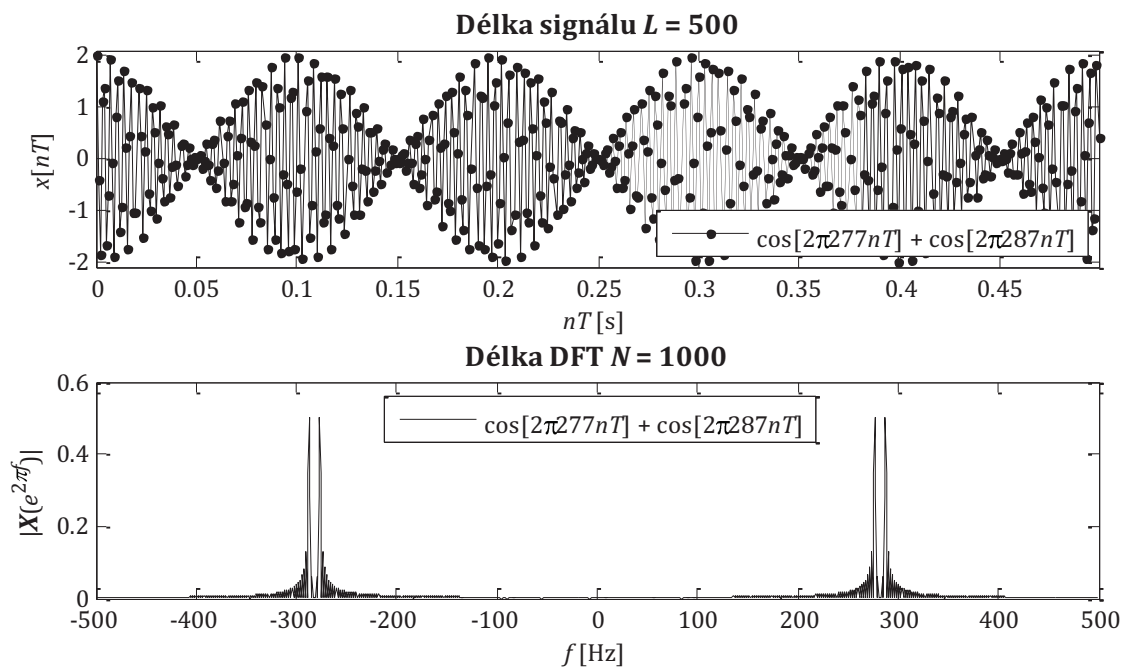


Obr. 1.6: Vliv délky signálu L na DFT délky $N = 1000$ bodů, $f_{vz} = 1000$ Hz.

Z obrázků 1.5 a 1.6 plyne, že zvyšování délky N -bodové DFT dochází pouze ke zlepšení čitelnosti spektra při zachování jeho tvaru. Naopak zvyšování délky analyzovaného signálu L způsobuje změnu tvaru spektra a zvětšuje rozlišovací schopnost ve spektru. Na příloženém CD je obsažen skript `zero_pad` realizující jednoduché animace pro demonstraci obou výše zmíněných vlivů na výsledný tvar spektra. Na obrázcích 1.7 a 1.8 jsou zachyceny výřezy jednotlivých animací. Obr. 1.7 zachycuje krok animace demonstrující vliv délky DFT N na výsledný tvar spektra signálu délky $L = 50$, délka DFT N je měněna v krocích 50, 100, 500, 1000, 10000 vzorků. Následující obrázek 1.8 zachycuje animaci vlivu délky signálu L při konstantní délce DFT spektra $N = 1000$ v kroku $L = 500$, délka signálu L je měněna v krocích 50, 75, 100, 500, 1000 vzorků.



Obr. 1.7: Výřez animace demonstrující vliv délky DFT N , při konstantní délce signálu L na spektrální analýzu



Obr. 1.8: Výřez animace demonstrující vliv délky signálu L při konstantní délce DFT N na spektrální analýzu

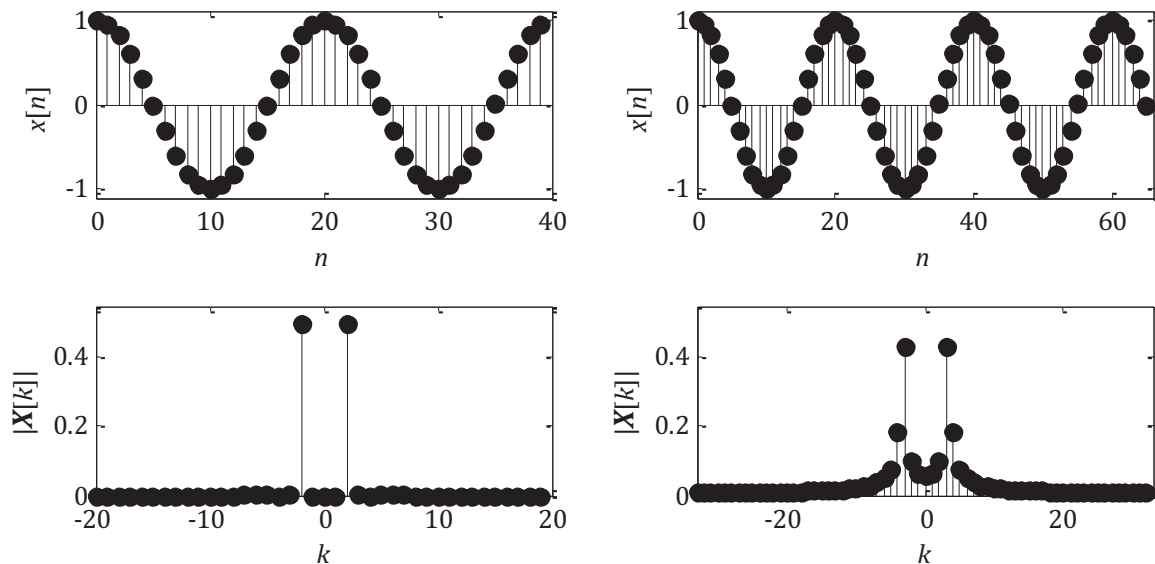
1.5.3 Prosakování ve spektru (leakage)

Z obrázků v předchozí kapitole je také vidět, že spektrum jednotlivých harmonických složek není soustředěno v jednom kmitočtovém vzorku, ale je rozprostřeno do celého kmitočtového rozsahu. Tento jev je označován jako prosakování ve spektru (výkon jedné kmitočtové složky prosákne do ostatních složek). Dochází k němu vlivem omezení délky analyzovaného signálu časovým oknem. Spektrum je tedy při použití obdélníkového okna dáno konvolucí spekter analyzovaného signálu a obdélníkového okna (1.46).

Prosakování je nejpatrnější pro harmonický signál $x_p[n]$. Analyzujeme tedy signál $x[n]$ délky L , který je dán zkrácením původně nekonečného harmonického signálu $x_p[n]$. Jestliže platí

$$L = mN_p, \quad m \text{ celé} \quad (1.49)$$

kde N_p je perioda signálu $x_p[n]$, pak periodické prodloužení $x[n]$ (DFT předpokládá periodické prodloužení analyzované posloupnosti) odpovídá signálu $x_p[n]$. Vzorky DFT spektra padnou na násobky N/L a výsledné DFT spektrum je soustředěno do jedné kmitočtové složky, není rozmazáno (odpovídá DTFS signálu $x_p[n]$). Při nesplnění podmínky (1.49) periodické prodloužení signálu $x[n]$ neodpovídá harmonickému signálu $x_p[n]$, obsahuje nespojitosti a v jeho spektru se objevují další kmitočtové složky (spektrum je rozmazáno), viz obr. 1.9.

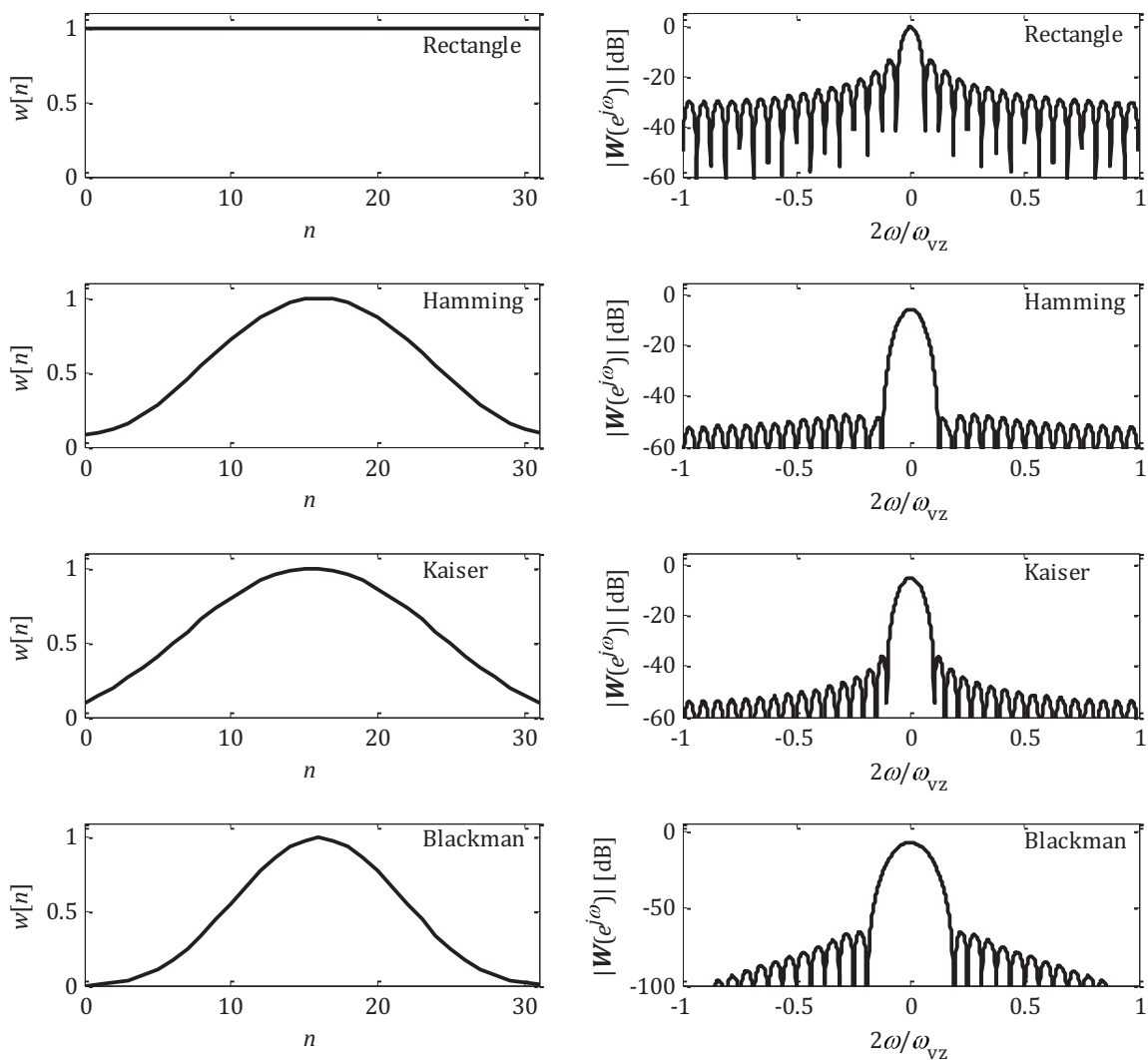


Obr. 1.9: DFT spektrum signálu $x[n]$ délky, levý sloupec: celočíselného násobku periody, pravý sloupec: neceločíselného násobku periody.

Pro zmírnění prosakování (nelze odstranit úplně) se používají různá časová okna, kterých dnes existuje celá řada³. Jednotlivá okna se liší tvarem a spektrálními vlastnostmi (viz obr. 1.10). Pro spektrální analýzu jsou důležitými parametry šířka

³ Matlab disponuje knihovnou `wintool` pro generování oken

hlavního laloku, výška postranních laloků a s tím související strmost jejich klesání. Úzký hlavní lalok umožňuje velkou rozlišovací schopnost ve spektru (viz obr. 1.6), nízké postranní laloky potlačují prosakování spektra do okolních kmitočtů. Ideální okno, které má úzký hlavní lalok a nízké postranní laloky neexistuje a vždy tedy při jejich použití dochází ke kompromisu mezi rozlišovací schopností ve spektru a potlačením prosakování. Obdélníkové okno má nejvyšší postranní laloky, proto při jeho použití dochází k největšímu prosakování, naopak rozlišovací schopnost je vlivem nejúžšího hlavního laloku největší. Ostatní okna se vyznačují nižšími postranními laloky, a tedy jsou vhodné pro potlačení prosakování, ale naopak zhoršují rozlišovací schopnost spektra.



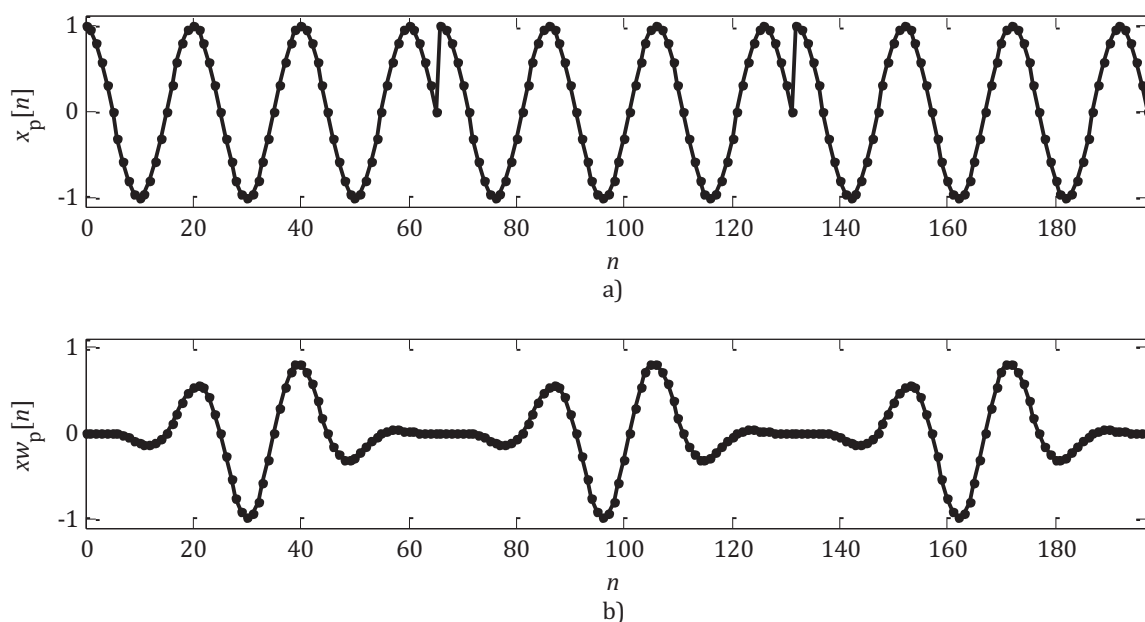
Obr. 1.10: Vybraná časová okna a jejich spektra.

Většina používaných oken je tvaru zvonu (viz obr. 1.10) a tedy zperiodizovaný signál vynásobený (váhovaný) oknem nevykazuje nespojitosti (obr. 1.11) a dochází k redukcí prosakování do okolních kmitočtů. Je nutné poznamenat, že když se použije časové okno (jiné než obdélníkové) na signál splňující podmínku (1.49) dojde vlivem širšího hlavního

laloku k rozprostření spektra kolem hlavního kmitočtu, tedy k prosáknutí. Je zřejmé, že váhovaním signálu dojde ke zmenšení jeho energie a tedy velikost spektrálních čar váhovaného signálu je menší než původního neváhovaného signálu. Proto se spektrum váhovaného signálu normuje vzhledem k původnímu spektru

$$X[k] = X_w[k]L / \sum_{n=0}^{L-1} w[n], \quad (1.50)$$

kde $X_w[k]$ je spektrum váhovaného signálu oknem $w[n]$ a $X[k]$ je výsledné spektrum po normování [4]. Je zřejmé, že normováním ve spektru dochází ke změnám v časové oblasti, normování se tedy používá pro porovnání spekter neváhovaného a váhovaného signálu.

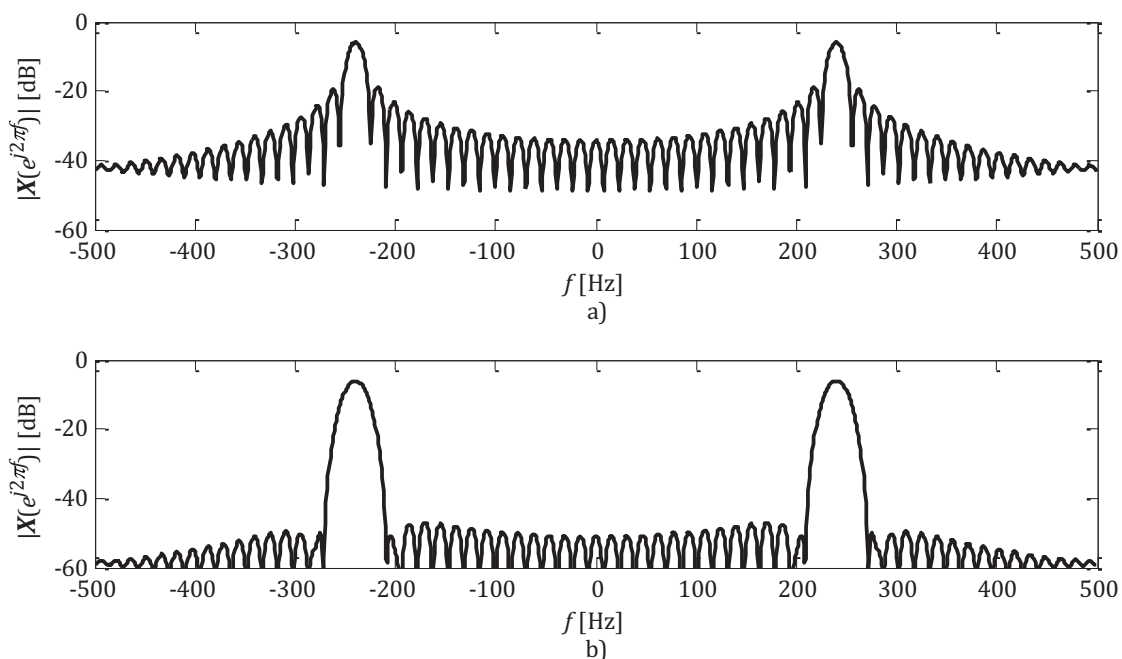


Obr. 1.11: Zperiodizovaný signál nesplňující podmínku (49) vynásobený:
a) obdélníkovým oknem, b) Blackmanovým oknem.

1.5.4 Využití časových oken při DFT spektrální analýze

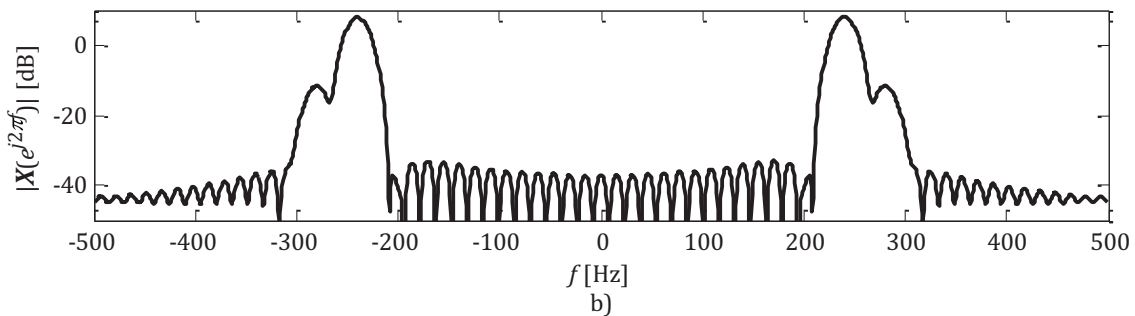
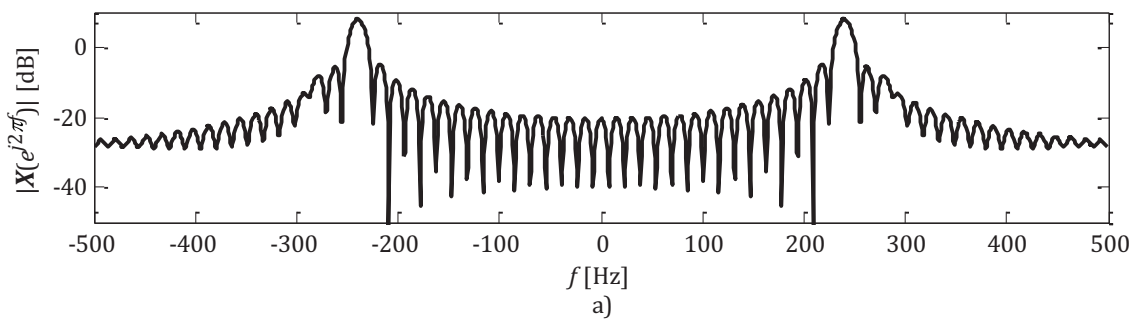
Uvedme praktické ukázky potlačení prosakování pomocí váhovacích oken a možnosti jejich použití při kmitočtové analýze. Jak již bylo řečeno, prosakování je nejvíce výrazné pro harmonické signály. Tedy je dán harmonický signál o kmitočtu $f_1 = 240$ Hz který je navzorkován s kmitočtem $f_{vz} = 1000$ Hz. Pro analýzu je k dispozici $L = 64$ vzorků takto navzorkovaného signálu $x[n]$. Signál $x[n]$ nesplňuje podmínku (1.49) a dochází tedy v jeho DFT spektru k prosakování. DFT je počítána pro $N = 1000$ vzorků nejdříve pro signál neváhovaný (obr. 1.12a; obdélníkové okno) a poté pro signál váhovaný Hammingovým oknem (obr. 1.12b). Je vidět, že spektrum signálu váhovaného

Hammingovým oknem má daleko nižší postranní laloky, dochází k potlačení prosakování až o 50 dB (u obdélníkového okna max. o 34 dB). Proto jsou váhovací okna vhodná např. pro detekci signálů nižší úrovně, které jsou maskovány silnějšími signály.



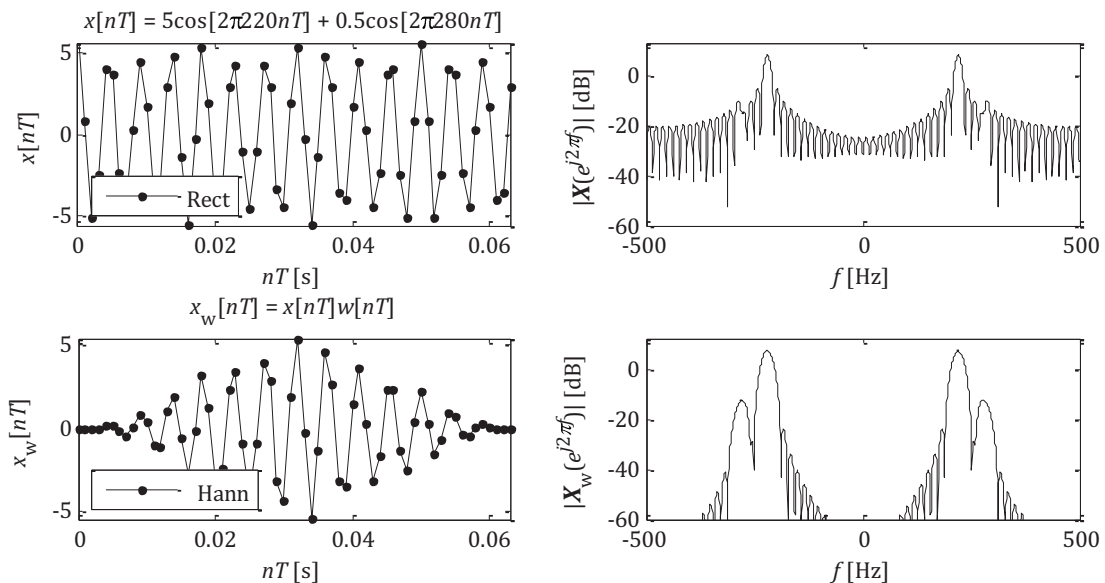
Obr. 1.12: DFT spektrum signálu $x[n] = \cos[2\pi 240n]$: a) neváhovaného (obdélníkové okno), b) váhovaného Hammingovým oknem po normování.

Mějme tedy signál $x[n]$, který je složen ze dvou harmonických signálů, ze silnějšího signálu s amplitudou A_1 , s kmitočtem $f_1 = 240$ Hz a slabšího signálu s amplitudou $A_2 = 0,1A_1$ V, s kmitočtem $f_2 = 280$ Hz. DFT spektrum takto složeného signálu je na obr. 1.13, pro obě složky signálu nastává prosakování. Při použití obdélníkového okna je ve spektru slabší signál obtížně (zda-li vůbec) detekovatelný vlivem prosakování silnějšího signálu (obr. 1.13a). Bude-li signál před výpočtem DFT spektra váhován Hammingovým oknem, dojde k redukci prosakování silnějšího signálu do ostatních kmitočtových složek a slabší signál bude mnohem lépe detekovatelný (obr. 1.13b). Zároveň však dojde vlivem použití okna k rozšíření hlavních laloků. Při používání oken je tedy nutné brát v úvahu nejen výšku jejich postranních laloků, ale také šířku hlavního laloku, který určuje rozlišovací schopnost ve spektru. Aby bylo možné slabší signál detekovat, musí být kmitočtově vzdálen od silnějšího signálu alespoň o polovinu šířky hlavního laloku okna.



Obr. 1.13: DFT spektrum signálu $x[n] = 5\cos[2\pi 240n] + 0,5\cos[2\pi 280n]$:
 a) neváhovaného (obdélkové okno), b) váhovaného Hammingovým oknem.

Výběr časového okna závisí na konkrétní aplikaci. Vliv vybraných oken na časový průběh a spektrum signálu demonstruje jednoduchá animace skriptu `win`, jež je obsažen na příloženém CD. Výřez animace je zobrazen na obr. 1.14, kde je vidět porovnání časových průběhů a spekter signálu při použití obdélkového okna a Hannova okna. Na CD je také obsažen skript `win_exam`, který je určen k samostatné práci studentů v počítačových cvičení a je zaměřen na využití časových oken při DFT spektrální analýze.



Obr. 1.14: Výřez animace demonstrující vliv různých časových oken na časový průběh a spektrum signálu

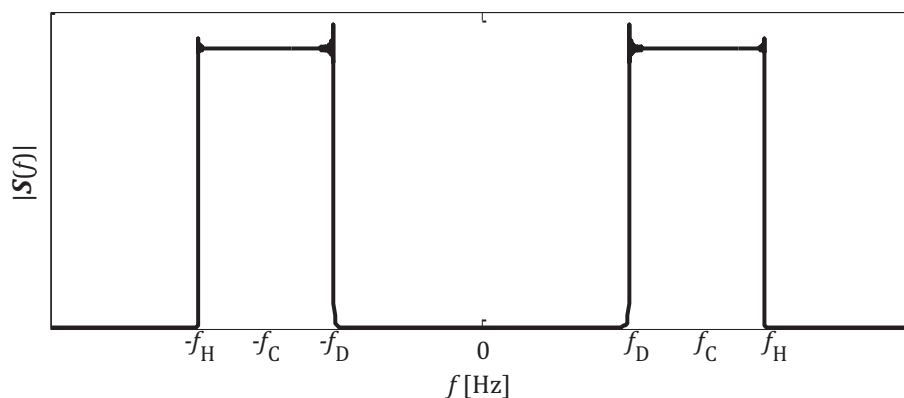
2 Reprezentace pásmově omezených signálů

Výstupem práce bude laboratorní úloha simulující zpracování signálů v reálném čase. Úloha bude zaměřena na komplexní reprezentaci reálných pásmově omezených signálů. V následující kapitole bude tedy vysvětlen pojem pásmově omezený signál a bude odvozena komplexní reprezentace těchto signálů nejdříve v analogové podobě a poté v podobě diskretní. Na tuto kapitolu navazuje příloha A, kde je teoreticky popsána laboratorní úloha zaměřená na tuto problematiku. V úloze jsou popsány a realizovány různé metody komplexního vyjádření reálných pásmově omezených diskretních signálů.

Signály označované jako pásmově omezené (bandpass) se vyznačují tím, že jejich spektrum je soustředěno do úzkého kmitočtového pásma B obklopujícího nosný kmitočet f_c (obr. 2.1). Pro tyto signály tedy ve většině případů platí, že nosný kmitočet $f_c = (f_H + f_D)/2$ je daleko větší než šířka pásma $B = f_H - f_D$. Pásmově omezené signály se velice často vyskytují v telekomunikačních systémech, kdy informační signál je namodulován na nosnou vlnu a poté přenášen různými médii (kroucené páry, satelitní přenos, optický kabel atd.). Označíme-li takto získaný (namodulovaný) signál $s(t)$, který je spojitý a reálný, jeho spektrum $S(f)$ vykazuje symetrii kolem nulového kmitočtu (obklopuje kmitočty f_c a $-f_c$) a nese tedy dvojnásobné množství informace. Spektrum $S(f)$ je obecně komplexní (obsahuje informaci o fázi spektrálních složek) a složky na kladných a záporných kmitočtech jsou ve vztahu

$$S(f) = S^*(-f), \quad (2.1)$$

kde symbol $*$ značí komplexně sdružený pár. Signál $s(t)$ tedy může být kompletně popsán pouze jednou polovinou svého spektra, aniž by došlo ke ztrátě informace. Toho lze dosáhnout s využitím komplexního vyjádření signálů [5].



Obr. 2.1: Amplitudové spektrum pásmově omezeného signálu.

2.1 Využití komplexních signálů pro reprezentaci pásmově omezených signálů

S využitím komplexních signálů lze vyjádřit libovolný pásmově omezený signál pouze jednou polovinou jeho spektra a následně také jeho nízkofrekvenčním ekvivalentem v základním pásmu. Vyjádření v základním pásmu je výhodné s ohledem na snadnější simulaci komunikačních systémů, snížení obvodové a výpočetní náročnosti zpracování signálů apod.

Nejdříve bude vyjádřen reálný signál $\cos 2\pi f_c t$ pouze pomocí kladné části svého spektra. Tento signál lze také zapsat jako

$$\cos 2\pi f_c t = \frac{1}{2} e^{-j2\pi f_c t} + \frac{1}{2} e^{j2\pi f_c t}. \quad (2.2)$$

Zápis (2.2) vyjadřuje spektrum reálného signálu $\cos 2\pi f_c t$, které je komplexní a obsahuje dvě spektrální složky s amplitudou $\frac{1}{2}$ na kmitočtech f_c a $-f_c$ (viz 2.1). Ekvivalentně může být reálný signál $\cos 2\pi f_c t$ vyjádřen jako reálná část komplexního signálu

$$\cos 2\pi f_c t = 2\Re \left\{ \frac{1}{2} e^{j2\pi f_c t} \right\}. \quad (2.3)$$

Ze vztahu (2.3) plyne, že reálný signál $\cos 2\pi f_c t$ bude ve spektru popsán pouze svou kladnou částí ($f = f_c$). Amplituda kladné části spektra je zdvojnásobena aby nedošlo ke ztrátě informace vlivem vynechání záporné složky spektra [1].

Přístup k vyjádření reálného signálu $\cos 2\pi f_c t$ pouze jeho kladnou polovinou spektra popsán v předchozím odstavci lze aplikovat na libovolný reálný pásmově omezený signál $s(t)$. Zavedením zpětné Fourierovy transformace lze tento signál vyjádřit prostřednictvím spektrálních složek na kladných a záporných kmitočtech

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{S}(f) e^{j2\pi f t} df = \int_{-\infty}^0 \mathbf{S}(f) e^{j2\pi f t} df + \int_0^{\infty} \mathbf{S}(f) e^{j2\pi f t} df. \quad (2.4)$$

Podobně jako vztah (2.2) lze vztah (2.4) s využitím vztahu (2.1) a záměnou f za $-f$ v integrálu s mezemi od $-\infty$ do 0 zapsat jako

$$s(t) = \int_0^{\infty} \mathbf{S}^*(f) e^{-j2\pi f t} df + \int_0^{\infty} \mathbf{S}(f) e^{j2\pi f t} df \quad (2.5)$$

a obdobně jako ve vztahu (2.3) platí

$$s(t) = 2\Re \left\{ \int_0^{\infty} \mathbf{S}(f) e^{j2\pi f t} df \right\} = \Re \{ \mathbf{s}_a(t) \}. \quad (2.6)$$

Vztah (2.6) je tedy také vyjádřením reálného signálu $s(t)$ jako reálné části komplexního signálu $\mathbf{s}_a(t)$ a je popsán pouze pomocí spektrálních složek na kladných kmitočtech. Komplexní signál $\mathbf{s}_a(t)$ je označován jako analytický signál signálu $s(t)$

$$s_a(t) = 2 \int_0^{\infty} \mathbf{S}(f) e^{j2\pi ft} df. \quad (2.7)$$

Spektrum analytického komplexního signálu tedy obsahuje pouze složky na kladných kmitočtech s dvojnásobnou amplitudou oproti složkám spektra reálného signálu [1].

Analytický signál $s_a(t)$ plně popisuje reálný signál $s(t)$ prostřednictvím jedné části (kladné) spektra $\mathbf{S}(f)$ signálu $s(t)$. Vztah (2.6) ukazuje, že signál $s(t)$ je reálnou částí signálu $s_a(t)$, z čehož plyne, že analytický signál $s_a(t)$ lze získat z reálného signálu $s(t)$. K odvození jakým způsobem se toho dosáhne, může být spektrum analytického signálu $\mathbf{S}_a(f)$ vyjádřeno pomocí jednotkového skoku ve spektru $\mathbf{U}(f)$, pro který platí $\mathbf{U}(f) = 1$, pro $f \geq 0$ a $\mathbf{U}(f) = 0$, pro $f < 0$

$$\mathbf{S}_a(f) = 2\mathbf{S}(f)\mathbf{U}(f). \quad (2.8)$$

V kmitočtové oblasti k získání analytického signálu stačí vynásobit spektrum $\mathbf{S}(f)$ signálu $s(t)$ spektrálním jednotkovým skokem (násobení dvěma kompenzuje vynechání záporných kmitočtů). Zavedením zpětné Fourierovy transformace kmitočtového jednotkového skoku

$$\mathbf{u}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{U}(f) e^{j2\pi ft} df = \frac{1}{2} \delta(t) + \frac{j}{2\pi t}, \quad (2.9)$$

kde $\delta(t)$ označuje jednotkový impuls a následně s využitím konvolučního teorému (násobení v kmitočtové oblasti odpovídá konvoluci v časové oblasti) lze popsat analytický signál v časové oblasti

$$s_a(t) = 2 \left\{ s(t) * \left[\frac{1}{2} \delta(t) + \frac{j}{2\pi t} \right] \right\} = s(t) + j \frac{1}{\pi t} * s(t) = s(t) + j\hat{s}(t). \quad (2.10)$$

Ze vztahu (2.10) je patrné, že reálnou část analytického signálu $s_a(t)$ tvoří reálný signál $s(t)$ a imaginární část je dána

$$\hat{s}(t) = \frac{1}{\pi t} * s(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(\tau)}{t - \tau} d\tau. \quad (2.11)$$

Tedy signál $\hat{s}(t)$ je získán konvolucí impulsní charakteristiky $1/\pi t$ se signálem $s(t)$. Jinak řečeno signál $\hat{s}(t)$ je výstupním signálem filtru s impulsní charakteristikou

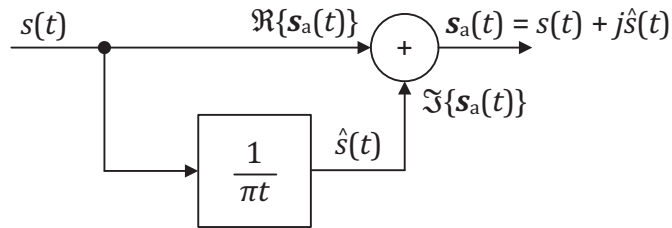
$$h_{\text{HT}}(t) = \frac{1}{\pi t}, \quad -\infty < t < \infty, \quad (2.12)$$

na jehož vstup je přiveden signál $s(t)$. Vztah (2.11) reprezentuje Hilbertovu transformaci⁴. Filtr definovaný vztahem (2.12) se nazývá Hilbertův transformátor a jeho kmitočtová charakteristika (obr. 2.3) je dána Fourierovou transformací impulsní odezvy

⁴ Hilbertova transformace není ve smyslu jako Fourierovské transformace transformací mezi časovou a kmitočtovou oblastí. Vstupní i výstupní funkce Hilbertovy transformace jsou funkcí času.

$$\mathbf{H}_{\text{HT}}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h_{\text{HT}}(t)e^{-j2\pi ft} dt = \begin{cases} -j, & f > 0 \\ j, & f < 0 \end{cases} \quad (2.13)$$

$$\mathbf{H}_{\text{HT}}(f) = |\mathbf{H}_{\text{HT}}(f)|e^{j\varphi(f)}, \quad |\mathbf{H}_{\text{HT}}(f)| = 1, \quad \varphi(f) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, & f > 0 \\ \frac{\pi}{2}, & f < 0 \end{cases}. \quad (2.14)$$



Obr. 2.2: Výpočet analytického signálu pomocí Hilbertovy transformace.

Vztahy (2.13) a (2.14) popisují vlastnosti Hilbertova transformátoru v kmitočtové oblasti, z nichž plyne, že Hilbertův transformátor vystupuje jako fázovací článek (allpass) měnící fázi spektrálních složek vstupního signálu $s(t)$ o $\pm \pi/2$. Analytický signál nyní lze pomocí Hilbertovy transformace vyjádřit jako

$$\mathbf{s}_a(t) = s(t) + j\hat{s}(t). \quad (2.15)$$

Hilbertova transformace tedy slouží k získání imaginární části komplexní analytické reprezentace reálného signálu $s(t)$ (obr. 2.2) [1], [5].

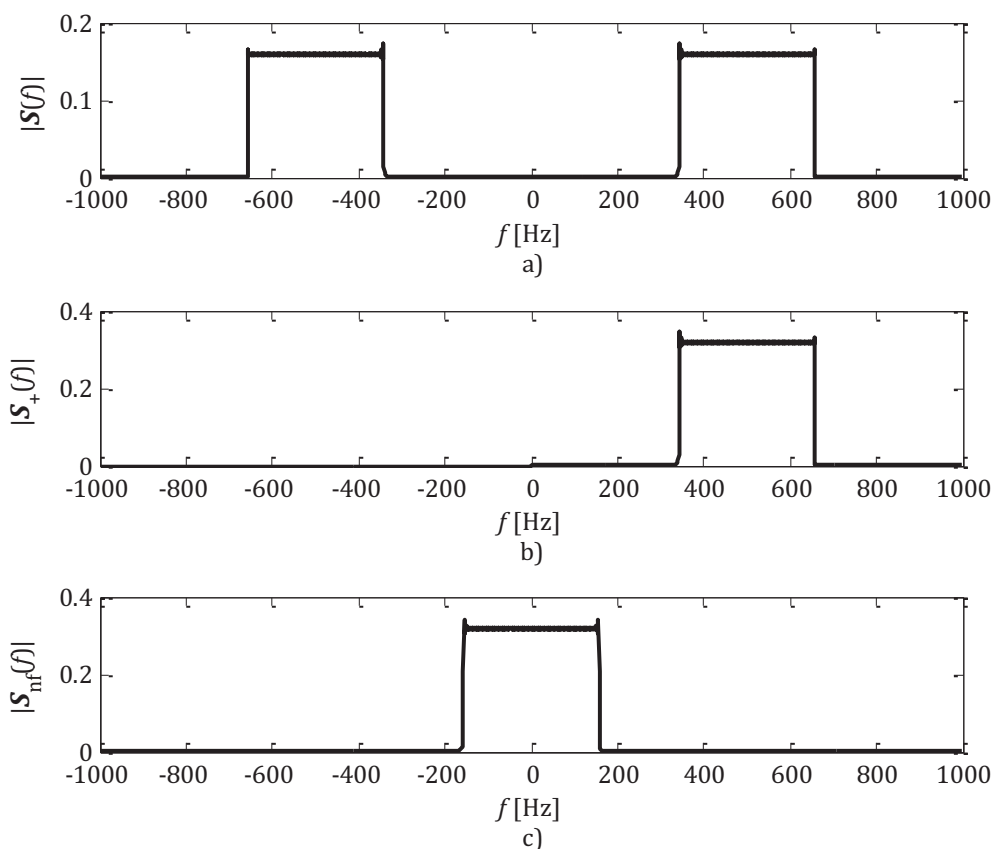


Obr. 2.3: Kmitočtové charakteristiky Hilbertova transformátoru: a) amplitudové spektrum, b) fázové spektrum.

Analytický signál $s_a(t)$ pásmově omezeného signálu $s(t)$ má spektrum soustředěno v pásmu B obklopujícím kladný kmitočet f_c . V některých aplikacích je žádoucí toto pásmo posunovat po kmitočtové ose ($f > 0$) popřípadě ho vyjádřit v základním pásmu $-B/2 \leq f \leq B/2$, $f_c = 0$. Z modulační vlastnosti Fourierovy transformace vyplývá, že kmitočtový posun o $-f_c$ odpovídá v časové oblasti násobení komplexní exponenciálou $e^{-j2\pi f_c t}$

$$s_{nf}(t) = s_a(t)e^{-j2\pi f_c t} \stackrel{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \mathcal{S}_{nf}(f) = \mathcal{S}_a(f + f_c). \quad (2.16)$$

Komplexní signál $s_{nf}(t)$ se nazývá komplexní obálkou pásmově omezeného reálného signálu $s(t)$ a vyjadřuje nízkofrekvenční část reálného pásmově omezeného signálu $s(t)$. Vývoj spektra při komplexním vyjádření reálného pásmově omezeného signálu je znázorněno na obr. 2.4 [1], [5].



Obr. 2.4: Vývoj amplitudového spektra při komplexním vyjádření reálného pásmově omezeného signálu: a) amplitudové spektrum reálného pásmově omezeného signálu, b) amplitudové spektrum analytického signálu, c) amplitudové spektrum komplexní obálky.

Komplexní reprezentace reálných diskrétních signálů je obdobná jako v případě signálů spojitých. Objevují se zde ale drobné modifikace a omezení, které musí být zavedeny s ohledem na periodičnost spektra $\mathcal{S}(e^{j\omega})$ diskrétního reálného signálu $s[n]$. Stejně jako v analogové podobě bude zaveden analytický diskrétní signál $s_a[n]$ a jeho

spektrum $\mathcal{S}_a(e^{j\omega})$. Vzhledem k tomu, že spektrum $\mathcal{S}(e^{j\omega})$ vykazuje periodicitu se vzorkovacím kmitočtem ω_{vz} , nemůže být vyžadováno, aby spektrum $\mathcal{S}_a(e^{j\omega})$ pro $\omega < 0$ bylo nulové. S ohledem na toto omezení bude spektrum analytického signálu získáno jako

$$\mathcal{S}_a(e^{j\omega}) = \begin{cases} 2\mathcal{S}(e^{j\omega}), & 0 \leq \omega < \frac{\omega_{vz}}{2} \\ 0, & -\frac{\omega_{vz}}{2} \leq \omega < 0 \end{cases}. \quad (2.17)$$

Ideální diskretní Hilbertův transformátor je definován

$$\mathbf{H}_{HT}(e^{j\omega}) = \begin{cases} -j, & 0 < \omega < \frac{\omega_{vz}}{2} \\ j, & -\frac{\omega_{vz}}{2} < \omega < 0 \end{cases} \quad (2.18)$$

a tedy stejně jako v analogové podobě vyjadřuje fázovací členek, který mění fázi vstupního signálu o $\pm \pi/2$. Spektrum $\mathcal{S}_a(e^{j\omega})$ je obecně komplexní a platí pro něj

$$\mathcal{S}_a(e^{j\omega}) = \mathcal{S}(e^{j\omega}) + j\widehat{\mathcal{S}}(e^{j\omega}), \quad \widehat{\mathcal{S}}(e^{j\omega}) = \mathbf{H}_{HT}(e^{j\omega})\mathcal{S}(e^{j\omega}). \quad (2.19)$$

K určení analytického signálu v časové oblasti je nutné znát impulsní charakteristiku Hilbertova transformátoru danou zpětnou Fourierovou transformací s diskretním časem kmitočtové charakteristiky (2.18)

$$h_{HT}[n] = \frac{1}{\omega_{vz}} \int_{-\frac{\omega_{vz}}{2}}^0 j e^{j\omega n} d\omega - \frac{1}{\omega_{vz}} \int_0^{\frac{\omega_{vz}}{2}} j e^{j\omega n} d\omega \quad (2.20)$$

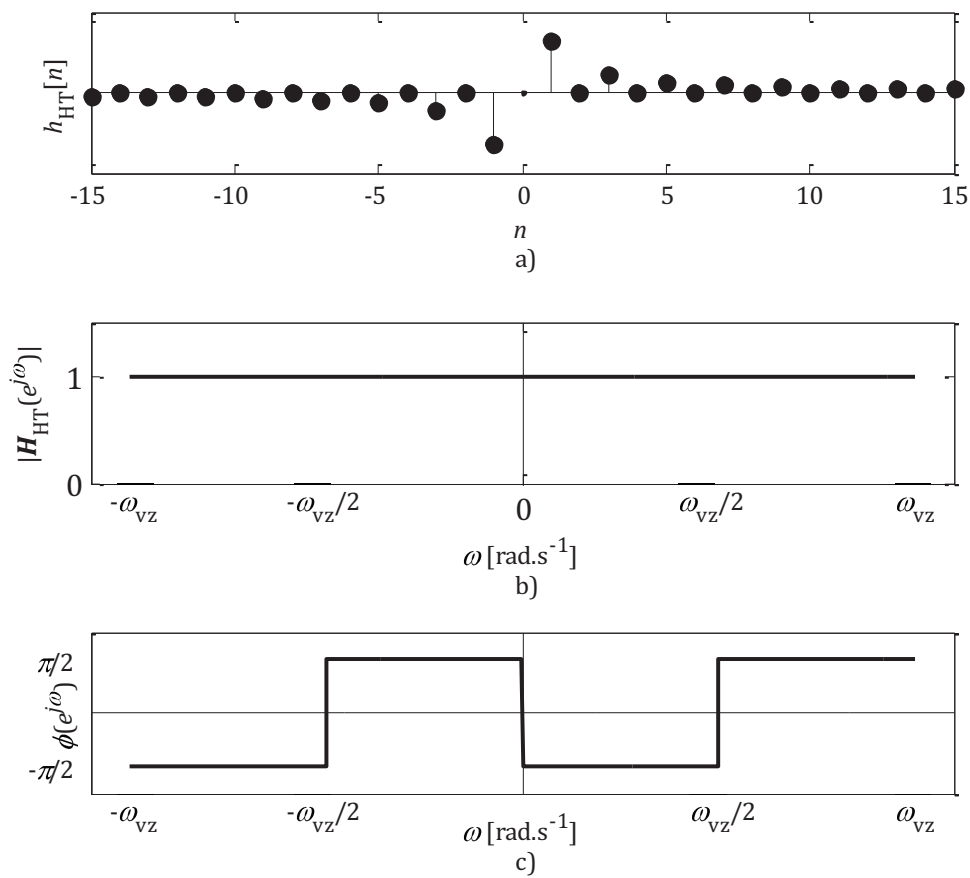
Vyřešení integrálů vede na impulsní charakteristiku v podobě

$$h_{HT}[n] = \begin{cases} \frac{2 \sin^2\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{\pi n}, & n \neq 0 \\ 0, & n = 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, & n \text{ sudé} \\ \frac{2}{\pi n}, & n \text{ liché} \end{cases} \quad (2.21)$$

Analytický signál $\mathbf{s}_a[n]$ v diskretní podobě bude získán stejným způsobem jako v případě spojitého signálu, kdy imaginární část analytického signálu bude tvořena výstupním signálem diskretního Hilbertova transformátoru

$$\mathbf{s}_a[n] = \mathbf{s}[n] + j\widehat{\mathbf{s}}[n]. \quad (2.22)$$

Posun diskretního analytického signálu $\mathbf{s}_a[n]$ do základního pásma $-B/2 \leq f \leq B/2$, $f_c = 0$ a tedy získání komplexní obálky $\mathbf{s}_{nf}[n]$ diskretního signálu se provede obdobným způsobem jako v analogovém případě (2.16) se záměnou diskretního času n za spojitý t [1], [6].



Obr. 2.5: Charakteristiky ideálního diskrétního Hilbertova transformátoru: a) impulsní charakteristika, b) amplitudové spektrum, c) fázové spektrum.

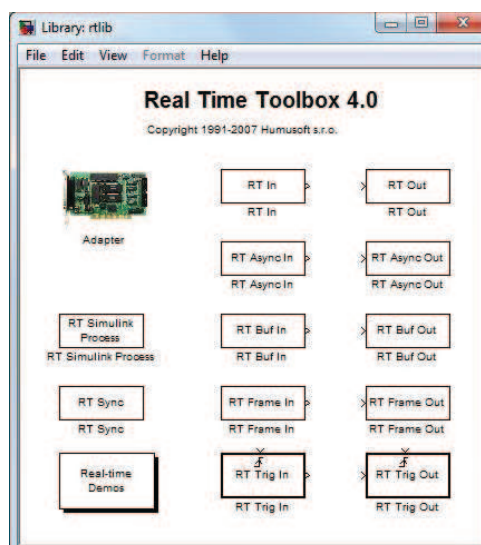
3 Real Time Toolbox

Real Time Toolbox (dále jen RTT) je rozšiřující knihovna programového prostředí Matlab/Simulink pro práci se skutečnými reálnými signály. RTT obsahuje vstupně/výstupní (dále jen I/O) bloky, kterými je možné reálné signály připojit do Simulinku, tam je pomocí navrženého modelu zpracovat a dále distribuovat jako reálné signály. Vše proběhne v reálném čase. Komunikace s okolím je zajištěna podporou ovladačů pro I/O zařízení od několika výrobců [9]. Signály pro zpracování mohou být analogové i digitální a s výpočetním jádrem reálného času se vzorkovacím kmitočtem až 25 kHz je možné experimentovat s řídicími systémy nebo se systémy pro zpracování signálů. Níže uvedené popisy bloků jsou čerpány z literatury [7].

Jak již bylo řečeno v předchozí kapitole, výstupem práce bude laboratorní úloha simulující zpracování signálů v reálném čase. Jako I/O zařízení pro připojení reálných signálů do Matlab/Simulinku bude využita PCI měřicí karta AD622, komunikaci mezi kartou a Matlab/Simulinkem bude zajišťovat právě knihovna RTT. Karta disponuje osmi 14 bitovými A/D a osmi D/A převodníky s rozsahem ± 10 V (analogové vstupy a výstupy). K připojení digitálních signálů karta nabízí osm 8 bitových TTL vstupů a výstupů. Podrobnější informace o kartě nabízí [8].

3.1 Práce s bloky

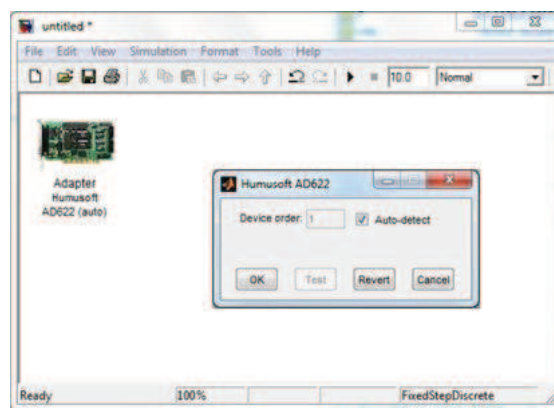
Práce s bloky RTT je obdobná jako s bloky standardních knihoven Simulinku. Nastavení jednotlivých bloků je intuitivní pomocí grafického rozhraní. RTT se skládá ze vstupních a výstupních bloků (obr. 3.1) reprezentujících externí signály a z bloku zastupující dané I/O zařízení, který je pro funkčnost RTT klíčový a umožňuje komunikaci RTT s okolním světem.



Obr. 3.1: Knihovna bloků Real Time Toolbox.

Prvním krokem při vytváření modelu je tedy nastavení bloku zastupující dané I/O zařízení označeného jako *Adapter* a v knihovně je zobrazen jako měřicí karta (obr. 3.1). Tento blok nemá žádné vstupy ani výstupy a nevykonává během simulace v Simulinku žádné operace. Zajišťuje načtení ovladače pro dané zařízení a zprostředkovává přístup k výpočetnímu jádru RTT. K samotnému načtení ovladače dojde až při spuštění simulace. Pro většinu aplikací není nutné měnit počáteční nastavení adaptéru, pokročilé nastavení závisí na použitém zařízení (obr. 3.2). Takto jednoduše se zajistí komunikace mezi Simulinkem a I/O zařízením bez potřeby detailní znalosti hardwaru daného zařízení.

Vkládání dalších bloků z knihovny RTT a jejich nastavení záleží na dané aplikaci. Dále zde budou uvedeny jednotlivé bloky a popis jejich nastavení. Bloky obsažené v RTT by se daly rozdělit vstupní bloky, výstupní bloky a bloky pro speciální použití.



Obr. 3.2: Nastavení ovladače měřicí karty AD622.

3.1.1 Vstupní bloky

Vstupní bloky slouží pro čtení vstupních kanálů v reálném čase. Každé I/O zařízení disponuje několika vstupními kanály (porty), ze kterých je možno načítat vstupní signál. Jednotlivým vstupním blokům lze přiřadit jeden nebo více vstupních kanálů (*Input channels*), jeden vstupní blok může tedy reprezentovat jeden nebo více vstupních signálů. Dalším důležitým parametrem je vzorkovací perioda (*Sample time*) a dále je nutné specifikovat adaptér (*DAQ Adapter*), který zastupuje dané zařízení, ze kterého budou signály čteny. Různé aplikace zpracovávají signály různým způsobem, a proto vyžadují různé typy vstupních bloků. RTT obsahuje vstupní bloky standardní, buffer, frame (rámcové neboli segmentové), asynchronní a spouštěcí vstupní bloky.

Standardní vstupní bloky (*RT In*) načítají vstupní signály vzorek po vzorku. Jakmile je vzorek načten, je zpracován a objeví se na výstupu tohoto bloku. Specifickým parametrem je *Maximum ticks missed*. Tento parametr udává počet vzorků, které mohou být zmeškány, aniž by došlo k zastavení simulace a chybnému hlášení, což je ovlivněno vzorkovacím kmitočtem a dobou simulace, kdy při vysokých vzorkovacích kmitočtech a dlouhé době simulace blok nestíhá zpracovat všechny vzorky vstupního signálu.

Aktuální počet zmeškaných vzorků je možné zobrazit parametrem *Show missed ticks port*.

Dalším typem vstupních bloků je buffer (*RT Buf In*). Tento blok řeší problém se zmeškanými vzorky a umožňuje tedy vytvářet systémy s vysokým vzorkovacím kmitočtem. Vstupní signál je navzorkován, vzorky jsou ukládány do paměti (velikost paměti určuje parametr *Buffer size*), a jakmile je paměť naplněna dochází k vyčtení vzorek po vzorku na výstup bloku.

Podobným typem jako předchozímu bloku je frame blok (*RT Frame In*). Tento blok slučuje funkce bloku *RT Buf In* a *Buffer* bloku z knihovny Signal Processing Blockset. Data jsou načtena do paměti a vyčítána nejsou vzorek po vzorku ale po segmentech určité délky (*Frame length*). Dále umožňuje nastavit přesah výstupních segmentů (*Frame overlap*) a proto je vhodný například pro aplikace kmitočtové analýzy. Parametr *Initial condition* určuje výstup bloku před prvním naplněním daty. Velikost vstupní paměti je možné nastavovat rovněž pomocí *Buffer size*.

Asynchronní vstupní blok (*RT Async In*) se používá v aplikacích, kde vstupy nejsou řízeny časovačem. Načtení signálu je vykonáno na základě požadavku dalšího bloku připojeného na výstup.

Spouštěcí blok (*RT Trig In*) umožňuje řízené čtení vstupních signálů. Řízení je na základě parametru řídicího signálů. Čtení může nastat při vzestupné, sestupné nebo jiné hraně řídicího signálu (*Trigger type*).

3.1.2 Výstupní bloky

Výstupní bloky jsou výstupy celého modelu a slouží k distribuci signálů na výstupní kanály I/O zařízení. Stejně jako u vstupních bloků je nutné nastavovat přiřazení k jednotlivým kanálům, vzorkovací periodu a adaptér zastupující dané zařízení. Vlastnosti parametrů výstupních bloků jsou obdobné s rozdílem toho, že zastupují výstupní signály. Parametrem, který je navíc u těchto bloků je nastavení počátečních a konečných hodnot výstupu (*Initial a Final output value*). Počáteční hodnota se objeví na výstupu bloku při startu simulace, než dojde k načtení vstupních dat a konečná hodnota je na výstupu po skončení simulace a zůstává na výstupu, dokud není spuštěna další simulace.

Vstupní i výstupní bloky umožňují práci s analogovými i digitálními vstupy daného I/O zařízení. Při práci s analogovými vstupy a výstupy je možné nastavit vstupní popřípadě výstupní rozsah signálu (*Input nebo Output range*) a jednotku (*Input nebo Output units*; u některých zařízení jsou tyto parametry neměnné). U digitálních vstupů a výstupů se nastavuje reprezentace digitálních signálů (*Input/Output mode*). *Bit mode* vyjadřuje data jako posloupnost bitů 1 a 0 daného kanálu. Při reprezentaci dat v *Byte mode* je při každém vzorku po sobě načteno 8 kanálů, následně složeno do jednoho bajtu. Data jsou tedy vyjádřeny bajty v rozmezí 0 až 255. Některé I/O zařízení podporují další vstupně/výstupní bloky jako různé čítače a kodéry.

3.1.3 Bloky pro zvláštní použití

Mezi tyto bloky patří blok pro synchronizaci (*RT Sync*) modelu v Simulinku s časovačem RTT. Blok nemá žádné vstupy ani výstupy a nevyžaduje žádný adaptér zastupující I/O zařízení. Jeho nastavení spočívá v určení vzorkovací periody, na kterou se bude model synchronizovat a počet zmeškaných vzorků.

Dále do této skupiny spadá blok pro řízení priority (*RT Simulink Process*). Tento blok umožňuje nastavit systémovou prioritu pro vykonání modelu v Simulinku. Zvýšením priority může nastat snížení výkonu celého operačního systému nebo způsobit nedostupnost různých aplikací, proto je třeba tento blok používat s rozvahou.

RTT má svá omezení, které se týkají výpočetního jádra. Jádro se skládá ze dvou objektů, z časovačů a ovladačů. Časovače zastávají funkci časování I/O operací. Některé bloky pro svou činnost potřebují zvláštní časovač (využití časovačů viz RTT [7]). Maximální počet časovačů je omezen na 128, tedy model může obsahovat maximálně 128 bloků vyžadujících časovač. Ovladače zajišťují rozhraní mezi výpočetním jádrem a I/O zařízení. V jednom modelu může být využito maximálně 32 I/O zařízení.

Další omezení se týká použitého vzorkovacího kmitočtu. Při vyšších vzorkovacích kmitočtech výpočetní výkon klesá z důvodu toho, že všechny bloky RTT jsou implementovány jako S-funkce, které mají větší výpočetní čas než běžné bloky Simulinku. Aby nedošlo ke snížení výpočetního výkonu je nutné pro vzorkovací kmitočty nad 10 kHz používat bloky typu frame a zpracovávat je jako vektor bloků specifikující vektor příslušných kanálů. Samozřejmě výpočetní výkon je také dán typem I/O zařízení.

4 Závěr

Cílem první části práce bylo seznámit čtenáře s diskretní Fourierovou transformací DFT a jejího využití při spektrální analýze diskretních signálů. Byl zde popsán algoritmus rychlé Fourierovy transformace FFT, který výrazně zefektivnil výpočet DFT v porovnání s přímou metodou výpočtu. Efektivnost algoritmu FFT byla ověřena v programovém prostředí Matlab, kde byl implementován přímý výpočet DFT a porovnán s výpočtem pomocí FFT, k němuž byla využita vestavěná funkce v Matlabu. Výstupem tohoto porovnání je grafická závislost výpočetního času obou metod na délce vstupního signálu. Tato závislost je při použití FFT téměř lineární oproti exponenciální závislosti při použití přímé metody výpočtu, což potvrzuje efektivnost výpočtu DFT algoritmem FFT. Dále práce popisovala vliv délky DFT a vliv délky analyzovaného signálu na výsledný tvar DFT spektra. Pro výukové účely byly vytvořeny praktické ukázky a jednoduché animace demonstrující oba zmíněné vlivy na DFT spektrální analýzu. Také byl popsán důležitý jev, který se v praxi při DFT spektrální analýze často objevuje a ovlivňuje tvar spektra tzv. prosakování ve spektru. Byla uvedena praktická ukázka využití časových oken pro jeho potlačení a vytvořena animace demonstrující vliv různých oken na časový průběh a tvar spektra signálu.

Praktickým výstupem práce je laboratorní úloha realizovaná v programovém prostředí Matlab/Simulink, která s využitím měřicí karty AD622 a aplikační knihovny Real Time Toolbox simuluje zpracování signálů v reálném čase. Tematicky je úloha zaměřena na komplexní reprezentaci reálných pásmově omezených signálů, jež byla popsána v druhé kapitole práce. Popis aplikační knihovny Real Time Toolbox a používání jednotlivých bloků byl uveden ve třetí kapitole. Text vypracované laboratorní úlohy a schéma zapojení jsou uvedeny v příloze A, resp. příloze B.

Seznam literatury

- [1] PROAKIS, John G.; MANOLAKIS, Dimitris G. *Digital Signal Processing : Principles, Algorithms and Applications*. Fourth Edition. New Jersey : Pearson Prentice Hall, 2007. 1084 s. ISBN 0-13-187374-1.
- [2] HLAVÁČ, Václav; SEDLÁČEK, Miloš. *Zpracování signálů a obrazů*. 2. přepr. vydání. Praha : Vydavatelství ČVUT, 2007. 255 s. ISBN 978-80-01-03110-0.
- [3] INGLE, Vinay K.; PROAKIS, John G. *Digital Signal Processing : using MATLAB*. USA : Brooks/Cole, 2000. 418 s. ISBN 0-534-37174-4.
- [4] UHLÍŘ, Jan; SOVKA, Pavel; ČMEJLA, Roman. *Úvod do číslicového zpracování signálů*. Praha : Vydavatelství ČVUT, 2003. 151 s. ISBN 80-01-02799-6.
- [5] SMÉKAL, Zdeněk; Číslicové zpracování signálů (MCSI). Skriptum VUT FEKT v Brně, 2010
- [6] JAN, Jiří. *Číslicová filtrace, analýza a restaurace signálů*. 2. upravené a rozšířené vydání. VUT v Brně : VUTIUM, 2002. 427 s. ISBN 80-214-2911-9.
- [7] *Real Time Toolbox for use with Simulink : User's Manual*. version 4.0. Czech Republic : Humosoft s.r.o., c2006. 71 s.
- [8] *AD 622 Data Acquisition Card : User's Manual*. Czech Republic : Humosoft s.r.o., c2006. 20 s.
- [9] *Humosoft : Technické výpočty, řídicí technika, simulace* [online]. c2011 [cit. 2011-05-17]. Real Time Toolbox. Dostupné z WWW: <<http://www.humosoft.cz/produkty/rtt/>>.
- [10] *Agilent 33220A 20 MHz Function / Arbitrary Waveform Generator*. Malaysia : Agilent Technologies, c2007. 362 s.

Seznam použitých zkratek, veličin a symbolů

AD622	Měřicí karta
A/D	Převodník analog/digitál
DIT (Decimation In Time)	Decimace v čase
DIF (Decimation In Frequency)	Decimace v kmitočtové oblasti
DFT (Discrete Fourier Transform)	Diskrétní Fourierova transformace
DP	Dolní propust
DTFS (Discrete Time Fourier Series)	Diskrétní Fourierova řada
DTFT (Discrete Time Fourier Transform)	Fourierova transformace diskrétních signálů
D/A	Převodník digitál/analog
FFT (Fast Fourier Transform)	Rychlá Fourierova transformace
FIR (Finite Impulse Response)	Číslicový filtr s konečnou impulsní charakteristikou
IDFT (Inverse DFT)	Zpětná diskrétní Fourierova transformace
I/O (Input/Output)	Vstupně/výstupní
PCI (Peripheral Component Interconnect)	Sběrnice pro připojení periférií k základní desce PC
RTT (Real Time Toolbox)	Aplikační knihovna Matlab/Simulink
TTL (Transistor – Transistor Logic)	Technologie digitálních obvodů

A	Amplituda signálu [V]
B	Kmitočtové pásmo [Hz]
c_k	Koeficienty Fourierovy řady
$\delta(t)$	Jednotkový impuls
f	Kmitočet signálu [Hz]
f_c	Nosný kmitočet [Hz]
f_H	Horní mezní kmitočet [Hz]
f_D	Dolní mezní kmitočet [Hz]
f_{mod}	Kmitočet modulačního signálu [Hz]
f_0	Základní harmonický kmitočet [Hz]
f_{vz}	Vzorkovací kmitočet [Hz]
$\varphi(f)$	Fázová charakteristika
$h_{\text{HT}}(t)$	Impulsní charakteristika analogového Hilbertova transformátoru
$H_{\text{HT}}(f)$	Kmitočtová charakteristika analogového Hilbertova transformátoru
$h_{\text{HT}}[n]$	Impulsní charakteristika diskrétního Hilbertova transformátoru
$H_{\text{HT}}(e^{j\omega})$	Kmitočtová charakteristika diskrétního Hilbertova transformátoru
\Im	Imaginární část
L	Délka diskrétního signálu
N	Délka DFT spektra
N_p	Perioda diskrétního periodického signálu
\Re	Reálná část
$s(t)$	Spojité pásmově omezený signál
$S(f)$	Spektrum spojitého pásmově omezeného signálu
$s[n]$	Diskrétní pásmově omezený signál
$S(e^{j\omega})$	Spektrum diskrétního pásmově omezeného signálu
$\hat{s}(t)$	Imaginární část spojitého analytického signálu
$\hat{s}[n]$	Imaginární část diskrétního analytického signálu

$\widehat{S}(e^{j\omega})$	Spektrum imaginární části diskretního analytického signálu
$s_a(t)$	Spojité analytický signál
$S_a(f)$	Spektrum spojitého analytického signálu
$s_a[n]$	Diskretní analytický signál
$S_a(e^{j\omega})$	Spektrum diskretního analytického signálu
$s_{nf}(t)$	Nízkofrekvenční ekvivalent spojitého pásmově omezeného signálu
$S_{nf}(f)$	Spektrum nízkofrekvenčního ekvivalentu spojitého pásmově omezeného signálu
$s_{nf}[n]$	Nízkofrekvenční ekvivalent diskretního pásmově omezeného signálu
$S_{nf}(e^{j\omega})$	Spektrum nízkofrekvenčního ekvivalentu diskretního pásmově omezeného signálu
$s_{nfi}[n]$	Reálná část nízkofrekvenčního ekvivalentu diskretního pásmově omezeného signálu
$s_{nfQ}[n]$	Imaginární část nízkofrekvenčního ekvivalentu diskretního pásmově omezeného signálu
T	Doba trvání diskretního signálu [s]
$u(t)$	Spojité jednotkový skok
$U(f)$	Spektrum jednotkového skoku
V_{pp}	Napětí špička – špička [V]
$w[n]$	Diskretní časové okno
$W[k]$	Koeficienty DFT spektra diskretního časového okna
W_N	Komplexní exponenciála
$x(t)$	Spojité signál
$X(f)$	Spektrum spojitého signálu
$x[n]$	Diskretní signál
$X(e^{j\omega})$	Spektrum diskretního signálu
$X[k]$	Koeficienty DFT spektra diskretního signálu
$x_p[n]$	Periodický diskretní signál
$x_w[n]$	Váhováný diskretní signál
$X_w[k]$	Koeficienty DFT spektra váhovaného diskretního signálu

Seznam příloh

A	LABORATORNÍ ÚLOHA.....	46
B	SCHÉMA ZAPOJENÍ LABORATORNÍ ÚLOHY	57
C	VLASTNOSTI MĚŘICÍ KARTY AD622	58

A LABORATORNÍ ÚLOHA

Komplexní reprezentace reálných pásmově omezených signálů

Cíl úlohy

Seznámit se s možnostmi komplexního vyjádření reálných pásmově omezených signálů v základním pásmu. Jednotlivé varianty komplexního vyjádření realizovat a porovnat spektra výstupních signálů.

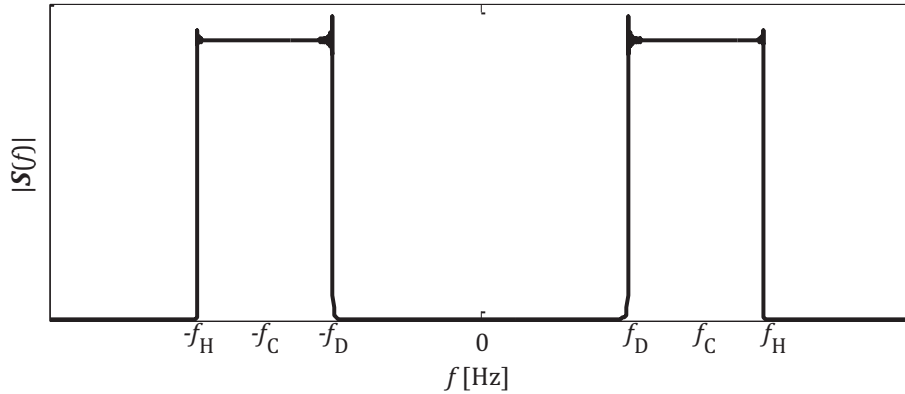
Seznam použitých přístrojů a pomůcek

- Funkční generátor Agilent 33220A
- Měřicí karta AD622 s vyvedenou svorkovnicí
- Matlab/Simulink: základní knihovny + Real Time Toolbox, Signal Processing Blockset a Signal Processing Toolbox
- Propojovací kabel

Teoretický úvod

Signály, které mají spektrum soustředěno do úzkého kmitočtového pásma B kolem středního (nosného) kmitočtu f_c se označují jako pásmově omezené. Pro tyto signály platí $B = f_H - f_D$ a také $f_c \gg B$ (obr. 1). V praxi se tyto signály vyskytují velice často, např. v telekomunikačních systémech hojně využívané modulované signály jsou pásmově omezené, kdy informační signál moduluje (ovlivňuje parametry nosné vlny) nosnou vlnu s kmitočtem f_c a výsledný modulovaný signál je dále přenášena různými přenosovými médii. Tyto signály jsou spojitě (analogové), nabývají reálných hodnot, a tudíž jejich spektrum obsahuje složky soustředěné kolem kladného i záporného kmitočtu f_c . Navíc šířka pásma modulovaného signálu B obklopující nosný kmitočet f_c je dvojnásobná oproti šířce pásma modulačního (informačního) signálu a tedy nese dvojnásobné množství informace. Tyto vlastnosti jsou při zpracování signálu omezující, např. v systémech kmitočtového multiplexu by vlivem zmíněných vlastností docházelo k neefektivnímu využití šířky pásma přenosového kanálu (média).

Číslicovými systémy je možné snadno zpracovávat signály také v komplexní podobě a zavádět metody využívající komplexního vyjádření signálů. Komplexní signál konečné délky může obecně nést dvojnásobné množství informace než signál reálný stejné délky. Pomocí komplexního vyjádření signálů lze výše uvedené vlastnosti reálných pásmově omezených signálů eliminovat.



Obr. 1: Amplitudové spektrum reálného pásmově omezeného signálu

Hilbertova transformace a analytický signál

Libovolný reálný pásmově omezený signál $s(t)$ lze vyjádřit pouze jednou polovinou jeho spektra. Toto vyjádření je označováno jako analytický signál $\mathbf{s}_a(t)$ signálu $s(t)$. Analytický signál $\mathbf{s}_a(t)$ je obecně komplexní a skládá se z reálného signálu $s(t)$ a Hilbertovy transformace reálného signálu $s(t)$

$$\mathbf{s}_a(t) = s(t) + j\hat{s}(t). \quad (1)$$

Imaginární část je právě dána Hilbertovou transformací, neboli výstupním signálem Hilbertova transformátoru

$$\hat{s}(t) = \frac{1}{\pi t} * s(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(\tau)}{t - \tau} d\tau. \quad (2)$$

Impulsní odezva a kmitočtová charakteristika Hilbertova transformátoru jsou dány

$$h_{\text{HT}}(t) = \frac{1}{\pi t}, \quad -\infty < t < \infty, \quad (3)$$

$$\mathbf{H}_{\text{HT}}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h_{\text{HT}}(t) e^{-j2\pi f t} dt = \begin{cases} -j, & f > 0 \\ j, & f < 0 \end{cases} \quad (4)$$

$$\mathbf{H}_{\text{HT}}(f) = |\mathbf{H}_{\text{HT}}(f)| e^{j\varphi(f)}, \quad |\mathbf{H}_{\text{HT}}(f)| = 1, \quad \varphi(f) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, & f > 0 \\ \frac{\pi}{2}, & f < 0 \end{cases}. \quad (5)$$

Z analytického signálu lze snadno získat nízkofrekvenční vyjádření reálného pásmově omezeného signálu $s(t)$ s využitím modulační vlastnosti Fourierovy transformace

$$\mathbf{s}_{\text{nf}}(t) = \mathbf{s}_a(t) e^{-j2\pi f_c t} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \mathbf{S}_{\text{nf}}(f) = \mathbf{S}_a(f + f_c). \quad (6)$$

Takto získaný signál se nazývá komplexní obálka reálného pásmově omezeného signálu $s(t)$ a jeho spektrum se nachází v základním pásmu $-B/2 \leq f \leq B/2, f_c = 0$.

Komplexní vyjádření diskretních reálných pásmově omezených signálů $s[n]$ se mírně odlišuje od vyjádření ve spojitě podobě. Odlišnosti jsou dány důležitou vlastností spektra diskretních signálů a to je jejich periodicitu se vzorkovacím kmitočtem ω_{vz} . S ohledem na tuto vlastnost nemůže být spektrum analytického signálu nulové pro záporné kmitočty. Diskretní Hilbertův transformátor je ve spektru definován

$$\mathbf{H}_{HT}(e^{j\omega}) = \begin{cases} -j, & 0 < \omega < \pi \\ j, & -\pi < \omega < 0 \end{cases} \quad (7)$$

a jeho impulsní charakteristika je dána zpětnou Fourierovou transformací kmitočtové charakteristiky

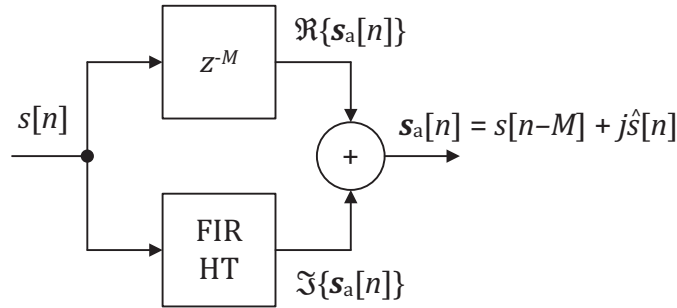
$$\begin{aligned} h_{HT}[n] &= \frac{1}{\omega_{vz}} \int_{-\frac{\omega_{vz}}{2}}^0 j e^{j\omega n} d\omega - \frac{1}{\omega_{vz}} \int_0^{\frac{\omega_{vz}}{2}} j e^{j\omega n} d\omega = \begin{cases} \frac{2 \sin^2\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{\pi n}, & n \neq 0 \\ 0, & n = 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0, & n \text{ sudé} \\ \frac{2}{\pi n}, & n \text{ liché} \end{cases} \end{aligned} \quad (8)$$

Analytický signál $s_a[n]$ a komplexní obálka $s_{nf}[n]$ diskretního pásmově omezeného signálu $s[n]$ jsou získány obdobně jako v analogovém případě (1), (6) se záměnu spojitého času t za diskretní n .

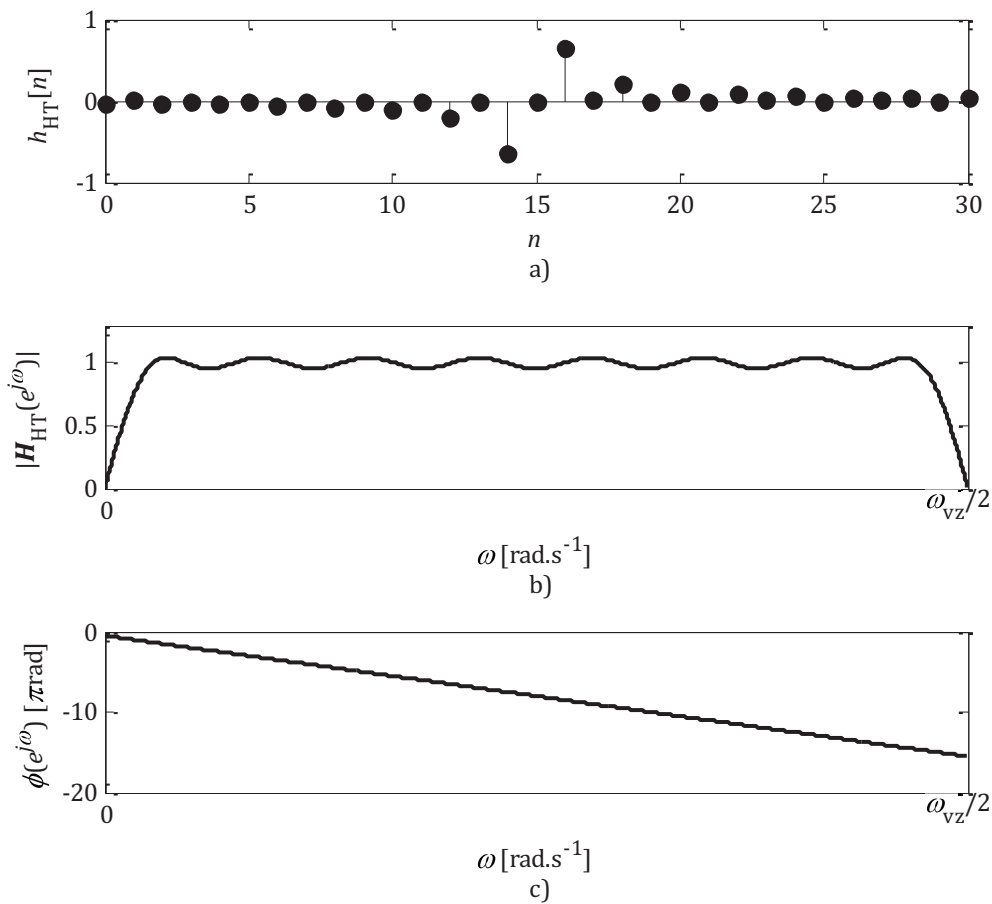
Ze vztahu (8) vyplývá, že diskretní Hilbertův transformátor v ideální podobě není kauzální. Tudíž ho nelze prakticky realizovat, pouze přibližně aproximovat. Možné přístupy k přibližné realizaci vycházejí z aproximace Hilbertova transformátoru FIR filtrem s lineární fází v časové nebo z aproximace analytického filtru v kmitočtové oblasti. Existuje ale i zcela odlišný způsob komplexního vyjádření signálů a to pomocí kvadraturních modulátorů [2], [3].

Aproximace v časové oblasti

Aproximace v časové oblasti vychází z ideální impulsní charakteristiky Hilbertova transformátoru, kdy dochází k jejímu symetrickému zkrácení a následnému zpoždění o polovinu zkrácené délky (obr. 3). Postup výpočtu analytického signálu $s_a[n]$ je zobrazen na obr. 2. Blok z^{-M} vyrovnává zpoždění M , které vkládá do výpočtu imaginární části analytického signálu FIR filtr aproximující Hilbertův transformátor. Toto zpoždění M odpovídá polovině řádu aproximujícího FIR filtru, z čehož plyne, že řád filtru musí být sudý [3].



Obr. 2: Výpočet diskrétního analytického signálu pomocí FIR filtru aproximujícího Hilbertův transformátor



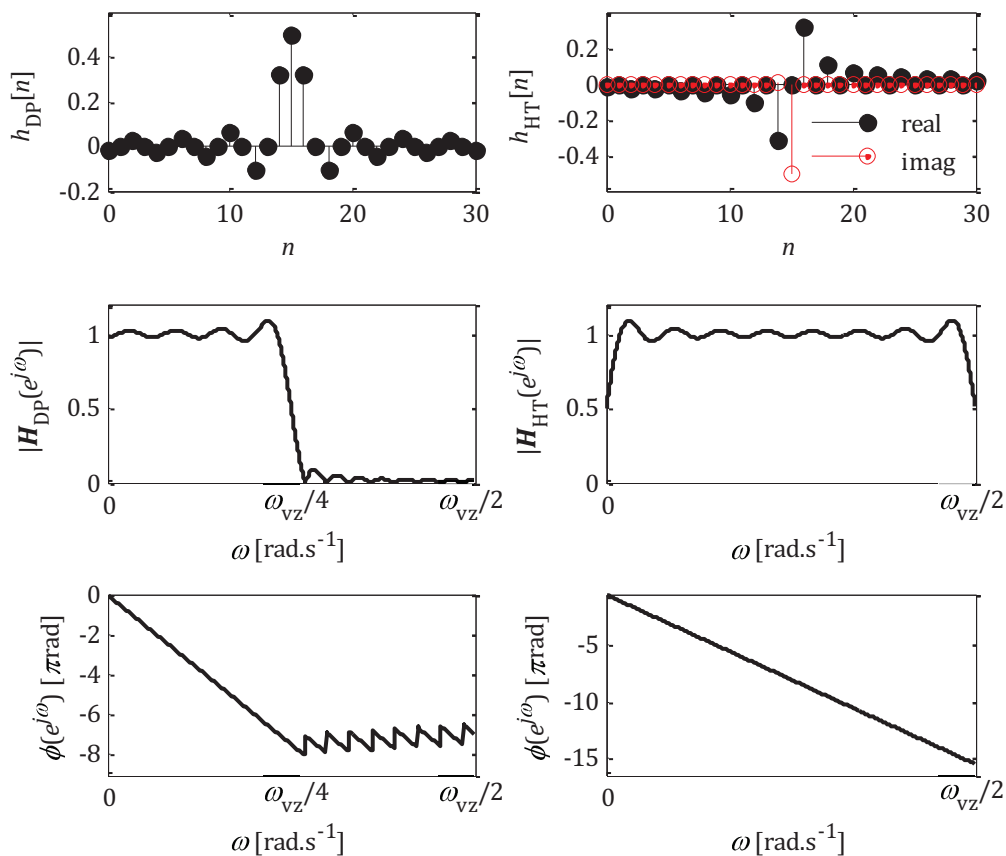
Obr. 3: Charakteristiky aproximace Hilbertova transformátoru v časové oblasti FIR filtrem s lineární fází: a) impulsní charakteristika, b) amplitudové spektrum, c) fázové spektrum

Aproximace v kmitočtové oblasti

Jedna z důležitých vlastností Fourierovy transformace diskretních signálů je tzv. modulační vlastnost neboli kmitočtový posun

$$s[n]e^{\pm j\Delta\omega n} \stackrel{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \mathbf{S}(e^{j(\omega \mp \Delta\omega)}). \quad (9)$$

Tato vlastnost říká, že pokud bude jakýkoli diskretní signál $s[n]$ vynásoben (vzorek po vzorku) komplexní exponenciální posloupností $e^{j\Delta\omega n}$ bude jeho původní spektrum posunuto o $\Delta\omega$. Této vlastnosti je využito při aproximaci kmitočtové charakteristiky Hilbertova transformátoru pomocí ideální dolní propusti s mezním kmitočtem $\omega_{vz}/4$ a jejím posunutím o $\omega_{vz}/4$. Je zřejmé, že ideální dolní propust je nerealizovatelná a vždy se tedy bude jednat pouze o aproximaci, jejíž přesnost je dána přesností návrhu dolní propusti. Je třeba poznamenat, že výsledná impulsní charakteristika aproximovaného Hilbertova transformátoru je na rozdíl od časové aproximace komplexní (viz obr. 4 pravý horní graf impulsní charakteristiky). Výstupním signálem filtru je přímo analytický signál $s_a[n]$, proto označován také jako aproximace analytického filtru [3].



Obr. 4: Aproximace analytického filtru kmitočtovým posunem dolní propusti. Levý sloupec: charakteristiky FIR dolní propusti, pravý sloupec: charakteristiky aproximovaného filtru

Komplexní vyjádření signálů pomocí kvadrurních modulátorů

Předešlé metody využívají k vyjádření komplexní obálky reálného pásmově omezeného signálu Hilbertovy transformace (transformátoru), kterou je získán analytický signál, a ten je následně posunut do základního pásma. Pomocí kvadrurních modulátorů lze komplexní obálku $\mathbf{s}_{nf}[n]$ vyjádřit přímo z reálného pásmově omezeného signálu $s[n]$. Kvadrurní modulátory jsou založené na již zmíněné modulační vlastnosti Fourierovy transformace (9). Komplexní obálka $\mathbf{s}_{nf}[n]$ reálného signálu je obecně komplexní a může tedy být zapsána jako

$$\mathbf{s}_{nf}[n] = s_{nfl}[n] + js_{nfQ}[n]. \quad (10)$$

Dále pro komplexní obálku vyjádřenou kmitočtovým posunem analytického signálu $\mathbf{s}_a[n]$ o nosný kmitočet ω_c platí

$$\mathbf{s}_{nf}[n] = \mathbf{s}_a[n]e^{-j\omega_c n} = (s[n] + j\hat{s}[n])e^{-j\omega_c n}. \quad (11)$$

Po úpravě vztahu (11), dosazení vztahu (10) do (11) a oddělení reálné a imaginární složky je získán vztah pro popis pásmově omezeného signálu pomocí nízkofrekvenčních složek komplexní obálky

$$s[n] + j\hat{s}[n] = \mathbf{s}_{nf}[n]e^{j\omega_c n} = (s_{nfl}[n] + js_{nfQ}[n])(\cos[\omega_c n] + j \sin[\omega_c n]) \quad (12)$$

$$s[n] = \Re\{\mathbf{s}_{nf}[n]e^{j\omega_c n}\} = s_{nfl}[n] \cos[\omega_c n] - s_{nfQ}[n] \sin[\omega_c n] \quad (13)$$

$$\hat{s}[n] = \Im\{\mathbf{s}_{nf}[n]e^{j\omega_c n}\} = s_{nfl}[n] \sin[\omega_c n] + s_{nfQ}[n] \cos[\omega_c n]. \quad (14)$$

Pro určení komplexní obálky $\mathbf{s}_{nf}[n]$ z reálného signálu $s[n]$ je vycházeno z předpokladu, že spektrum komplexní obálky odpovídá spektru pásmového signálu v základním pásmu a tedy s využitím vztahu (9) platí

$$\mathbf{s}_{nf}[n] = s[n]e^{-j\omega_c n}. \quad (15)$$

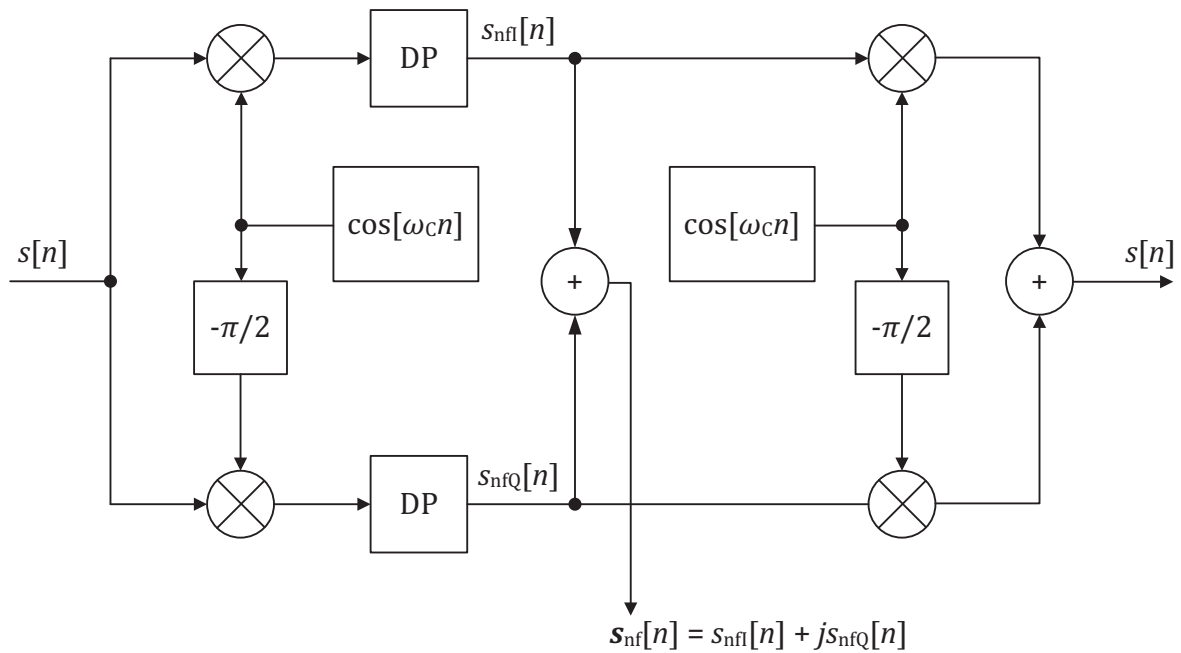
Dosazením vztahů (10), (13) do vztahu (11), následnou úpravou s využitím vztahů pro násobení goniometrických funkcí a oddělením reálné a imaginární složky dostáváme

$$s_{nfl}[n] + js_{nfQ}[n] = (s_{nfl}[n] \cos[\omega_c n] - s_{nfQ}[n] \sin[\omega_c n])(\cos[\omega_c n] - j \sin[\omega_c n]), \quad (16)$$

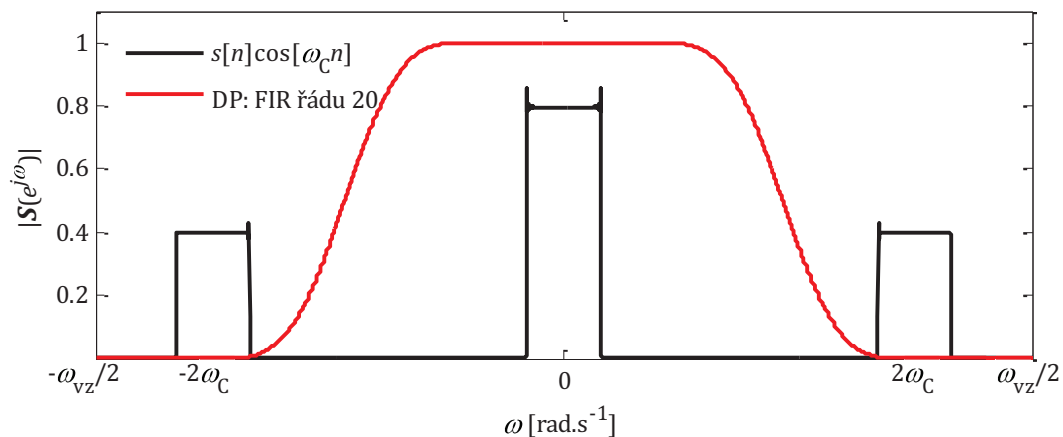
$$2s[n] \cos[\omega_c n] = s_{nfl}[n] + s_{nfl}[n] \cos[2\omega_c n] - s_{nfQ}[n] \sin[2\omega_c n], \quad (17)$$

$$2s[n](-\sin[\omega_c n]) = s_{nfQ}[n] - s_{nfQ}[n] \cos[2\omega_c n] - s_{nfl}[n] \sin[2\omega_c n]. \quad (18)$$

Ze vztahů (17) a (18) je patrné, že po násobení reálného signálu komplexní exponenciálou se ve spektru výsledného signálu objeví složky na kmitočtech $2\omega_c$, které musí být odstraněny dolní propustí. Po odfiltrování vyšších harmonických jsou získány reálná (soufázová) část $s_{nfl}[n]$ a imaginární (kvadrurní) část $s_{nfQ}[n]$ komplexní obálky $\mathbf{s}_{nf}[n]$ [1], [2].



Obr. 5: Blokové schéma výpočtu komplexní obálky pomocí kvadraturních modulátorů



Obr. 6: Amplitudové spektrum signálu po násobení $\cos[\omega cn]$ v reálné (soufázové) větvi a kmitočtová charakteristika DP pro odstranění složek na vyšších kmitočtech

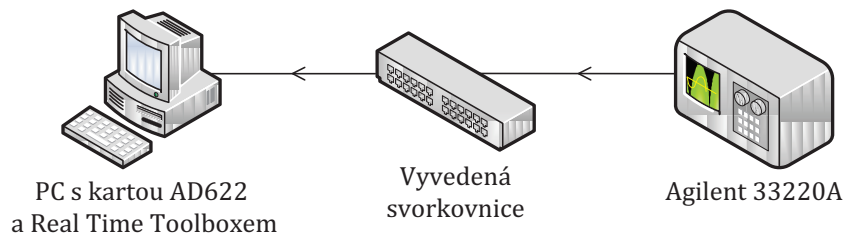
Zadání

- 1) Seznamte se s funkčním generátorem Agilent 33220A [4], knihovnou *Real Time Toolbox* prostředí Matlab/Simulink [5] a měřicí kartou AD622 [6]. Pomocí generátoru vygenerujte pásmově omezený signál, zobrazte jeho časový průběh a amplitudové spektrum v Matlab/Simulinku.

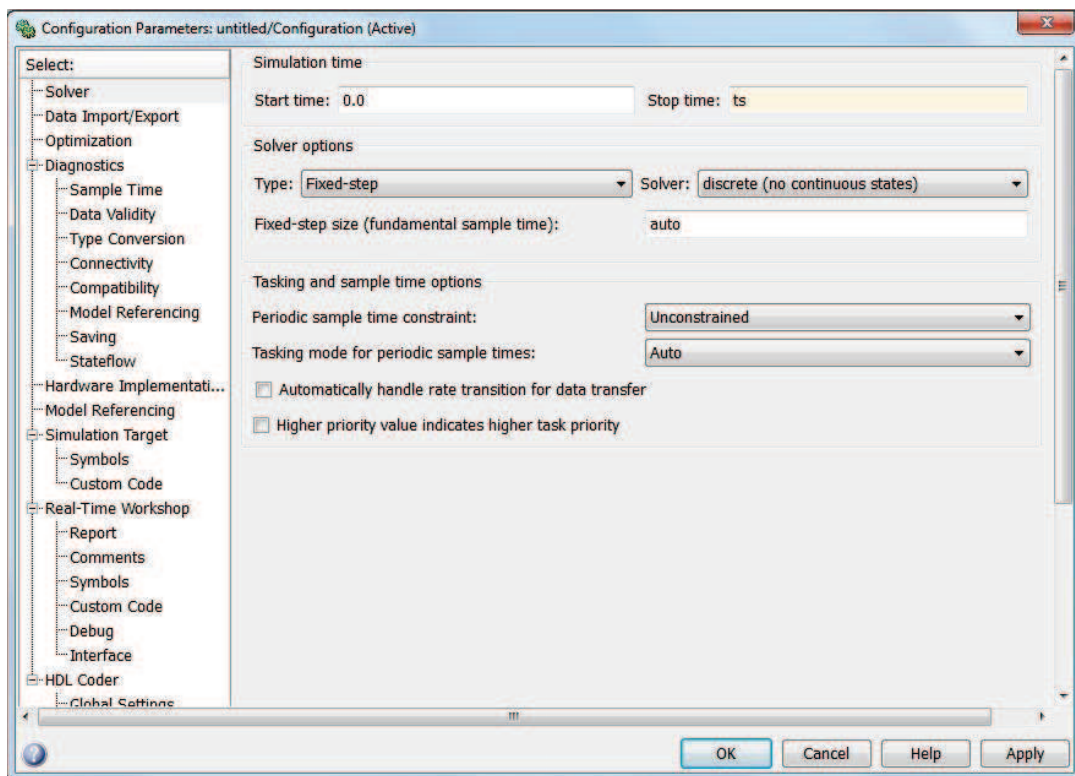
- 2) Dále se seznamte s možnostmi vyjádření komplexní obálky reálných pásmově omezených signálů. Jednotlivé metody aproximace Hilbertova transformátoru v časové, kmitočtové oblasti a vyjádření komplexní obálky pomocí kvadraturních modulátorů realizujte v Matlab/Simulinku, sledujte vývoj ve spektru a porovnejte spektra komplexních obálek jednotlivých realizací.

Postup měření

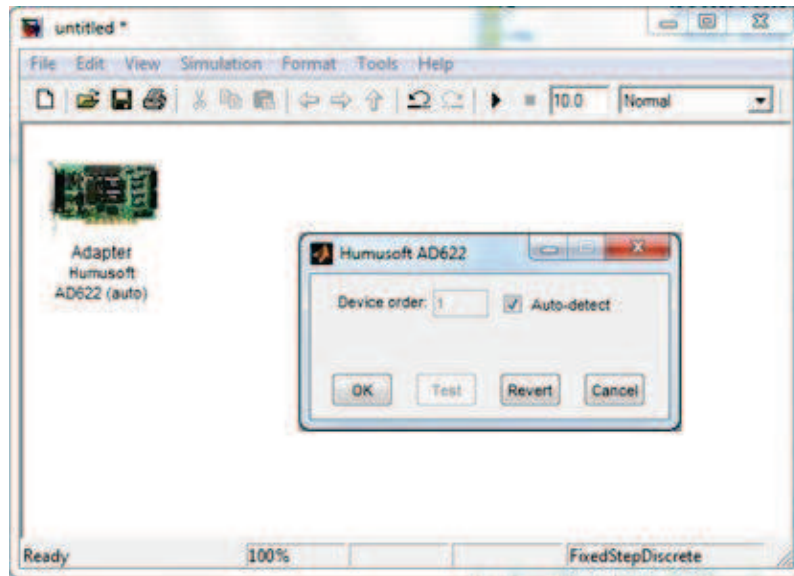
- 1) Vytvořte nový model v Matlab/Simulink. Nastavte parametry simulace *Simulation* → *Configuration Parameters*. V menu *Solver* nastavte diskretní výpočet simulace *Type: Fixed-step* a *Solver: discrete (no continuous states)* (obr. 8). Propojte výstup generátoru se vstupním analogovým kanálem (se vstupním analogovým portem vyvedené svorkovnice) karty AD622 (obr. 7). Načtěte ovladač karty AD622 do vytvořeného modelu (obr. 9) *Real Time Toolbox* → *Adapter*.



Obr. 7: Zapojení pracoviště



Obr. 8: Nastavení diskretního výpočtu simulace



Obr. 9: Načtení ovladače karty AD622 do modelu

Pomocí generátoru vygenerujte pásmově omezený signál: AM modulovaný signál, nosná: sinusoida, $f_c = 1000$ Hz, $V_{pp} = 2$ V, modulační signál: sinusoida, $f_{mod} = 200$ Hz, hloubka modulace = 100 %.

Vytvořte skript, ve kterém nastavte inicializační parametry simulace: vzorkovací kmitočet ($f_{vz} > 4f_c$) a čas simulace. Skript uložte (bude dále upravován). Přiřaďte vytvořený skript k inicializační funkci modelu. *File* → *Model Properties* → *Callbacks* → *InitFcn* → *název vašeho skriptu*. Inicializační funkce modelu bude tento skript spouštět před začátkem každé simulace. Při nastavování parametrů simulace a jednotlivých bloků využívejte proměnných definovaných v tomto skriptu, nezapomínejte ukládat změny ve skriptu.

Přiveďte vygenerovaný signál do modelu. Jako vstupní blok signálu vyberte *RT Buf In* z knihovny *Real Time Toolbox* a nastavte příslušné parametry, vzorkovací periodu, velikost bufferu s ohledem na čas simulace a vzorkovací kmitočet, vstupní kanál dle portu na svorkovnici. Zobrazte časový průběh a spektrum signálu. Spektrální analyzátor volte *Signal Processing Blockset* → *Signal Processing Sinks* → *Spectrum Scope*, u kterého nastavte délku vstupního bufferu (alespoň 512), přesah (volte polovinu délky bufferu), průměrování z 10 spekter a zobrazení v rozmezí $-f_{vz}/2$ až $f_{vz}/2$.

2) Aproximace Hilbertova transformátoru v časové oblasti

V inicializačním skriptu navrhnete FIR filtr aproximující Hilbertův transformátor (obr. 3). Využijte k tomu návrhové metody `firls` s parametrem `hilbert` (viz help). Volte velmi malou strmost přechodů (do 100 Hz). Řád filtru definujte jako proměnnou ve skriptu. Pro kontrolu si můžete zobrazit jeho kmitočtovou charakteristiku pomocí `freqz` nebo `fdatool`. Navržený filtr implementujte do modelu *Signal Processing Blockset* → *Filtering* → *Filter Designs* → *Digital Filter*, kde

nastavte přenosovou funkci typu FIR a koeficienty vámi navrženého filtru. Na vstup filtru přiveďte signál z generátoru a dle obr. 2 vypočtěte analytický signál a zobrazte jeho spektrum. Blok zpoždění *Discrete* → *Integer Delay*.

Analytický signál kmitočtově posuňte do základního pásma viz vztah (6). Využijte goniometrického vyjádření komplexní exponenciály $e^{-j\omega_c t}$.

Aproximace analytického filtru v kmitočtové oblasti

Do skriptu doplňte aproximaci analytického filtru kmitočtově posunutou dolní propustí (obr. 4). Nejprve navrhnete dolní propust s mezním kmitočtem $f_{vz}/4$. Pro návrh filtru využijte metodu `firls` nebo `fir2`. Řád volte stejný jako v předchozí aproximaci. Snažte se přiblížit k ideální dolní propusti, tedy při návrhu filtru zadejte nulové přechodové pásmo. Vzorky impulsní charakteristiky navržené dolní propusti poté vynásobte vzorek po vzorku komplexní exponenciálou $e^{j\frac{\omega_{vz}}{4}n}$. Je tedy nutné vytvořit vektor časových vzorků délky navržené impulsní charakteristiky, odstup mezi vzorky je dán vzorkovací periodou (posloupnost vzorků 0 až délka impulsní charakteristiky – 1 podělte f_{vz}). Vynásobenou impulsní charakteristikou implementujte do modelu opět jako *Digital Filter*. Výstupem filtru je přímo analytický signál, zobrazte jeho spektrum a porovnejte s předchozí aproximací. Měňte řády filtrů (v desítkách) a pozorujte, jak se mění spektra.

Výstupní signál analytického filtru opět posuňte do základního pásma.

Vyjádření komplexní obálky kvadrurními modulátory

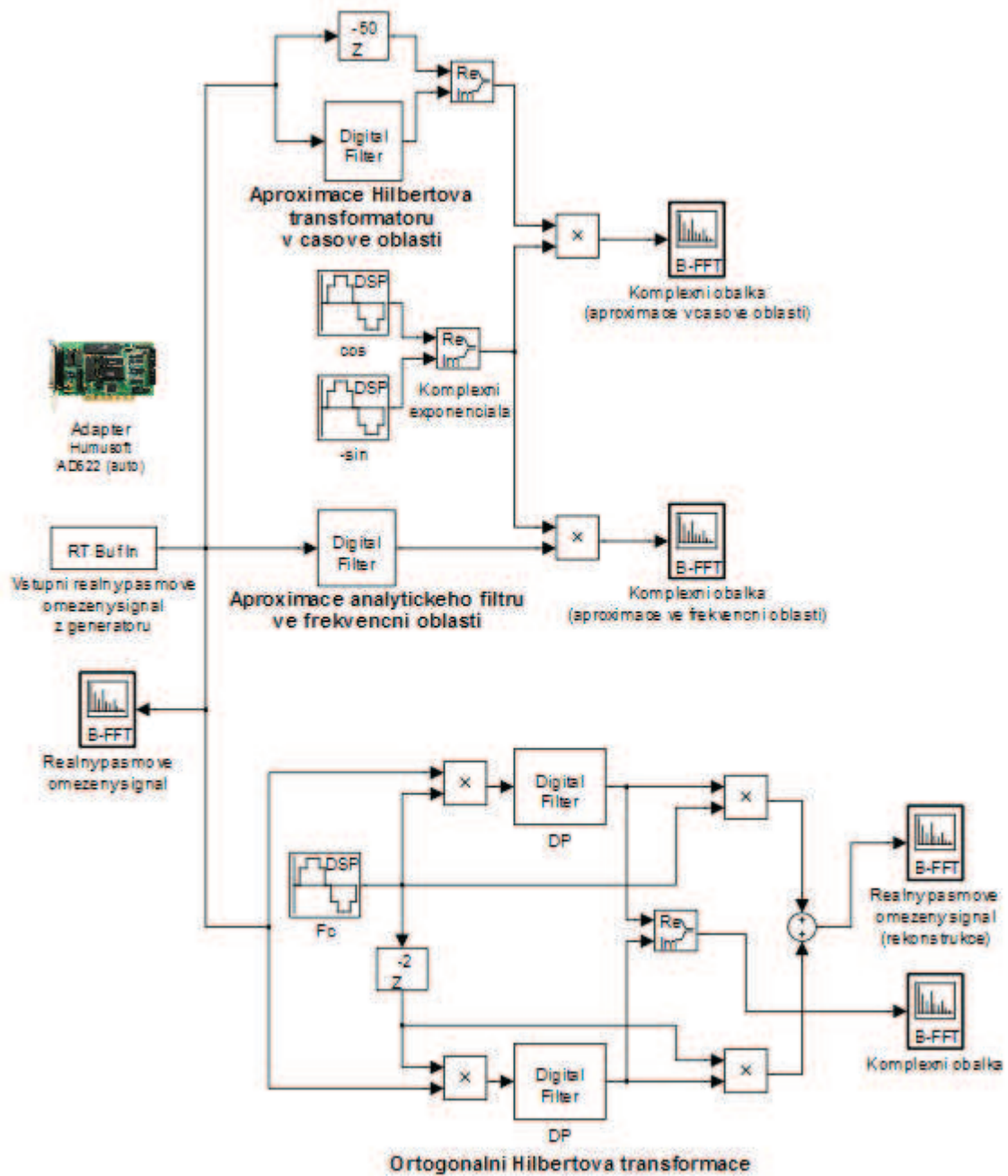
Dle obr. 5 vypočtěte komplexní obálku $s_{nf}[n]$. Dolní propusti navrhnete dle spektra signálu za kvadrurním modulátorem (násobičkou) viz obr. 6 a vztahy (13), (14). Porovnejte spektra komplexních obálek jednotlivých realizací.

Zpětně rekonstruujte pásmově omezený signál z nízkofrekvenčních složek komplexní obálky dle obr. 5. Porovnejte časové průběhy pásmového signálu z generátoru a rekonstruovaného signálu.

Doporučená literatura

- [1] PROAKIS, John G.; MANOLAKIS, Dimitris G. *Digital Signal Processing : Principles, Algorithms and Applications*. Fourth Edition. New Jersey : Pearson Prentice Hall, 2007. 1084 s. ISBN 0-13-187374-1.
- [2] SMÉKAL, Zdeněk; Číslicové zpracování signálů (MCSI). Skriptum VUT FEKT v Brně, 2010
- [3] JAN, Jiří. *Číslicová filtrace, analýza a restaurace signálů*. 2. upravené a rozšířené vydání. VUT v Brně : VUTIUM, 2002. 427 s. ISBN 80-214-2911-9.
- [4] *Agilent 33220A 20 MHz Function / Arbitrary Waveform Generator*. Malaysia : Agilent Technologies, c2007. 362 s.
- [5] *Real Time Toolbox for use with Simulink : User's Manual*. version 4.0. Czech Republic : Humosoft s.r.o., c2006. 71 s.
- [6] *AD 622 Data Acquisition Card : User's Manual*. Czech Republic : Humosoft s.r.o., c2006. 20 s.

B SCHÉMA ZAPOJENÍ LABORATORNÍ ÚLOHY



C VLASTNOSTI MĚŘICÍ KARTY AD622

Analogové vstupy

Počet kanálů:	8
A/D převodník:	14 bit
Doba převodu:	1,6 μ s 1 kanál 1,9 μ s 2 kanály 2,5 μ s 4 kanály 3,7 μ s 8 kanálů
Vstupní rozsah:	± 10 V, ochrana ± 18 V
Vstupní impedance:	$> 10^{10}$ Ω
Spouštění:	Programově, časově, externě

Aanalogové výstupy

Počet kanálů:	8
D/A převodník:	14 bit
Výstupní rozsah:	± 10 V
Výstupní proud:	10 mA max.
Čas ustálení:	31 μ s max. FS změna $\pm \frac{1}{2}$ LSB

Digitální vstupy

Počet kanálů:	8
Úrovně:	TTL log. 0: 0,8 V max. log. 1: 2,0 V min.

Digitální výstupy

Počet kanálů:	8
Úrovně:	TTL log. 0: 0,5 V max. @ 24 mA log. 1: 2,0 V min. @ 15 mA

Všeobecné údaje

Odběr proudu:	500 mA @ +5 V 150 mA @ +12 V 150 mA @ -12 V
Pracovní teplota:	0 °C až 70 °C
Konektor:	DB-37 F
Sběrnice:	PCI 5 V nebo 3,3 V

Obsah CD

Diplomova_prace_Nepovim_Pavel_7290.pdf Elektronická verze diplomové práce

Matlab skripty, funkce, modely a soubory

dft.m	Funkce pro přímý výpočet DFT
dft_exam.m	Tělo funkce pro samostatnou práci studentů
RTT_passband.mdl	Model laboratorní úlohy, vytvořeno v Matlab 2010b
RTT_passband_start.m	Inicializační skript laboratorní úlohy
signal.mat	Předdefinovaný signál pro samostatnou práci studentů ve skriptu win_exam.m
time.m	Skript pro porovnání náročnosti výpočtu DFT algoritmem FFT a přímou metodou, měřeno na CPU 1,7 GHz
time_exam.m	Skript pro samostatnou práci studentů
win.m	Skript animace demonstrující váhování signálu různými časovými okny, animace je krokována stiskem libovolné klávesy
win_exam.m	Skript pro samostatnou práci studentů
zero_pad.m	Skript animace demonstrující vliv délky DFT a délky analyzovaného signálu na výsledný tvar DFT spektra, animace je krokována stiskem libovolné klávesy