



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA INFORMAČNÍCH TECHNOLOGIÍ

FACULTY OF INFORMATION TECHNOLOGY

ÚSTAV INTELIGENTNÍCH SYSTÉMŮ

DEPARTMENT OF INTELLIGENT SYSTEMS

FUZZY MODUS PONENS

FUZZY MODUS PONENS

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

VÁCLAV PŘIBYL

VEDOUcí PRÁCE

SUPERVISOR

doc. RNDr. DANA HLINĚNÁ, Ph.D.

BRNO 2025

Zadání bakalářské práce



163658

Ústav: Ústav inteligentních systémů (UITS)
Student: **Příbyl Václav**
Program: Informační technologie
Název: **Fuzzy modus ponens**
Kategorie: Umělá inteligence
Akademický rok: 2024/25

Zadání:

1. Seznamte se s problematikou fuzzy množin a fuzzy logiky.
2. Nastudujte si konstrukci fuzzy logických spojek, zejména fuzzy implikace a fuzzy modus ponens.
3. Nastudujte modelování fuzzy modus ponens pomocí diskrétních spojek.
4. Zkoumejte vlastnosti fuzzy modus ponens a nové způsoby jeho konstrukce.
5. Dle pokynů vedoucí využijte získané teoretické výsledky pro možné praktické aplikace.

Literatura:

1. Baczynski, M., Jayaram, B., Fuzzy implications, Studies in Fuzziness and Soft Computing, Vol. 231, 2008
2. E.P. Klement, R. Mesiar, E. Pap, Triangular norms, Berlin, Heidelberg, Germany, Springer, 2000
3. Kolesárová, A., Kováčová, M., Fuzzy množiny a ich aplikácie, STU v Bratislave, 2004

Při obhajobě semestrální části projektu je požadováno:
První tři body zadání.

Podrobné závazné pokyny pro vypracování práce viz <https://www.fit.vut.cz/study/theses/>

Vedoucí práce: **Hliněná Dana, doc. RNDr., Ph.D.**
Vedoucí ústavu: Kočí Radek, Ing., Ph.D.
Datum zadání: 1.11.2024
Termín pro odevzdání: 14.5.2025
Datum schválení: 31.10.2024

Abstrakt

Tato práce se věnuje fuzzy logickým spojkám, zejména fuzzy implikacím. Hlavní část práce je zaměřená na fuzzifikaci odvozovacího pravidla modus ponens. Byl proveden experiment modelování odvozovacího pravidla na základě empirických dat. Experiment zkoumá, jakým způsobem lidé v běžné řeči vnímají závislost mezi platností předpokladu a následku.

Abstract

This paper focuses on fuzzy logical conjunctions, in particular fuzzy implications. The main part of the work is focused on the fuzzification of the modus ponens inference rule. An experiment has been conducted to model the inference rule based on empirical data. The experiment investigates how people in ordinary speech perceive the dependency between the validity of the premise and the consequent.

Klíčová slova

fuzzy modus ponens, fuzzy implikace, triangulární normy, triangulární konormy, fuzzy množiny

Keywords

fuzzy modus ponens, fuzzy implications, triangular norms, triangular conorms, fuzzy sets

Citace

PŘIBYL, Václav. *Fuzzy modus ponens*. Brno, 2025. Bakalářská práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta informačních technologií. Vedoucí práce doc. RNDr. Dana Hliněná, Ph.D.

Fuzzy modus ponens

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně pod vedením paní doc. RNDr. Dany Hliněné, PhD. Uvedl jsem všechny literární prameny, publikace a další zdroje, ze kterých jsem čerpal.

.....
Václav Příbyl
10. května 2025

Poděkování

Velké poděkování patří doc. RNDr. Daně Hliněné, PhD. za odborné vedení této práce, cenné rady a pomoc s řešením práce, vstřícnost a obrovskou ochotu při konzultacích. Dále bych chtěl poděkovat své rodině a přátelům, kteří mi byli oporou při psaní této práce.

Obsah

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Úvod | 8 |
| 2 | Fuzzy množiny | 9 |
| 2.1 | Fuzzy množiny | 9 |
| 2.2 | Základní operace nad fuzzy množinami | 10 |
| 2.3 | Triangulární normy a konormy | 12 |
| 2.4 | Triangulární normy | 13 |
| 2.5 | Triangulární konormy | 16 |
| 2.6 | Zobecněné množinové operace | 17 |
| 3 | Fuzzy logické spojky | 23 |
| 3.1 | Fuzzy logika | 23 |
| 3.2 | Fuzzy negace | 23 |
| 3.3 | Fuzzy konjunkce a disjunkce | 25 |
| 3.4 | Fuzzy implikace | 25 |
| 3.5 | Modus ponens | 28 |
| 3.6 | Fuzzy modus ponens | 28 |
| 4 | Diskretizovaný fuzzy modus ponens | 35 |
| 5 | Modelování diskretizovaných funkcí na základě empirických dat | 40 |
| 5.1 | Aplikace pro sběr dat | 41 |
| 5.2 | Zpracování dat | 41 |
| 5.3 | Zobecnění funkce g_D | 49 |
| 6 | Závěr | 55 |
| | Literatura | 56 |
| A | Obsah odevzdaného archivu | 57 |
| B | Vyhodnocení první sady výroků | 58 |
| B.1 | Odhad konjunkcí založených na empirických datech | 58 |
| B.2 | Odhad g_D nad Kleene-Dienesovou implikací | 59 |
| B.3 | Odhad g_D nad Reichenbachovou implikací | 60 |
| B.4 | Odhad g_D nad Łukasiewiczovou implikací | 61 |
| B.5 | Odhad g_D nad Gödelovou implikací | 62 |
| B.6 | Odhad g_D nad Goguenovou implikací | 63 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| C | Vyhodnocení druhé sady výroků | 64 |
| C.1 | Odhad konjunkcí založených na empirických datech | 64 |
| C.2 | Odhad g_D nad Kleene-Dienesovou implikací | 65 |
| C.3 | Odhad g_D nad Reichenbachovou implikací | 66 |
| C.4 | Odhad g_D nad Łukasiewiczovou implikací | 67 |
| C.5 | Odhad g_D nad Gödelovou implikací | 68 |
| C.6 | Odhad g_D nad Goguenovou implikací | 69 |
| D | Vyhodnocení třetí sady výroků | 70 |
| D.1 | Odhad konjunkcí založených na empirických datech | 70 |
| D.2 | Odhad g_D nad Kleene-Dienesovou implikací | 71 |
| D.3 | Odhad g_D nad Reichenbachovou implikací | 72 |
| D.4 | Odhad g_D nad Łukasiewiczovou implikací | 73 |
| D.5 | Odhad g_D nad Gödelovou implikací | 74 |
| D.6 | Odhad g_D nad Goguenovou implikací | 75 |
| E | Vyhodnocení čtvrté sady výroků | 76 |
| E.1 | Odhad konjunkcí založených na empirických datech | 76 |
| E.2 | Odhad g_D nad Kleene-Dienesovou implikací | 77 |
| E.3 | Odhad g_D nad Reichenbachovou implikací | 78 |
| E.4 | Odhad g_D nad Łukasiewiczovou implikací | 79 |
| E.5 | Odhad g_D nad Gödelovou implikací | 80 |
| E.6 | Odhad g_D nad Goguenovou implikací | 81 |
| F | Vyhodnocení páté sady výroků | 82 |
| F.1 | Odhad konjunkcí založených na empirických datech | 82 |
| F.2 | Odhad g_D nad Kleene-Dienesovou implikací | 83 |
| F.3 | Odhad g_D nad Reichenbachovou implikací | 84 |
| F.4 | Odhad g_D nad Łukasiewiczovou implikací | 85 |
| F.5 | Odhad g_D nad Gödelovou implikací | 86 |
| F.6 | Odhad g_D nad Goguenovou implikací | 87 |

Seznam obrázků

| | | |
|------|---|----|
| 2.1 | Graf $V_v(x)$ | 10 |
| 2.2 | Graf $\mu_{V_v}(x)$ | 10 |
| 2.3 | Fuzzy množina $\mu_A(x)$ | 11 |
| 2.4 | Fuzzy množina $\mu_B(x)$ | 11 |
| 2.5 | Průnik fuzzy množin $\mu_{A \cap B}(x)$ | 12 |
| 2.6 | Sjednocení fuzzy množin $\mu_{A \cup B}(x)$ | 12 |
| 2.7 | Doplňek fuzzy množiny $\overline{\mu_A}(x)$ | 12 |
| 2.8 | Minimová t -norma | 14 |
| 2.9 | Součinnová t -norma | 14 |
| 2.10 | Łukasiewiczova t -norma | 14 |
| 2.11 | Drastický součin | 14 |
| 2.12 | Maximová t -konorma | 16 |
| 2.13 | Pravděpodobnostní součet | 16 |
| 2.14 | Łukasiewiczova t -konorma | 17 |
| 2.15 | Drastický součet | 17 |
| 2.16 | $\mu_A(x)$ a $\mu_B(x)$ | 18 |
| 2.17 | Průnik A, B pomocí T_M | 18 |
| 2.18 | Průnik A, B pomocí T_P | 18 |
| 2.19 | Průnik A, B pomocí T_L | 19 |
| 2.20 | Průnik A, B pomocí T_D | 19 |
| 2.21 | Sjednocení A, B pomocí S_M | 19 |
| 2.22 | Sjednocení A, B pomocí S_P | 20 |
| 2.23 | Sjednocení A, B pomocí S_L | 20 |
| 2.24 | Sjednocení A, B pomocí S_D | 20 |
| 2.25 | Zadehův doplněk | 21 |
| 2.26 | Sugenův doplněk | 21 |
| 2.27 | Yagerův doplněk | 21 |
| 2.28 | Graf k příkladu 8 | 22 |
| 3.1 | Grafy fuzzy negací | 24 |
| 3.2 | Kleene-Dienesova implikace | 26 |
| 3.3 | Reichenbachova implikace | 26 |
| 3.4 | Łukasiewiczova implikace | 27 |
| 3.5 | Gödelova implikace | 28 |
| 3.6 | Goguenova implikace | 28 |
| 3.7 | Konjunkce založená na I_{S_M} | 30 |
| 3.8 | Konjunkce založená na I_{S_P} | 30 |
| 3.9 | Konjunkce založená na I_L | 31 |

| | | |
|------|--|----|
| 3.10 | Agregační deficit maximové t -konormy | 32 |
| 3.11 | Agregační deficit pravděpodobnostního součtu | 32 |
| 3.12 | Agregační deficit Łukasiewiczovy t -konormy | 32 |
| 3.13 | Funkce f maximové t -konormy | 33 |
| 3.14 | Funkce f pravděpodobnostního součtu | 33 |
| 3.15 | Funkce f Łukasiewiczovy t -konormy | 33 |
| 3.16 | Funkce g pravděpodobnostního součtu | 34 |
| 3.17 | Funkce g maximové t -konormy | 34 |
| 3.18 | Funkce g Łukasiewiczovy t -konormy | 34 |
| 4.1 | $(T_P)_{4,4}^{16}(x, y)$ | 36 |
| 4.2 | $(S_P)_{4,4}^{16}(x, y)$ | 37 |
| 4.3 | $(T_M)_{4,4}^{16}(x, y)$ | 37 |
| 4.4 | $(T_L)_{4,4}^{16}(x, y)$ | 37 |
| 4.5 | $(g_{S_M}^*)_{4,4}^{16}(b, r)$ | 38 |
| 4.6 | $(g_{S_P}^*)_{4,4}^{16}(b, r)$ | 38 |
| 4.7 | $(g_{S_L}^*)_{4,4}^{16}(b, r)$ | 39 |
| 5.1 | Diagram entit v databázi | 41 |
| 5.2 | Půdorys stavového prostoru | 41 |
| 5.3 | Plocha podintervalů dle C^* | 41 |
| 5.4 | Agregované hodnoty první sady výroků jako $C_{10,10}^{100}$ | 42 |
| 5.5 | Agregované hodnoty druhé sady výroků jako $C_{10,10}^{100}$ | 42 |
| 5.6 | Agregované hodnoty třetí sady výroků jako $C_{10,10}^{100}$ | 42 |
| 5.7 | Agregované hodnoty čtvrté sady výroků jako $C_{10,10}^{100}$ | 42 |
| 5.8 | Agregované hodnoty páté sady výroků jako $C_{10,10}^{100}$ | 43 |
| 5.9 | Plocha podintervalů určená řezem | 43 |
| 5.10 | Agregované hodnoty první sady výroků jako řezy prostoru | 43 |
| 5.11 | Agregované hodnoty druhé sady výroků jako řezy prostoru | 44 |
| 5.12 | Agregované hodnoty třetí sady výroků jako řezy prostoru | 44 |
| 5.13 | Agregované hodnoty čtvrté sady výroků jako řezy prostoru | 44 |
| 5.14 | Agregované hodnoty páté sady výroků jako řezy prostoru | 44 |
| 5.15 | T_M^* mezi a) a c) | 46 |
| 5.16 | $C_{I_{S_M}^*}$ vytvořená pomocí empirických dat | 46 |
| 5.17 | Minimová t -norma | 46 |
| 5.18 | Odhad modus ponens na základě g_{S_M} | 46 |
| 5.19 | T_P^* mezi a) a c) | 47 |
| 5.20 | $C_{I_{S_P}^*}$ vytvořená pomocí empirických dat | 47 |
| 5.21 | Součinnová t -norma | 47 |
| 5.22 | Odhad modus ponens na základě g_{S_P} | 47 |
| 5.23 | T_L^* mezi a) a c) | 48 |
| 5.24 | $C_{I_L^*}$ vytvořená pomocí empirických dat | 48 |
| 5.25 | Łukasiewiczova t -norma | 48 |
| 5.26 | Odhad modus ponens na základě g_{S_L} | 48 |
| 5.27 | $C_{I_{T_M}^*}$ vytvořená pomocí empirických dat | 49 |
| 5.28 | $C_{I_{T_P}^*}$ vytvořená pomocí empirických dat | 49 |

| | | |
|------|--|----|
| 5.29 | Zobecnění g_{SM} s $N_{Su}(x, -0.99)$ | 50 |
| 5.30 | Zobecnění g_{SM} s $N_Y(x, 0.01)$ | 50 |
| 5.31 | Zobecnění g_{SP} s $N_{Su}(x, -0.99)$ | 50 |
| 5.32 | Zobecnění g_{SP} s $N_Y(x, 0.01)$ | 50 |
| 5.33 | Zobecnění g_{SL} s $N_{Su}(x, -0.99)$ | 51 |
| 5.34 | Zobecnění g_{SL} s $N_Y(x, 0.01)$ | 51 |
| 5.35 | Zobecnění g_{SM} s $N_{Su}(x, 1.5)$ | 51 |
| 5.36 | Zobecnění g_{SM} s $N_Y(x, 1.5)$ | 51 |
| 5.37 | Zobecnění g_{SP} s $N_{Su}(x, 1.5)$ | 52 |
| 5.38 | Zobecnění g_{SP} s $N_Y(x, 1.5)$ | 52 |
| 5.39 | Zobecnění g_{SL} s $N_{Su}(x, 1.5)$ | 52 |
| 5.40 | Zobecnění g_{SL} s $N_Y(x, 1.5)$ | 52 |
| 5.41 | Zobecnění g_{SM} s $N_{Su}(x, 10)$ | 53 |
| 5.42 | Zobecnění g_{SM} s $N_Y(x, 10)$ | 53 |
| 5.43 | Zobecnění g_{SP} s $N_{Su}(x, 10)$ | 53 |
| 5.44 | Zobecnění g_{SP} s $N_Y(x, 10)$ | 53 |
| 5.45 | Zobecnění g_{SL} s $N_{Su}(x, 10)$ | 53 |
| 5.46 | Zobecnění g_{SL} s $N_Y(x, 10)$ | 53 |
| 5.47 | Zobecnění g_{SM} s $N_{\cos}(x)$ | 54 |
| 5.48 | Zobecnění g_{SP} s $N_{\cos}(x)$ | 54 |
| 5.49 | Zobecnění g_{SL} s $N_{\cos}(x)$ | 54 |
| | | |
| B.1 | T_M^* mezi a) a c) | 58 |
| B.2 | T_P^* mezi a) a c) | 58 |
| B.3 | T_L^* mezi a) a c) | 58 |
| B.4 | Odhad $C_{I_{SM}^*}$ v kombinaci s T_M^* | 59 |
| B.5 | Odhad $C_{I_{SM}^*}$ v kombinaci s T_P^* | 59 |
| B.6 | Odhad $C_{I_{SM}^*}$ v kombinaci s T_L^* | 59 |
| B.7 | Odhad $C_{I_{SP}^*}$ v kombinaci s T_M^* | 60 |
| B.8 | Odhad $C_{I_{SP}^*}$ v kombinaci s T_P^* | 60 |
| B.9 | Odhad $C_{I_{SP}^*}$ v kombinaci s T_L^* | 60 |
| B.10 | Odhad $C_{I_{SL}^*}$ v kombinaci s T_M^* | 61 |
| B.11 | Odhad $C_{I_{SL}^*}$ v kombinaci s T_P^* | 61 |
| B.12 | Odhad $C_{I_{SL}^*}$ v kombinaci s T_L^* | 61 |
| B.13 | Odhad $C_{I_{TM}^*}$ v kombinaci s T_M^* | 62 |
| B.14 | Odhad $C_{I_{TM}^*}$ v kombinaci s T_P^* | 62 |
| B.15 | Odhad $C_{I_{TM}^*}$ v kombinaci s T_L^* | 62 |
| B.16 | Odhad $C_{I_{TP}^*}$ v kombinaci s T_M^* | 63 |
| B.17 | Odhad $C_{I_{TP}^*}$ v kombinaci s T_P^* | 63 |
| B.18 | Odhad $C_{I_{TP}^*}$ v kombinaci s T_L^* | 63 |
| | | |
| C.1 | T_M^* mezi a) a c) | 64 |
| C.2 | T_P^* mezi a) a c) | 64 |
| C.3 | T_L^* mezi a) a c) | 64 |
| C.4 | Odhad $C_{I_{SM}^*}$ v kombinaci s T_M^* | 65 |
| C.5 | Odhad $C_{I_{SM}^*}$ v kombinaci s T_P^* | 65 |

| | | |
|------|--|----|
| C.6 | Odhad $C_{I_{SM}}^*$ v kombinaci s T_L^* | 65 |
| C.7 | Odhad $C_{I_{SP}}^*$ v kombinaci s T_M^* | 66 |
| C.8 | Odhad $C_{I_{SP}}^*$ v kombinaci s T_P^* | 66 |
| C.9 | Odhad $C_{I_{SP}}^*$ v kombinaci s T_L^* | 66 |
| C.10 | Odhad $C_{I_{SL}}^*$ v kombinaci s T_M^* | 67 |
| C.11 | Odhad $C_{I_{SL}}^*$ v kombinaci s T_P^* | 67 |
| C.12 | Odhad $C_{I_{SL}}^*$ v kombinaci s T_L^* | 67 |
| C.13 | Odhad $C_{I_{TM}}^*$ v kombinaci s T_M^* | 68 |
| C.14 | Odhad $C_{I_{TM}}^*$ v kombinaci s T_P^* | 68 |
| C.15 | Odhad $C_{I_{TM}}^*$ v kombinaci s T_L^* | 68 |
| C.16 | Odhad $C_{I_{TP}}^*$ v kombinaci s T_M^* | 69 |
| C.17 | Odhad $C_{I_{TP}}^*$ v kombinaci s T_P^* | 69 |
| C.18 | Odhad $C_{I_{TP}}^*$ v kombinaci s T_L^* | 69 |
| | | |
| D.1 | T_M^* mezi a) a c) | 70 |
| D.2 | T_P^* mezi a) a c) | 70 |
| D.3 | T_L^* mezi a) a c) | 70 |
| D.4 | Odhad $C_{I_{SM}}^*$ v kombinaci s T_M^* | 71 |
| D.5 | Odhad $C_{I_{SM}}^*$ v kombinaci s T_P^* | 71 |
| D.6 | Odhad $C_{I_{SM}}^*$ v kombinaci s T_L^* | 71 |
| D.7 | Odhad $C_{I_{SP}}^*$ v kombinaci s T_M^* | 72 |
| D.8 | Odhad $C_{I_{SP}}^*$ v kombinaci s T_P^* | 72 |
| D.9 | Odhad $C_{I_{SP}}^*$ v kombinaci s T_L^* | 72 |
| D.10 | Odhad $C_{I_{SL}}^*$ v kombinaci s T_M^* | 73 |
| D.11 | Odhad $C_{I_{SL}}^*$ v kombinaci s T_P^* | 73 |
| D.12 | Odhad $C_{I_{SL}}^*$ v kombinaci s T_L^* | 73 |
| D.13 | Odhad $C_{I_{TM}}^*$ v kombinaci s T_M^* | 74 |
| D.14 | Odhad $C_{I_{TM}}^*$ v kombinaci s T_P^* | 74 |
| D.15 | Odhad $C_{I_{TM}}^*$ v kombinaci s T_L^* | 74 |
| D.16 | Odhad $C_{I_{TP}}^*$ v kombinaci s T_M^* | 75 |
| D.17 | Odhad $C_{I_{TP}}^*$ v kombinaci s T_P^* | 75 |
| D.18 | Odhad $C_{I_{TP}}^*$ v kombinaci s T_L^* | 75 |
| | | |
| E.1 | T_M^* mezi a) a c) | 76 |
| E.2 | T_P^* mezi a) a c) | 76 |
| E.3 | T_L^* mezi a) a c) | 76 |
| E.4 | Odhad $C_{I_{SM}}^*$ v kombinaci s T_M^* | 77 |
| E.5 | Odhad $C_{I_{SM}}^*$ v kombinaci s T_P^* | 77 |
| E.6 | Odhad $C_{I_{SM}}^*$ v kombinaci s T_L^* | 77 |
| E.7 | Odhad $C_{I_{SP}}^*$ v kombinaci s T_M^* | 78 |
| E.8 | Odhad $C_{I_{SP}}^*$ v kombinaci s T_P^* | 78 |
| E.9 | Odhad $C_{I_{SP}}^*$ v kombinaci s T_L^* | 78 |
| E.10 | Odhad $C_{I_{SL}}^*$ v kombinaci s T_M^* | 79 |
| E.11 | Odhad $C_{I_{SL}}^*$ v kombinaci s T_P^* | 79 |

| | | |
|------|--|----|
| E.12 | Odhad $C_{I_{SL}}^*$ v kombinaci s T_L^* | 79 |
| E.13 | Odhad $C_{I_{TM}}^*$ v kombinaci s T_M^* | 80 |
| E.14 | Odhad $C_{I_{TP}}^*$ v kombinaci s T_P^* | 80 |
| E.15 | Odhad $C_{I_{TM}}^*$ v kombinaci s T_L^* | 80 |
| E.16 | Odhad $C_{I_{TP}}^*$ v kombinaci s T_M^* | 81 |
| E.17 | Odhad $C_{I_{TP}}^*$ v kombinaci s T_P^* | 81 |
| E.18 | Odhad $C_{I_{TP}}^*$ v kombinaci s T_L^* | 81 |
| | | |
| F.1 | T_M^* mezi a) a c) | 82 |
| F.2 | T_P^* mezi a) a c) | 82 |
| F.3 | T_L^* mezi a) a c) | 82 |
| F.4 | Odhad $C_{I_{SM}}^*$ v kombinaci s T_M^* | 83 |
| F.5 | Odhad $C_{I_{SM}}^*$ v kombinaci s T_P^* | 83 |
| F.6 | Odhad $C_{I_{SM}}^*$ v kombinaci s T_L^* | 83 |
| F.7 | Odhad $C_{I_{SP}}^*$ v kombinaci s T_M^* | 84 |
| F.8 | Odhad $C_{I_{SP}}^*$ v kombinaci s T_P^* | 84 |
| F.9 | Odhad $C_{I_{SP}}^*$ v kombinaci s T_L^* | 84 |
| F.10 | Odhad $C_{I_{SL}}^*$ v kombinaci s T_M^* | 85 |
| F.11 | Odhad $C_{I_{SL}}^*$ v kombinaci s T_P^* | 85 |
| F.12 | Odhad $C_{I_{SL}}^*$ v kombinaci s T_L^* | 85 |
| F.13 | Odhad $C_{I_{TM}}^*$ v kombinaci s T_M^* | 86 |
| F.14 | Odhad $C_{I_{TM}}^*$ v kombinaci s T_P^* | 86 |
| F.15 | Odhad $C_{I_{TM}}^*$ v kombinaci s T_L^* | 86 |
| F.16 | Odhad $C_{I_{TP}}^*$ v kombinaci s T_M^* | 87 |
| F.17 | Odhad $C_{I_{TP}}^*$ v kombinaci s T_P^* | 87 |
| F.18 | Odhad $C_{I_{TP}}^*$ v kombinaci s T_L^* | 87 |

Kapitola 1

Úvod

V běžném životě se setkáváme s vágními tvrzeními. Obecně se jedná o informace, které jsou obohaceny o nějakou zastřenou hodnotu, kterou lze i v rámci skupiny jednotlivců vnímat odlišným způsobem. Ovšem pokud se snažíme tyto informace převést na úroveň dat, která zpracováváme výpočetním médiem, může se jednat o netriviální problém. A to z důvodu, že většina tvrzení zaznamenaných v datových sadách jsou buď pouze binární hodnoty pravda–nepravda, nebo čistě konkrétní číselné hodnoty.

Pokud například zpracováváme výrok v běžné, lidské řeči „Jsem poměrně unavený, na chvíli si dáchnu“, nevíme konkrétní hodnotu únavy jedince, ani to, jakou dobu plánuje strávit odpočinkem. Tyto vágní informace jsme schopni zpracovat využitím fuzzy logiky, která informacím přiřazuje hodnotu v rozsahu $[0, 1]$, oproti dvouhodnotové klasické logice. Zápisem $[0, 1]$ je ve fuzzy prostoru značen uzavřený interval $\langle 0, 1 \rangle$, otevřený interval $(0, 1)$ se zapisuje také pomocí hranatých závorek jako $]0, 1[$. Podobně jako v klasické logice máme logické spojky, ve fuzzy prostoru využíváme jejich monotónní rozšíření v podobě fuzzy logických spojek.

První kapitola práce vysvětluje základní koncepty fuzzy množin, jejich souvislosti s teorií klasických množin. Taktéž popisuje fuzzy množinové operace, z nichž nás ve zbytku práce budou doprovázet triangulární normy, které jsou nejčastěji využívanou abstrakcí pro fuzzy konjunkci, a triangulární konormy, které nejčastěji modelují fuzzy disjunkci.

Druhá kapitola je věnována konceptu fuzzy logiky, který podobně souvisí s fuzzy množinami jako klasická logika s klasickými množinami. Popisuje způsoby, kterými lze konstruovat fuzzy implikaci, která tvoří základ pro vyhodnocování fuzziifikovaného odvozovacího pravidla. Práce v tomto ohledu navazuje na práce Ing. Vojtěcha Havleny, PhD. [2], který se věnoval modelování fuzzy konjunkce a disjunkce, a Bc. Veroniky Jirmusové [7], která se věnovala modelování fuzzy implikace.

Třetí kapitola objasňuje principy diskretizace fuzzy logických spojek. Toto téma je klíčové při modelování fuzzy modus ponens z empiricky naměřených dat. Tudíž, je to důležité při hledaných funkcích a optimalizaci množství výpočtů nad získanými daty, které se transformují do kompaktnější podoby.

Poslední kapitola se věnuje praktické aplikaci diskretizovaných logických spojek na empirická data a dále nad nimi provádí experiment. Dále představuje nový pohled na konstrukci hledané funkce pro odhad platnosti fuzzy pravidla modus ponens zobecněním jejího předpisu.

Kapitola 2

Fuzzy množiny

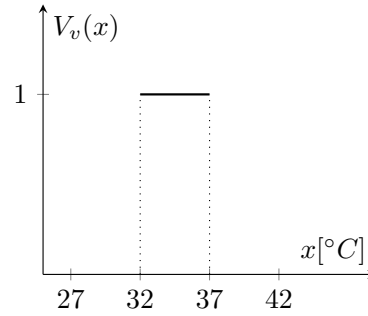
Díky tomu, že lidská řeč není formálním jazykem, lze v ní velice jednoduše zkonstruovat informace, které obsahují nějaké množství nejistoty, dokonce i zmíněná informace o „nějakém množství nejistoty“ toto způsobuje. Rozšiřující pojmy jako „téměř“, „velice“ nebo „trochu“ nám dodávají informaci, kterou nelze exaktně vyjádřit. S touto nejistotou jsme schopni se v rámci klasické (crisp) logiky popasovat pouze na základě rozdělení pravda-nepravda. A tato informace, kterou získáme, je zcela jednoznačně určena tím, zda prvek patří do množiny, či nikoliv. Ovšem tato filosofie pohledu má svá úskalí, neboť některé informace nelze rozlišit jako černou a bílou, protože se můžou nacházet na pomezí v nějaké šedé zóně. Za účelem řešení problémů, které vznikají užitím vágních pojmů, vznikaly průběžně vícehodnotové logiky (trojhodnotová Łukasiewiczova logika), až se dopracovali k fuzzy množinám, které popsal L. A. Zadeh, a na nich postavené fuzzy logice. Také by se dalo říci, že v některých ohledech se při aplikaci klasické logiky zanedbává pohled více do hloubky, pokud vezmeme v úvahu např. signál přenášející nuly a jedničky, v rámci přechodu se hladina nachází v tzv. metastabilním stavu, kdy omezeným pohledem na oba extrémy, bez nějaké rozšířené režie pro zpracování nelze určit, ke které hodnotě stav náleží.

2.1 Fuzzy množiny

Fuzzy podmnožiny obsahují prvky, jejichž členství je určeno funkcí příslušnosti prvku dané množině v rozsahu $[0, 1]$. Takovou trochu naivní interpretací, která není úplně korektní, je vyložení si této hodnoty jakožto „pravděpodobnostní funkcí“ toho, že prvek náleží do dané podmnožiny. Za základní prostor pro všechny fuzzy množiny budeme uvažovat univerzum \mathbb{X} . Pro fuzzy množinu označenou M poté modelujeme funkci příslušnosti $\mu_M : \mathbb{X} \rightarrow [0, 1]$, která každému prvku x z množiny \mathbb{X} udává stupeň příslušnosti vlastnosti, kterou sledujeme. Protože je každá fuzzy množina M definována svou funkcí příslušnosti μ_M , jsou tyto dva pojmy považovány za totožné.

Pro příklad si můžeme uvést množinu určenou vyjádřením „voda je vlažná“, kde pro toto rozpětí rozumíme např. teplotu vody v rozsahu $32\text{--}37\text{ }^\circ\text{C}$. Charakteristická funkce množiny teplot vlažné vody V_v pak vypadá následovně:

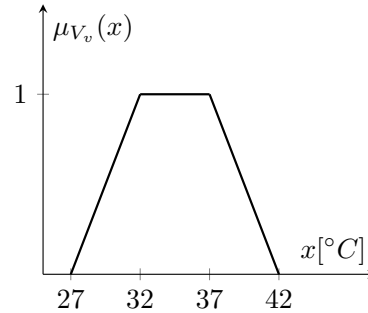
$$V_v(x) = \begin{cases} 1 & \text{pokud } x \in [32, 37], \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$



Obrázek 2.1: Graf $V_v(x)$

Díky popisu pomocí klasických množin se pak dostaneme k závěru, že voda s teplotou $31,7^\circ\text{C}$ není vlažná ani trochu. Zde by se nám hodil nějaký pravdivostní přechod, který by nám umožnil vyrovnat se s překlenutím hraničních hodnot a s nimi spjaté nejistoty, který je klasickou logikou zahozen. O náležitosti prvku fuzzy množině lze pak říci, že prvek náleží množině jen do nějakého stupně. Fuzzy množina vlažné vody by mohla vypadat takto:

$$\mu_{V_v}(x) = \begin{cases} \frac{x-27}{5} & \text{pokud } x \in [27, 32], \\ 1 & \text{pokud } x \in]32, 37[, \\ \frac{42-x}{5} & \text{pokud } x \in]37, 42[, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$



Obrázek 2.2: Graf $\mu_{V_v}(x)$

Pro příklad nejasnosti interpretace můžeme například uvažovat přípravu steaku. Zde máme celou škálu „finálních“ stavů přípravy {rare, medium-rare, medium, medium-well, well-done}, které se odlišují propečením masa, ale nejsou definovány přesné hranice. Zatímco medium-rare steak by někomu mohl připadat téměř tepelně neupravený, někdo jiný by ho mohl vnímat jako správně připravený, nebo dokonce i tak, že steak už byl přetažený.

Poznámka 1. *Systém všech fuzzy podmnožin základního prostoru \mathbb{X} označujeme jako $\mathcal{F}(\mathbb{X})$.*

2.2 Základní operace nad fuzzy množinami

Jakožto základní operace nad fuzzy množinami rozumíme operace průniku, sjednocení a doplňku. Ve fuzzy prostoru lze každou operaci modelovat nespočetným množstvím rozličných způsobů. Nejprve zavedeme tzv. standardní základní operace, zavedené L. A. Zadehem.

Definice 1. [9] *Nechť \mathbb{X} je základní prostor, $A, B \in \mathcal{F}(\mathbb{X})$.*

- **Standardním průnikem fuzzy množin A, B je fuzzy množina $A \cap B \in \mathcal{F}(\mathbb{X})$ s funkcí příslušnosti**

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x)).$$

- **Standardním sjednocením fuzzy množin** A, B je fuzzy množina $A \cup B \in \mathcal{F}(\mathbb{X})$ s funkcí příslušnosti

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x)).$$

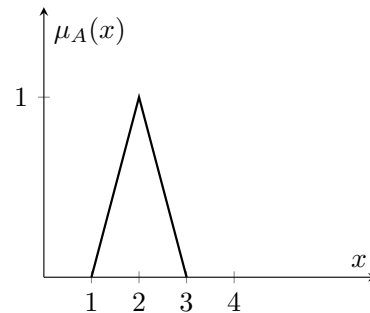
- **Standardním doplňkem množiny** A je fuzzy množina $\bar{A} \in \mathcal{F}(\mathbb{X})$ s funkcí příslušnosti

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x).$$

V následující kapitole se budeme věnovat triangulárním normám a konormám, pomocí kterých jsou tyto základní operace zobecněny.

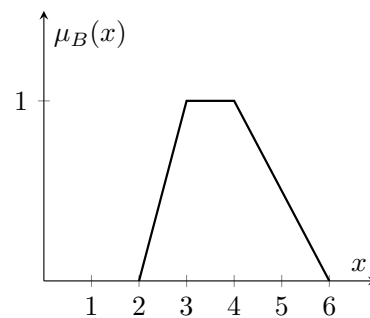
Příklad 1. Na ilustraci uvádíme příklad dvou fuzzy množin $A, B \in \mathcal{F}(\mathbb{X})$ a standardní množinové operace na nich.

$$\mu_A(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{pokud } x \in [1, 2], \\ 3 - x & \text{pokud } x \in [2, 3], \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases}$$



Obrázek 2.3: Fuzzy množina $\mu_A(x)$

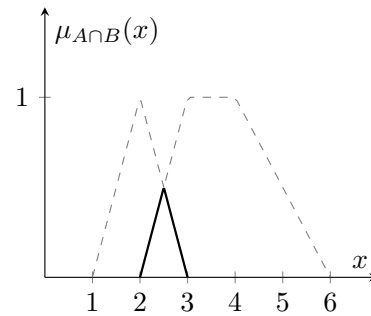
$$\mu_B(x) = \begin{cases} x - 2 & \text{pokud } x \in [2, 3] \\ 1 & \text{pokud } x \in [3, 4], \\ \frac{6-x}{2} & \text{pokud } x \in [4, 6], \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$



Obrázek 2.4: Fuzzy množina $\mu_B(x)$

- a) Určíme průnik fuzzy množin $\mu_{A \cap B}(x)$.

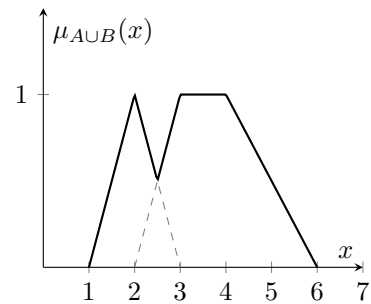
$$\mu_{A \cap B}(x) = \begin{cases} x - 2 & \text{pokud } x \in [2, \frac{5}{2}], \\ 3 - x & \text{pokud } x \in]\frac{5}{2}, 3], \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$



Obrázek 2.5: Průnik fuzzy množin $\mu_{A \cap B}(x)$

b) Určíme sjednocení fuzzy množin $\mu_{A \cup B}(x)$.

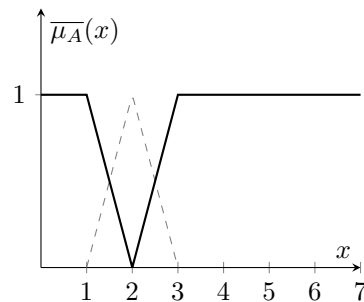
$$\mu_{A \cup B}(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{pokud } x \in [1, 2], \\ 3 - x & \text{pokud } x \in [2, \frac{5}{2}], \\ x - 2 & \text{pokud } x \in]\frac{5}{2}, 3], \\ 1 & \text{pokud } x \in [3, 4], \\ \frac{6-x}{2} & \text{pokud } x \in [4, 6], \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$



Obrázek 2.6: Sjednocení fuzzy množin $\mu_{A \cup B}(x)$

c) Určíme doplněk množiny $\overline{\mu_A}(x)$.

$$\overline{\mu_A}(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{pokud } x \in [1, 2], \\ x - 2 & \text{pokud } x \in]2, 3], \\ 1 & \text{jinak.} \end{cases}$$



Obrázek 2.7: Doplněk fuzzy množiny $\overline{\mu_A}(x)$

2.3 Triangulární normy a konormy

V této části si definujeme funkce, pomocí kterých nejčastěji modelujeme množinové operace nad fuzzy množinami, triangulární normy, konormy. Dále je budeme také potřebovat v kapitolách zabývajících se fuzzy logikou, neboť nimi modelujeme nejčastěji používané spojky ve fuzzy prostoru pro konstrukci složitějších spojek.

2.4 Triangulární normy

Triangulární normy jsou funkce dvou proměnných, kterými lze modelovat průnik fuzzy množin.

Definice 2. [9] Funkce $T : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ se nazývá triangulární norma (zkráceně t -norma), pokud $\forall x, y, z \in [0, 1]$ platí axiomy:

- (T1) $T(x, y) = T(y, x)$, komutativita
 (T2) $T(x, T(y, z)) = T(T(x, y), z)$, asociativita
 (T3) $T(x, y) \leq T(x, z)$, pokud $y \leq z$, monotónnost
 (T4) $T(x, 1) = x$, hraniční podmínka

Příklad 2. Následující funkce splňují tři ze čtyř zmíněných axiomů, lze tedy vidět, že axiomy jsou na sobě nezávislé a funkce není t -normou, pokud nespĺňuje všechny čtyři axiomy naráz.

- a) Funkce $F_1 : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ daná předpisem

$$F_1(x, y) = x,$$

splňuje (T2), (T3) a (T4), ale nespĺňuje (T1).

- b) Funkce $F_2 : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ daná předpisem

$$F_2(x, y) = x \cdot y \cdot \max(x, y),$$

splňuje (T1), (T3) a (T4), ale nespĺňuje (T2).

- c) Funkce $F_3 : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ daná předpisem

$$F_3(x, y) = \begin{cases} 0.5 & \text{pokud } (x, y) \in]0, 1[^2, \\ \min(x, y) & \text{jinak.} \end{cases}$$

splňuje (T1), (T2) a (T4), ale nespĺňuje (T3).

- d) Funkce $F_4 : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ daná předpisem

$$F_4(x, y) = 0$$

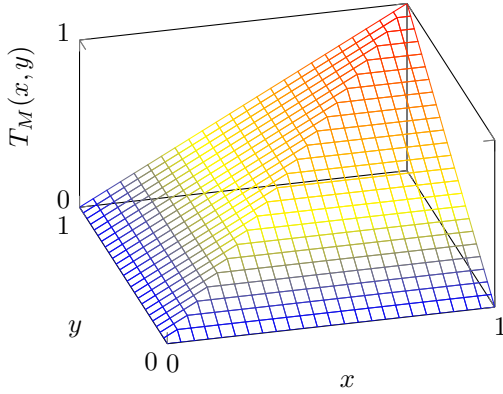
splňuje (T1), (T2) a (T3), ale nespĺňuje (T4).

Příklad 3. Pro modelování fuzzy průniku se nejčastěji používají tyto triangulární normy:

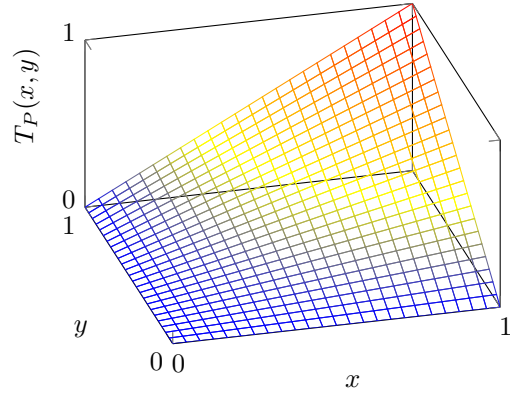
- $T_M(x, y) = \min(x, y)$, minimová t -norma
- $T_P(x, y) = xy$, součinnová t -norma
- $T_L(x, y) = \max(0, x + y - 1)$, Łukasiewiczova t -norma

- $T_D(x, y) = \begin{cases} \min(x, y) & \text{pokud } \max(x, y) = 1, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$ *drastický součin*

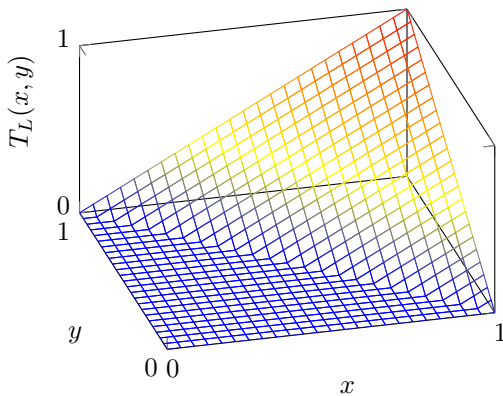
Jejich grafy vidíme na obrázcích 2.8, 2.9, 2.10, 2.11.



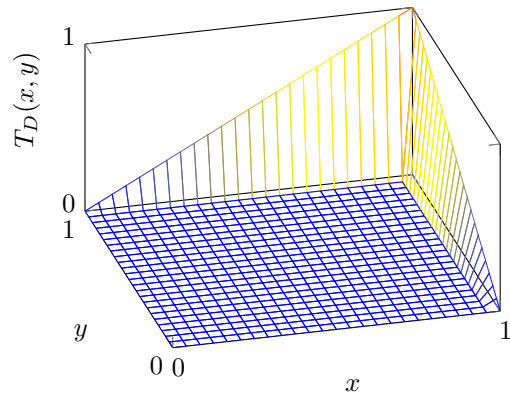
Obrázek 2.8: Minimová t -norma



Obrázek 2.9: Součinnová t -norma



Obrázek 2.10: Łukasiewiczova t -norma



Obrázek 2.11: Drastický součin

Triangulární normy klasifikujeme podle jejich vlastností, které mohou splňovat. Začneme vlastnostmi diagonály.

Definice 3. [1] *Existuje-li prvek x , pro který platí $f(x, x) = x$, pak je x idempotentní prvek.*

Pro libovolnou t -normu jsou idempotentní prvky 0 a 1, proto jsou označovány jako *triviální idempotentní prvky*. Funkci považujeme za idempotentní, právě tehdy, pokud všechny prvky definičního oboru jsou idempotentními prvky. Idempotentní t -norma je pouze minimová t -norma.

Poznámka 2. [9] *Triangulární normy jsme si definovali jako funkci dvou proměnných nad prostorem $[0, 1]^2$. Definicí lze, díky vlastnosti asociativity, rozšířit na libovolný počet argumentů, tedy zavést funkce $T : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$:*

$$T(x_1, \dots, x_n) = T(T(x_1, \dots, x_{n-1})x_n).$$

Díky tomu můžeme definovat mocninu t -normy, která je dána rekurentním předpisem

$$x_T^{[n]} = \begin{cases} x & \text{pokud } x = 1, \\ T(x_T^{[n-1]}, x) & \text{pokud } x > 1. \end{cases}$$

Díky operaci mocniny t -normy lze popsat archimedovské funkce. Triangulární norma je archimedovská, pokud pro všechna $x, y \in]0, 1[$ existuje takové přirozené číslo n , pro které platí $x_T^{[n]} < y$. Co je jenom jinak zapsaná limita

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_T^{[n]} = 0.$$

Poznámka 3. Lze ukázat, že minimová t -norma archimedovská není, naopak T_P, T_L archimedovské t -normy jsou.

Pro t -normy si nadefinujeme pojmy jako *dělitel nuly* a *nilpotentní prvek*.

Definice 4. [1] Prvek $x \in]0, 1[$ nazveme **dělitelem nuly** dané t -normy, pokud $\exists y \in]0, 1[$ takové, že $T(x, y) = 0$.

Definice 5. [1] Prvek $x \in]0, 1[$ označíme jako **nilpotentní prvek** dané t -normy, pokud $\exists n \in \mathbb{N}$ takové, že $x_T^{[n]} = 0$.

Poznámka 4. Nad grafy dříve zmíněných t -norm si lze všimnout, že T_M a T_P nemají dělitele nuly ani žádný nilpotentní prvek. Naopak u T_L a T_D je dělitelem nuly i nilpotentním prvkem každé $x \in]0, 1[$.

Definice 6. [1] Řekneme, že t -norma je **spojitá**, pokud funkce $T : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ je spojitá v každém bodě $(x, y) \in [0, 1]^2$.

Poznámka 5. Jedinou ze zmíněných t -norm, která nespĺňuje tuto vlastnost, je T_D .

Velice důležitou vlastností je *monotónnost*, kterou pozorujeme u všech fuzzy rozšíření funkcí. U triangulárních norm pak lze rozlišit více druhů monotónnosti.

Definice 7. [1]

- Triangulární norma je **striktně monotónní**, pokud pro ni platí:

$$\text{Pokud } x \in]0, 1[\text{ a } y < z, \text{ pak } T(x, y) < T(x, z).$$

- Triangulární norma je **sduženě striktně monotónní**, pokud pro ni platí:

$$\text{Pokud } x < x', y < y', \text{ pak } T(x, y) < T(x', y').$$

Poznámka 6. Triangulární normy T_M a T_L jsou sice spojité, ale ne striktně monotónní. Striktní monotónnost ovšem platí pro T_P .

Na závěr si uvedeme definici pro vlastnosti t -norm, které nám funkce rozdělují do tříd nilpotentních a striktních t -norm.

Definice 8. [1] Triangulární normu označujeme jako **nilpotentní**, pokud je spojitá a $\forall x \in]0, 1[$ jsou její nilpotentní prvky. Triangulární normu označujeme jako **striktní**, pokud je spojitá a striktně monotónní.

Poznámka 7. Pro zmíněné základní t -normy platí, že Striktní t -norma je pouze T_P , naopak nilpotentní t -norma je pouze T_L .

2.5 Triangulární konormy

K triangulárním normám existují jejich duální funkce, které označujeme triangulární konormy. Pomocí nich lze ve fuzzy prostoru modelovat sjednocení fuzzy množin.

Definice 9. [9] Funkce $S : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ se nazývá triangulární konorma (zkráceně t -konorma, označení S je zamýšleno jako suma), pokud $\forall x, y, z \in [0, 1]$ platí:

$$(S1) \quad S(x, y) = S(y, x), \quad \text{komutativita}$$

$$(S2) \quad S(x, S(y, z)) = S(S(x, y), z), \quad \text{asociativita}$$

$$(S3) \quad S(x, y) \leq S(x, z), \text{ pokud } y \leq z, \quad \text{monotónnost}$$

$$(S4) \quad S(x, 0) = x. \quad \text{hraniční podmínka}$$

Poznámka 8. Lze si všimnout toho, že první tři vlastnosti jsou stejné jako u t -norm.

Tvrzení 1. Triangulární konormy jsou duální funkce k triangulárním normám, vzájemně jsou mezi sebou odvoditelné pomocí předpisů:

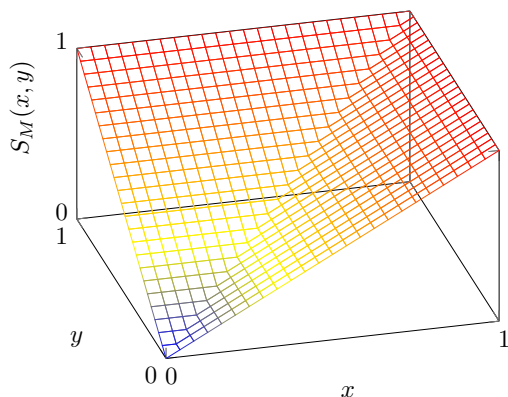
$$T(x, y) = 1 - S(1 - x, 1 - y),$$

$$S(x, y) = 1 - T(1 - x, 1 - y).$$

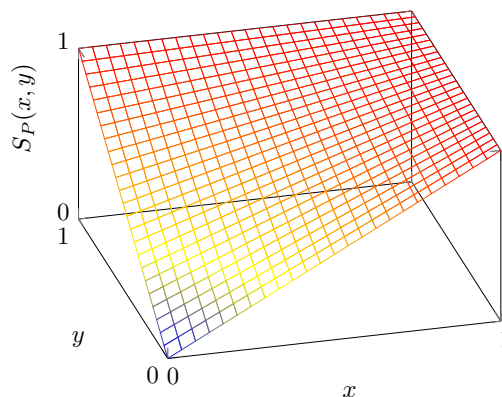
Příklad 4. Pro modelování sjednocení ve fuzzy množinách jsou nejčastěji používané tyto triangulární konormy:

- $S_M(x, y) = \max(x, y)$ maximová t -konorma
- $S_P(x, y) = x + y - xy$ pravděpodobnostní součet
- $S_L(x, y) = \min(1, x + y)$ Łukasiewiczova t -konorma
- $S_D(x, y) = \begin{cases} \max(x, y) & \text{pokud } \min(x, y) = 0, \\ 1 & \text{jinak.} \end{cases}$ drastický součet

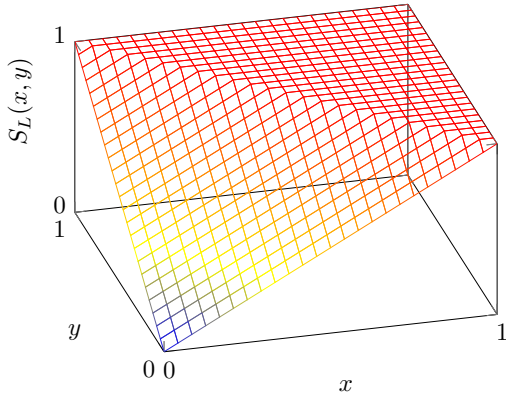
Jejich grafy vidíme na obrázcích 2.12, 2.13, 2.14, 2.15.



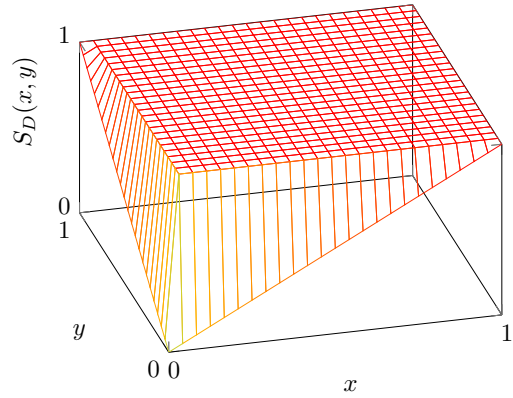
Obrázek 2.12: Maximová t -konorma



Obrázek 2.13: Pravděpodobnostní součet



Obrázek 2.14: Łukasiewiczova t -konorma



Obrázek 2.15: Drastický součet

2.6 Zobecněné množinové operace

Jak již bylo dříve zmíněno, pomocí triangulárních norem a konorem jsme mezi fuzzy množinami schopni modelovat operace průniku a sjednocení. Proto standardní průnik a sjednocení můžeme zobecnit následovně:

Definice 10. [9]

- Průnik fuzzy množin $A, B \in \mathcal{F}(\mathbb{X})$ založený na t -normě T je fuzzy množina $A \cap_T B \in \mathcal{F}(\mathbb{X})$ s funkcí příslušnosti

$$\mu_{A \cap_T B}(x) = T(\mu_A(x), \mu_B(x)).$$

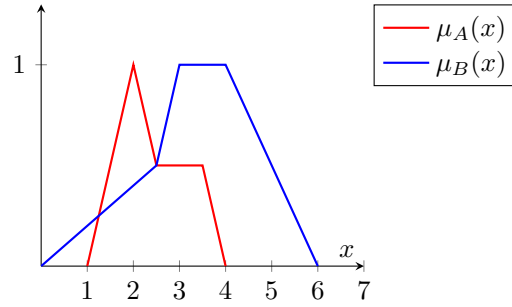
- Sjednocení fuzzy množin $A, B \in \mathcal{F}(\mathbb{X})$ založené na t -konormě S je fuzzy množina $A \cup_S B \in \mathcal{F}(\mathbb{X})$ s funkcí příslušnosti

$$\mu_{A \cup_S B}(x) = S(\mu_A(x), \mu_B(x)).$$

Navážeme na příklady průniku a sjednocení z podkapitoly o standardních základních operacích s tím, že je budeme modelovat pomocí čtyř základních t -norem a t -konorem.

Příklad 5. Necht $\mathbb{X} = \mathbb{R}$ je univerzum, $A, B \in \mathcal{F}(\mathbb{X})$.

$$\mu_A(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{pokud } x \in [1, 2], \\ 3 - x & \text{pokud } x \in]2, \frac{5}{2}], \\ \frac{1}{2} & \text{pokud } x \in]\frac{5}{2}, \frac{7}{2}], \\ 4 - x & \text{pokud } x \in]\frac{7}{2}, 4], \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases} \quad \mu_B(x) = \begin{cases} \frac{x}{5} & \text{pokud } x \in [0, \frac{5}{2}], \\ x - 2 & \text{pokud } x \in]\frac{5}{2}, 3], \\ 1 & \text{pokud } x \in]3, 4], \\ \frac{6-x}{2} & \text{pokud } x \in]4, 6], \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

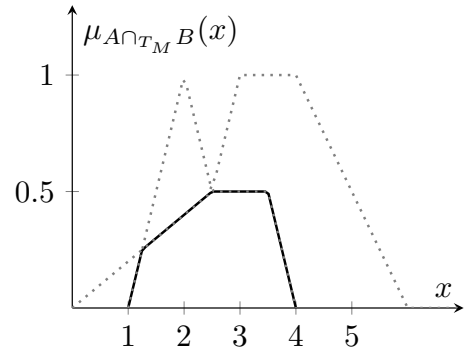


Obrázek 2.16: $\mu_A(x)$ a $\mu_B(x)$

Určíme $A \cap_T B$ pro $T \in \{T_M, T_P, T_L, T_D\}$.

- Minimová t -norma T_M , nám vyjadřuje standardní průnik.

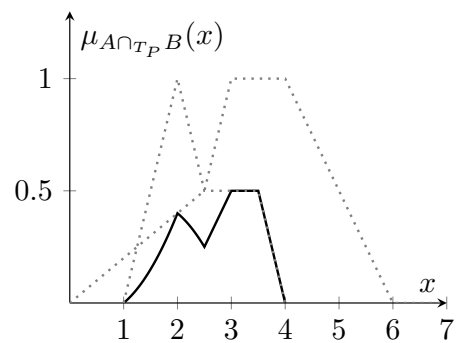
$$\mu_{A \cap_{T_M} B}(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{pokud } x \in [1, \frac{5}{4}], \\ \frac{x}{5} & \text{pokud } x \in [\frac{5}{4}, \frac{5}{2}], \\ \frac{1}{2} & \text{pokud } x \in [\frac{5}{2}, \frac{7}{2}], \\ 4 - x & \text{pokud } x \in [\frac{7}{2}, 4], \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$



Obrázek 2.17: Průnik A, B pomocí T_M

- Součinnová t -norma T_P vytvoří funkci

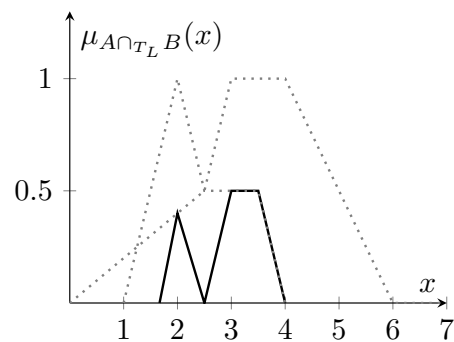
$$\mu_{A \cap_{T_P} B}(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x}{5} & \text{pokud } x \in [1, 2], \\ \frac{-x^2 + 3x}{5} & \text{pokud } x \in [2, \frac{5}{2}], \\ \frac{x - 2}{2} & \text{pokud } x \in [\frac{5}{2}, 3], \\ \frac{1}{2} & \text{pokud } x \in [3, \frac{7}{2}], \\ 4 - x & \text{pokud } x \in [\frac{7}{2}, 4], \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$



Obrázek 2.18: Průnik A, B pomocí T_P

- Łukasiewiczova t -norma T_L vytvoří funkci

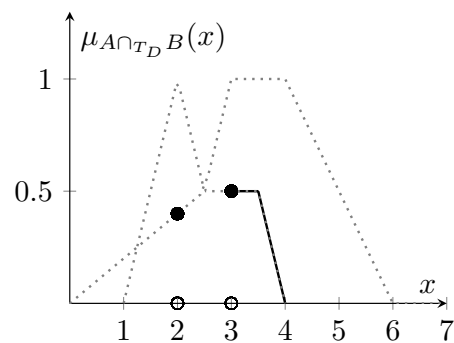
$$\mu_{A \cap_{T_L} B}(x) = \begin{cases} \frac{6x}{5} - 2 & \text{pokud } x \in \left[\frac{5}{3}, 2\right], \\ 2 - \frac{4x}{5} & \text{pokud } x \in \left]2, \frac{5}{2}\right], \\ x - \frac{5}{2} & \text{pokud } x \in \left] \frac{5}{2}, 3\right], \\ \frac{1}{2} & \text{pokud } x \in \left]3, \frac{7}{2}\right], \\ 4 - x & \text{pokud } x \in \left] \frac{7}{2}, 4\right], \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$



Obrázek 2.19: Průnik A, B pomocí T_L

- Drastickým součinem T_D získáme předpis

$$\mu_{A \cap_{T_D} B}(x) = \begin{cases} \frac{2}{5} & \text{pokud } x = 2, \\ \frac{1}{2} & \text{pokud } x \in \left]3, \frac{7}{2}\right], \\ 4 - x & \text{pokud } x \in \left] \frac{7}{2}, 4\right], \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$



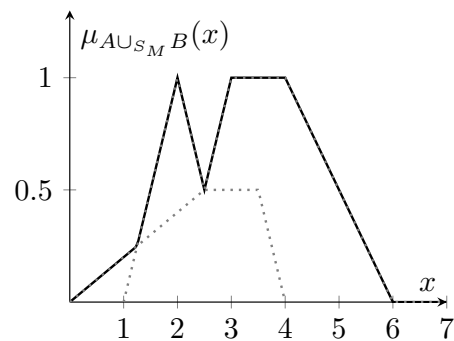
Obrázek 2.20: Průnik A, B pomocí T_D

Příklad 6. Necht $\mathbb{X} = \mathbb{R}$, $A, B \in \mathcal{F}(\mathbb{X})$, a pravdivostní funkce $\mu_A(x), \mu_B(x)$ jsou totožné s předchozím příkladem (5).

Určíme $A \cup_S B$ pro $S \in \{S_M, S_P, S_L, S_D\}$.

- Maximová t -konorma vyjadřuje definici standardního průniku množin.

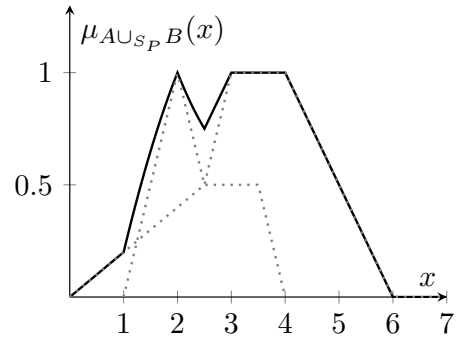
$$\mu_{A \cup_{S_M} B}(x) = \begin{cases} \frac{x}{5} & \text{pokud } x \in \left[0, \frac{5}{4}\right], \\ x - 1 & \text{pokud } x \in \left] \frac{5}{4}, 2\right], \\ 3 - x & \text{pokud } x \in \left]2, \frac{5}{2}\right], \\ x - 2 & \text{pokud } x \in \left] \frac{5}{2}, 3\right], \\ 1 & \text{pokud } x \in]3, 4], \\ \frac{6-x}{2} & \text{pokud } x \in]4, 6], \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$



Obrázek 2.21: Sjednocení A, B pomocí S_M

- Pravděpodobnostním součtem získáme předpis

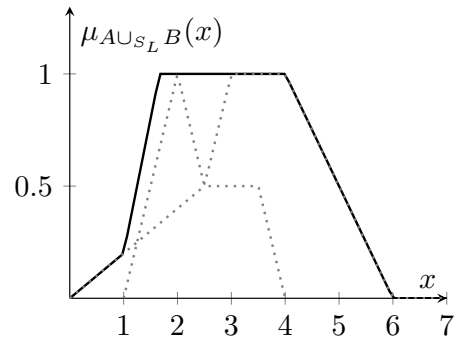
$$\mu_{A \cup_{S_P} B}(x) = \begin{cases} \frac{x}{5} & \text{pokud } x \in [0, 1[, \\ \frac{-x^2+7x-5}{5} & \text{pokud } x \in]1, 2], \\ \frac{x^2-7x+15}{5} & \text{pokud } x \in]2, \frac{5}{2}], \\ \frac{x-1}{2} & \text{pokud } x \in]\frac{5}{2}, 3], \\ 1 & \text{pokud } x \in]3, 4], \\ \frac{6-x}{2} & \text{pokud } x \in]4, 6], \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$



Obrázek 2.22: Sjednocení A, B pomocí S_P

- Łukasiewiczovou t -konormou získáme předpis

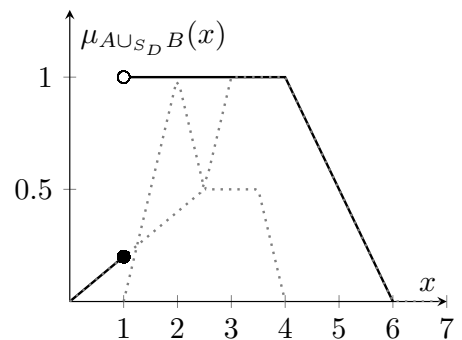
$$\mu_{A \cup_{S_L} B}(x) = \begin{cases} \frac{x}{5} & \text{pokud } x \in [0, 1], \\ \frac{6x-5}{5} & \text{pokud } x \in]1, \frac{5}{3}], \\ 1 & \text{pokud } x \in]\frac{5}{3}, 4], \\ \frac{6-x}{2} & \text{pokud } x \in]4, 6], \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$



Obrázek 2.23: Sjednocení A, B pomocí S_L

- Drastický součet vytvoří funkci

$$\mu_{A \cup_{S_D} B}(x) = \begin{cases} \frac{x}{5} & \text{pokud } x \in [0, 1], \\ 1 & \text{pokud } x \in]1, 4], \\ \frac{6-x}{2} & \text{pokud } x \in]4, 6], \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$



Obrázek 2.24: Sjednocení A, B pomocí S_D

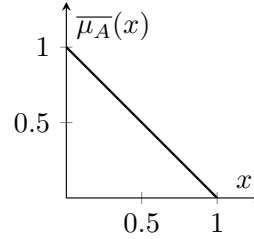
Definice 11. Fuzzy doplněk lze zobecnit jako:

$$\overline{\mu}_A(x) = n(\mu_A(x)),$$

kde n je nerostoucí funkce splňující podmínky $n(0) = 1$ a $n(1) = 0$.

Příklad 7. Na ukázkou uvádíme nejznámější z fuzzy doplňků, známý jako Zadehův doplněk:

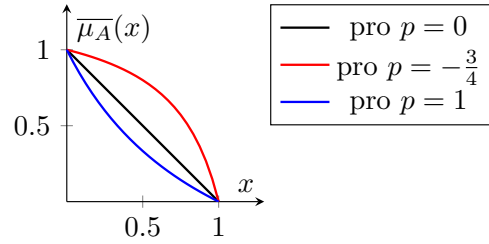
$$\overline{\mu}_A(x) = 1 - \mu_A(x).$$



Obrázek 2.25: Zadehův doplněk

Nerostoucí funkci n lze dále upravit různými parametry, aby vyhovovala konkrétním potřebám chování pro danou aplikaci. Takto dostáváme parametrické třídy doplňků. Pro ilustraci uvádíme Sugenuvu třídu doplňků:

$$\overline{\mu}_A(x) = \frac{1 - \mu_A(x)}{1 + p\mu_A(x)}, \quad p > -1.$$

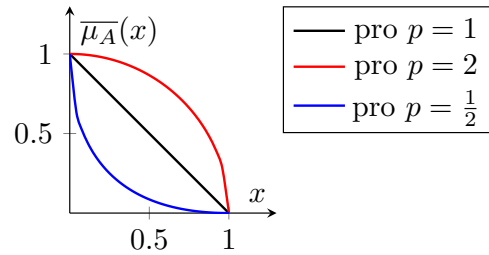


Obrázek 2.26: Sugenuv doplněk

Pomocí parametru p jsme schopni určit, rychlost klesání hodnoty doplňku. Lze si všimnout toho, že při dosazení 0 za p získáme Zadehův doplněk.

Další parametrická třída je Yagerova:

$$\overline{\mu}_A(x) = \sqrt[p]{1 - \mu_A(x)^p}, \quad p > 0.$$



Obrázek 2.27: Yagerův doplněk

Pomocí parametru p ovlivňujeme rychlost klesání hodnoty doplňku. Např. pro $p = 1$ se jedná o Zadehův doplněk a pro $p = 2$ o výseč jednotkové kružnice.

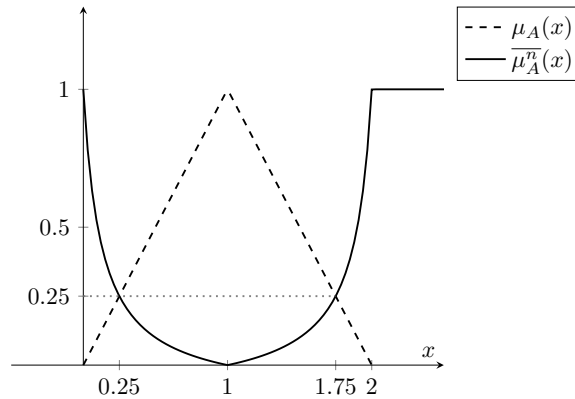
Příklad 8. Necht $\mathbb{X} = \mathbb{R}$ je univerzum, $A \in \mathcal{F}(\mathbb{X})$.

Určíme doplněk fuzzy množiny A založený na funkci $n(x) = \frac{1-x}{1+8x}$, $x \in [0, 1]$, která vychází ze Sugenuva doplňku.

$$\mu_A(x) = \begin{cases} x & \text{pokud } x \in [0, 1], \\ 2 - x & \text{pokud } x \in]1, 2], \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Předpis doplňku se nám rozdělí na intervaly pro funkční předpis

$$\overline{\mu}_A^n(x) = \begin{cases} \frac{1-x}{1+8x} & \text{pokud } x \in [0, 1], \\ \frac{x-1}{17-8x} & \text{pokud } x \in]1, 2], \\ 1 & \text{jinak.} \end{cases}$$



Obrázek 2.28: Graf k příkladu 8

Poznámka 9. Lze si všimnout toho, že při průniku $\mu_A(x)$ s $\overline{\mu}_A^n(x)$ by nám nevznikla funkce konstantní nuly jako v klasické teorii množin, ale funkce s dvěma vrcholy výšky 0.25 v bodech 0.25, 1.75 a nenulovými hodnotami na intervalu $]0, 1[\cup]1, 2[$.

Kapitola 3

Fuzzy logické spojky

V této kapitole se zaměříme na fuzzy logiku a zejména na konstrukci jednotlivých logických spojek, díky kterým budeme schopni vyjádřit podobu fuzzy implikací, které využijeme pro odvozovací pravidla v rámci aplikace nad fuzzifikovaným pravidlem modus ponens.

3.1 Fuzzy logika

Fuzzy množiny nám umožnily nový pohled na náležitost prvku množině, kterou nám vyjadřovala funkce příslušnosti. Pomocí fuzzy logiky se můžeme dívat novým pohledem na pravdivost logických výroků. Pro ty bude platit, že pravdivostní hodnota 0 je absolutní nepravda, 1 je absolutní pravda a hodnoty mezi nimi odpovídají určitému stupni pravdivosti.

Budeme pracovat s fuzzy logickými spojkami, které jsou monotónním rozšířením klasických logických spojek. To znamená, že fuzzy logické spojky vycházejí z klasických logických spojek, tedy pro hraniční hodnoty musí zachovávat hodnoty z klasické logiky a dále v celém prostoru mezi nimi jsou monotónně dodefinovány.

Pomocí nich budeme schopni vyjádřit hodnotu neurčitosti a nejistoty v rámci logických operací, oproti klasické logice, kde pravdivostní hodnota může nabývat pouze hodnot pravda a nepravda.

3.2 Fuzzy negace

Protože je fuzzy logika monotónním rozšířením klasické logiky, lze zde definovat unární operaci fuzzy negace následovně:

Definice 12. [9] *Libovolná nerostoucí funkce $N : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ se nazývá negací, pokud $\forall a, b \in [0, 1]$ platí*

- $N(0) = 1$,
- $N(1) = 0$.

Výše uvedené definici vyhovuje nespočet možných funkcí, pro další užití si budeme chtít vybrat ty funkce, které nám budou splňovat i silnější kritéria.

Definice 13. [1] *Negace budeme nazývat:*

- *Striktní fuzzy negace, pokud je klesající a zároveň spojitá.*

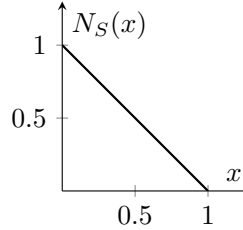
- **Silná** fuzzy negace, pokud je **involutivní**, tzn. $\forall x \in [0, 1]; N(N(x)) = x$.

Definice 14. [9] Duální negace založená na negaci N je dána předpisem

$$N^d(x) = 1 - N(1 - x).$$

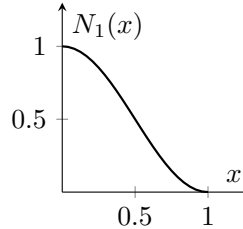
Příklad 9. Uvedeme si pár příkladů fuzzy negací, včetně parametrických tříd negací :

- $N_S(x) = 1 - x$



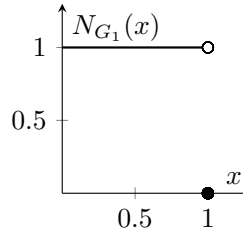
silná negace, standardní fuzzy negace

- $N_1(x) = \cos^2\left(\frac{\pi \cdot x}{2}\right)$



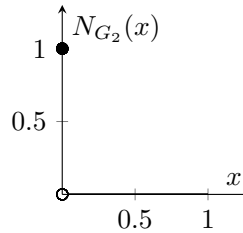
striktní, ale ne silná negace

- $N_{G_1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } x = 1, \\ 1 & \text{jinak.} \end{cases}$



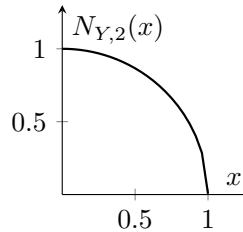
nespojité, Gödelova největší fuzzy negace

- $N_{G_2}(x) = \begin{cases} 1 & \text{pokud } x = 0, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$



nespojité, Gödelova nejmenší fuzzy negace

- $N_Y(x, n) = \sqrt[n]{1 - x^n}, n > 0$



Yagerova, silná negace

Obrázek 3.1: Grafy fuzzy negací

Poznámka 10. V posledním příkladu se jedná o příklad fuzzy negace z Yagerovy třídy fuzzy negací, pro který byla zvolena hodnota parametru $n = 2$.

Poznámka 11. Můžeme si všimnout, že negace je involutivní, pokud jsou její funkční hodnoty souměrné podle osy $x = y$.

Poznámka 12. Podobně, jako jsme uvedli příklad Yagerovy třídy fuzzy negací, je možné zkonstruovat i parametrické fuzzy negace Sugenovы třídy, které vycházejí ze vztahu

$$N_{Su}(x, n) = \frac{1 - x}{1 + nx}, \quad n > -1.$$

3.3 Fuzzy konjunkce a disjunkce

Pomocí fuzzy konjunkce lze zřetězit dvě a více logických podmínek, kdy bereme v potaz vágnost informace. Po aplikaci operace získáme informaci, do jaké míry je pravidlo splněno, oproti klasickému „ano“, či „ne“.

Definice 15. [8] *Neklesající zobrazení $C : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ se nazývá konjunkce, pokud $\forall a, b \in [0, 1]$ platí*

- $C(a, b) = 0$, pokud $a = 0$, nebo $b = 0$,
- $C(1, 1) = 1$.

Fuzzy konjunkce bývá nejčastěji vyjádřena pomocí triangulárních norem, které už jsme si definovali v rámci fuzzy množin. Stejně, jako v klasické matematice, také ve fuzzy případě, logické spojky a množinové operace spolu souvisí.

Podobně lze určit i rozšíření disjunkce do fuzzy prostoru.

Definice 16. [8] *Neklesající zobrazení $D : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ se nazývá disjunkce, pokud $\forall a, b \in [0, 1]$ platí*

- $D(a, b) = 1$, pokud $a = 1$, nebo $b = 1$,
- $D(0, 0) = 0$.

Fuzzy disjunkce bývá nejčastěji modelována pomocí triangulárních konorem.

3.4 Fuzzy implikace

Pro určení inferenčních pravidel *modu ponens* se v klasické logice používá implikace. Ve fuzzy prostoru budeme předpokládat stejný požadavek na tuto logickou spojku. Zavedeme si tedy obecnou definici fuzzy implikace, jako funkci $I : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$, která si bude zachovávat klasické hodnoty ($I(0, 0) = I(0, 1) = I(1, 1) = 1, I(1, 0) = 0$) a monotónnost.

Definice 17. [9] *Fuzzy implikace je libovolná funkce $I : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$, která splňuje vlastnosti*

- $I(0, 0) = I(0, 1) = I(1, 1) = 1$,
- $I(1, 0) = 0$,
- je nerostoucí v prvním argumentu,
- je neklesající ve druhém argumentu.

Konstrukce fuzzy implikace se obvykle realizuje na základě známých tautologií z klasické logiky. V klasické logice je známá tautologie:

$$A \Rightarrow B \iff \neg A \vee B.$$

O tuto tautologii se opírá konstrukce implikací, známých jako (S, N) -implikace. Jedná se o třídu implikací, která vychází přímo z uvedené tautologie, kde disjunkce je modelována t -konormou S a negace fuzzy negací N :

$$I_{S,N}(x, y) = S(N(x), y).$$

Lze se také setkat s označením S -implikace, které je významově totožné.

Příklad 10. [9] Uvedeme si (S, N) -implikace založené na základních t -konormách S_M, S_P a S_L a jako fuzzy negaci použijeme standardní fuzzy negaci $N(x) = 1 - x$.

- Při použití maximové konormy S_M získáváme **Kleene-Dienesovu implikaci** danou předpisem

$$I_{S_M,N}(x, y) = S_M(N(x), y) = S_M(1 - x, y) = \max(1 - x, y).$$

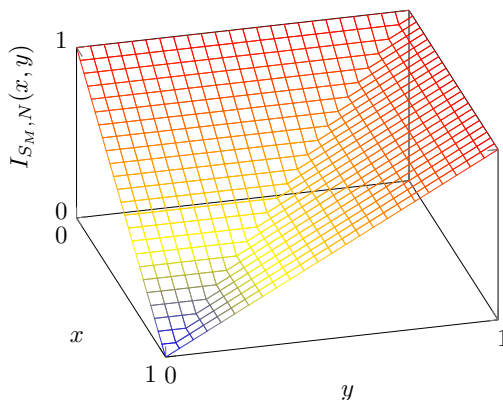
- Při použití konormy pravděpodobnostního součinu S_P získáme **Reichenbachovu implikaci** danou předpisem

$$I_{S_P,N}(x, y) = S_P(N(x), y) = S_P(1 - x, y) = (1 - x) + y - (1 - x)y = 1 - x + x \cdot y.$$

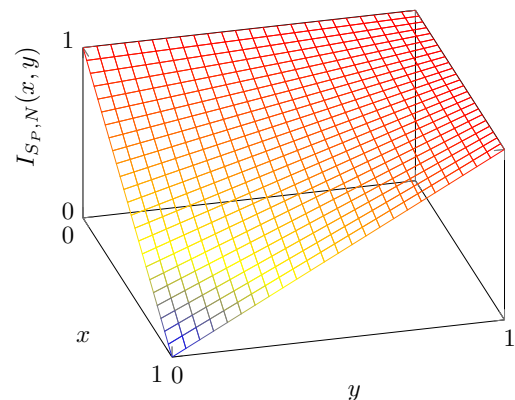
- Při použití Łukasiewiczovy konormy S_L získáme **Łukasiewiczovu implikaci** danou předpisem

$$I_{S_L,N}(x, y) = S_L(N(x), y) = S_L(1 - x, y) = \min(1, (1 - x) + y) = \min(1, 1 - x + y).$$

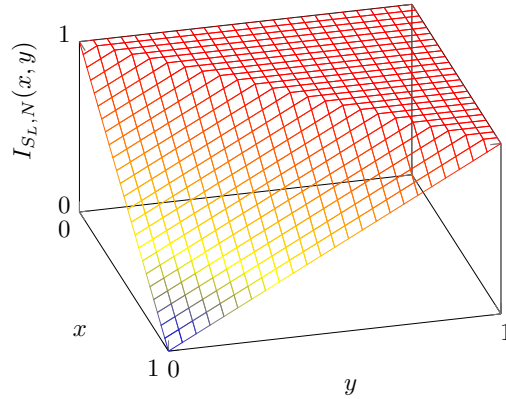
Jejich grafy lze vidět na obrázcích 3.2, 3.3, 3.4.



Obrázek 3.2: Kleene-Dienesova implikace



Obrázek 3.3: Reichenbachova implikace



Obrázek 3.4: Łukasiewiczova implikace

Dalším z mnoha možných způsobů konstrukce implikace ve fuzzy prostorech jsou tzv. *reziduální implikace*. Předpokládejme, že T je zleva spojitá triangulární norma. Potom funkce

$$I_T(x, y) = \sup\{z \in [0, 1]; T(x, z) \leq y\}, (x, y) \in [0, 1]^2,$$

je reziduální implikace založená na zleva spojitě t -normě T .

Příklad 11. [9] Uvedeme si R -implikace založené na základních spojitých t -normách T_M, T_P a T_L .

- Při použití minimové t -normy T_M získáme **Gödelovu implikaci** danou předpisem

$$I_{T_M}(x, y) = \sup\{z \in [0, 1]; \min(x, z) \leq y\}.$$

Předpis se nám rozloží na tyto případy

- Pokud je $x \leq y$, pak pro $z = 1$ platí $\min(x, 1) = x \leq y$, takže největší hodnota, kterou z může nabývat je $z = 1$.
- Jestliže je $x > y$, pak je vyhovující $z \in [0, 1]$ takové, pro které $\min(x, z) = z$, protože $x > y$. A tedy největší takové vyhovující $z = y$.

$$I_{T_M}(x, y) = \begin{cases} 1 & x \leq y, \\ y & x > y. \end{cases}$$

- Při použití součinnové t -normy T_P získáme **Goguenovu implikaci** danou předpisem

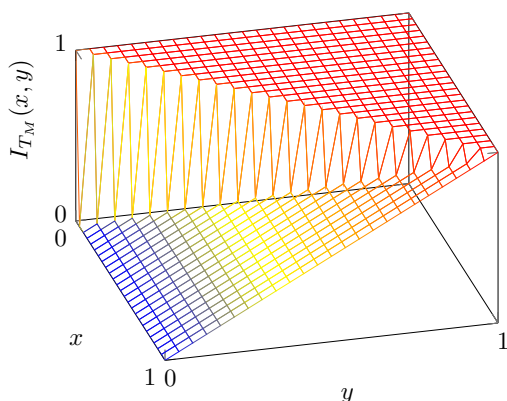
$$I_{T_P}(x, y) = \sup\{z \in [0, 1]; x \cdot z \leq y\} = \min\left(\frac{y}{x}, 1\right).$$

- Při použití Łukasiewiczovy t -normy T_L získáme **Łukasiewiczovu implikaci**, jejíž předpis by měl být totožný jako u (S, N) -implikace založené na Łukasiewiczově t -konormě

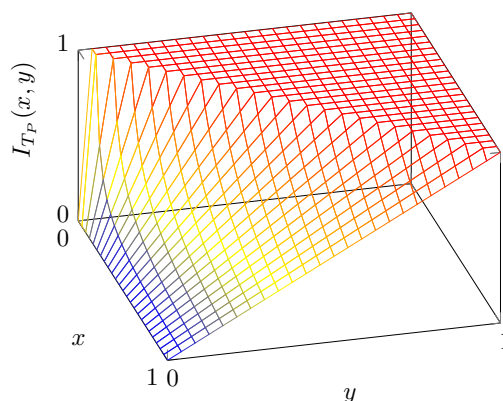
$$I_{T_L}(x, y) = \sup\{z \in [0, 1]; \max(0, x + z - 1) \leq y\} = \min(1, 1 - x + y).$$

Vzhledem k tomu, že R -implikace založená na Łukasiewiczově t -normě je vyjádřena totožně jako (S, N) -implikace pro Łukasiewiczovu t -konormu, $I_{S, N_L} = I_{T_L}$, budeme ji dále označovat jenom jako I_L .

Jejich grafy lze vidět na obrázcích 3.5, 3.6, 3.4.



Obrázek 3.5: Gödelova implikace



Obrázek 3.6: Goguenova implikace

Poznámka 13. V této kapitole jsme si ukázali pouze základní fuzzy implikace a způsoby jejich konstrukcí. Fuzzy implikace jsme schopni generovat za užití funkce jedné proměnné, o tom se lze dočíst více z [4] nebo třeba ve [5].

3.5 Modus ponens

Hlavním důvodem analýzy fuzzy implikací bylo jejich zužitkování v rámci studia fuzzifikovaného pravidla modus ponens, a to z důvodu, že odvozovací pravidla jsou ve většině případů zapsaná právě jako implikace, které jsou formulovány do tvaru *POKUD – PAK* (z anglického *IF – THEN*).

V klasické logice se setkáváme s pravidlem *modus ponens* v takové podobě, že pokud máme v bázi znalostí podmíněný výraz $A \rightarrow B$ a víme, že výrok A platí, pak také platí B .

Příklad 12. [10] Necht' výrok A znamená venku prší a B znamená vezmi si s sebou deštník, potom při spojení $A \rightarrow B$ získáme výraz.

POKUD venku prší, PAK si s sebou vezmi deštník.

Pokud tedy víme, že platí předpoklad venku prší, tedy A je platné, dokážeme při užití modu ponens usoudit platnost následku B , tedy to, že si s sebou máme vzít deštník.

Poznámka 14. Při slovním popisu pravidel používáme tzv. **lingvistické proměnné**, které nám určují hodnotu ve slovní podobě. Jelikož máme v klasické logice pouze 2 logické hodnoty, budeme schopni jeden výrok obměnit pouze za užití negace. Z minulého příkladu by pak negovaný předpoklad $\neg A$ byl vyjádřen slovně: Venku neprší.

3.6 Fuzzy modus ponens

V klasické logice jsme zapsali modus ponens pomocí logických spojek následovně:

$$\frac{A \wedge (A \Rightarrow B)}{B}.$$

Přepis do fuzzy prostoru pak vypadá takto:

$$B'(y) = \sup_{x \in X} (T(A'(x), I(A(x), B(y))))).$$

Pomocí fuzzifikovaného modu ponens budeme schopni zohlednit v odvozování závěrů na základě předpokladů, které jsou obohaceny nějakou vágností, což může být v některých aplikacích např. v rámci expertních systémů, či zpracování informací v reálném čase kritické.

3.6.1 Fuzzy lingvistické proměnné

Při fuzzy odvozování informací je důležitý pojem tzv. *fuzzy lingvistických proměnných*, zavedený L. A. Zadehem. Obecně lze říci, že jazyková proměnná je proměnná, jejíž hodnota je vyjádřena slovně. Tedy například, pokud bychom určovali jazykovou proměnnou vlhkosti vzduchu, tak místo číselného vyjádření budeme vlastnost popisovat pomocí slov, např. *velmi nízká, nízká, střední, vyšší, vysoká, velmi vysoká, atd.* Podobně lze vyjadřovat i jiné vlastnosti jako jazykovou proměnnou, např. teplota vody jako *ledová, studená, chladná, vlažná, teplá, horká, vroucí, atd.*

Definice 18. [9] *Fuzzy lingvistická proměnná je pětice $(X, T(X), \mathbb{X}, G, \mathcal{M})$, kde*

- X je jméno lingvistické proměnné,
- $T(X)$ je množina slovních hodnot lingvistické proměnné,
- \mathbb{X} je univerzum jejich hodnot,
- G je gramatika, která obsahuje syntaktická pravidla pro vytváření hodnot lingvistické proměnné,
- \mathcal{M} je sémantické pravidlo, které každé slovní hodnotě přiřazuje fuzzy podmnožinu univerza \mathbb{X} , čímž definuje její význam.

3.6.2 Zobecněný modus ponens

Pro zobecnění pravidla *modus ponens* budeme uvažovat vstupy, které budou popsány obecným pravidlem, na základě kterého budeme chtít zpracovat vstupy obohacené jazykovou proměnnou. Motivací pro jeho konstrukci bude modifikace stavu B' takovým způsobem, že A a A' se nutně nemusí rovnat.

$$\begin{array}{l} \text{Pravidlo:} \quad \text{POKUD } x \text{ je } A \wedge y \text{ je } B. \\ \text{Pozorování:} \quad x \text{ je } A'. \\ \hline \text{Závěr:} \quad \text{PAK } y \text{ je } B'. \end{array}$$

Příklad 13. *Pro pochopení odlišností klasického postupu odvozování a jeho zobecněním si uvedeme příklady:*

- $\text{Pravidlo:} \quad \text{POKUD je výrobek oblíbený, PAK je jeho dostupnost omezená.}$
 $\text{Pozorování:} \quad \text{Výrobek je mimořádně oblíbený.}$

 $\text{Závěr:} \quad \text{Dostupnost výrobku je značně omezená.}$
- $\text{Pravidlo:} \quad \text{POKUD je kvalita služby vysoká, PAK je zákazník štedrý s dýškem.}$
 $\text{Pozorování:} \quad \text{Kvalita služby je velmi vysoká.}$

 $\text{Závěr:} \quad \text{Dýško je velice štedré.}$

Je tedy třeba toto zobecnění brát jako jisté zjednodušení požadavku na aplikovatelnost předpokladu, a místo odvození klasickým způsobem jako platí–neplatí provést škálování na základě podobnosti, namísto totožnosti mezi předpisem a skutečností. Na základě toho, zda pozorované A' je platné více, či méně než A určené pravidlem, lze pak transformovat důsledek získaný v závěru podobným způsobem.

Pro důsledková pravidla se uvádí odhad modu ponens jako

$$\frac{(\mathbf{B}, b), (\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{H}, r)}{\mathbf{H}, f_{\rightarrow}(b, r)}.$$

Víme, že implikace $(\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{H})$ je platná (nejméně) až do pravdivostního stupně r . Tudíž \mathbf{H} musí být pravdivé až do nějakého stupně h takového, že $I(b, h) \geq r$.

Potřebujeme tedy určit nejnižší vyhovující hodnotu h s touto vlastností, aby bylo zaručeno, že ohodnocení \mathbf{H} bude alespoň h . Nechť I je funkce implikace \rightarrow , pak funkce f_{\rightarrow} je reziduální konjunkce implikace I , zapsaná jako

$$f_{\rightarrow} = C_I(b, r) = \inf_{h \in [0,1]} I(b, h) \geq r.$$

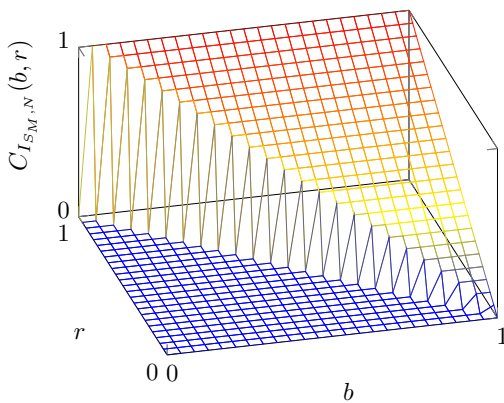
Příklad 14. [3] Pro známe (S, N_S) –implikace, kde S je postupně S_M, S_P a S_L a N standardní negátor, dostáváme reziduální konjunkce:

$$C_{I_{S_M, N}}(b, r) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } b + r \leq 1, \\ r & \text{jinak,} \end{cases}$$

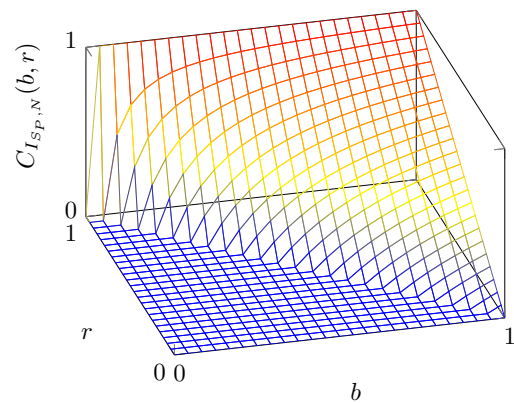
$$C_{I_{S_P, N}}(b, r) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } b + r \leq 1, \\ \frac{b+r-1}{b} & \text{jinak,} \end{cases}$$

$$C_{I_L}(b, r) = \max(0, b + r - 1).$$

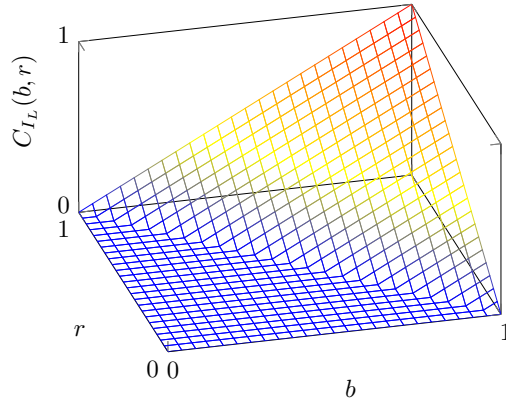
Jejich grafy vidíme na následujících obrázcích.



Obrázek 3.7: Konjunkce založená na I_{S_M}



Obrázek 3.8: Konjunkce založená na I_{S_P}



Obrázek 3.9: Konjunkce založená na I_L

3.6.3 Agregáčnı deficit

Jiný způsob, jak vypočítat dolní mez pravdivostní hodnoty \mathbf{H} , je za pomoci tzv. agregáčního deficitu. Je to operátor založen na fuzzy disjunkci D a to tak, že jsou splněny omezující podmínky:

$$\begin{aligned} x &\leq D(c, a) \wedge y \leq D(b, 1 - a), \\ c &\geq R_D(a, x) \wedge b \geq R_D(1 - a, y). \end{aligned}$$

Z čehož lze vyvodit následující definici.

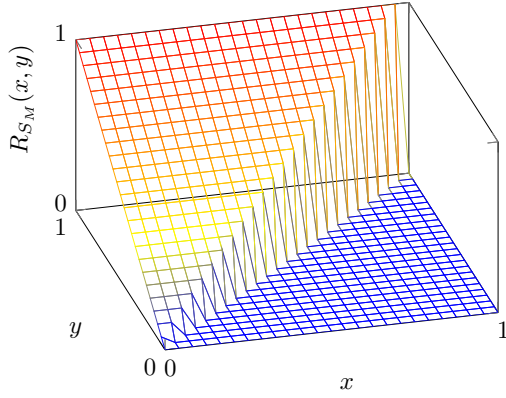
Definice 19. [6] *Nechť D je fuzzy disjunkce, potom agregáčnı deficit je funkce dána předpisem*

$$R_D(x, y) = \inf\{z \in [0, 1]; D(x, z) \geq y\}.$$

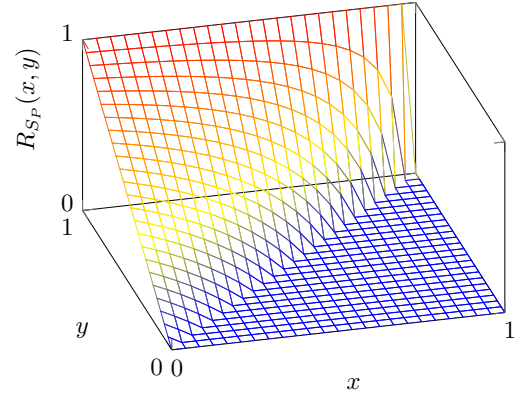
Poznámka 15. *Tento zápis trochu vzdáleně připomíná předpis, kterým jsme si definovali R -implikace.*

Příklad 15. *Na ilustraci uvádíme agregáčnı deficity odvozené ze známých triangulárních konorem.*

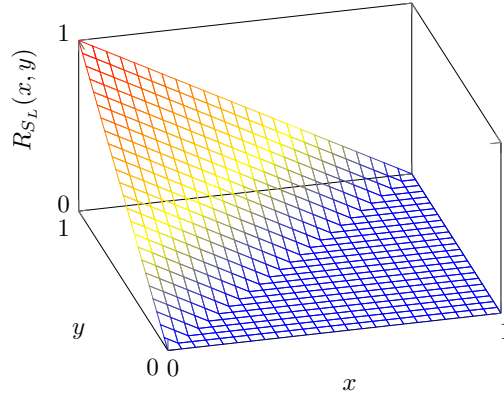
$$\begin{aligned} R_{S_M}(x, y) &= \begin{cases} 0 & \text{pokud } x \geq y, \\ y & \text{jinak.} \end{cases} \\ R_{S_P}(x, y) &= \begin{cases} 0 & \text{pokud } x \geq y, \\ \frac{y-x}{1-x} & \text{jinak.} \end{cases} \\ R_{S_L}(x, y) &= \begin{cases} 0 & \text{pokud } x \geq y, \\ y - x & \text{jinak.} \end{cases} \end{aligned}$$



Obrázek 3.10: Agregáčnı deficit maxi-
móvé t -konormy



Obrázek 3.11: Agregáčnı deficit pravdě-
podobnostního součtu



Obrázek 3.12: Agregáčnı deficit Łukasiewiczovy t -konormy

Pomocı agregáčního deficitu lze pak zkonstruovat tzv. *pravdivostní funkci rezoluce* $f_{R_D} : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$, která je klíčová pro formulaci výsledku úplné rezoluce. Tato funkce je určena předpisem

$$f_{R_D}(x, y) = \inf_{a \in [0, 1]} \{D(R_D(a, x), R_D(1 - a, y))\}.$$

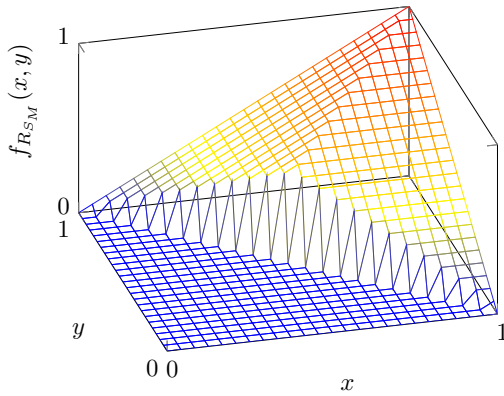
Příklad 16. Pro agregáčnı deficity z předchozího příkladu dostáváe postupně pravdivostní funkce:

$$f_{R_{S_M}}(x, y) = \inf_{a \in [0, 1]} \{D(R_{S_M}(a, x), R_{S_M}(1 - a, y))\} =$$

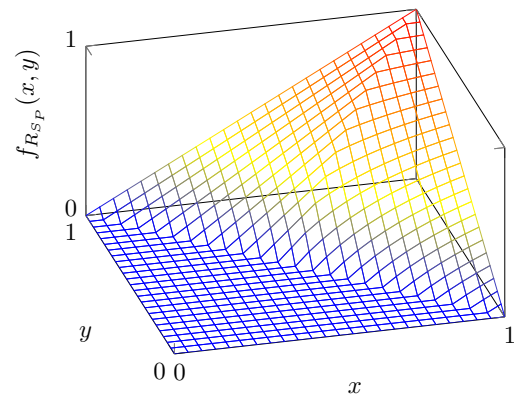
$$\inf_{a \in [0, 1]} \{S_M(R_{S_M}(a, x), R_{S_M}(1 - a, y))\} = \begin{cases} 0 & \text{pokud } x + y \leq 1, \\ \min(x, y) & \text{jinak.} \end{cases}$$

$$f_{R_{S_P}}(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } x + y \leq 1, \\ \frac{x+y-1}{\max(x, y)} & \text{jinak.} \end{cases}$$

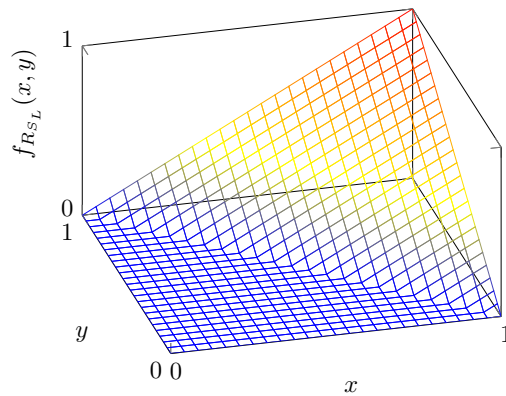
$$f_{R_{S_L}}(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } x + y \leq 1, \\ x + y - 1 & \text{jinak.} \end{cases}$$



Obrázek 3.13: Funkce f maximové t -konormy



Obrázek 3.14: Funkce f pravděpodobnostního součtu



Obrázek 3.15: Funkce f Łukasiewiczovy t -konormy

Příklad 17. [3] Pro získání odhadu pro modus ponens založeného na klauzulích, je třeba provést toto pozorování: Necht $D : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ je komutativní disjunkce. Pokud pro libovolné $b, r \in [0, 1]$ platí

$$(\mathbf{B}, b) \wedge (\neg \mathbf{B} \vee \mathbf{H}, r) \Rightarrow (\mathbf{H}, g_D(b, r)),$$

potom

$$r \leq D(1 - b, h) \Rightarrow r \leq D(h, 1 - b) \Rightarrow h \geq R_D(1 - b, r).$$

Tudíž nejlepší možný odhad pro h je

$$g_D(b, r) = \inf_{b' \geq b} R_D(1 - b', r).$$

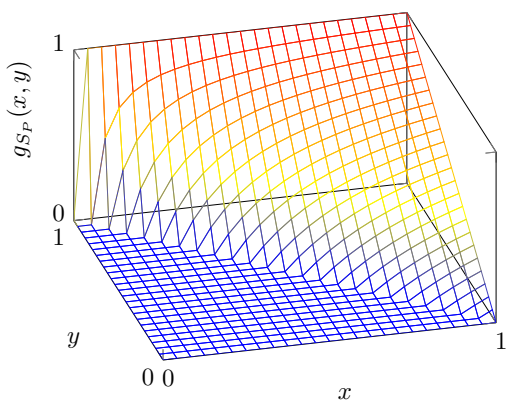
Díky tomu, že agregační deficit R_D je nerostoucí v prvním argumentu, pak platí

$$\inf_{b' \geq b} R_D(1 - b', r) = R_D(1 - b, r),$$

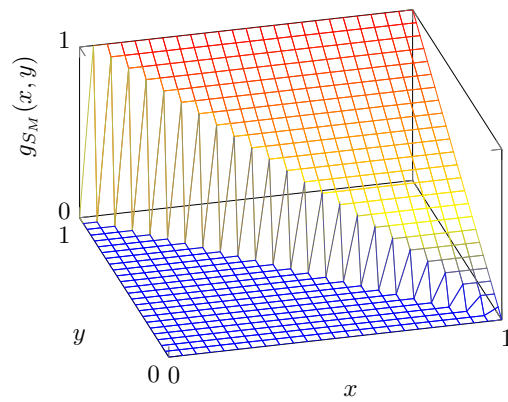
z čehož pak plyne platnost

$$g_D(b, r) = R_D(1 - b, r).$$

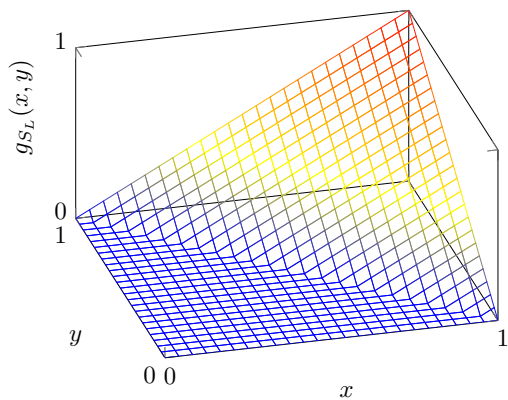
Pro lepší pochopení uvádíme grafy funkcí g_D odvozené ze známých t -konorem S_P, S_M a S_L .



Obrázek 3.16: Funkce g pravděpodobnostního součtu



Obrázek 3.17: Funkce g maximové t -konormy



Obrázek 3.18: Funkce g Łukasiewiczovy t -konormy

Kapitola 4

Diskretizovaný fuzzy modus ponens

Přestože fuzzifikací získáváme značně rozšířené spektrum platnosti informace, je nutné tento koncept vnímat i tak, že nutně nepotřebujeme vypočítávat pro všechny prvky množiny zvláště jejich funkční hodnoty a pro každý podúsek nám vznikne plocha s agregovanou hodnotou. Tudíž budeme jednotlivé obrazy vzorů normovat do podintervalů, které jsou určeny libovolným krokem n , kde $n \in]0, 1]$. V rámci navazujícího praktického užití budeme pracovat s krokem $n = \frac{1}{10}$, tak aby jednotlivé plochy tvořené podintervaly měly totožnou velikost.

Když bude uživatel vyjadřovat své preference \mathbf{X} a \mathbf{Y} jako fuzzy hodnoty, případně užitím lingvistických proměnných x a y , budeme pomocí těchto hodnot vyvozovat odhad pro modus ponens s použitím diskretizovaných spojek.

Pro následující definice si zavedeme tři koeficienty k, l, m , kterými vyjádříme počet polí normované velikosti. Obecně tedy jednotlivé koeficienty budeme chápat takto:

- k počet podintervalů na ose x ,
- l počet podintervalů na ose y ,
- m celkový počet podintervalů plochy, tedy $m = k \cdot l$.

Definice 20. [3] Necht $C : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ je konjunkce, $k \in \{5, 6, 7, 8, 9\}$, $l \in \{5, 6, 7, 8, 9\}$ a $m = k \cdot l$. Zobrazení $C_{k,l}^m : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ definováno následovně

$$C_{k,l}^m(x, y) = \frac{\left[m \cdot C \left(\frac{[k \cdot x]}{k}, \frac{[l \cdot y]}{l} \right) \right]}{m}, \quad (4.1)$$

se nazývá diskretizovaná konjunkce.

Je zřejmé, že zobrazení vyjadřuje konjunkci, okrajové podmínky a monotónnost zaručuje konjunkce C . Pokud je konjunkce C komutativní, pak je komutativní i diskretizovaná konjunkce $C_{k,l}^m$ z ní odvozena. Asociativita konjunkce C nezaručí asociativitu příslušné diskretizované konjunkce $C_{k,l}^m$, tudíž takto skonstruována konjunkce nemusí mít nutně vlastnosti t-norem.

Konstrukce diskretizované disjunkce je dána rovností na základě duality konjunkce a disjunkce.

Tvrzení 2. [3] Necht $C : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ a $D : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ jsou duální konjunkce a disjunkce, které jsou spojité, $k \in \{5, 6, 7, 8, 9\}$, $l \in \{5, 6, 7, 8, 9\}$ a $m = k \cdot l$. Potom je duální

diskretizovaná disjunkce k $C_{k,l}^m$ zobrazení $D_{k,l}^m : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ takové, že

$$D_{k,l}^m(x, y) = \frac{\lfloor m \cdot D\left(\frac{k-k \cdot x}{k}, \frac{l-l \cdot y}{l}\right) \rfloor}{m}. \quad (4.2)$$

Poznámka 16. [3] Podobně, jako konjunkce C a disjunkce D jsou vzájemně duálními operacemi, i jejich diskretizované varianty budou proti sobě dodržovat vlastnost duality. Tudiž pokud platí $D(x, y) = 1 - C(1 - x, 1 - y)$, pak bude platit i $D_{k,l}^m(x, y) = 1 - C_{k,l}^m(1 - x, 1 - y)$.

Pro libovolná $k \in \mathbb{N}$ a $t \in [0, 1]$, platí $\lceil k - k \cdot t \rceil = k - \lfloor k \cdot t \rfloor$ a $k - \lfloor k \cdot t \rfloor = \lceil k - k \cdot t \rceil$. Na základě těchto dvou faktů lze pak jednoznačně dokázat:

$$\begin{aligned} D_{k,l}^m(x, y) &= 1 - \frac{\lfloor m \cdot C\left(\frac{\lceil k-k \cdot x \rceil}{k}, \frac{\lceil l-l \cdot y \rceil}{l}\right) \rfloor}{m} = \\ &= \frac{\lfloor m - m \cdot C\left(1 - \frac{\lfloor k \cdot x \rfloor}{k}, 1 - \frac{\lfloor l \cdot y \rfloor}{l}\right) \rfloor}{m} = \frac{\lfloor m \cdot D\left(\frac{\lfloor k \cdot x \rfloor}{k}, \frac{\lfloor l \cdot y \rfloor}{l}\right) \rfloor}{m}. \end{aligned}$$

Na ilustraci uvádíme příklad výpočtu jedné hodnoty diskretizované konjunkce.

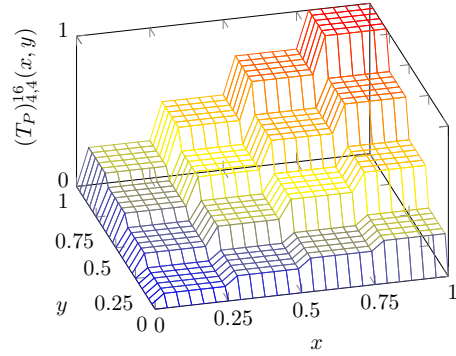
Příklad 18. Nechť C je součinnová t -norma T_P a koeficienty jsou: $k = 4$, $l = 4$, $m = k \cdot l$, potom

$$(T_P)_{4,4}^{16}\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = \frac{\lfloor 16 \cdot T_P\left(\frac{\lceil 4 \cdot \frac{1}{3} \rceil}{4}, \frac{\lceil 4 \cdot \frac{2}{3} \rceil}{4}\right) \rfloor}{16} = \frac{\lfloor 16 \cdot T_P\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right) \rfloor}{16} = \frac{\lfloor 16 \cdot \frac{3}{8} \rfloor}{16} = \frac{3}{8}.$$

Po ukázce výpočtu následuje diskretizovaná konjunkce a disjunkce odvozené postupně z T_P, S_P a T_M, T_L , pro lepší názornost uvádíme grafickou a tabulkovou interpretaci.

| $y \setminus x$ | 0 | $]0, \frac{1}{4}]$ | $] \frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ | $] \frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ | $] \frac{3}{4}, 1]$ |
|-------------------------------|---|--------------------|-------------------------------|-------------------------------|---------------------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $]0, \frac{1}{4}]$ | 0 | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{3}{16}$ | $\frac{1}{4}$ |
| $] \frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ | 0 | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{1}{2}$ |
| $] \frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ | 0 | $\frac{3}{16}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{9}{16}$ | $\frac{3}{4}$ |
| $] \frac{3}{4}, 1]$ | 0 | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{4}$ | 1 |

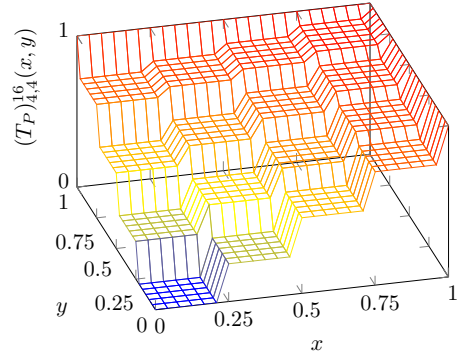
Tabulka 4.1: Diskretizovaná konjunkce $(T_P)_{4,4}^{16}(x, y)$



Obrázek 4.1: $(T_P)_{4,4}^{16}(x, y)$

| | | | | | |
|------------------------------|--------------------|------------------------------|------------------------------|--------------------|---|
| $y \setminus x$ | $[0, \frac{1}{4}[$ | $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}[$ | $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}[$ | $[\frac{3}{4}, 1[$ | 1 |
| $[0, \frac{1}{4}[$ | 0 | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{4}$ | 1 |
| $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}[$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{7}{16}$ | $\frac{5}{8}$ | $\frac{13}{16}$ | 1 |
| $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}[$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{5}{8}$ | $\frac{3}{4}$ | $\frac{7}{8}$ | 1 |
| $[\frac{3}{4}, 1[$ | $\frac{3}{4}$ | $\frac{13}{16}$ | $\frac{7}{8}$ | $\frac{15}{16}$ | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

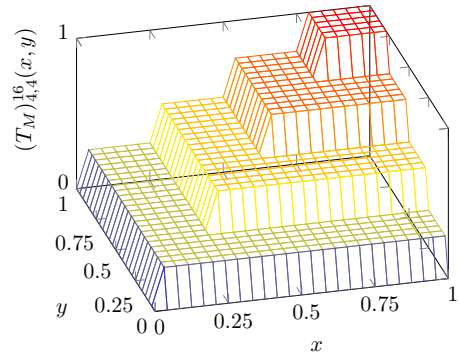
Tabulka 4.2: Diskretizovaná disjunkce $(S_P)_{6,6}^{36}(x, y)$



Obrázek 4.2: $(S_P)_{4,4}^{16}(x, y)$

| | | | | | |
|------------------------------|---|--------------------|------------------------------|------------------------------|--------------------|
| $y \setminus x$ | 0 | $]0, \frac{1}{4}]$ | $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ | $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ | $[\frac{3}{4}, 1]$ |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $]0, \frac{1}{4}]$ | 0 | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ |
| $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ | 0 | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ | 0 | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{4}$ | $\frac{3}{4}$ |
| $[\frac{3}{4}, 1]$ | 0 | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{4}$ | 1 |

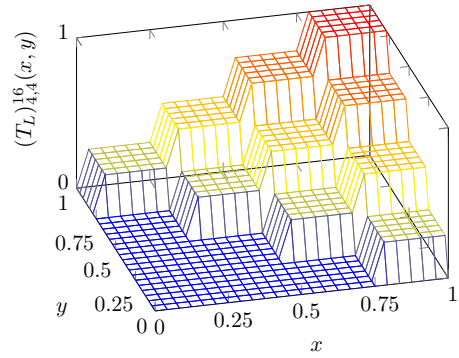
Tabulka 4.3: Diskretizovaná konjunkce $(T_M)_{4,4}^{16}(x, y)$



Obrázek 4.3: $(T_M)_{4,4}^{16}(x, y)$

| | | | | | |
|------------------------------|---|--------------------|------------------------------|------------------------------|--------------------|
| $y \setminus x$ | 0 | $]0, \frac{1}{4}]$ | $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ | $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ | $[\frac{3}{4}, 1]$ |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $]0, \frac{1}{4}]$ | 0 | 0 | 0 | 0 | $\frac{1}{4}$ |
| $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ | 0 | 0 | 0 | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ |
| $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ | 0 | 0 | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{4}$ |
| $[\frac{3}{4}, 1]$ | 0 | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{4}$ | 1 |

Tabulka 4.4: Diskretizovaná konjunkce $(T_L)_{4,4}^{16}(x, y)$



Obrázek 4.4: $(T_L)_{4,4}^{16}(x, y)$

Poznámka 17. Z faktů, že funkce $[x]$ je spojitá zleva a $\lfloor x \rfloor$ je spojitá zprava, lze usoudit, že konjunkce v předchozím příkladě je spojitá zleva, co zobecňuje následující tvrzení.

Tvrzení 3. [3] Nechť $C : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ je spojitá konjunkce, pak diskretizovaná konjunkce $C_{k,l}^m$ je spojitá zleva a diskretizovaná disjunkce $D_{k,l}^m$ je spojitá zprava.

Poznámka 18. Nechť $C : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ je konjunkce a $D : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ je disjunkce. Z nerovnosti $x \leq \frac{\lceil k \cdot x \rceil}{k}$ a monotónnosti konjunkce plyne

$$C \leq C_{k,l}^m,$$

z duální nerovnosti $x \geq \frac{\lfloor k \cdot x \rfloor}{k}$ a monotónnosti disjunkce vyplývá

$$D \geq D_{k,l}^m.$$

Podobně, jako ve spojitém případě, lze vyjádřit diskretizovanou variantu agregačního deficitu R_D . Diskretizovanou variantu agregačního deficitu označíme jako R_D^* . Potom

$$R_D^*(x, y) = \inf \left\{ z \in [0, 1]; \left[m \cdot D \left(\frac{\lfloor k \cdot z \rfloor}{k}, \frac{\lfloor l \cdot x \rfloor}{l} \right) \right] \geq m \cdot y \right\}.$$

Vzhledem k monotónnosti disjunkce lze uvedený předpis vyjádřit bez použití infima následovně:

Tvrzení 4. [3] *Nechť $D : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ je spojitá disjunkce a $D_{k,l}^m$ je diskretizovaná disjunkce. Dále necht $R_D : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ a $R_D^* : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ jsou agregační deficity založené postupně na D a $D_{k,l}^m$. Pak platí následující rovnost:*

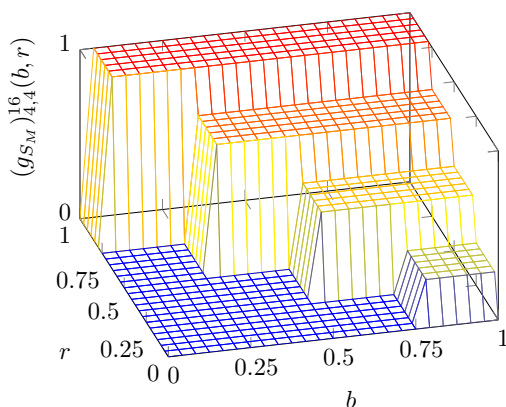
$$R_D^*(x, y) = \frac{\lceil k \cdot R_D \left(\frac{\lfloor l \cdot x \rfloor}{l}, \frac{\lfloor m \cdot y \rfloor}{m} \right) \rceil}{k}. \quad (4.3)$$

Analogicky se provede diskretizace funkce g_D , která slouží k odhadu modu ponens. Její diskretizovanou variantu označíme jako g_D^* a její konstrukci popisuje následující tvrzení.

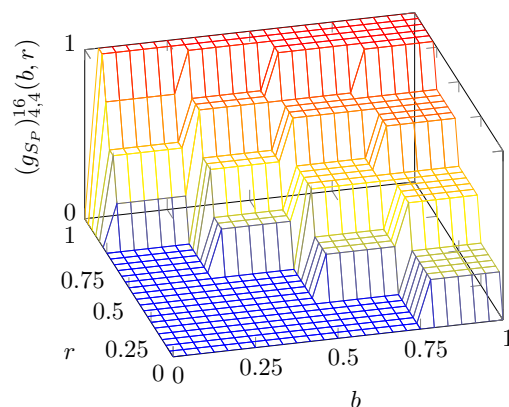
Tvrzení 5. [3] *Nechť $g_D : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ a $g_D^* : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ jsou odhady modu ponens založené na komutativních disjunkcích D a $D_{k,l}^m$. Potom pro g_D^* platí následující rovnost:*

$$g_D^*(b, r) = \frac{\lceil k \cdot g_D \left(\frac{\lfloor k \cdot b \rfloor}{k}, \frac{\lfloor m \cdot r \rfloor}{m} \right) \rceil}{k}. \quad (4.4)$$

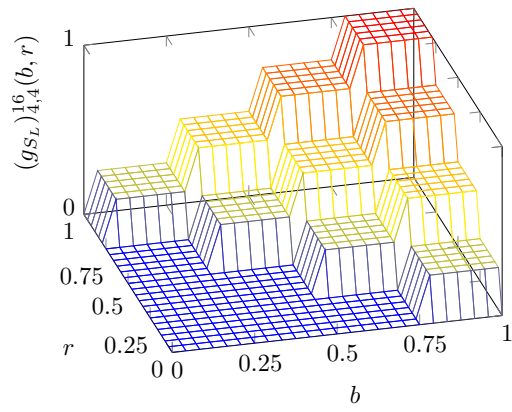
Na závěr si ukážeme grafy takto zkonstruovaných funkcí odhadu fuzzy modus ponens pro koeficienty $k = 4, l = 4, m = k \cdot l$.



Obrázek 4.5: $(g_{S_M}^*)_{4,4}^{16}(b, r)$



Obrázek 4.6: $(g_{S_P}^*)_{4,4}^{16}(b, r)$



Obrázek 4.7: $(g_{S_L}^*)_{4,4}^{16}(b, r)$

Kapitola 5

Modelování diskretizovaných funkcí na základě empirických dat

V rámci své bakalářské práce jsem se zabýval modelováním funkce g_D , v této kapitole jsem popsal, jak jsem experimentálně zkoumal, jak lidé vnímají závislost odvozování informace v běžné řeči. Data pro experiment byla sbírána formou dotazníku, který jsem rozšiřoval mezi studenty inženýrské fakulty, studenty maturitního ročníku gymnázia, ale i mezi osoby pracující v rozličných oborech. Respondenty jsem takto vybíral z důvodu, že lze očekávat, že osoby mimo obor informatiky budou závislosti mezi výroky vnímat odlišným způsobem.

Dotazníkem bylo získáno celkem 152 odpovědí.

Experiment byl prováděn nad pětici trojic výroků, kde se každá trojice skládá z předpokladu, následku a spojením předpokladu i následku pro vyjádření odvozovacího pravidla.

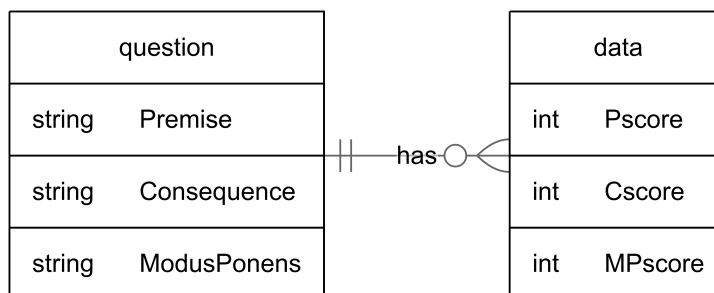
Zkoumány byly tyto skupiny výroků:

- Na obtížné testy se připravuji důsledně.
 - Z obtížných testů dostávám zpravidla pěknou známku.
 - Pokud se připravím na obtížný test, pak z něj dostanu pěknou známku.
- Jsem zodpovědný řidič.
 - Pokuty za řízení dostávám vzácně.
 - Jestliže jsem zodpovědný řidič, pak mi je udělena pokuta velice zřídka.
- Většinou chodím spát pozdě.
 - Dopoledne bývám často znavený.
 - Pokud jdu pozdě spát, pak jsem následující dopoledne unavený.
- Často chodím cvičit do posilovny.
 - Mám dobrou fyzickou kondici.
 - Protože pravidelně navštěvuji posilovnu, udržuji si dobrou fyzickou kondici.
- Bývám často ve stresu.
 - Koníčky jsou pro mě odpočinková aktivita.
 - Jestliže jsem pod tlakem, rád si odpočinu u nějakého svého koníčka.

5.1 Aplikace pro sběr dat

Dotazník byl zpracován formou jednoduché webové aplikace napsané v jazyce PHP¹. Získaná data byla ukládána za pomoci databázového systému MySQL.

Každý výrok v dotazníku byl ohodnocen celočíselnou hodnotou od 0 do 10, která je v rámci následného zpracování normována do intervalu $[0, 1]$. Předpoklad a následek nám slouží pro určení souřadnice, kam se v prostoru promítá naše odhadovaná hodnota výsledného tvrzení. Záznamy v databázi mají následující strukturu:



Obrázek 5.1: Diagram entit v databázi

5.2 Zpracování dat

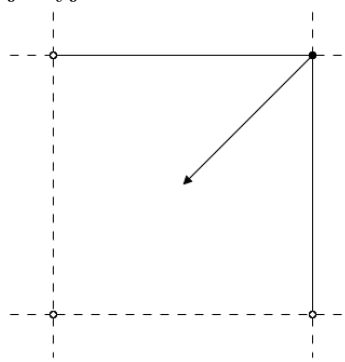
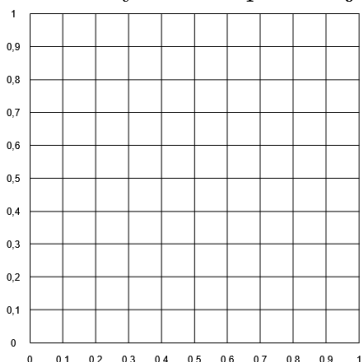
Zpracování dat je prováděno skriptem zpracovaným v jazyce Python. Z nestandardních knihoven skript využívá knihovnu NumPy a Matplotlib.

Hodnoty platnosti jednotlivých záznamů v databázi mají celočíselnou hodnotu 0 až 10, a proto je musíme pro normování do fuzzy prostoru vydělit deseti, čímž získáváme síť jednotlivých vážených bodů. Protože pro každý bod máme jiný počet získaných odpovědí, jsou tato získaná data agregována aritmetickým průměrem s tím, že každý bod má dále přiřazenou váhu na základě počtu získaných odpovědí v tomto uzlu.

5.2.1 Stavový prostor

Vyjádřit hodnotu jednotlivých ploch podintervalů lze více způsoby. Pro ilustraci v následujících podkapitolách si zavedeme pomocné proměnné a, b , kde $a, b \in \mathbb{N} \wedge a, b \leq 10$, pomocí kterých budeme označovat souřadnice uzlových bodů stavového prostoru.

Získané hodnoty se nám promítají do plochy, která je vyjádřena obrázkem 5.2.



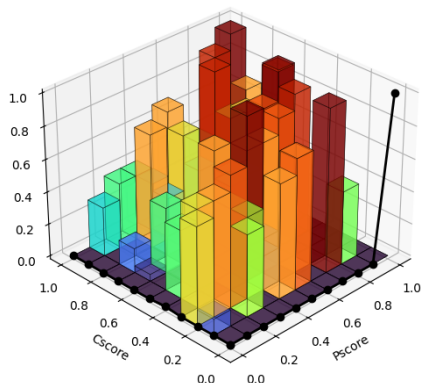
Obrázek 5.2: Půdorys stavového prostoru

Obrázek 5.3: Plocha podintervalů dle C^*

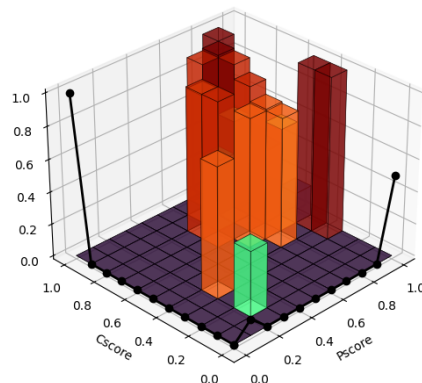
¹Dotazník je dostupný pod odkazem: [Dotazník – Fuzzy Modus Ponens](#)

Pokud se pro konstrukci fuzzy modus ponens budeme držet dělení na podintervaly dle definice diskretizované konjunkce (20), vznikne izolovaná, spojitá přímka po obvodu prostoru pro každý uzel, kde pro jeho souřadnice platí, že $x = 0$ nebo $y = 0$. Díky promítnutí podintervalů, které neobsahují své infimum, a faktu, že námi získané hodnoty již jsou diskretizovány, lze usoudit, že do celé plochy $] \frac{a-1}{10}, \frac{a}{10}] \times] \frac{b-1}{10}, \frac{b}{10}]$ se nám promítne vážená hodnota bodu $(\frac{a}{10}, \frac{b}{10})$. Toto je znázorněno na obrázku 5.3.

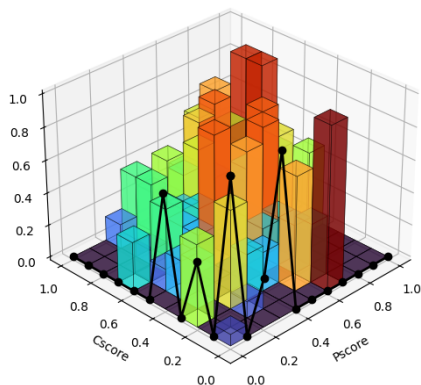
Agregované hodnoty získaných dat pomocí diskretizované konjunkce pak pro jednotlivé sady výroků vypadají následovně:



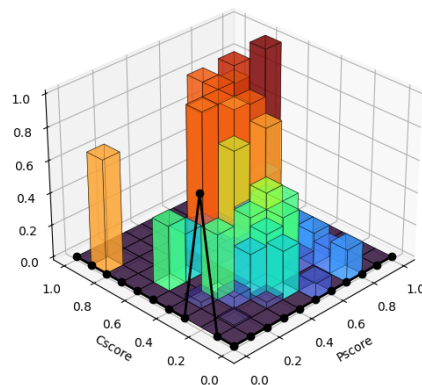
Obrázek 5.4: Agregované hodnoty první sady výroků jako $C_{10,10}^{100}$



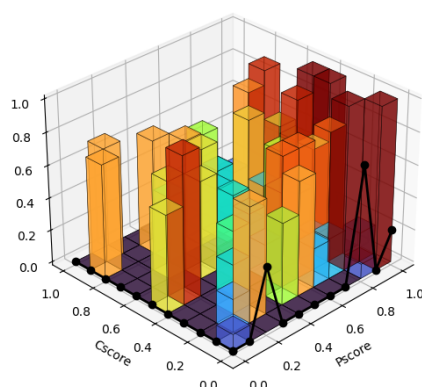
Obrázek 5.5: Agregované hodnoty druhé sady výroků jako $C_{10,10}^{100}$



Obrázek 5.6: Agregované hodnoty třetí sady výroků jako $C_{10,10}^{100}$



Obrázek 5.7: Agregované hodnoty čtvrté sady výroků jako $C_{10,10}^{100}$

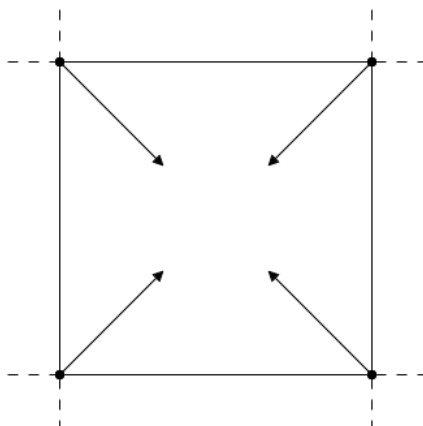


Obrázek 5.8: Agregované hodnoty páté sady výroků jako $C_{10,10}^{100}$

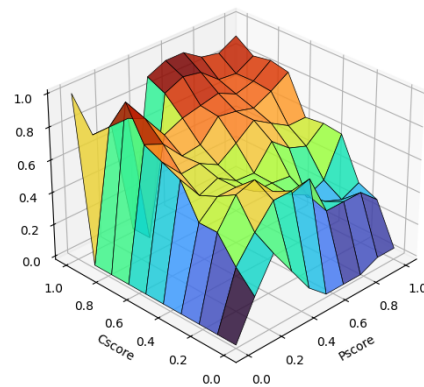
Pro druhou a čtvrtou sadu výroků jsou agregované hodnoty poměrně monotónní, ale v ostatních případech se ukazují empirická data jako příliš zašuměná a chaotická, aby se v nich tímto způsobem daly hledat souvislosti.

Jiným způsobem je rozdělit prostor na podplochy o totožných rozměrech s tím, že budeme považovat všechny vrcholy tohoto čtverce za stejně důležité pro získání plochy mezi nimi proložené. V tomto případě tedy agregujeme hodnotu mezi čtyřmi uzlovými body plochy $\left[\frac{a-1}{10}, \frac{a}{10}\right] \times \left[\frac{b-1}{10}, \frac{b}{10}\right]$. Hodnota plochy je výsledně určena průměrnou hodnotou každého uzlu čtveřice se zohledněním jeho kumulované váhy. To je znázorněno obrázkem 5.9.

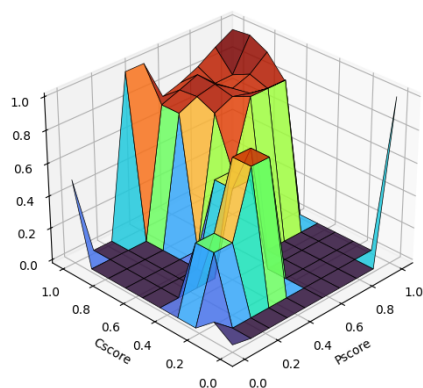
Grafy získané tímto novým pohledem do shlukování vážených bodů do čtveřic pak můžeme vidět na obrázcích 5.10, 5.11, 5.12, 5.13 a 5.14



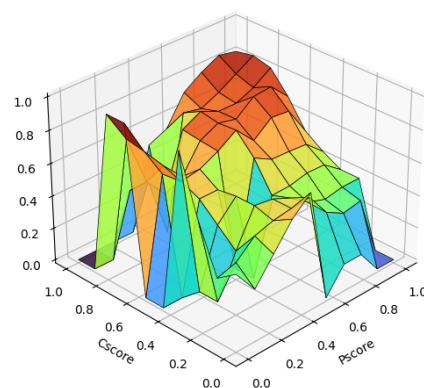
Obrázek 5.9: Plocha podintervalů určená řezem



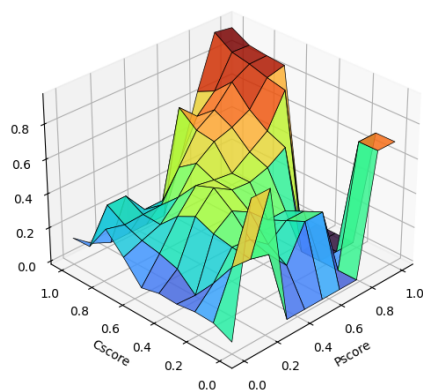
Obrázek 5.10: Agregované hodnoty první sady výroků jako řezy prostoru



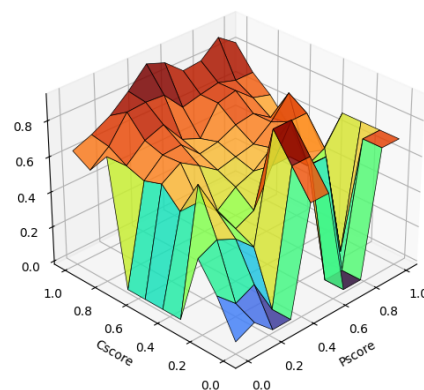
Obrázek 5.11: Agregované hodnoty druhé sady výroků jako řezy prostoru



Obrázek 5.12: Agregované hodnoty třetí sady výroků jako řezy prostoru



Obrázek 5.13: Agregované hodnoty čtvrté sady výroků jako řezy prostoru



Obrázek 5.14: Agregované hodnoty páté sady výroků jako řezy prostoru

U grafů sestrojených nad čtveřicemi můžeme vidět hladší přechody mezi uzly a grafy vypadají méně zašuměné. Ovšem principy diskretizovaných spojek ještě uijeme v nadcházejících částech.

Samozřejmě možností agregace blízkých bodů je obrovské množství. Byla by možnost vytvářet shluky nad hvězdnicovou podobou okolí, kde by se středovému bodu mohla dát vyšší váha (např. $\frac{1}{2}$) a čtyři okolní body by se podělily rovnoměrně o zbývající podíl váhy do 1, což by každému ze sousedních čtyř bodů dalo váhu $\frac{1}{8}$.

5.2.2 Zpracování empirických dat

Prvotním způsobem zpracování dat bylo uvažovat hodnoty platnosti předpokladu (Pscore) a následku (Cscore) za souřadnice a zprůměrovanou hodnotu výroku modus ponens (MPscore) přímo za námi hledanou pravdivostní hodnotou. Tomuto zpracování odpovídají předešlé grafy agregovaných hodnot do čtveřic.

Dalším způsobem zpracování dat je za pomoci vzorců uvedených v předešlé kapitole 4. Bylo však nutné lehce upravit sémantiku zápisu (5). Původní diskretizované spojky jsou

funkce, které transformují pouze dva vstupy. Data získaná dotazníkem jsou však trojice, jejichž prvky si označíme:

| | |
|-----|----------------------------------|
| x | pravdivostní hodnota předpokladu |
| y | pravdivostní hodnota následku |
| z | platnost odvozovacího pravidla |

Pro empirická data bylo tedy třeba vytvořit novou funkci konstruující g_D , ta svou podstatou vychází z předpisu dříve definované diskretizované konjunkce [20](#), která je modelována implikací, konstruovanou diskretizovanou disjunkcí. Předpis této funkce vypadá následovně:

$$C_{I_D^*}(x, y, z) = \frac{\left[k \cdot C_{I_D} \left(\frac{[l \cdot C(x, z)]}{l}, \frac{[m \cdot y]}{m} \right) \right]}{k}. \quad (5.1)$$

Tímto předpisem vyjadřujeme význam původního pravidla modus ponens, pro správné použití s empirickými daty, jelikož teoretické vzorce určovaly hodnoty pouze v závislosti na hodnotách předpokladu x a následku y , a empirická data obsahují i vyjádření platnosti vztahu mezi x, y a jeho skutečný vliv na platnost celého tvrzení, které vyplývá z platností výroků x, y . Tuto složku označujeme jako z . Jednoduché vyjádření souvislosti výrokovou formulí je následovné:

$$\forall x, y, z \in [0, 1] : (x \wedge z) \Rightarrow y.$$

Nad empirickými daty jsem experimentálně ověřoval vlastnosti funkcí, které vznikají kombinací tříd implikací, tedy (S, N) –implikace a reziduální implikace se spojitými triangulárními normami. Zjistil jsem, že (S, N) –implikace jsou méně restriktivní na sílu použité t –normy než reziduální implikace.

5.2.3 Zpracovaná data

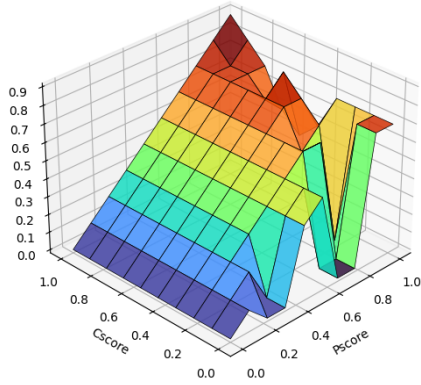
Pro ilustraci se v této kapitole budeme podrobně věnovat vyhodnocení dat nad pátou sadou výroků, jejíž získané hodnoty porovnáme s odpovídajícími již zavedenými funkcemi pro modelování fuzzy logických spojek a pravidel.

Vyhodnocení je provedeno následujícím způsobem. Empirická data agregujeme na řezy prostoru za užití metody čtveřic sousedních vážených bodů [5.9](#). Nad takto získanou maticí vážených bodů je zkonstruována empirická funkce $C_{I_D^*}$, dle [5.1](#). Tuto funkci lze obecně vytvořit kombinací různých t –norm a fuzzy implikací. Uvedeme si tedy postupně příklady empiricky vytvořené konjunkce a implikace, které dále srovnáme s jejich odpovídajícími funkcemi, již zavedenými pro modelování těchto logických spojek.

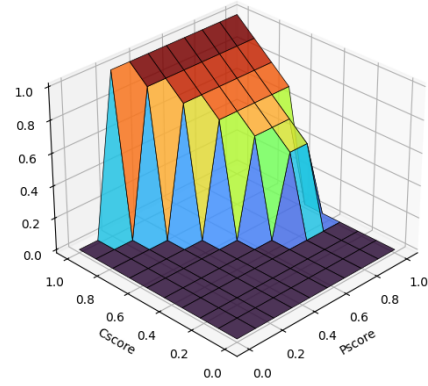
Jak již bylo zmíněno, vyhodnocení si ukážeme pro pátou sadu, tedy pro následující skupinu výroků:

- a) Bývám často ve stresu.
- b) Koníčky jsou pro mě odpočinková aktivita.
- c) Jestliže jsem pod tlakem, rád si odpočinu u nějakého svého koníčka.

Jako první ukázkou si ukážeme grafy diskretizovaných funkcí T_M^* a $C_{I_{S_M}}^*$, konstruovanými nad empirickými daty.



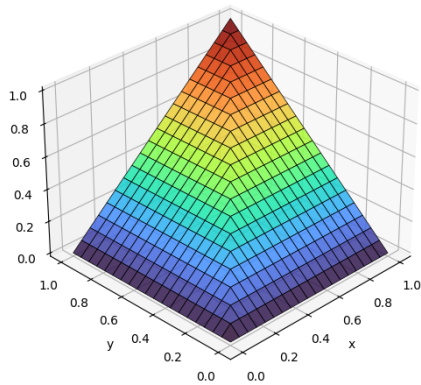
Obrázek 5.15: T_M^* mezi a) a c)



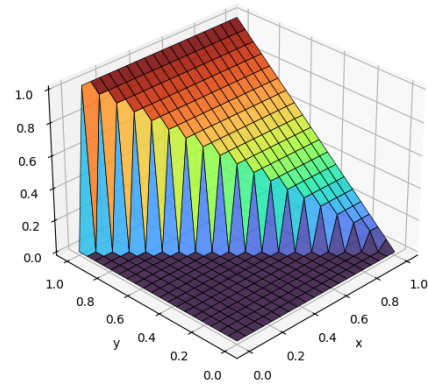
Obrázek 5.16: $C_{I_{S_M}}^*$ vytvořená pomocí empirických dat

Poznámka 19. U obrázků 5.15, 5.19 a 5.23 je nutné si uvědomit, že se v tomto zpracování nejedná o konjunkce v pravém slova smyslu, spíše o sadu n funkcí, kde každá z nich přiřazuje váhu důležitosti výroku x pro platnost výsledného y , což je vyjádřeno pomocí výroku z . Za konjunkci lze tuto funkci považovat až při jejím spojení v kontextu s výrokiem y , toto už lze vidět v grafu 5.16 pro jeden z modelů odhadu modus ponens.

Grafy diskretizovaných funkcí (obrázky 5.15 a 5.16) můžeme porovnat s grafy spojitých známých funkcí T_M a g_{S_M} :

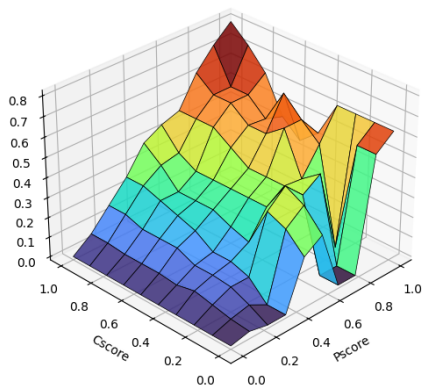


Obrázek 5.17: Minimová t -norma

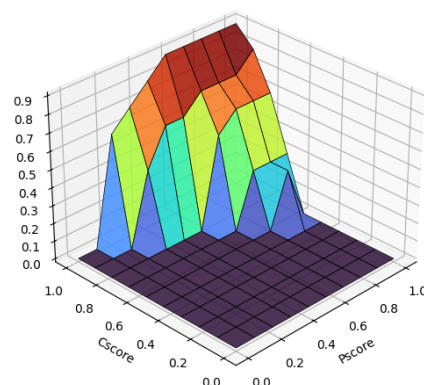


Obrázek 5.18: Odhad modus ponens na základě g_{S_M}

Další diskretizované funkce, T_P^* a $C_{I_{S_P}^*}$, konstruované nad empirickými daty založené na T_P a S_P , vidíme na následujících obrázcích:

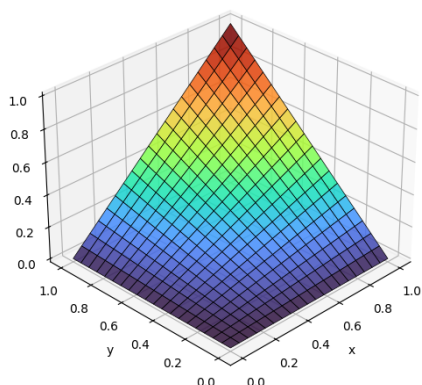


Obrázek 5.19: T_P^* mezi a) a c)

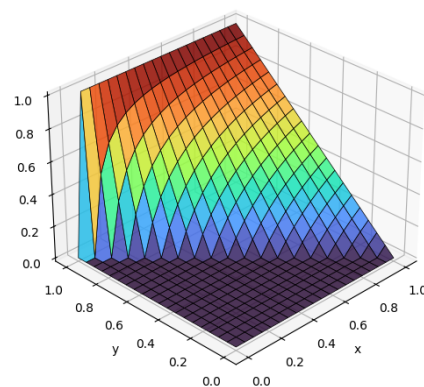


Obrázek 5.20: $C_{I_{S_P}^*}$ vytvořená pomocí empirických dat

A opět pro srovnání uvádíme grafy součinnové t -normy a funkci g_{S_P} :

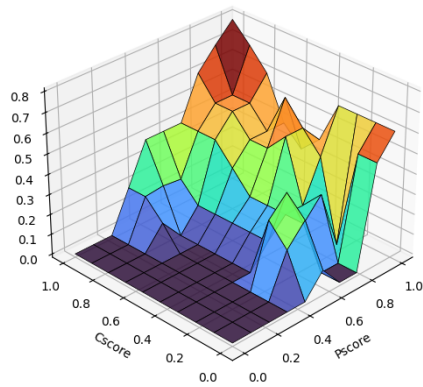


Obrázek 5.21: Součinnová t -norma

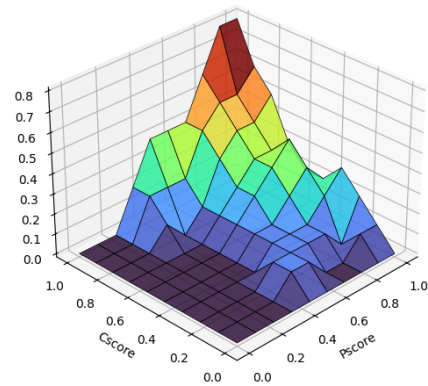


Obrázek 5.22: Odhad modus pons na základě g_{S_P}

Na závěr ukážeme možnost kombinovat R -implikace a t -normy pro diskretizované spojky nad empirickými daty a na porovnání také pro spojitě fuzzy spojky pravidla. Začneme s Łukasiewiczovou t -normou a na ní založenou R -implikaci, která je identická s I_L implikaci, známou jako Łukasiewiczova implikace. Příslušné diskretizované spojky jsou na obrázcích 5.23 a 5.24.

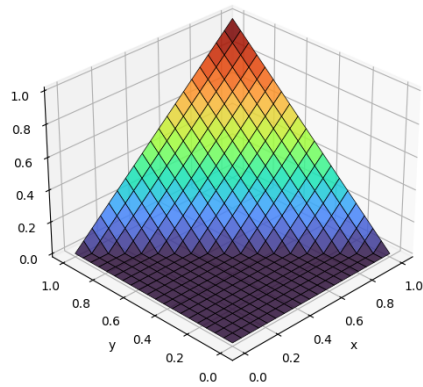


Obrázek 5.23: T_L^* mezi a) a c)

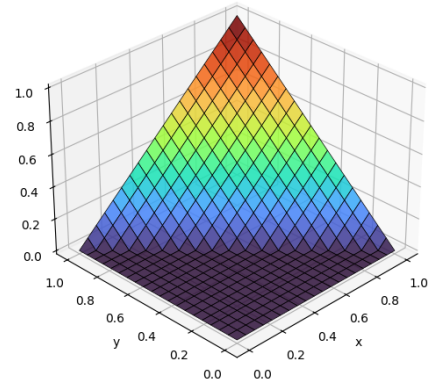


Obrázek 5.24: $C_{I_L}^*$ vytvořená pomocí empirických dat

Opět lze průběhy diskretizovaných funkcí porovnat s grafy příslušných spojitéch funkcí:



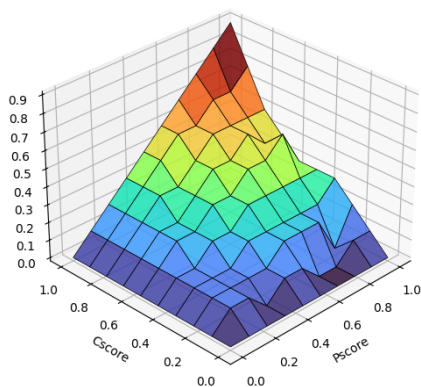
Obrázek 5.25: Łukasiewiczova t -norma



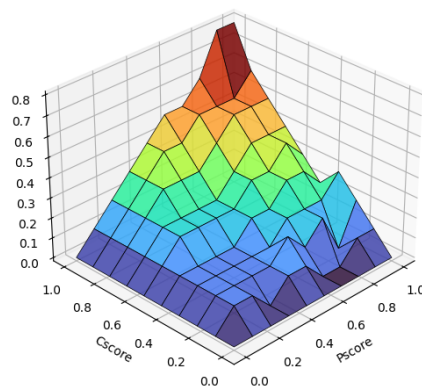
Obrázek 5.26: Odhad modus ponens na základě g_{S_L}

Poznámka 20. Lze si všimnout, že grafy 5.25 a 5.26 jsou totožné. Tato vlastnost je způsobena nilpotencí (8) Łukasiewiczovy t -normy. Podobná záležitost probíhala u implikací, kde jsme zjistili, že Łukasiewiczovu implikaci lze klasifikovat jako (S, N) -implikaci, ale i jako R -implikaci. Totožné grafy jsou dále i s funkcemi $f_{R_{S_L}}$ a C_{I_L} .

A ještě si ukážeme grafy diskretizovaných funkcí, které jsou založené na Goguenově implikaci a postupně na minimové a součinnové t -normě.



Obrázek 5.27: $C_{I_{TM}^*}$ vytvořená pomocí empirických dat



Obrázek 5.28: $C_{I_{TP}^*}$ vytvořená pomocí empirických dat

Po převedení získaných dat vzorcem pro odhad fuzzy pravidla modus ponens si můžeme všimnout, že hodnoty jsou oproti zavedeným, spojitým funkcím občasné staženy k nule v hodnotách souřadnic od přibližně 0.6. Ale obecně vzato, funkce vypadají velice podobně svým příslušným spojitým funkcím. Lze tedy usoudit, že usuzovací pravidlo modus ponens si v lidské řeči obecně vykládáme korektním způsobem.

Ostatní sady výroků se všemi kombinacemi fuzzy logických spojek jsou zpracovány v přílohách práce **B**, **C**, **D**, **E** a **F**, včetně páté sady výroků.

5.3 Zobecnění funkce g_D

Dříve jsme uvedli předpis pro výpočet odhadu hodnoty fuzzy modus ponens jako:

$$g_D(b, r) = R_D(1 - b, r).$$

Tento předpis odpovídá zápisu

$$g_D(b, r) = R_D(N_S(b), r).$$

Pokud standardní fuzzy negaci nahradíme za negaci obecnou, lze pak zobecnit předpis pro g_D následovně:

$$g_{D,N}(b, r) = R_D(N(b), r).$$

V poslední části práce si ukážeme vliv negací s různými vlastnostmi na průběhy odhadovaných funkcí g_D , které budou dále srovnatelné i s odhady vytvořenými na empirických datech v přílohách práce.

5.3.1 Použití silných fuzzy negací

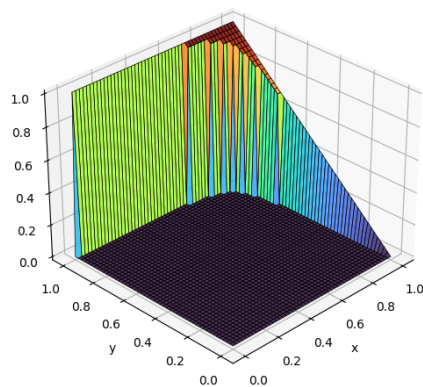
Jako alternativy standardní negace, které jsou taktéž silné, lze použít např. parametrické třídy fuzzy negací, konkrétně fuzzy negace Yagerovy nebo Sugenyovy třídy.

U obou tříd jsou hodnoty parametru n omezené tak, aby funkce nabývala hodnoty z intervalu $[0, 1]$ a byla definována. Budeme testovat hodnoty parametru n v hodnotě blízké

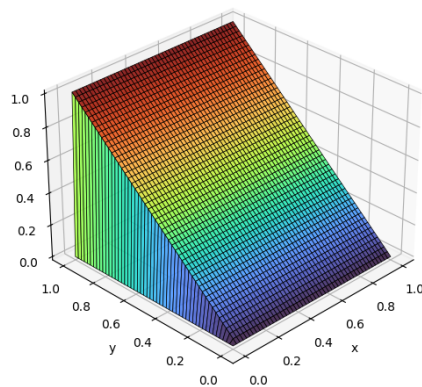
těchto hranic a dále v běžných hodnotách nějakého standardního rozpětí hodnot. Připomínáme, že pro Sugenuvu třídu dostaneme pro $n = 0$ standardní negaci N_S a pro Yagerovu třídu dostaneme standardní negaci pro $n = 1$.

a) Modus ponens pro hraniční hodnoty parametrů n :

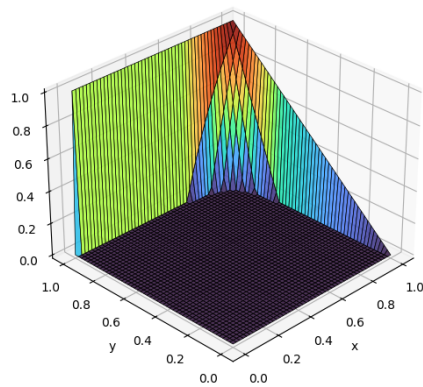
Hraničními hodnotami myslíme hodnotu parametru n takovou, která se blíží hraniční hodnotě, pro kterou je parametrizovaná fuzzy negace ještě definována. Pro Sugenuvu třídu zvolíme hodnotu parametru $n = -0.99$ a pro Yagerovu třídu volíme $n = 0.01$.



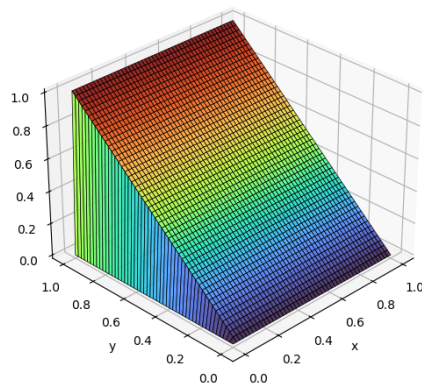
Obrázek 5.29: Zobecnění g_{S_M} s $N_{S_u}(x, -0.99)$



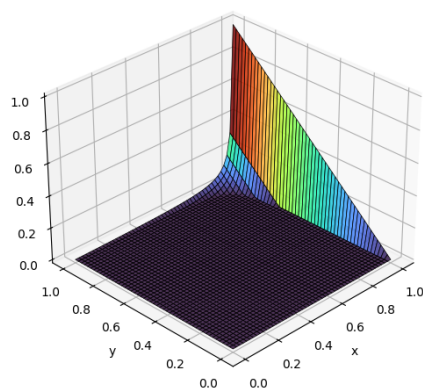
Obrázek 5.30: Zobecnění g_{S_M} s $N_Y(x, 0.01)$



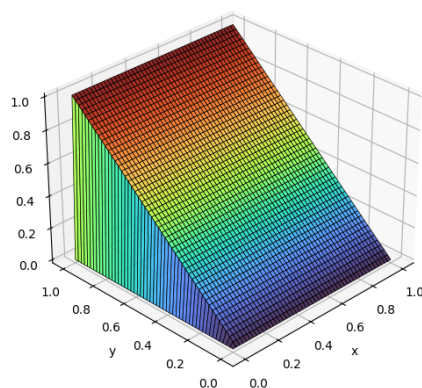
Obrázek 5.31: Zobecnění g_{S_P} s $N_{S_u}(x, -0.99)$



Obrázek 5.32: Zobecnění g_{S_P} s $N_Y(x, 0.01)$



Obrázek 5.33: Zobecnění g_{S_L} s $N_{S_u}(x, -0.99)$

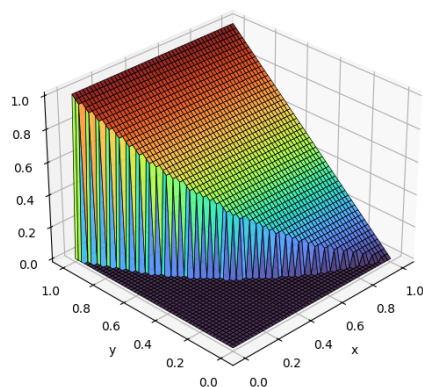


Obrázek 5.34: Zobecnění g_{S_L} s $N_Y(x, 0.01)$

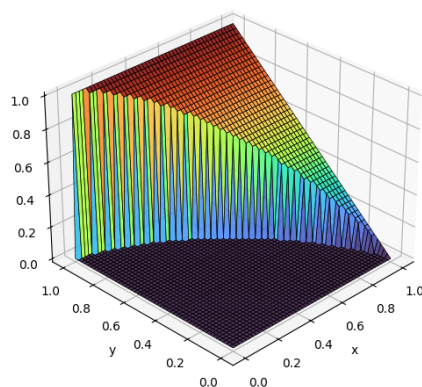
Lze pozorovat to, že pro extrémní hodnoty jsou křivky příliš deformovány oproti křivce, která vznikla pomocí standardní negace. Rozebereme si podrobněji dynamiku obou parametrických tříd. Pro Yagerovu třídu se začíná znatelně měnit průběh až pro hodnoty $n > 0.2$, do té doby funkce vypadá spíše jako lineární závislost na hodnotě y . Průběh negací ze Sugenyovy třídy je konkávní pro $n \in]-1, 0]$ a konvexní pro $n \in [0, \infty[$. Pro Yagerovu třídu platí, že negace jsou konkávní pro $n \in [1, \infty[$ a konvexní pro $n \in]0, 1]$.

b) Modus ponens pro $n = 1.5$:

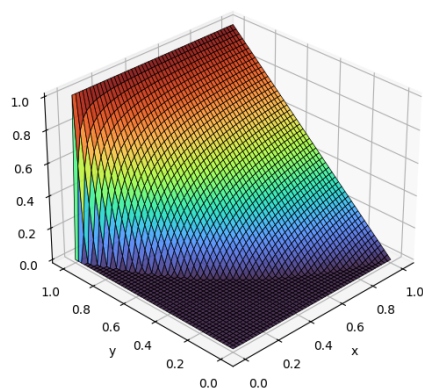
Pro hodnotu parametru $n = 1.5$ je možné lépe srovnávat průběhy zobecněných funkcí. Lze pozorovat jistou dualitu mezi těmito dvěma zvolenými třídami fuzzy negací. Pro hodnoty na ose x lze pozorovat zakřivení odpovídající průběhu zvolené fuzzy negace.



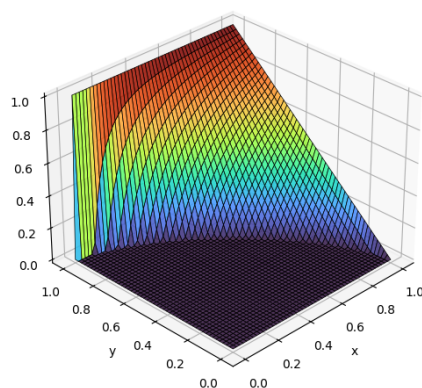
Obrázek 5.35: Zobecnění g_{S_M} s $N_{S_u}(x, 1.5)$



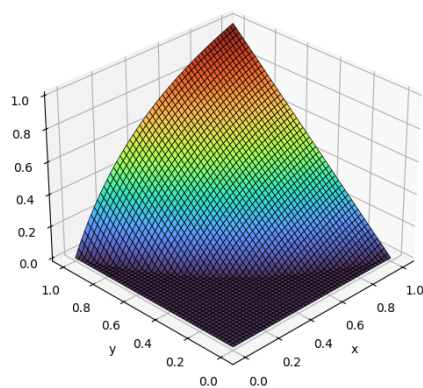
Obrázek 5.36: Zobecnění g_{S_M} s $N_Y(x, 1.5)$



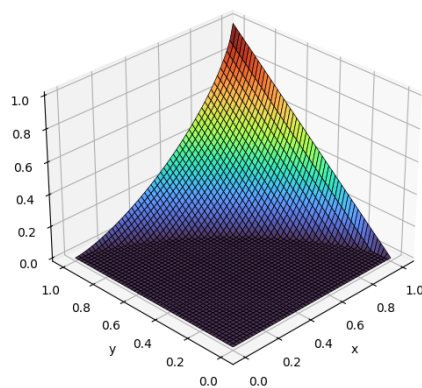
Obrázek 5.37: Zobecnění g_{S_P} s $N_{S_u}(x, 1.5)$



Obrázek 5.38: Zobecnění g_{S_P} s $N_Y(x, 1.5)$



Obrázek 5.39: Zobecnění g_{S_L} s $N_{S_u}(x, 1.5)$

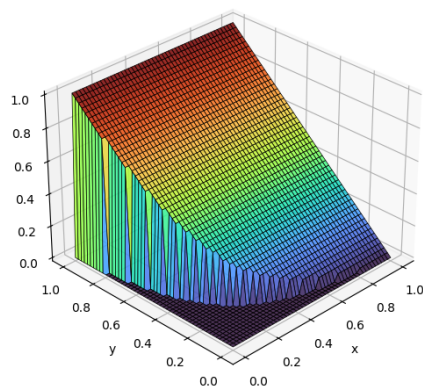


Obrázek 5.40: Zobecnění g_{S_L} s $N_Y(x, 1.5)$

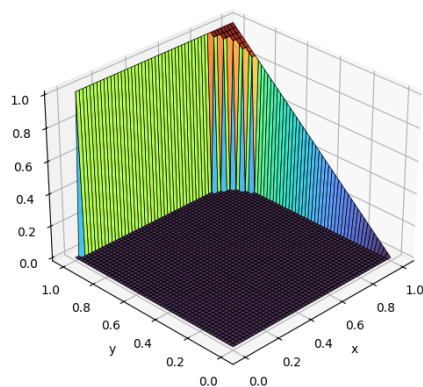
c) Modus ponens pro $n = 10$:

Pro vyšší hodnoty n lze pozorovat podobný průběh Yagerovy třídy se Sugenovou třídou pro hodnotu parametru blízkou spodní hranici přijatelných hodnot parametru n . Za vyšší hodnotu parametru lze považovat již hodnotu $n = 10$. Pro vyšší hodnoty se průběh těchto funkcí zásadně nemění.

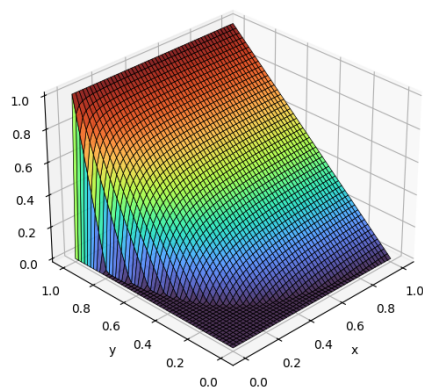
Pro $n > 10$ se bude zobecněná funkce g_D založená na Yagerově negaci limitně blížit spodní hranici prostoru krychle. Bude se tedy limitně přibližovat průběhu drastického součinu. Průběh funkce založená na Sugenově negaci se bude přibližovat lineární závislosti na hodnotě druhé sořadnice. Tedy se limitně blíží k rovině $z = y$. Jedná se o duální záměnu průběhů vůči grafům v kapitole věnující se použití hraničních hodnot parametru n v části **a**).



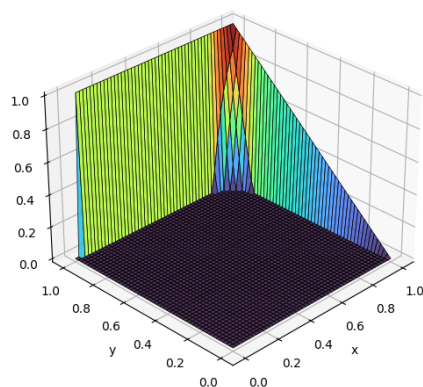
Obrázek 5.41: Zobecnění g_{SM} s $N_{Su}(x, 10)$



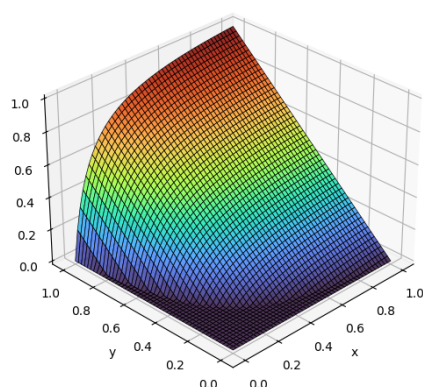
Obrázek 5.42: Zobecnění g_{SM} s $N_Y(x, 10)$



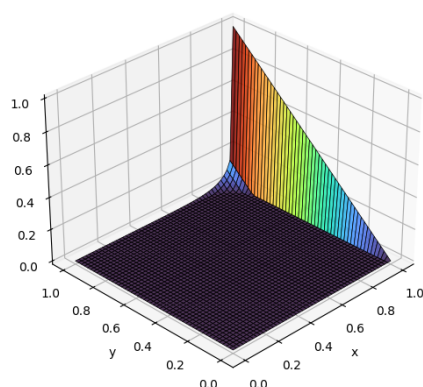
Obrázek 5.43: Zobecnění g_{SP} s $N_{Su}(x, 10)$



Obrázek 5.44: Zobecnění g_{SP} s $N_Y(x, 10)$



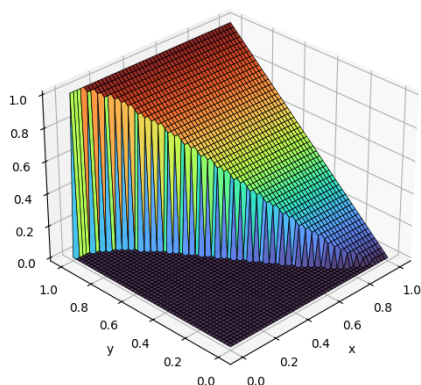
Obrázek 5.45: Zobecnění g_{SL} s $N_{Su}(x, 10)$



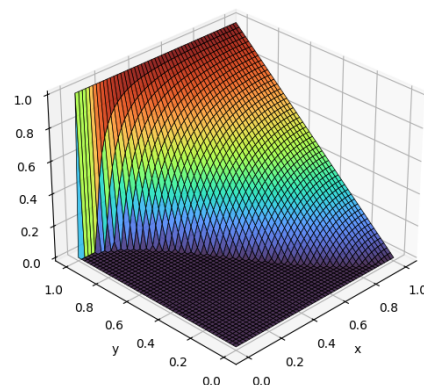
Obrázek 5.46: Zobecnění g_{SL} s $N_Y(x, 10)$

5.3.2 Použití striktní fuzzy negace

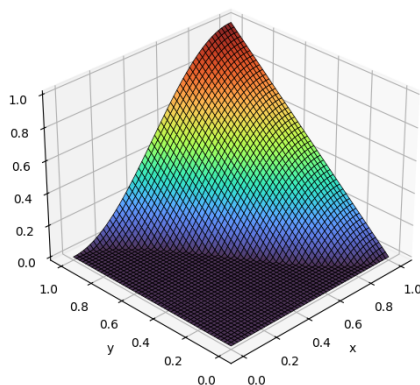
V tomto případě aplikujeme negaci, která nesplňuje vlastnost involuce, tudíž není silná. Jako příklad takové negace můžeme použít například funkci $N_{\cos}(x) = \cos^2\left(\frac{\pi \cdot x}{2}\right)$. Oproti předešlé podkapitole se nejedná o parametrickou třídu negací, proto zde nebudeme řešit parametrizaci a tudíž náš úsudek bude tvořen pouze pomocí tří vzorků odvíjejících se od použití t -konormy.



Obrázek 5.47: Zobecnění g_{S_M} s $N_{\cos}(x)$



Obrázek 5.48: Zobecnění g_{S_P} s $N_{\cos}(x)$



Obrázek 5.49: Zobecnění g_{S_L} s $N_{\cos}(x)$

Lze si všimnout, že chybějící vlastnost involuce má vliv na průběh funkce g_{S_D} , který lze vidět na přiložených obrázcích. Pokud pro určitá $x, y \in]0, 1[$ platí, že $g_D(x, y) > 0$, pak z toho ještě nutně neplyne platnost také $g_D(y, x) > 0$. Toto lze pozorovat u všech tří grafů 5.47, 5.48, 5.49 u hodnot v blízkosti vedlejší diagonály.

Kapitola 6

Závěr

Tato práce se věnovala fuzzifikaci odvozovacího pravidla modus ponens. V úvodních kapitolách byl představen teoretický základ pro práci s fuzzy množinami a logikou, zejména fuzzy logickými spojkami. Důraz byl kladen hlavně na vysvětlení fuzzy konjunkce a implikace, neboť pomocí právě těchto spojek je vyjádřeno původní odvozovací pravidlo. Vzhledem k tomu, že fuzzy konjunkce se obvykle modelují pomocí triangulárních norem, byl jim poskytnut větší prostor.

Hlavní tématou práce je konstrukce fuzzy pravidla modus ponens. Tato problematika byla zpracována z teoretického, ale také praktického hlediska. Důležitou část teoretické práce tvoří analýza funkce g_D . Je to funkce, pomocí které se modeluje fuzzy odvozovací pravidlo modus ponens. Hlavním přínosem teoretické části bylo zobecnění funkce g_D aplikováním obecné fuzzy negace.

Významnou částí práce je diskretizace fuzzy logických spojek a odvozovacích pravidel. Tato konstrukce byla aplikována v experimentu při zpracování empirických dat. V rámci experimentu bylo cílem zjistit, jak v běžné řeči vnímáme závislost mezi platností předpokladu a jeho vlivem na platnost následku. Experiment ukázal, že obecně je tato závislost naplněna.

Pro zpracování empirických dat byly představeny nové způsoby agregace dat v maticovém prostoru a byla ukázána konstrukce nové diskretizované funkce modelující odvozovací pravidlo mezi předpokladem a závěrem.

Práce by se v budoucnu dala doplnit studiem fuzzifikace jiného inferenčního pravidla, např. modus tollens, případně nadstavbou v podobě převodu systému rezoluce.

Literatura

- [1] BACZYŃSKI, M. a JAYARAM, B. *Fuzzy Implications*. Berlin Heidelberg: Springer, 2008. ISBN 978-3-540-69080-1.
- [2] HAVLENA, V. *Konjunkce a disjunkce ve fuzzy logice*. Brno, 2015. Bakalářská práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta informačních technologií.
- [3] HLINĚNÁ, D. a BIBA, V. Evaluating many valued modus ponens. *Kybernetika*, 2012, 48(2012), č. 3, s. 465–477. ISSN 0023-5954. Dostupné z: <http://www.kybernetika.cz/content/2012/3/465>.
- [4] HLINĚNÁ, D. a BIBA, V. Generated fuzzy implications and fuzzy preference structures. *Kybernetika*, 2012, 48(2012), č. 3, s. 453–464. ISSN 0023-5954. Dostupné z: <http://www.kybernetika.cz/content/2012/3/453>.
- [5] HLINĚNÁ, D.; KRÁL, P. a KALINA, M. Implication Functions Generated Using Functions of One Variable. In: *Advances in Fuzzy Implication Functions*. 300. vyd. Berlin Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2013, s. 125–153. 1. ISBN 978-3-642-35676-6.
- [6] HLINĚNÁ, D. a VOJTÁŠ, P. Graded many-valued resolution with aggregation. *Fuzzy Sets and Systems*, 2005, sv. 2004, č. 143, s. 12. ISSN 0165-0114. Dostupné z: <http://www.elsevier.com/locate/fss>.
- [7] JIRMUSOVÁ, V. *Fuzzy implikace*. Brno, 2024. Bakalářská práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta informačních technologií.
- [8] KLEMENT, E. P.; MESIAR, R. a PAP, E. *Triangular norms*. Kluwer Academic Publishers, 2000. ISBN 978-90-481-5507-1.
- [9] KOLESÁROVÁ, A. a KOVÁČOVÁ, M. *Fuzzy množiny a ich aplikácie*. STU v Bratislave, 2004. ISBN 80-227-2036-4.
- [10] SOCHOR, A. *Klasická matematická logika*. Karolinum, 2001. ISBN 8024602180.

Příloha A

Obsah odevzdaného archivu

Odevzdaný archiv obsahuje:

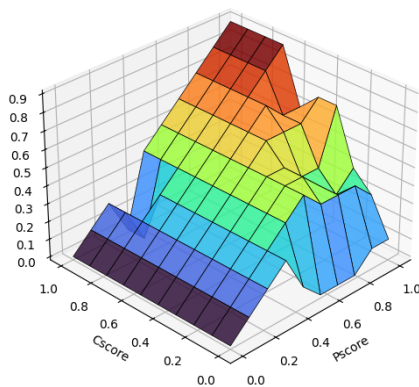
- `bp_xpriby22.pdf` – text písemné práce ve formátu PDF,
- `latex/` – zdrojové kódy písemné práce ve formátu $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$,
- `questionnaire/` – zdrojové kódy dotazníkové aplikace,
- `fuzzyModusPonens/` – zdrojové kódy programu pro zpracování získaných dat,
- `README.md` – popis obsahu archivu.

Příloha B

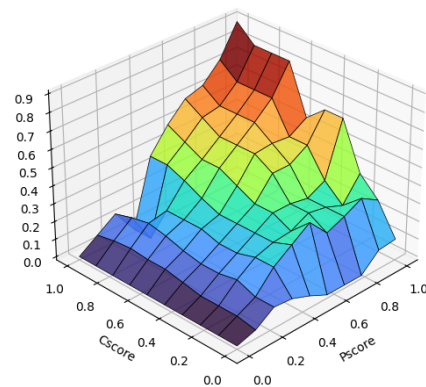
Vyhodnocení první sady výroků

- a) Na obtížné testy se připravuji důsledně.
- b) Z obtížných testů dostávám zpravidla pěknou známku.
- c) Pokud se připravím na obtížný test, pak z něj dostanu pěknou známku.

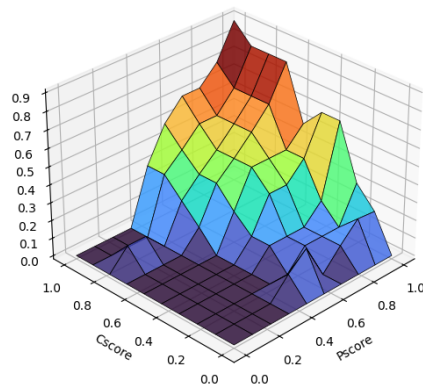
B.1 Odhad konjunkcí založených na empirických datech



Obrázek B.1: T_M^* mezi a) a c)

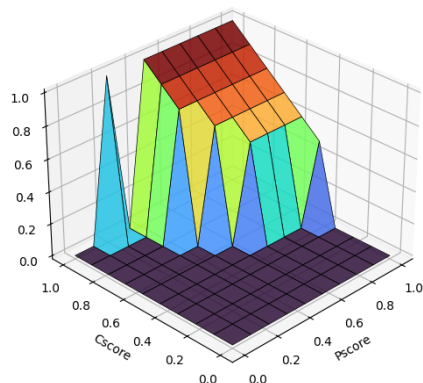


Obrázek B.2: T_P^* mezi a) a c)

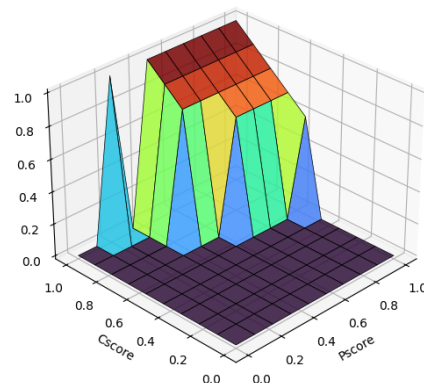


Obrázek B.3: T_L^* mezi a) a c)

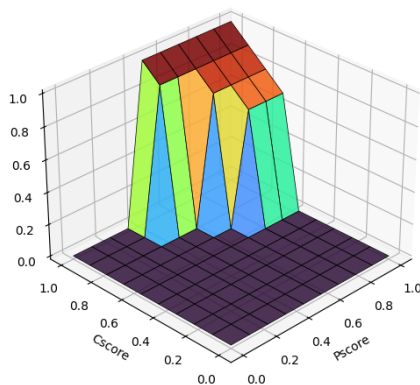
B.2 Odhad g_D nad Kleene-Dienesovou implikací



Obrázek B.4: Odhad $C_{I_{SM}^*}$ v kombinaci s T_M^*

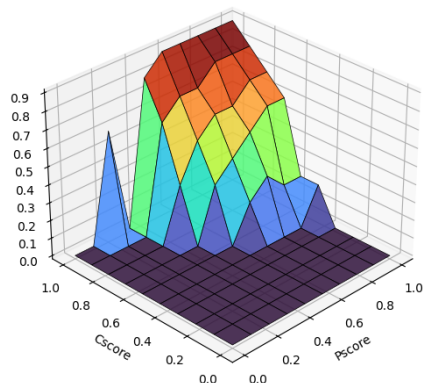


Obrázek B.5: Odhad $C_{I_{SM}^*}$ v kombinaci s T_P^*

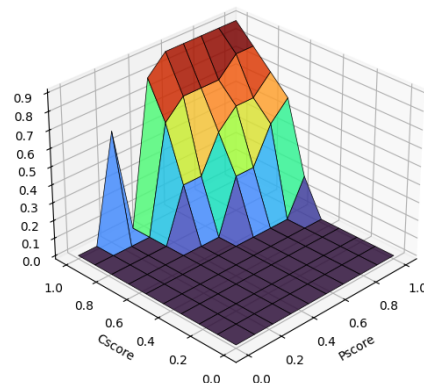


Obrázek B.6: Odhad $C_{I_{SM}^*}$ v kombinaci s T_L^*

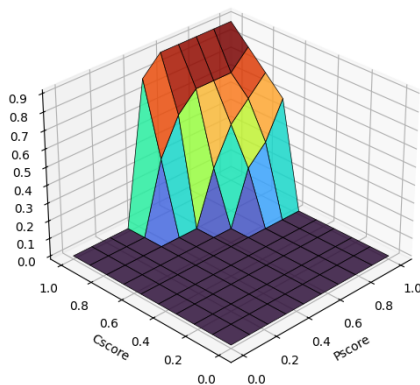
B.3 Odhad g_D nad Reichenbachovou implikací



Obrázek B.7: Odhad $C_{I_{SP}}^*$ v kombinaci s T_M^*

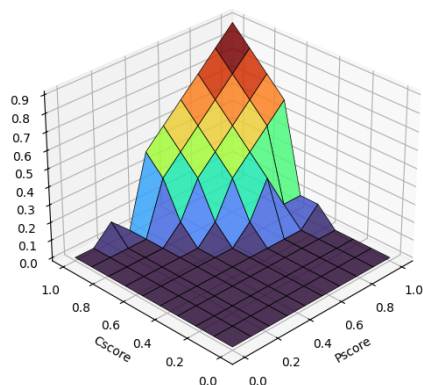


Obrázek B.8: Odhad $C_{I_{SP}}^*$ v kombinaci s T_P^*

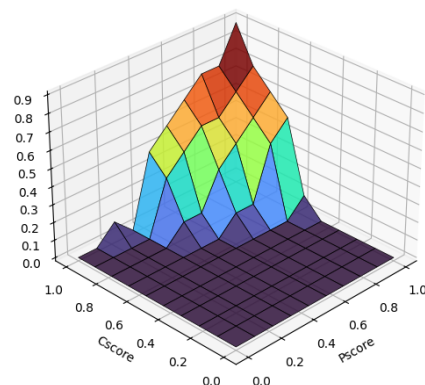


Obrázek B.9: Odhad $C_{I_{SP}}^*$ v kombinaci s T_L^*

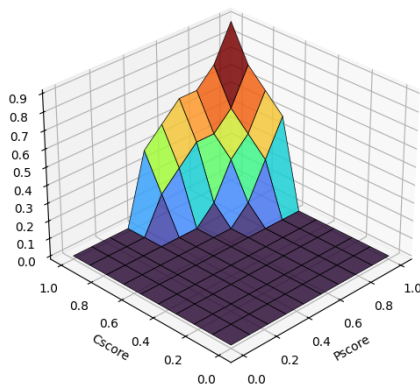
B.4 Odhad g_D nad Łukasiewiczzovou implikací



Obrázek B.10: Odhad $C_{I_{S_L}^*}$ v kombinaci s T_M^*

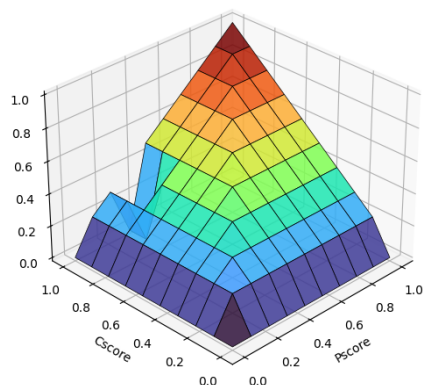


Obrázek B.11: Odhad $C_{I_{S_L}^*}$ v kombinaci s T_P^*

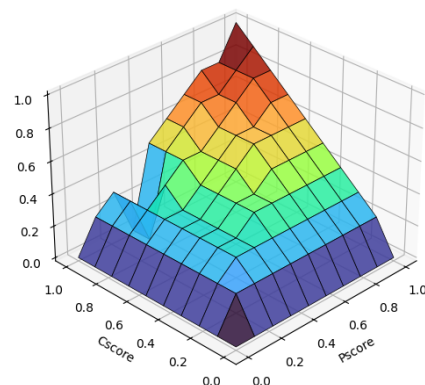


Obrázek B.12: Odhad $C_{I_{S_L}^*}$ v kombinaci s T_L^*

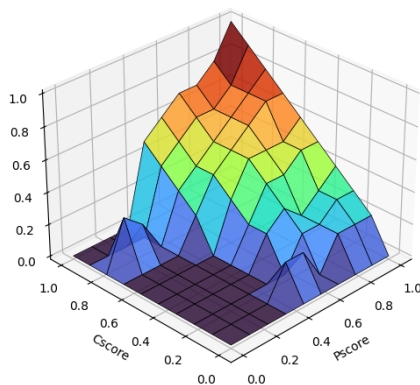
B.5 Odhad g_D nad Gödelovou implikací



Obrázek B.13: Odhad $C_{I_{T_M}^*}$ v kombinaci s T_M^*

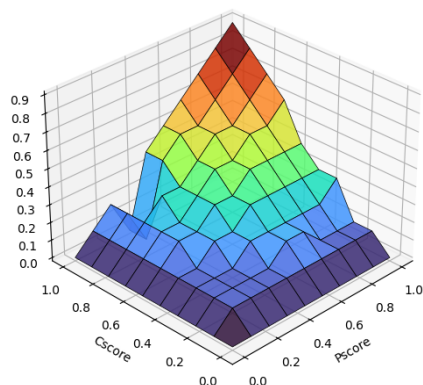


Obrázek B.14: Odhad $C_{I_{T_M}^*}$ v kombinaci s T_P^*

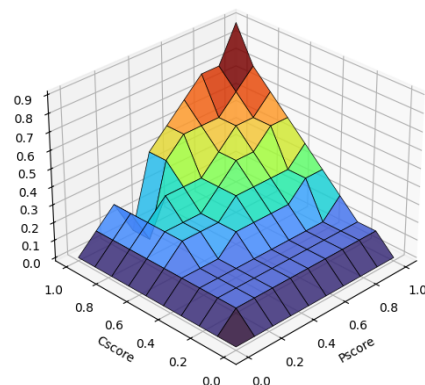


Obrázek B.15: Odhad $C_{I_{T_M}^*}$ v kombinaci s T_L^*

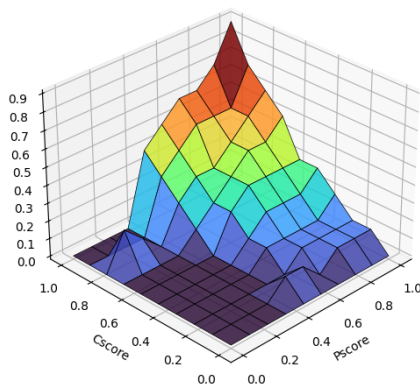
B.6 Odhad g_D nad Goguenovou implikací



Obrázek B.16: Odhad $C_{I_{T_P}^*}$ v kombinaci s T_M^*



Obrázek B.17: Odhad $C_{I_{T_P}^*}$ v kombinaci s T_P^*



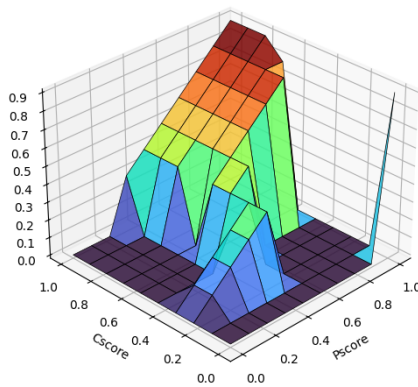
Obrázek B.18: Odhad $C_{I_{T_P}^*}$ v kombinaci s T_L^*

Příloha C

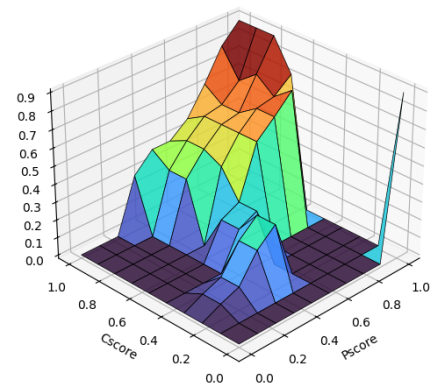
Vyhodnocení druhé sady výroků

- a) Jsem zodpovědný řidič.
- b) Pokuty za řízení dostávám vzácně.
- c) Jestliže jsem zodpovědný řidič, pak mi je udělena pokuta velice zřídka.

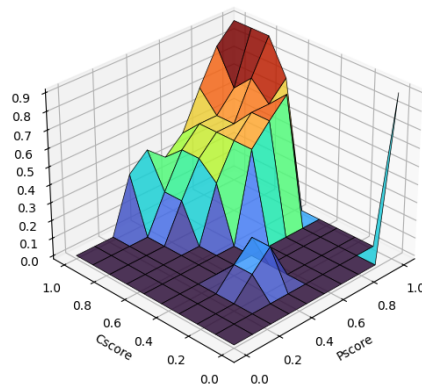
C.1 Odhad konjunkcí založených na empirických datech



Obrázek C.1: T_M^* mezi a) a c)

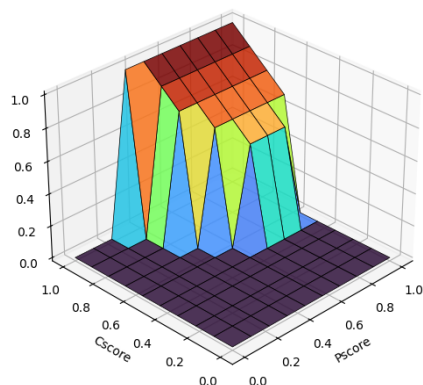


Obrázek C.2: T_P^* mezi a) a c)

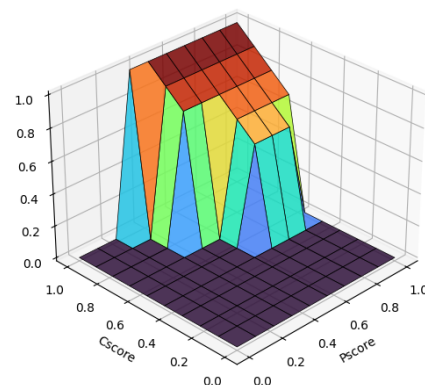


Obrázek C.3: T_L^* mezi a) a c)

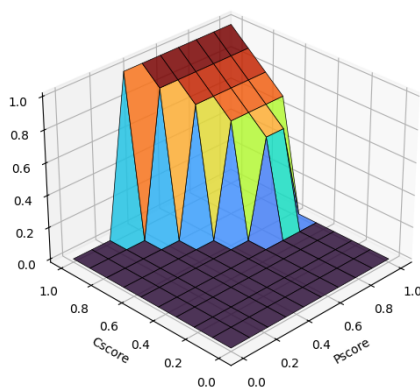
C.2 Odhad g_D nad Kleene-Dienesovou implikací



Obrázek C.4: Odhad $C_{I_{SM}^*}$ v kombinaci s T_M^*

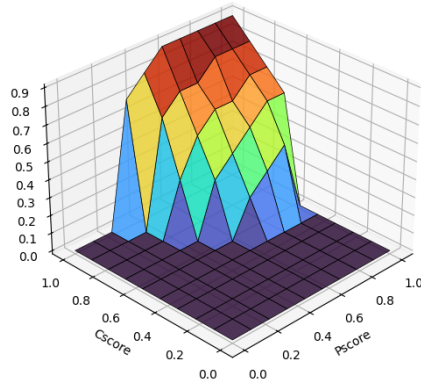


Obrázek C.5: Odhad $C_{I_{SM}^*}$ v kombinaci s T_P^*

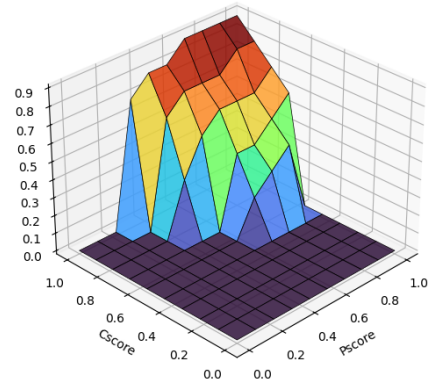


Obrázek C.6: Odhad $C_{I_{SM}^*}$ v kombinaci s T_L^*

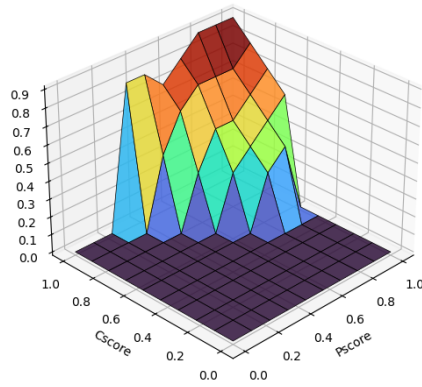
C.3 Odhad g_D nad Reichenbachovou implikací



Obrázek C.7: Odhad $C_{I_{SP}^*}$ v kombinaci s T_M^*

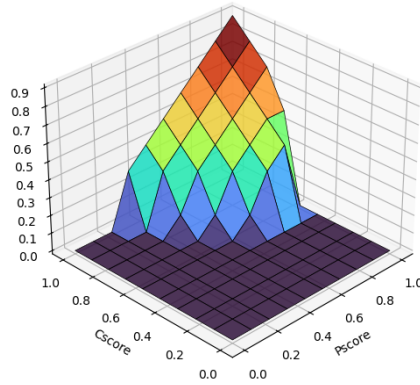


Obrázek C.8: Odhad $C_{I_{SP}^*}$ v kombinaci s T_P^*

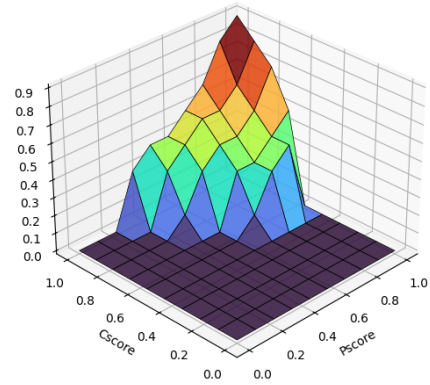


Obrázek C.9: Odhad $C_{I_{SP}^*}$ v kombinaci s T_L^*

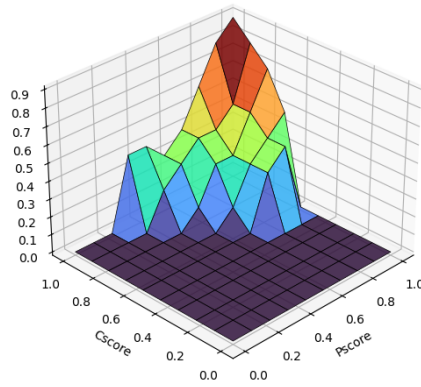
C.4 Odhad g_D nad Łukasiewiczzovou implikací



Obrázek C.10: Odhad $C_{I_{S_L}^*}$ v kombinaci s T_M^*

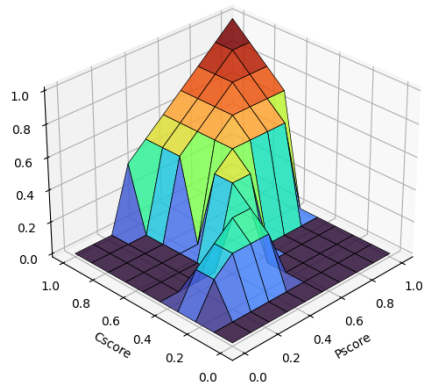


Obrázek C.11: Odhad $C_{I_{S_L}^*}$ v kombinaci s T_P^*

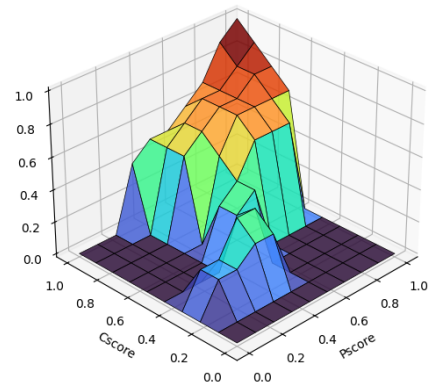


Obrázek C.12: Odhad $C_{I_{S_L}^*}$ v kombinaci s T_L^*

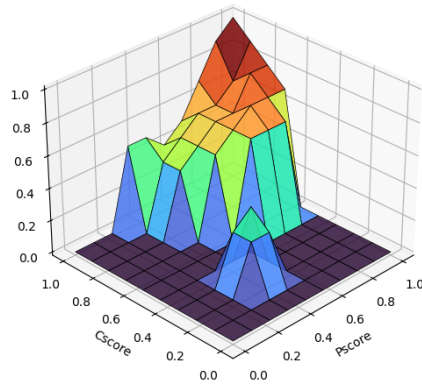
C.5 Odhad g_D nad Gödelovou implikací



Obrázek C.13: Odhad $C_{I_{T_M}^*}$ v kombinaci s T_M^*

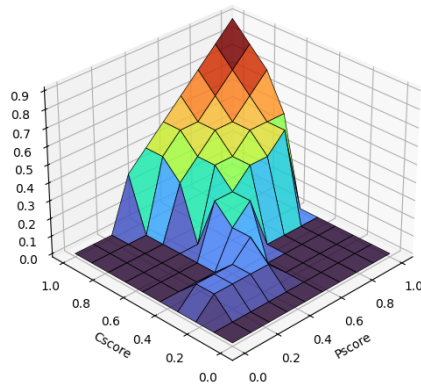


Obrázek C.14: Odhad $C_{I_{T_M}^*}$ v kombinaci s T_P^*

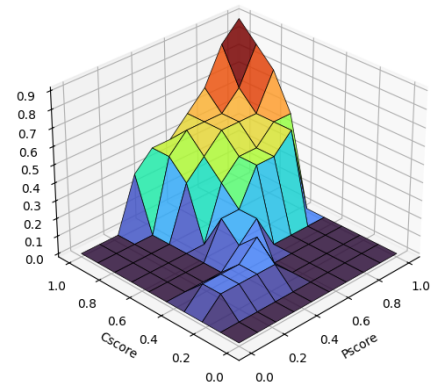


Obrázek C.15: Odhad $C_{I_{T_M}^*}$ v kombinaci s T_L^*

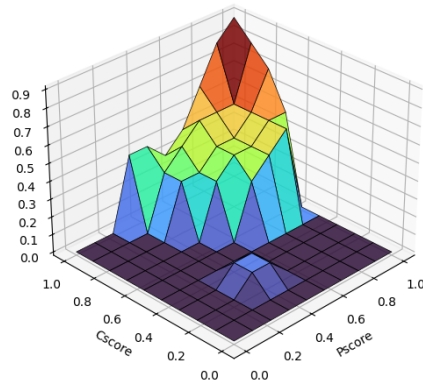
C.6 Odhad g_D nad Goguenovou implikací



Obrázek C.16: Odhad $C_{I_{T_P}^*}$ v kombinaci s T_M^*



Obrázek C.17: Odhad $C_{I_{T_P}^*}$ v kombinaci s T_P^*



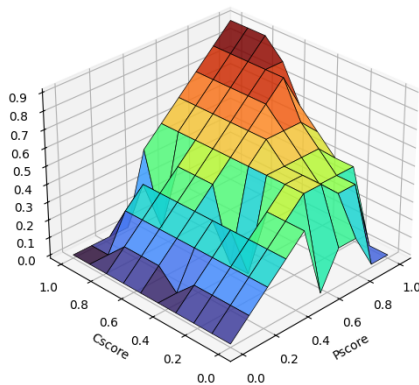
Obrázek C.18: Odhad $C_{I_{T_P}^*}$ v kombinaci s T_L^*

Příloha D

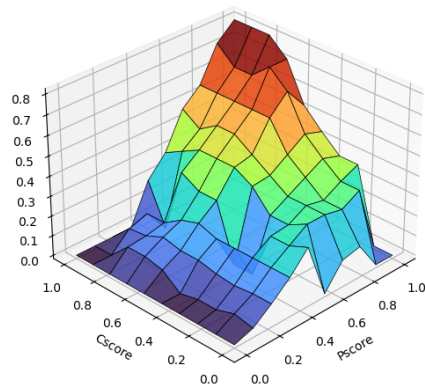
Vyhodnocení třetí sady výroků

- a) Většinou chodím spát pozdě.
- b) Dopoledne bývám často znavený.
- c) Pokud jdu pozdě spát, pak jsem následující dopoledne unavený.

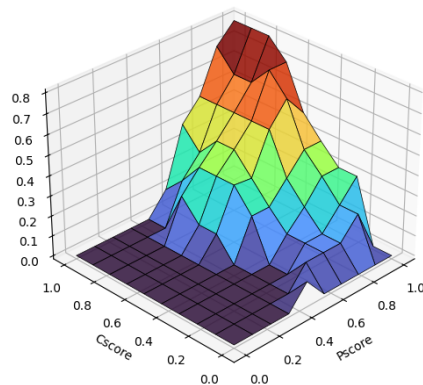
D.1 Odhad konjunkcí založených na empirických datech



Obrázek D.1: T_M^* mezi a) a c)

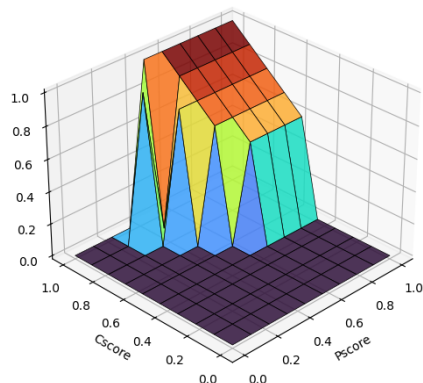


Obrázek D.2: T_P^* mezi a) a c)

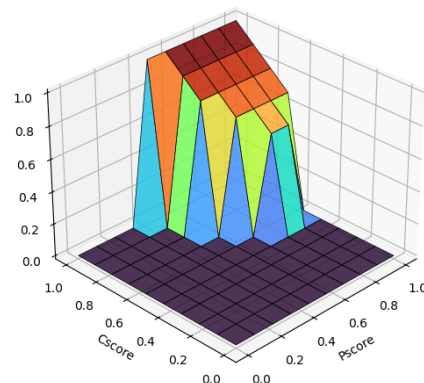


Obrázek D.3: T_L^* mezi a) a c)

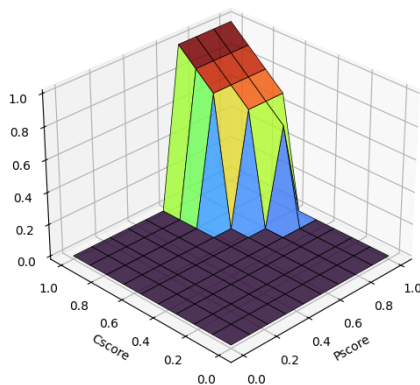
D.2 Odhad g_D nad Kleene-Dienesovou implikací



Obrázek D.4: Odhad $C_{I_{SM}^*}$ v kombinaci s T_M^*

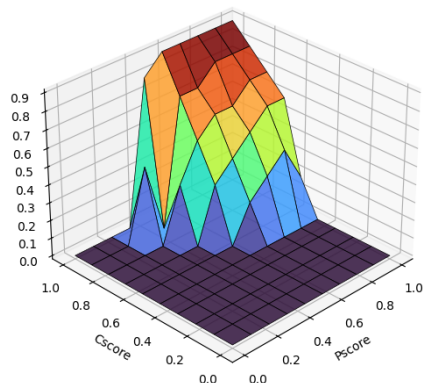


Obrázek D.5: Odhad $C_{I_{SM}^*}$ v kombinaci s T_P^*

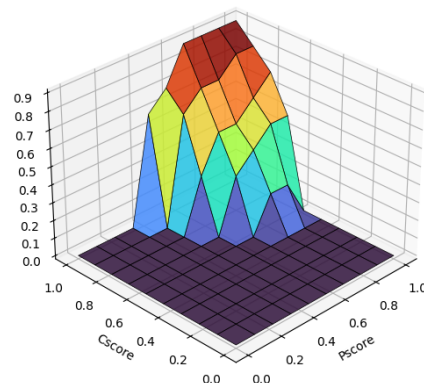


Obrázek D.6: Odhad $C_{I_{SM}^*}$ v kombinaci s T_L^*

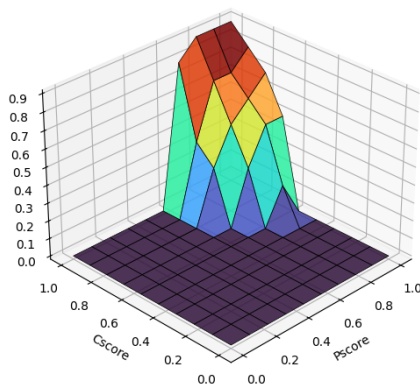
D.3 Odhad g_D nad Reichenbachovou implikací



Obrázek D.7: Odhad $C_{I_{SP}^*}$ v kombinaci s T_M^*

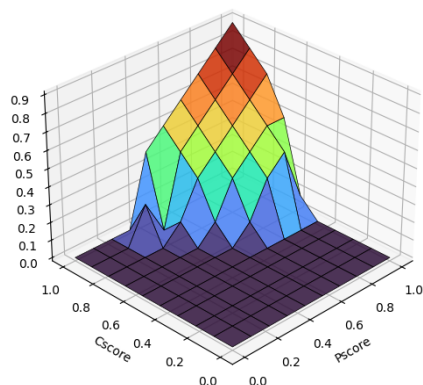


Obrázek D.8: Odhad $C_{I_{SP}^*}$ v kombinaci s T_P^*

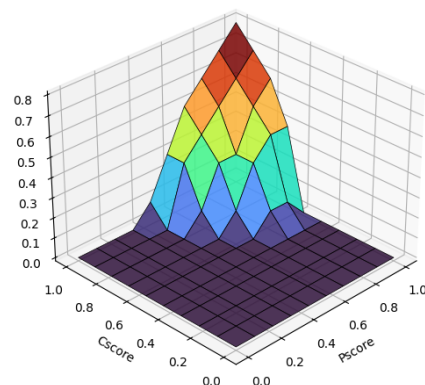


Obrázek D.9: Odhad $C_{I_{SP}^*}$ v kombinaci s T_L^*

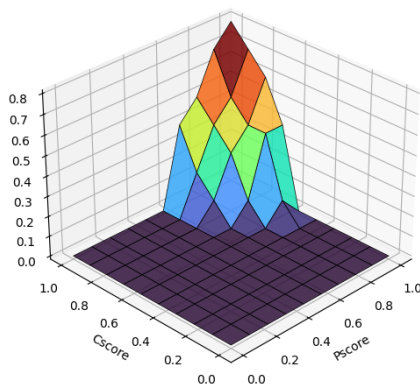
D.4 Odhad g_D nad Łukasiewiczzovou implikací



Obrázek D.10: Odhad $C_{I_{S_L}^*}$ v kombinaci s T_M^*

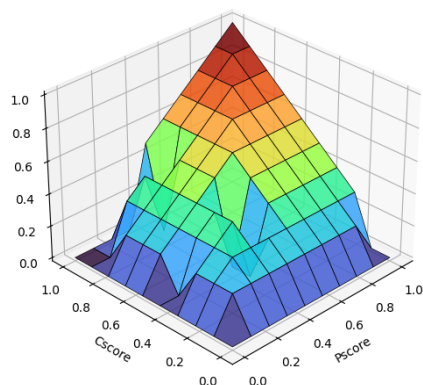


Obrázek D.11: Odhad $C_{I_{S_L}^*}$ v kombinaci s T_P^*

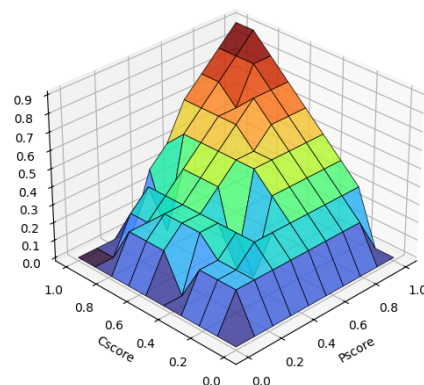


Obrázek D.12: Odhad $C_{I_{S_L}^*}$ v kombinaci s T_L^*

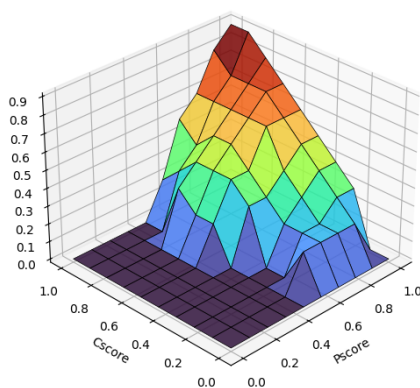
D.5 Odhad g_D nad Gödelovou implikací



Obrázek D.13: Odhad $C_{I_{T_M}^*}$ v kombinaci s T_M^*

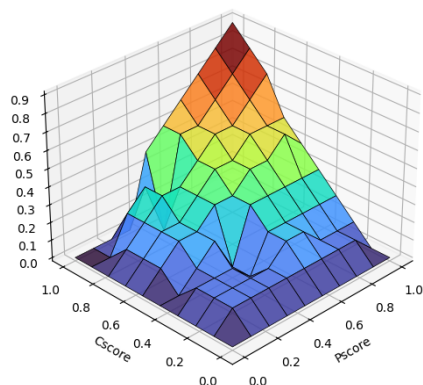


Obrázek D.14: Odhad $C_{I_{T_M}^*}$ v kombinaci s T_P^*

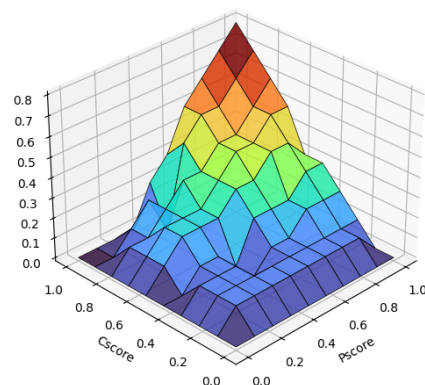


Obrázek D.15: Odhad $C_{I_{T_M}^*}$ v kombinaci s T_L^*

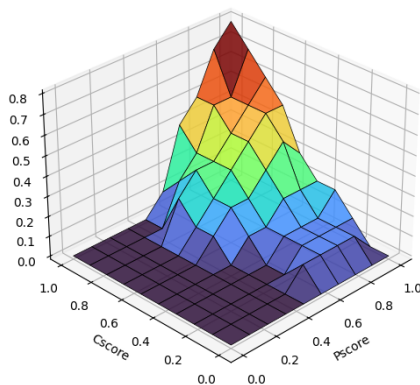
D.6 Odhad g_D nad Goguenovou implikací



Obrázek D.16: Odhad $C_{I_{T_P}^*}$ v kombinaci s T_M^*



Obrázek D.17: Odhad $C_{I_{T_P}^*}$ v kombinaci s T_P^*



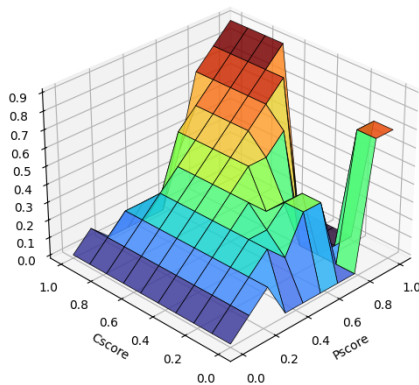
Obrázek D.18: Odhad $C_{I_{T_P}^*}$ v kombinaci s T_L^*

Příloha E

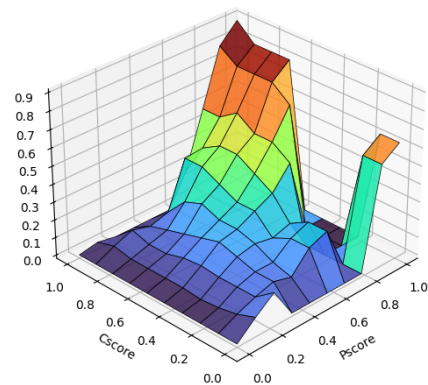
Vyhodnocení čtvrté sady výroků

- a) Často chodím cvičit do posilovny.
- b) Mám dobrou fyzickou kondici.
- c) Protože pravidelně navštěvuji posilovnu, udržuji si dobrou fyzickou kondici.

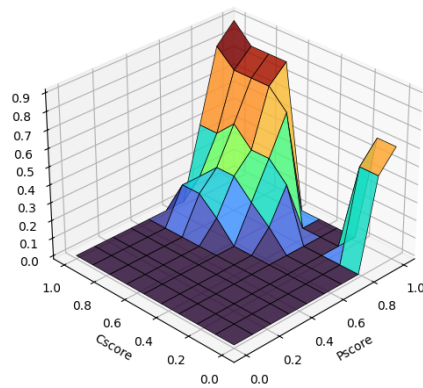
E.1 Odhad konjunkcí založených na empirických datech



Obrázek E.1: T_M^* mezi a) a c)

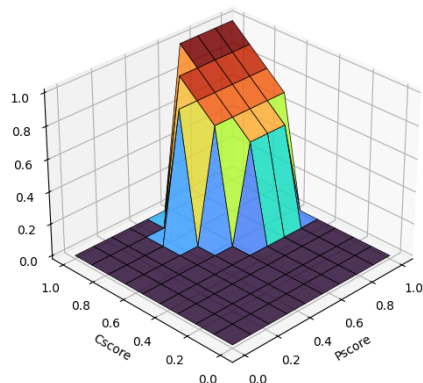


Obrázek E.2: T_P^* mezi a) a c)

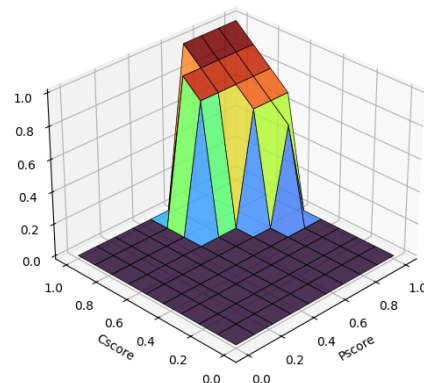


Obrázek E.3: T_L^* mezi a) a c)

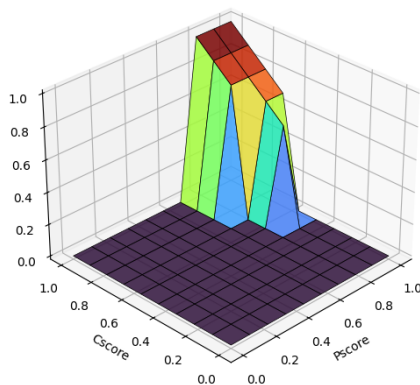
E.2 Odhad g_D nad Kleene-Dienesovou implikací



Obrázek E.4: Odhad $C_{I_{SM}^*}$ v kombinaci s T_M^*

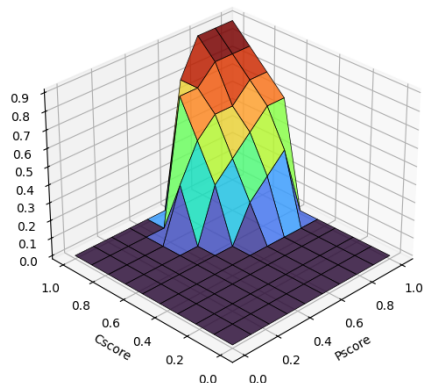


Obrázek E.5: Odhad $C_{I_{SM}^*}$ v kombinaci s T_P^*

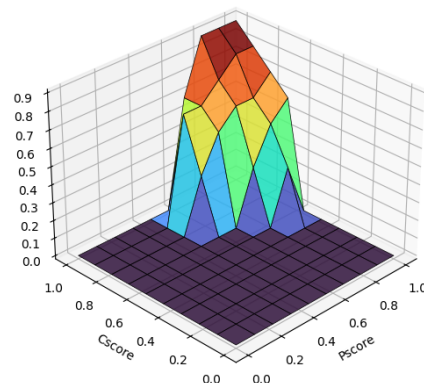


Obrázek E.6: Odhad $C_{I_{SM}^*}$ v kombinaci s T_L^*

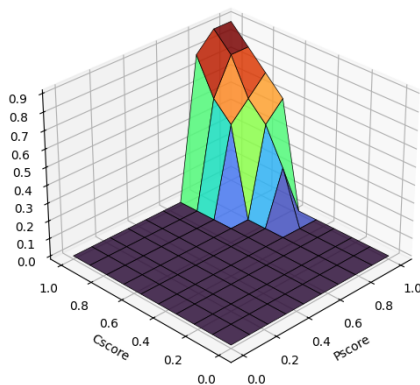
E.3 Odhad g_D nad Reichenbachovou implikací



Obrázek E.7: Odhad $C_{I_{SP}}^*$ v kombinaci s T_M^*

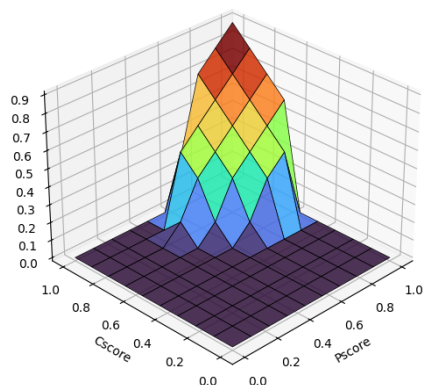


Obrázek E.8: Odhad $C_{I_{SP}}^*$ v kombinaci s T_P^*

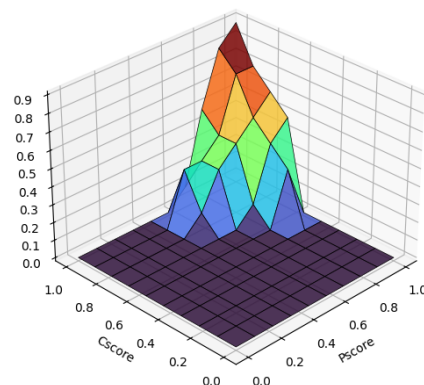


Obrázek E.9: Odhad $C_{I_{SP}}^*$ v kombinaci s T_L^*

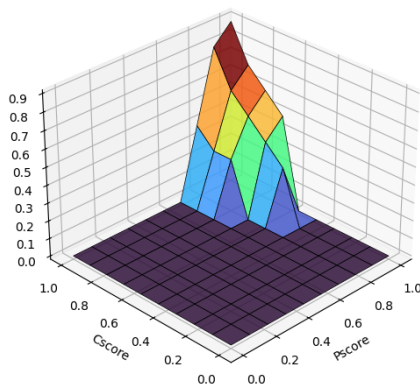
E.4 Odhad g_D nad Łukasiewiczzovou implikací



Obrázek E.10: Odhad $C_{I_{S_L}^*}$ v kombinaci s T_M^*

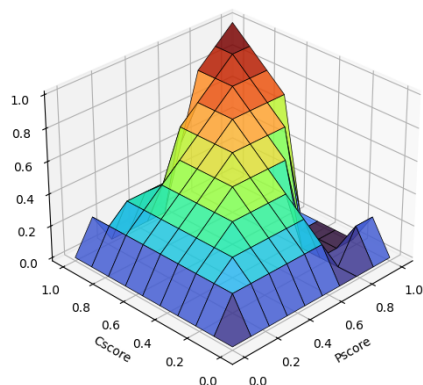


Obrázek E.11: Odhad $C_{I_{S_L}^*}$ v kombinaci s T_P^*

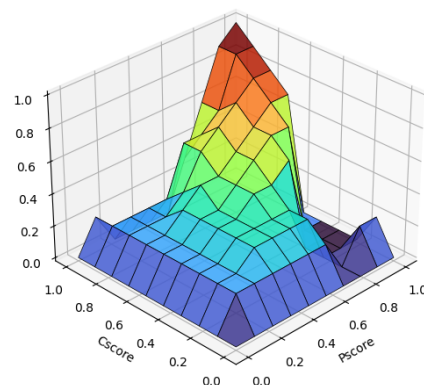


Obrázek E.12: Odhad $C_{I_{S_L}^*}$ v kombinaci s T_L^*

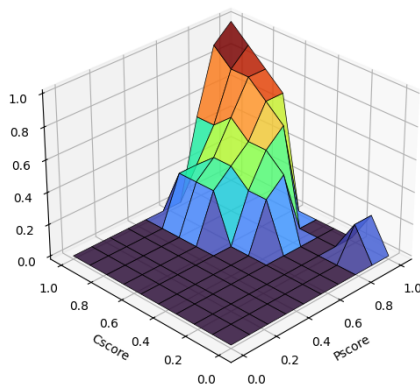
E.5 Odhad g_D nad Gödelovou implikací



Obrázek E.13: Odhad $C_{I_{T_M}^*}$ v kombinaci s T_M^*

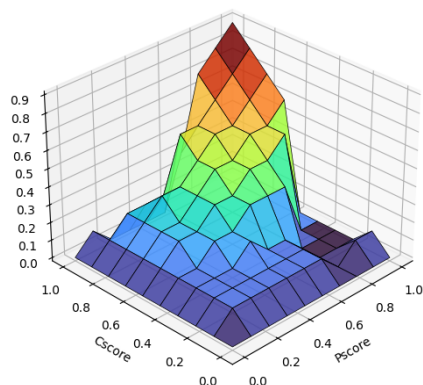


Obrázek E.14: Odhad $C_{I_{T_M}^*}$ v kombinaci s T_P^*

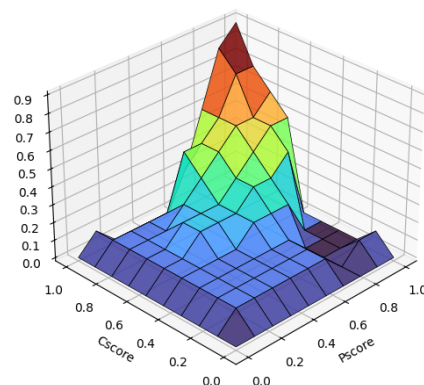


Obrázek E.15: Odhad $C_{I_{T_M}^*}$ v kombinaci s T_L^*

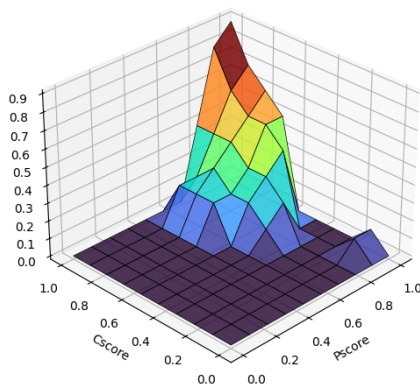
E.6 Odhad g_D nad Goguenovou implikací



Obrázek E.16: Odhad $C_{I_{TP}^*}$ v kombinaci s T_M^*



Obrázek E.17: Odhad $C_{I_{TP}^*}$ v kombinaci s T_P^*



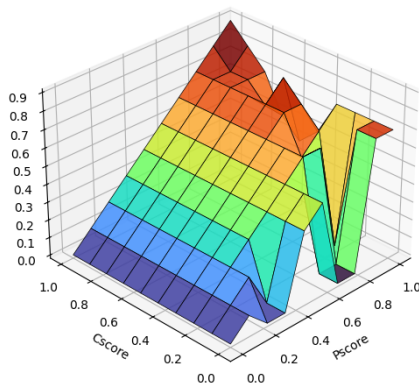
Obrázek E.18: Odhad $C_{I_{TP}^*}$ v kombinaci s T_L^*

Příloha F

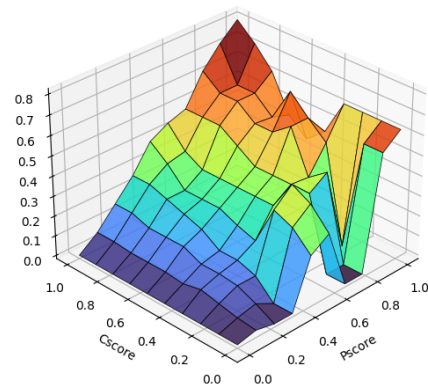
Vyhodnocení páté sady výroků

- a) Bývám často ve stresu.
- b) Koníčky jsou pro mě odpočinková aktivita.
- c) Jestliže jsem pod tlakem, rád si odpočinu u nějakého svého koníčka.

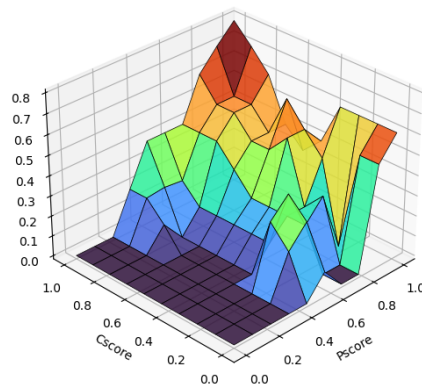
F.1 Odhad konjunkcí založených na empirických datech



Obrázek F.1: T_M^* mezi a) a c)

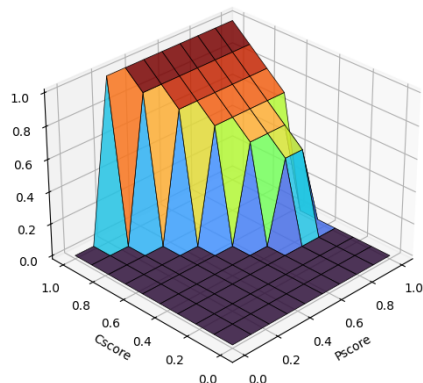


Obrázek F.2: T_P^* mezi a) a c)

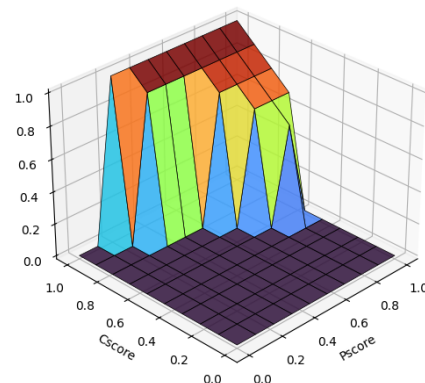


Obrázek F.3: T_L^* mezi a) a c)

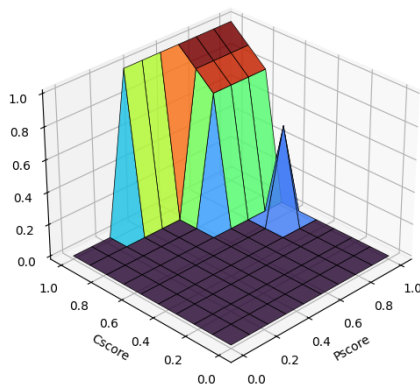
F.2 Odhad g_D nad Kleene-Dienesovou implikací



Obrázek F.4: Odhad $C_{I_{SM}^*}$ v kombinaci s T_M^*

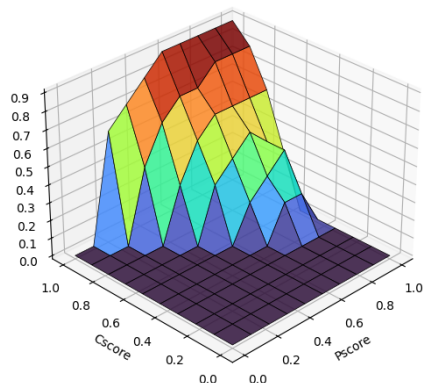


Obrázek F.5: Odhad $C_{I_{SM}^*}$ v kombinaci s T_P^*

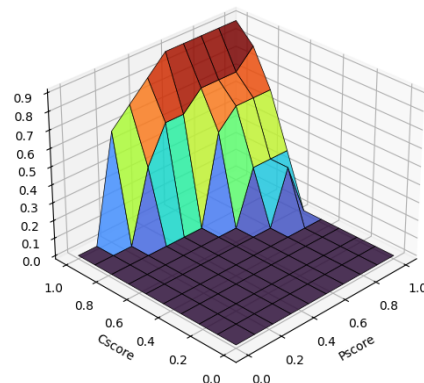


Obrázek F.6: Odhad $C_{I_{SM}^*}$ v kombinaci s T_L^*

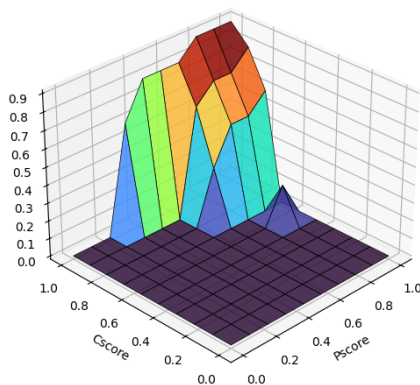
F.3 Odhad g_D nad Reichenbachovou implikací



Obrázek F.7: Odhad $C_{I_{SP}}^*$ v kombinaci s T_M^*

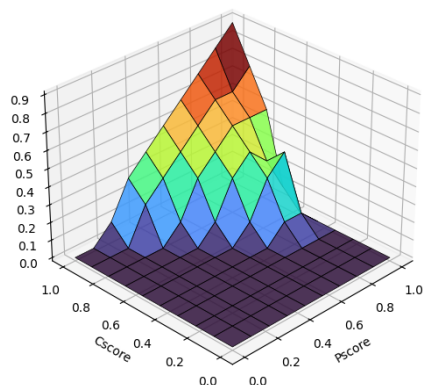


Obrázek F.8: Odhad $C_{I_{SP}}^*$ v kombinaci s T_P^*

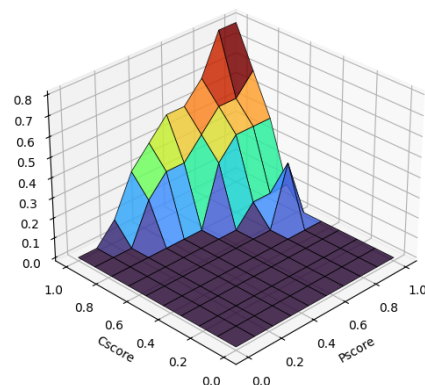


Obrázek F.9: Odhad $C_{I_{SP}}^*$ v kombinaci s T_L^*

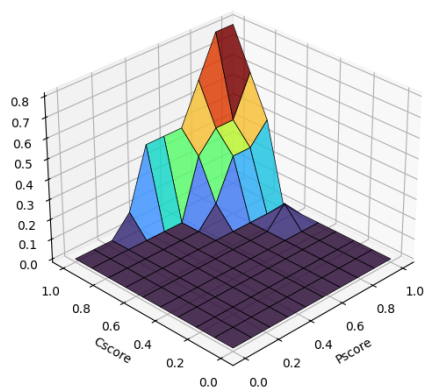
F.4 Odhad g_D nad Łukasiewiczzovou implikací



Obrázek F.10: Odhad $C_{I_{S_L}^*}$ v kombinaci s T_M^*

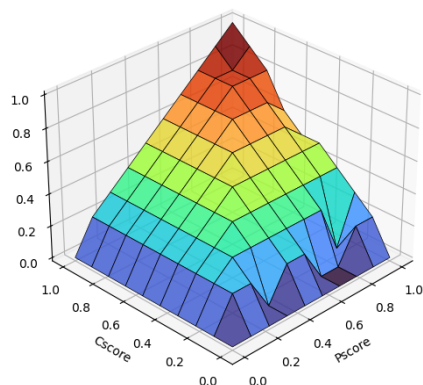


Obrázek F.11: Odhad $C_{I_{S_L}^*}$ v kombinaci s T_P^*

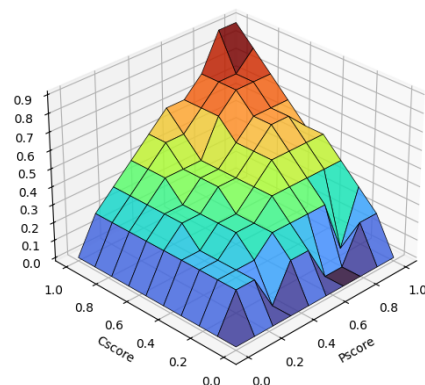


Obrázek F.12: Odhad $C_{I_{S_L}^*}$ v kombinaci s T_L^*

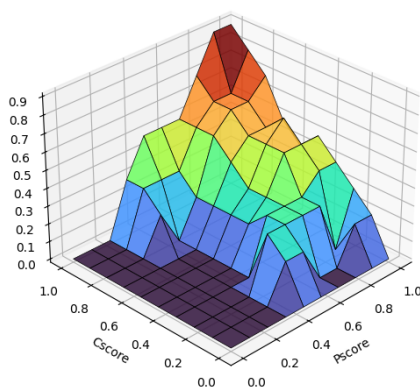
F.5 Odhad g_D nad Gödelovou implikací



Obrázek F.13: Odhad $C_{I_{T_M}^*}$ v kombinaci s T_M^*

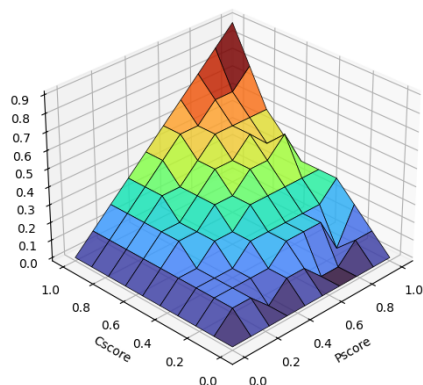


Obrázek F.14: Odhad $C_{I_{T_M}^*}$ v kombinaci s T_P^*

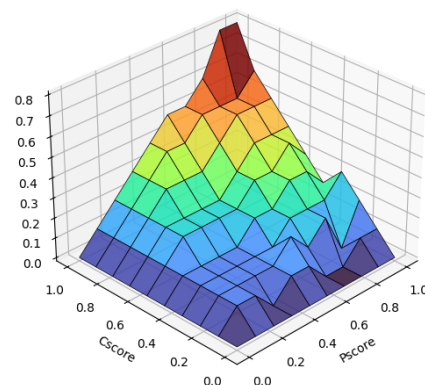


Obrázek F.15: Odhad $C_{I_{T_M}^*}$ v kombinaci s T_L^*

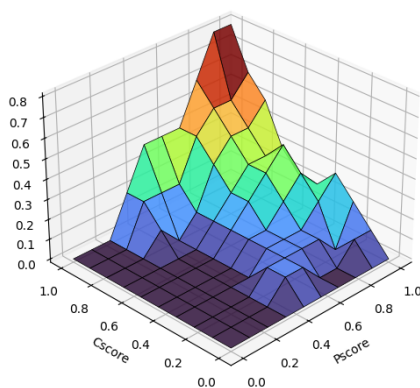
F.6 Odhad g_D nad Goguenovou implikací



Obrázek F.16: Odhad $C_{I_{TP}^*}$ v kombinaci s T_M^*



Obrázek F.17: Odhad $C_{I_{TP}^*}$ v kombinaci s T_P^*



Obrázek F.18: Odhad $C_{I_{TP}^*}$ v kombinaci s T_L^*