



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A KOMUNIKAČNÍCH
TECHNOLOGIÍ

ÚSTAV AUTOMATIZACE A MĚŘICÍ TECHNIKY

FACULTY OF ELECTRICAL ENGINEERING AND COMMUNICATION
DEPARTMENT OF CONTROL AND INSTRUMENTATION

ADAPTIVNÍ REGULÁTORY S PRINCIPY UMĚLÉ INTELIGENCE A JEJICH POROVNÁNÍ S KLASICKÝMI METODAMI IDENTIFIKACE.

ADAPTIVE CONTROLLERS WITH PRINCIPLES OF ARTIFICIAL INTELLIGENCE
AND ITS COMPARISON WITH CLASSICAL IDENTIFICATIONS METHODS

DIPLOMOVÁ PRÁCE

MASTER'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Bc. JAKUB DOKOUPIL

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

prof. Ing. PETR PIVOŇKA, CSc.

BRNO 2009



VYSOKÉ UČENÍ
TECHNICKÉ V BRNĚ

Fakulta elektrotechniky
a komunikačních technologií

Ústav automatizace a měřicí techniky

Diplomová práce

magisterský navazující studijní obor
Kybernetika, automatizace a měření

Student: Bc. Jakub Dokoupil

ID: 85801

Ročník: 2

Akademický rok: 2008/2009

NÁZEV TÉMATU:

Adaptivní regulátory s principy umělé inteligence a jejich porovnání s klasickými metodami identifikace.

POKYNY PRO VYPRACOVÁNÍ:

Seznamte se s metodikou návrhu adaptivních regulátorů. Seznamte se s použitím klasických identifikačních metod a identifikačních metod na bázi neuronových sítí. Zaměřte se na možnosti implementace adaptivního regulátoru z prostředí programu MATLAB do programovatelného automatu B&R. V identifikačním algoritmu realizujte grafické vyhodnocení sledování průběhu identifikace parametrů a kovarianční matice. Ověřte a porovnejte adaptivní regulátor s pevně nastaveným PID regulátorem ve spojení program MATLAB - program. automat B&R - simulační a fyzikální modely, zejména s ohledem na změnu dynamiky modelů. Porovnejte vlastnosti klasické identifikace a identifikačních algoritmů na bázi neuronových sítí. Implementujte adaptivní regulátor do programovatelného automatu.

DOPORUČENÁ LITERATURA:

PIVOŇKA, P.: Číslíková řídicí technika, VUT Brno, skriptum, 2003

BOBÁL, V. a kol.: Praktické aspekty samočinně se nastavujících regulátorů. VUTIUM, 1999.

Termín zadání: 9.2.2009

Termín odevzdání: 25.5.2009

Vedoucí práce: prof. Ing. Petr Pivoňka, CSc.

prof. Ing. Pavel Jura, CSc.

Předseda oborové rady

UPOZORNĚNÍ:

Autor diplomové práce nesmí při vytváření diplomové práce porušit autorská práva třetích osob, zejména nesmí zasahovat nedovoleným způsobem do cizích autorských práv osobnostních a musí si být plně vědom následků porušení ustanovení § 11 a následujících autorského zákona č. 121/2000 Sb., včetně možných trestněprávních důsledků vyplývajících z ustanovení § 152 trestního zákona č. 140/1961 Sb.

Abstrakt

Práce pojednává o metodice návrhu adaptivního regulátoru opírajícího se o znalost matematického modelu řízené soustavy. Důraz je kladen zejména na problematiku průběžné parametrické identifikace v uzavřené smyčce. Odhadování parametrů modelu je řešeno dvěma základními přístupy: rekurzivní metodou nejmenších čtverců a neuronovými estimátory. V případě metod nejmenších čtverců byla řešena otázka získání neposunutého odhadu, numerické stability a potlačování staré informace selektivním vážením dat. Pro neuronové estimátory byly zvoleny algoritmy Back Propagation a Marquardt-Levenberg.

Z porovnání obou přístupů na reálných soustavách vyplývá, že pokročilejší techniky z řad metod nejmenších čtverců za současného stavu poskytují numericky přesnější a spolehlivější řešení problematiky identifikace pro adaptivní řízení.

Ve vlastní realizaci bylo vytvořeno rozhraní v programu MATLAB/Simulink umožňující grafické a číselné vyhodnocení jednotlivých algoritmů.

Klíčová slova

Metoda nejmenších čtverců, selektivní vážení dat, faktorizace kovarianční matice, neuronové estimátory, PID, adaptivní

Abstract

This piece of work deals with a philosophy of design adaptive controller, which is based on knowledge of mathematical model controlled plant. This master thesis is focused on closed-loop on-line parametric identification methods. An estimation of model's parametres is solved by two main concepts: recursive least-square algorithms and neural estimators. In case of least-squares algorithm the strategy of preventing the typical problems are solved here. For instance numerical stability, accuracy and restricted forgetting. Back Propagation and Marquardt-Levenberg algorithm were chosen to represent artificial intelligence.

There is still a little supremacy on the side of methods based on least-squares algorithm. To compare individual algorithms the graphical interface in MATLAB/Simulink was created.

Key- Words

Least-squares method, restricted forgetting, factorization of covariance matrix, neural estimators, PID, adaptive

Bibliografická citace

DOKOUPIL, J. *Adaptivní regulátory s principy umělé inteligence a jejich porovnání s klasickými metodami identifikace*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií, 2009. 87 s. Vedoucí diplomové práce prof. Ing. Petr Pivoňka, CSc.

P r o h l á š e n í

„Prohlašuji, že svou diplomovou práci na téma Adaptivní regulátory s principy umělé inteligence a jejich porovnání s klasickými metodami identifikace jsem vypracoval samostatně pod vedením vedoucího diplomové práce a s použitím odborné literatury a dalších informačních zdrojů, které jsou všechny citovány v práci a uvedeny v seznamu literatury na konci práce.

Jako autor uvedené diplomové práce dále prohlašuji, že v souvislosti s vytvořením této diplomové práce jsem neporušil autorská práva třetích osob, zejména jsem nezasáhl nedovoleným způsobem do cizích autorských práv osobnostních a jsem si plně vědom následků porušení ustanovení § 11 a následujících autorského zákona č. 121/2000 Sb., včetně možných trestněprávních důsledků vyplývajících z ustanovení § 152 trestního zákona č. 140/1961 Sb.“

V Brně dne: **25. května 2009**

.....
podpis autora

P o d ě k o v á n í

Děkuji vedoucímu diplomové práce Ing. Petru Pivoňkovi, CSc. za účinnou metodickou, pedagogickou a odbornou pomoc a další cenné rady při zpracování mé diplomové práce.

V Brně dne: **25. května 2009**

.....
podpis autora

1. ÚVOD	8
2. PROCES ADAPTACE.....	9
3. ŘÍZENÍ PROCESŮ.....	11
3.1 DISKRÉTNÍ EKVIVALENT PID REGULÁTORU	12
3.2 DISKRÉTNÍ EKVIVALENT β -PID REGULÁTORU	14
3.3 TAKAHASHIHO REGULÁTOR	15
4. MODEL Y PRO IDENTIFIKACI PROCESŮ.....	17
4.1 PARAMETRICKÉ MODEL Y MA, AR, ARMA	18
4.2 MODEL Y DYNAMICKÝCH SYSTÉMŮ	20
4.2.1 Model y s chybou rovnice (EEM)	21
4.2.1 Model y s chybou výstupu (OEM)	23
4.2.2 Modelování neuronovou sítí.....	24
5. IDENTIFIKACE	26
5.1 ALGORITMY IDENTIFIKACE NA BÁZI METOD NEJMENŠÍCH ČTVERCŮ	26
5.1.1 Jednorázová metoda nejmenších čtverců (LS)	27
5.1.1 Rekurzivní metoda nejmenších čtverců (RLS).....	28
5.1.2 Rekurzivní metoda nejmenších čtverců s konečným datovým horizontem (FDW-RLS).....	31
5.1.3 Zjednodušená rekurzivní metoda nejmenších čtverců s konečným datovým horizontem (SFDW-RLS).....	32
5.2 TECHNIKY VEDOUcí NA ZPŘESNĚNí ODHADU PARAMETRŮ U METOD NEJMENŠíCH ČTVERCŮ.....	32
5.2.1 Metody pomocných proměnných (RIV).....	32
5.2.2 Metody pseudolineární regrese (RPLR)	36
5.3 TECHNIKY PRO POTLAČOVÁNí STARÉ INFORMACE.....	39
5.3.1 Konstantní exponenciální zapomínání.....	39
5.3.2 Konstantní směrové zapomínání.....	41
5.3.3 Adaptivní směrové zapomínání	42
5.3.4 Směrové zapomínání založené na dekompozici informační matice.....	43
5.3.5 Adaptivní směrové zapomínání založené na dekompozici informační matice.....	44

5.4	TECHNIKY PRO DODRŽENÍ POZITIVNÍ DEFINITNOSTI KOVARIANČNÍ MATICE	45
5.4.1	Filtr REFIL	45
5.4.2	Filtr LDFIL	53
5.5	IDENTIFIKACE UMĚLÝMI NEURONOVÝMI SÍTĚMI	55
5.5.1	Back Propagation (BP)	55
5.5.2	Marquardt-Levenberg (ML)	58
5.6	NÁVRH PARAMETRŮ REGULÁTORU MODIFIKOVANOU METODOU ZIEGLERA A NICHOLSE	59
6.	POROVNÁNÍ VLASTNOSTÍ ALGORITMŮ OPTIMALIZAČNÍ ÚLOHY	62
	GRAFICKÉ PROSTŘEDÍ.....	63
6.1	POROVNÁNÍ VLASTNOSTÍ IDENTIFIKAČNÍCH ALGORITMŮ NA REÁLNÉ SOUSTAVĚ	64
6.2	OVĚŘENÍ CHOVÁNÍ ADAPTIVNÍCH REGULÁTORŮ NA SIMULOVANÝCH SOUSTAVÁCH	70
6.3	OVĚŘENÍ CHOVÁNÍ ADAPTIVNÍCH REGULÁTORŮ NA REÁLNÝCH SOUSTAVÁCH.....	72
7.	ZÁVĚR.....	84
8.	SEZNAM POUŽITÝCH ZDROJŮ	86

1. ÚVOD

V případě adaptivního řízení se kvalita regulace odvíjí od dosaženého souladu chování systému s jeho modelem, neboť předpokládáme, že regulátor navržený na kvalitní model bude dostatečně dobře pracovat i na reálném procesu. V diplomové práci je proto řešena zejména problematika průběžné parametrické identifikace v uzavřené smyčce. Úlohou regulátoru je v tomto případě stabilizovat proces a kompenzovat poruchy, tedy nalézt takovou posloupnost akčních zásahů, která by zajistila, aby se střední hodnota regulované veličiny blížila žádané hodnotě. Tato skutečnost spolu s působením šumu a nepřesností měření, v důsledku kvantifikace měřené veličiny A/D převodníky, podstatně zhoršuje možnost identifikace. Cílem diplomové práce je uvedení a rozšíření stávajícího aparátu identifikačních algoritmů pro dosažení potřebné numerické spolehlivosti a stability. Problematika adaptivního řízení s průběžnou identifikací je v práci řešena přístupem vnučené separace řízení a identifikace. Pro V/V identifikaci jsou využívány přístupy klasických metod založených na rekurzivním odhadu parametrů metodami nejmenších čtverců a neuronových estimátorů. Obě dvě třídy metod byly ověřovány v prostředí MATLAB/Simulink prostřednictvím rozhraní GUI (Graphical User Interface) a následně na reálných soustavách řízených automaty B&R.

2. PROCES ADAPTACE

Procesem adaptace se rozumí schopnost přizpůsobit chování změnám okolního prostředí, i když jsou tyto nepříznivé. Adaptace byl původně jev vlastní jen živé hmotě, u které se projevuje v nejryzejší podobě a s nejpestřejší mnohotvárností. Vyjma systémů přírodních jsou schopny adaptace rovněž systémy technické. Zaměříme-li se na adaptivní řídicí systémy, jejichž rozvoj motivovala skutečnost, že řada procesů v průmyslové praxi je provázána změnou dynamiky výstupních veličin, máme k řešení dispozici celou řadu matematických prostředků využívajících principů umělé inteligence, expertních systémů, fuzzy logiky apod. Změna dynamiky průmyslových systémů může nastat vlivem změn v provozních režimech (pracovního bodu), změnou vlastností surovin a zařízení. Při změnách v procesu je řízení pevně nastavenými řídicími systémy neoptimální a v krajních případech vede až na selhání celého regulačního pochodu. V práci budou dále řešeny pouze systémy kybernetické splňující následující předpoklady [1]

- mohou měnit svůj stav nebo svoji strukturu
- můžeme ovlivňovat jejich stav a výstup

Obecně definujeme adaptivní systém jako systém se třemi vstupy zastoupenými řídicí veličinou w zadávanou uživatelem, neměřitelnou poruchou v , informací o požadovaném chování Ω a jediným výstupem y reprezentujícím chování systému.

$$y = f(w, v, \theta) \quad (2.1)$$

Ke každému projevu prostředí w a v je přiřazován jediný výstup y . Změna výstupu y se uskutečňuje prostřednictvím změny parametrů θ , které jsou obvykle neznámé. Za parametr θ se pro každou kombinaci (w, y, θ) dosazuje jeho odhad $\hat{\theta}$ tak, aby byla minimalizována ztrátová funkce Q za jednotku času nebo vymezený časový interval

$$Q(\Omega, w, v, \hat{\theta}) = \min(\Omega, w, v, \theta) \quad (2.2)$$

Adaptací tak rozumíme proces hledání $\hat{\theta}$ a trvá tak dlouho, dokud není tento parametr nalezen. Charakteristickým rysem adaptivního systému je fakt, že k procesu

adaptace dochází vždy při změně projevu prostředí, tj. hodnot w , v nebo požadovaného chování Ω .

V současnosti mohou být adaptivní řídicí systémy klasifikovány do tří základních skupin [1]

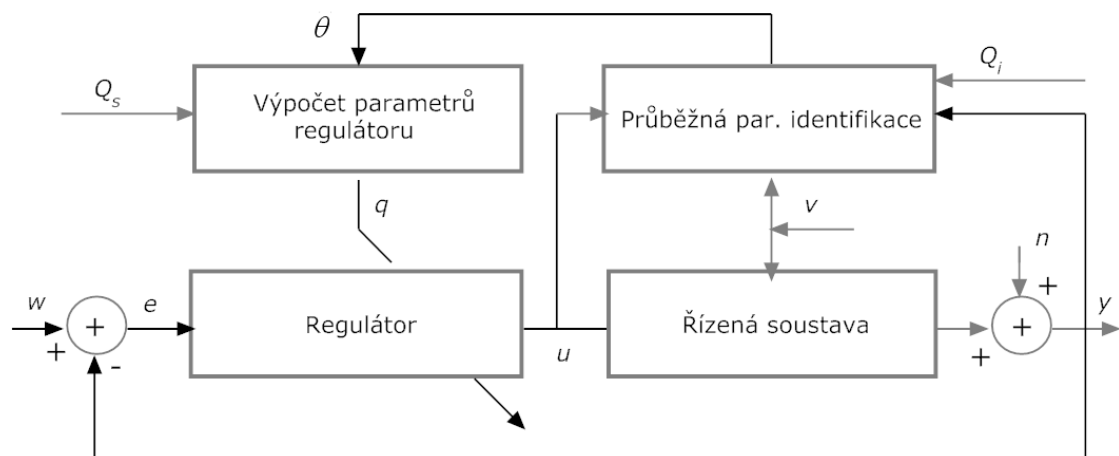
- adaptivní systémy založené na heuristickém přístupu
- adaptivní systémy s referenčním modelem (MRAC)
- samočinně se nastavující regulátory (STC)

Specifickou skupinou jsou samočinně se nastavující regulátory, které na rozdíl od dvou výše uvedených přístupů vyžadují detailní znalost dynamiky řízené soustavy. Samotná syntéza regulátoru se pak opírá o znalost modelu procesu a lze ji provádět podle známých algoritmů, jako jsou metoda přiřazení pólů (Pole Placement), minimalizace rozptylu výstupu (Minimum Variance), podle lineárního kvadratického kritéria (Linear Quadratic) a metody číslicové syntézy PID regulátorů. V některých případech neslouží identifikační procedura k určování odhadu parametrů soustavy $\hat{\theta}$, nýbrž vztah mezi vstupem a výstupem procesu je definován přímo parametry regulátoru, bez toho aniž aby se tyto přepočítávaly z parametrů modelu $\hat{\theta}$. Pro tyto regulátory se užívá pojmenování přímé (implicitní – např. přímý neuronový regulátor), kdežto regulátory využívající v syntéze znalost parametrů $\hat{\theta}$ nesou označení nepřímé (explicitní).

3. ŘÍZENÍ PROCESŮ

V diplomové práci bude výhradně řešena problematika explicitních adaptivních regulátorů s pevně zvolenou periodou vzorkování T_s s průběžnou parametrickou identifikací spadajících do třídy STC. V současné době není známo obecné řešení adaptivní řídicí úlohy s průběžnou identifikací vyhovující v praxi. Požadavkem je optimalizace akčních zásahů tak, aby byl zaručen stupeň perzistentního vybuzení řízené soustavy a současně splněny požadavky kritéria kvality regulace – tzv. duální řízení. Proto se při řešení využívá tzv. vnucené separace řízení a identifikace [1]. Princip spočívá v postupu

1. Vektor parametrů θ podstoupený identifikačním algoritmem se pro daný krok k řízení považuje za známý a je roven bodovému odhadu, tj. $\theta = \hat{\theta}(k)$.
2. Na základě aposteriorní znalosti soustavy se pro zvolené kritérium kvality regulace spočte právě potřebný akční zásah $u(k)$
3. Po získání nových vzorů učení stávajících z $u(k)$ a výstupu soustavy $y(k)$ je výpočtem rekurzivního identifikačního algoritmu aktualizován odhad parametrů $\hat{\theta}(k + 1)$ a celý postup se opakuje nově pro $\hat{\theta}(k + 1)$.



Obrázek 1: Blokové schéma explicitního adaptivního regulátoru. (Q_s -kritérium syntézy řízení, Q_i -kritérium identifikace, $q(k)$ -parametry regulátoru, $v(k)$ -měřitelná porucha, $n(k)$ -neměřitelná porucha).

3.1 DISKRÉTNÍ EKVIVALENT PID REGULÁTORU

Pro nalezení popisu diskretního ekvivalentu PID regulátoru vyjdeme z přenosové funkce spojitého PID regulátoru s filtrací derivační složky ve tvaru

$$G_R(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K \left(1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d s}{N s + 1} \right) \quad (3.1)$$

K proporcionální zesílení, T_i integrační časová konstanta, T_d derivační časová konstanta, N filtrační konstanta derivační složky volena obvykle v rozsahu $N \in \langle 3; 20 \rangle$. Význam filtru v derivační složce přenosu

$$G_d(s) = \frac{T_d s}{N s + 1} \quad (3.2)$$

spočívá v omezení zesílení signálu o frekvenci vyšší nebo rovné frekvenci šumu. Jeho použití se přirozeně nabízí s ohledem na fyzikální realizovatelnost derivace. Jinak je tomu v případě diference $(1 - z^{-1})$, která je plně realizovatelná, avšak ve své čisté podobě v číslicových regulátorech

$$G_d(z) = \frac{T_d}{T_s} (1 - z^{-1}) \quad (3.3)$$

pro potřeby praxe nevhodná. V případě diskretního řízení je pro vlastní realizace PID regulátoru nezbytné, aby frekvence vyšší než je frekvence vzorkování ω_s byly potlačeny vhodným číslicovým filtrem. V opačném případě amplituda rušivého signálu, kterým bývá zatížen výstupní signál z procesu, může neúměrně narůstat působením derivační složky. Zejména pak při volbě krátké periody vzorkování T_s . Pro potlačení vlivu působení rušivého signálu v číslicových regulátorech jsou známy tyto techniky filtrace derivační složky [11]

- diskretní ekvivalent spojitě derivační složky

$$G_d(z) = N \frac{1 - z^{-1}}{1 - e^{-\frac{NT_s}{T_d}} z^{-1}} \quad (3.4)$$

- Tustinova aproximace

$$G_d(z) = \frac{2NT_d}{2T_d + NT_s} \frac{1 - z^{-1}}{1 - \frac{2T_d - NT_s}{2T_d + NT_s} z^{-1}} \quad (3.5)$$

- zpětná diference

$$G_d(z) = \frac{NT_d}{T_d + NT_s} \frac{1 - z^{-1}}{1 - \frac{T_d}{T_d + NT_s} z^{-1}} \quad (3.6)$$

- ekvivalentní plochy

$$G_d(z) = \frac{T_d}{T_s} \left(1 - e^{-\frac{NT_s}{T_d}} \right) \frac{1-z^{-1}}{1 - e^{-\frac{NT_s}{T_d}} z^{-1}} \quad (3.7)$$

Kritériem výběru techniky filtrování je její univerzálnost použití pro široký rozsah vzorkovacích period T_s , velikost útlumu rušivého signálu a samotná stabilita filtru.

Z pohledu stability poskytují řešení všechny výše zmíněné techniky filtrování pro libovolnou hodnotu T_s . Ačkoliv Tustinova aproximace může mít v některých případech kmitavou odezvu, a proto nemůže být obecně doporučena. Amplituda rušivého signálu je nejméně utlumována diskretním ekvivalentem spojitě složky a pro dlouhé periody vzorkování dokonce oceňuje poruchu více než nefiltrovaná diference.

Z vyhodnocení jednotlivých přístupů vyplývá, že universální a robustní řešení nabízí dvojice variant zpětná diference a filtrace podle ekvivalentních ploch. Tyto se od sebe v podstatě liší pouze vlastní interpretací limity zesílení N . Nejvíce se přibližuje vlastnostem spojitěho filtru (3.2) metoda ekvivalentních ploch [11], která nejhodněji potlačuje vliv poruchy.

Dalším nežádoucím jevem, vyskytujícím se především u číslicových regulátorů, je přebuzení integrační složky [8], tzv. windup. Diskretní přenos integrační (sumační) složky získáme diskretizací spojitě integrační složky při obdélníkové náhradě integrace zleva.

$$G_i(z) = Z^{-1}\{G_i(s)\} = Z^{-1}\left\{\frac{1}{T_i s}\right\} \quad (3.8)$$

$$G_i(z) = \frac{T_s}{T_i} \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}} \quad (3.9)$$

Potom výsledný přenos diskretního PID regulátoru je

$$G_R(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = K(1 + G_i(z) + G_d(z)) \quad (3.10)$$

K přebuzení dochází tehdy, převyšuje-li hodnota produkovaná integrační složkou regulátoru hodnotu, kterou je akční člen schopen zpracovat. V případě přebuzení integrační složky dochází ke zpomalení přechodového děje, neboť při změně znaménka regulační odchylky musí regulátor nejprve od-integrovat na-

integrovanou hodnotu. Pro omezení přebuzení (antiwindup) se v jednodušším případě zavádí saturace integrační složky regulátoru. Tento způsob vychází z fyzikální podstaty PID regulátoru, neboť integrátor realizovaný operačními zesilovači je schopen integrovat vstupní signál do určité maximální hodnoty podmíněné napájecímú napětím. Vhodnější řešení nabízí dynamické omezení integrační složky s modelem akčního členu [8]. K dynamickému omezení integrační složky dochází v návaznosti na omezení akčního zásahu a to v případě, kdy je záporně vzatá diference mezi požadovaným $u(k)$ a skutečným $u_c(k)$ akčním zásahem nenulová. Tato diference je přes sledovací časovou konstantu T_t přiváděna na vstup integračního členu, kde v případě přebuzení pracuje jako záporná vazba a začne omezovat hodnotu na integrátoru. Při operátorovém popisu algoritmu vycházíme ze znalosti, že se jedná o MISO systém se dvěma vstupy a jedním výstupem

$$G_{iE}(z) = \frac{T_s}{T_i} \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}} \quad (3.11)$$

$$G_{iU_{u_c-u}}(z) = \frac{T_s}{T_t} \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}} \quad (3.12)$$

$$Y_i(z) = \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}} \begin{pmatrix} T_s & T_s \\ T_i & T_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E(z) \\ U_{u_c-u}(z) \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

Zápis algoritmu dynamického omezení integrační složky pomocí diferenční rovnice má podobu

$$y_i(k+1) = y_i(k) + K \left(\frac{1}{T_i} e(k) + \frac{1}{T_t} (u_c - u(k)) \right) T_s \quad (3.14)$$

Akční zásah diskrétního ekvivalentu PID regulátoru je generován podle vztahu

$$U(z) = K \left(E(z) + \begin{pmatrix} G_{iE}(z) & G_{iU_{u_c-u}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E(z) \\ U_{u_c-u}(z) \end{pmatrix} + G_d(z)E(z) \right) \quad (3.15)$$

tento tvar regulátoru bývá označován jako polohový tvar regulátoru.

3.2 DISKRÉTNÍ EKVIVALENT β -PID REGULÁTORU

V případě, že požadujeme aperiodický děj [1, 8], tj. omezení překmitu výstupní veličiny $y(k)$ při změně žádané hodnoty $w(k)$, využíváme změněné

struktury regulátoru. U regulátoru typu S-PD vstupuje záporně vzata veličina z procesu $e(k)$ pouze do sumačního členu. U regulátoru typu PS-D vstupuje regulační odchylka $e(k)$ pouze do proporcionální a sumační složky regulátoru. Algoritmus diskrétního β -PID regulátoru v operátorovém tvaru je

(3.16)

$$U(z) = K \left(\beta W(z) - Y(z) + (G_{iE}(z) \quad G_{iU_{uc-u}}) \begin{pmatrix} E(z) \\ U_{uc-u}(z) \end{pmatrix} - G_d(z)Y(z) \right)$$

Parametr β je volen v rozsahu $\beta \in \langle 0; 1 \rangle$ a optimalizuje odezvu zpětnovazebního obvodu vzhledem ke změně žádané hodnoty. Krajní hodnoty parametru určují volbu regulátoru S-PD a PS-D.

3.3 TAKAHASHIHO REGULÁTOR

V případě, že nemůžeme dodržet přesnou periodu vzorkování, ale je znám časový úsek, který uplynul od předešlého akčního zásahu, přecházíme od polohové k přírůstkové variantě diskrétního PID regulátoru. Přírůstek akčního zásahu je dán

$$\Delta u(k) = u(k) - u(k-1) \quad (3.17)$$

Akční zásah diskrétního β -PID regulátoru s filtrací derivační složky podle (3.4) vyjádříme diferenční rovnicí

$$u(k) = K \left(\beta w(k) - y(k) + \frac{T_s}{T_i} \sum_{i=1}^k e(i) - N(y(k) - y(k-1)) \right) + y_d(k-1) e^{-\frac{NT_s}{T_d}} \quad (3.18)$$

$$y_d(k) = y_d(k-1) e^{-\frac{NT_s}{T_d}} - N(y(k) - y(k-1)) \quad (3.19)$$

Vypočítáme přírůstek $\Delta u(k)$ a tím definujeme rovnici přírůstkového algoritmu

$$u(k) = K \left(\beta (w(k) - w(k-1)) - (y(k) - y(k-1)) + \frac{T_s}{T_i} e(k) - N(y(k) - 2y(k-1) + y(k-2)) \right) + (y_d(k-1) - y_d(k-2)) e^{-\frac{NT_s}{T_d}} + u(k-1) \quad (3.20)$$

po malé úpravě (3.21)

$$\Delta u(k) = K \left(\beta + \frac{T_s}{T_i} \right) w(k) - K\beta w(k-1) - K \left(1 + \frac{T_s}{T_i} + N \right) y(k)$$

$$+K(1 + 2N)y(k - 1) - KNy(k - 2) + (y_d(k - 1) - y_d(k - 2))e^{-\frac{NT_s}{T_d}}$$

Takahashiho regulátor pro omezení překmitů přechodového děje při změně žádané hodnoty využívá rovněž změněné konstrukce regulátoru [1, 8]. Algoritmus je ve formě přírůstkového tvaru a popisuje jej rovnice (3.22)

$$u(k) = K(y(k - 1) - y(k)) + T_i e(k) + T_d(2y(k - 1) - y(k - 2) - y(k)) \\ + u(k - 1)$$

4. MODELÝ PRO IDENTIFIKACI PROCESŮ

Metody pro získání modelu procesu na základě V/V měření ve svém základním členění dělíme dle následujících kritérií

- podle způsobu estimace parametrů modelu
 - jednorázová identifikace – parametry modelu získáme jednorázovým výpočtem z celé množiny naměřených dat
 - průběžná (on-line) identifikace – parametry modelu jsou postupně zpřesňovány (aktualizovány) s přibývajícími daty rekurzivním výpočtem
- podle typu estimovaného modelu
 - neparametrická identifikace – získaný model je ve tvaru charakteristiky a výsledný tvar modelu získáme nepřímo její analýzou
 - parametrická identifikace – výsledný model je zastupován několika parametry přímo vedoucích na vstupně/výstupní popis soustavy

Z hlediska potřeb adaptivního řízení jsou pro identifikaci procesu využívány právě průběžné parametrické metody identifikace. Cílem identifikace je v tomto případě přiblížit vlastnosti procesu a vytvořit tak dostatečně věrohodný model reprezentující chování procesu. Pojmeme model tedy rozumíme fyzický rozdíl mezi skutečností (reálnou soustavou) a jejím matematickým modelem.

Z důvodu formálního souhlasu z-transformace a pro posunutí v čase vyskytujících se v téže rovnici [5, 14, 18] zavedeme operátory posunutí q a q^{-1} .

Pro posunutí dopředu q platí

$$qu(k) = u(k + 1) \quad (4.1)$$

Pro posunutí dozadu q^{-1} platí

$$q^{-1}u(k) = u(k - 1) \quad (4.2)$$

4.1 PARAMETRICKÉ MODELY MA, AR, ARMA

Předpokládejme obecný systém, jehož chování popisuje diskretní přenosová funkce

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_{n_b} z^{-n_b}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_{n_a} z^{-n_a}} \quad (4.3)$$

Odezvou systému na jednotkový vstupní signál $\eta(k)$ získáme přechodovou funkci $h(k)$

$$h(k) = Z^{-1}\{H(z)\}$$

$$h(k) = -\sum_{i=1}^{n_a} a_i h(k-i) + \sum_{i=1}^{n_b} b_i \eta(k-i) \quad (4.4)$$

Na základě platnosti vztahu mezi přechodovou $h(k)$ a impulzní $g(k) = Z^{-1}\{G(z)\}$ funkcí

$$H(z) = \frac{z}{z-1} G(z) \Rightarrow G(z) = (1 - z^{-1})H(z) \quad (4.5)$$

$$h(k) = \sum_{i=0}^k g(i) \Rightarrow g(k) = h(k) - h(k-1) \quad (4.6)$$

určíme parametrický model soustavy typu konečná impulsová odezva (FIR – Finite Impulse Response), který je rovněž znám jako model vážený průměr (MA - Moving Average).

MA model (Moving Average)

Model je ve tvaru

$$G(z) = B(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} \quad (4.7)$$

$$y(k) = G(q^{-1}) u(k) \quad (4.8)$$

$$y(k) = \sum_{i=1}^{n_g} g_i u(k-i) \quad (4.9)$$

kde $G(q^{-1}) = g_1 q^{-1} + \dots + g_{n_g} q^{-n_g}$

Polynom $G(q^{-1})$ získáme jako odezvu systému (4.3) na jednotkový impuls $\delta(k)$.

Pro jednotlivé členy polynomu $G(q^{-1})$, koeficienty impulzní funkce, platí

$$g_i = -\sum_{j=1}^{n_a} a_j g_{i-j} + \sum_{j=1}^{n_b} b_j \delta_{i-j}$$

V případě, že všechny koeficienty (včetně neuvažovaného g_0) mají hodnotu

$$g_i = \frac{1}{n+1}$$

kde n je řád filtru, jedná se o filtr typu klouzavý průměr. Výhodou filtru je jeho snadná realizace a navíc vede na lineární regresi, z tohoto důvodu se nejčastěji využívá k modelování poruchy rekurzivními algoritmy.

AR model (Auto - Regressive)

Model je typu nekonečná impulzová odezva (IIR - Infinite Impulse Response) a je určen podle rovnice

$$G(z) = \frac{1}{A(z)} = \frac{Y(z)}{U(z)} \quad (4.10)$$

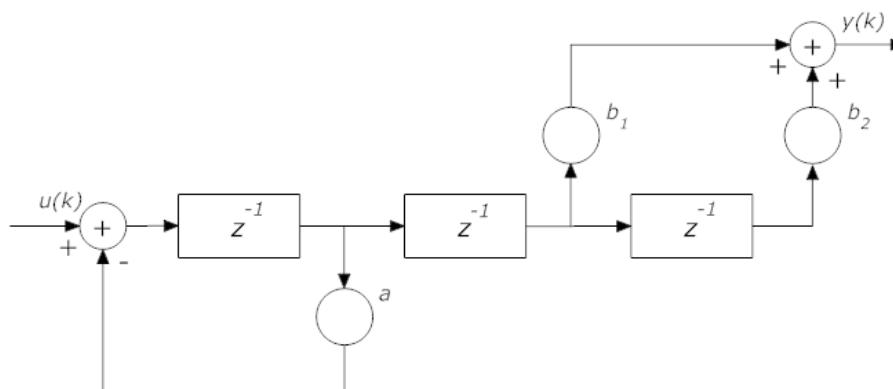
Predikce výstupu modelu závisí na okamžité hodnotě vstupního signálu [1, 8] a na minulých hodnotách výstupů vážených koeficienty a_i , proto je model nazýván autoregresní.

ARMA model (Auto - Regressive Moving Average)

Model je stejně jako model AR typu IIR. Na příkladě obecného systému prvního řádu s dopravním zpožděním rovnému $1,5T_s$ (4.11) bude odvozen jednorázový výpočet odhadu parametrů pro tento model.

$$G(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_1z^{-2} + b_2z^{-3}}{1 + az^{-1}} = \frac{Y(z)}{U(z)} \quad (4.11)$$

Blokové schéma modelu



Obrázek 2: ARMA model.

$$y(0) = 0$$

$$y(1) = 0$$

$$y(2) = b_1u(0)$$

$$y(3) = b_1u(1) + b_2u(0) - ab_1u(0)$$

$$y(4) = b_1u(2) + b_2u(1) - ab_1u(1) - ab_2u(0) + aab_1u(0)$$

Rovnice jsou sestavovány ve shodě s diferenční rovnicí modelu

$$y(k) = b_1u(k-1) + b_2u(k-2) - ay(k-1) \quad (4.12)$$

Hledané parametry získáme řešením soustavy rovnic, přičemž předpokládáme, že hodnoty zpožděných vstupů a výstupů jsou známé měřené veličiny. Z výpočtu je rovněž patrné, že stanovení parametrů modelu pro zadaný systém je fyzikálně realizovatelné až v pátém kroku výpočtu.

4.2 MODEL Y DYNAMICKÝCH SYSTÉMŮ

Obecná struktura modelu modelujícího deterministickou i stochastickou část procesu je zapsána pomocí operátoru q^{-1} ve tvaru [5, 14]

$$A(q^{-1})y(k) = \frac{B(q^{-1})}{F(q^{-1})}u(k) + \frac{C(q^{-1})}{D(q^{-1})}e_s(k) \quad (4.13)$$

Zohledníme-li dopravní zpoždění rovno n_k násobku vzorkovací periodě T_s

$$A(q^{-1})y(k) = q^{-n_k} \frac{B(q^{-1})}{F(q^{-1})}u(k) + \frac{C(q^{-1})}{D(q^{-1})}e_s(k) \quad (4.14)$$

kde

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1q^{-1} + \dots + a_{n_a}q^{-n_a} \quad (4.15)$$

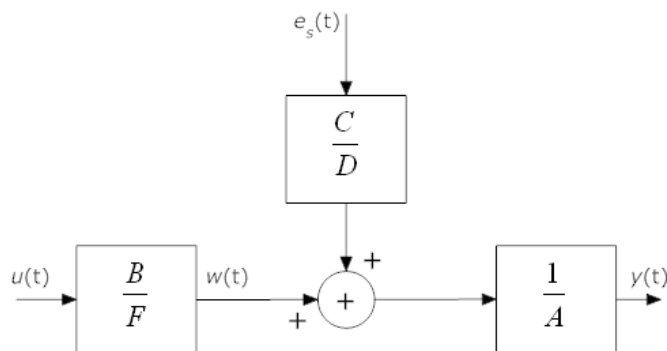
$$B(q^{-1}) = b_1q^{-1} + \dots + b_{n_b}q^{-n_b} \quad (4.16)$$

$$C(q^{-1}) = 1 + c_1q^{-1} + \dots + c_{n_c}q^{-n_c} \quad (4.17)$$

$$D(q^{-1}) = 1 + d_1q^{-1} + \dots + d_{n_d}q^{-n_d} \quad (4.18)$$

$$F(q^{-1}) = 1 + f_1q^{-1} + \dots + f_{n_f}q^{-n_f} \quad (4.19)$$

jsou jednotlivé polynomy, $u(k)$ je budící signál vstupující do soustavy, $y(k)$ je výstup ze soustavy a $e_s(k)$ je neměřitelný šum. Blokové schéma obecného modelu v souladu s rovnicí (4.14) je



Obrázek 3: Blokové schéma obecného modelu.

Uvedený model je většinou příliš obecný, zjednodušením, položením některých polynomů rovny 1, obdržíme libovolný lineární model umožňující průběžnou identifikaci.

4.2.1 Modely s chybou rovnice (EEM)

Model s chybou rovnice (Equation Error Model) předpokládá vstup poruchy $e_s(k)$ mající vlastnosti bílého šumu přímo do diferenční rovnice [5, 14], odtud název metody.

ARX model ($C = D = F = 1$)

$$y(k) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u(k) + \frac{1}{A(q^{-1})} e_s(k) \quad (4.20)$$

model zapsaný ve tvaru diferenční rovnice

$$y(k) = -\sum_{i=1}^{n_a} a_i y(k-i) + \sum_{i=1}^{n_b} b_i u(k-i) + e_s(k) \quad (4.21)$$

převedením na zápis pomocí lineární regrese obdržíme

$$y(k) = \varphi^T(k)\theta + e_s(k) \quad (4.22)$$

$$\theta^T = (b_1 \ b_2 \ \dots \ b_{n_b} \ a_1 \ a_2 \ \dots \ a_{n_a}) \quad (4.23)$$

$$(4.24)$$

$$\varphi^T(k) = (u(k-1) \ u(k-2) \ \dots \ u(k-n_b) - y(k-1) - y(k-2) \ \dots \\ - y(k-n_a))$$

kde

$$n = n_a + n_b$$

$\varphi(k)$ – je sloupcový n -řádkový vektor měřených dat (vektor pozorování)

θ – je sloupcový n -řádkový vektor parametrů vyšetřovaného modelu

odhad výstupu pak vede na lineární regresi

$$\hat{y}(k|\theta) = \varphi^T(k)\theta \quad (4.25)$$

Model předpokládá ovlivňování reálného procesu šumem vstupujícího pouze do jmenovatele přenosové funkce, v opačném případě získáme posunutý odhad parametrů.

Jednu z hlavních úloh při identifikaci parametrů regresního modelu hraje chyba predikce $\hat{e}(k)$.

$$\hat{e}(k) = \hat{y}(k|\theta) - y(k) \quad (4.26)$$

Podle $\hat{e}(k)$ primárně posuzujeme kvalitu estimovaného modelu. Pro kvalitní model je nutné dosáhnout nejen malé hodnoty $\hat{e}(k)$, ale taktéž toho, aby chyba odhadu $\hat{e}(k)$ reprezentovala nekorelovaný šum s přibližně nulovou střední hodnotou. Tohoto předpokladu se využívá zejména pro potlačení vlivu poruchy $e_s(k)$.

ARMAX model ($D = F = 1$)

Chyba rovnice je modelována jako MA

$$y(k) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u(k) + \frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})}e_s(k) \quad (4.27)$$

$$y(k) = -\sum_{i=1}^{n_a} a_i y(k-i) + \sum_{i=1}^{n_b} b_i u(k-i) + \sum_{i=1}^{n_c} c_i e_s(k-i) + e_s(k) \quad (4.28)$$

Pro určení predikce výstupu vyjdeme ze vztahu (4.28), kde nahradíme $e_s(k)$ odhadem, tedy chybou predikce $\hat{e}(k) = y(k) - \hat{y}(k|\theta)$.

$$A(q^{-1})y(k) = B(q^{-1})u(k) + C(q^{-1})[y(k) - \hat{y}(k|\theta)]$$

$$C(q^{-1})\hat{y}(k|\theta) = B(q^{-1})u(k) + [C(q^{-1}) - A(q^{-1})]y(k)$$

$$\hat{y}(k|\theta) = \frac{B(q^{-1})}{C(q^{-1})}u(k) + \left[1 - \frac{A(q^{-1})}{C(q^{-1})}\right]y(k) \quad (4.29)$$

Predikci $\hat{y}(k|\theta)$ získáme vyfiltrováním vstupního $u(k)$ a výstupního $y(k)$ signálu filtrem v jehož jmenovateli vystupuje polynom $C(q^{-1})$. Filtr charakterizuje vlastnosti poruchy a lze jej podobně jako soustavu popsat závislostí zpožděných vstupů a výstupů. Z důvodu neměřitelnosti $e_s(k)$, neboť ve změřené hodnotě nelze

stanovit co je skutečný výstup z procesu a co šum, výstup $e_s(k)$ nahrazujeme jeho odhadem $\hat{e}(k)$.

Predikci zapíšeme ve tvaru pseudolineární regrese (PLR).

$$\hat{y}(k|\theta) = \varphi^T(k, \theta)\theta \quad (4.30)$$

$$\theta^T = (b_1 b_2 \dots b_{n_b} a_1 a_2 \dots a_{n_a} c_1 c_2 \dots c_{n_c}) \quad (4.31)$$

$$(4.32)$$

$$\varphi^T(k) = (u(k-1) u(k-2) \dots u(k-n_b) - y(k-1) - y(k-2) \dots \\ - y(k-n_a) \hat{e}(k-1) \hat{e}(k-2) \dots \hat{e}(k-n_c))$$

Rovnice (4.30) je nazývána rovnicí pseudolineární regrese z důvodu nelineárního působení θ ve vektoru $\varphi^T(k, \theta)$.

ARARX model ($C = F = 1$)

Chyba rovnice je modelována jako AR

$$y(k) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u(k) + \frac{1}{A(q^{-1})D(q^{-1})} e_s(k) \quad (4.33)$$

ARARMAX model ($F = 1$)

Chyba rovnice je modelována jako ARMA proces.

$$y(k) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u(k) + \frac{c(q^{-1})}{A(q^{-1})D(q^{-1})} e_s(k) \quad (4.34)$$

S tímto modelem lze vytvořit libovolný model s chybou rovnice.

4.2.1 Modely s chybou výstupu (OEM)

Model s chybou výstupu (Output Error Model) předpokládá působení poruchy $e_s(k)$ mající vlastnosti bílého šumu na výstup z procesu (chyba měření), odtud plyne název metody [5, 14].

OEM model ($A = C = D = 1$)

$$y(k) = \frac{B(q^{-1})}{F(q^{-1})} u(k) + e_s(k) \quad (4.35)$$

$$w(k) = -\sum_{i=1}^{n_a} f_i w(k-i) + \sum_{i=1}^{n_b} b_i u(k-i) \quad (4.36)$$

kde $w(k)$ je výstupní veličina neovlivněná poruchou $e_s(k)$. Veličina $w(k)$ nemůže být přímo měřena, je odhadována $\hat{y}(k|\theta)$ a závisí tak na θ .

Formálně je model shodný s modelem ARMAX. Predikci výstupu zapisujeme opět ve tvaru pseudolineární regrese.

$$\hat{y}(k|\theta) = \varphi^T(k, \theta)\theta \quad (4.37)$$

$$\theta^T = (b_1 \ b_2 \ \dots \ b_{n_b} \ f_1 \ f_2 \ \dots \ f_{n_f}) \quad (4.38)$$

$$(4.39)$$

$$\varphi^T(k) = (u(k-1) \ u(k-2) \ \dots \ u(k-n_b) - w(k-1, \theta) - w(k-2, \theta) \ \dots \\ - w(k-n_w, \theta))$$

Jestliže je proces ovlivňován $e_s(k)$ takovým způsobem, jak je u modelu OEM předpokládáno, pro predikci výstupu platí $\hat{y}(k|\theta) = w(k, \theta)$ a ta pak závisí pouze na minulých hodnotách vstupů.

Box-Jenkins (BJ) model ($A = 1$)

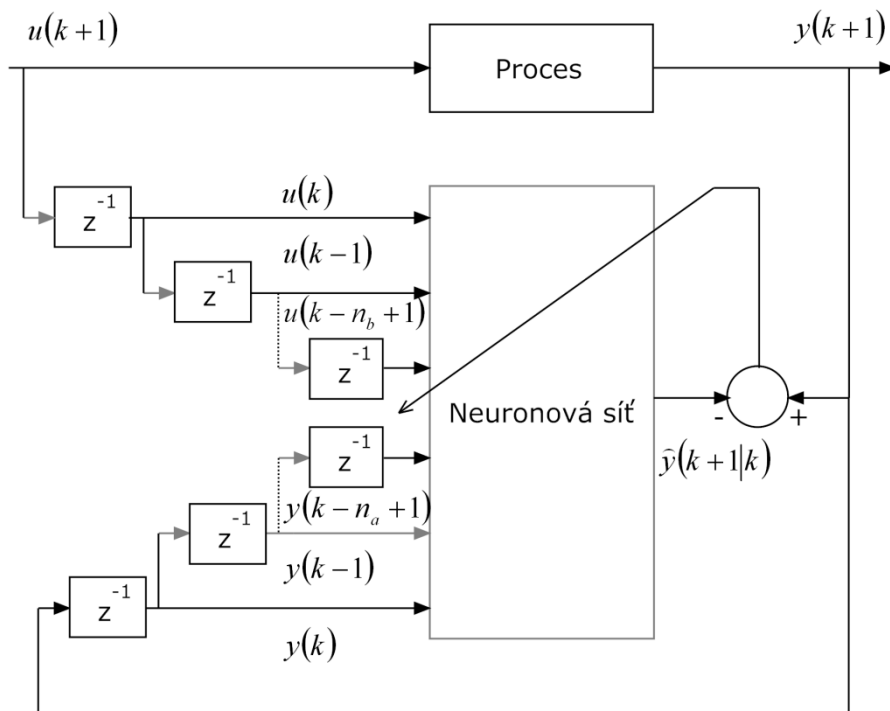
$$y(k) = \frac{B(q^{-1})}{F(q^{-1})}u(k) + \frac{C(q^{-1})}{D(q^{-1})}e_s(k) \quad (4.40)$$

Zde porucha $e_s(k)$ nevstupuje přímo jako bílý šum, ale je obarvená filtrem $\frac{C(q^{-1})}{D(q^{-1})}$.

S tímto modelem lze vytvořit jakýkoliv model s chybou výstupu.

4.2.2 Modelování neuronovou sítí

V případě modelování procesu neuronovou sítí zavádíme tzv. dynamickou neuronovou sít' obr. (4) [9, 19]. Na vstupy sítě přivádíme zpožděné hodnoty vstupů a výstupů. Učení sítě pak probíhá s učitelem, tj. porovnáváme hodnoty výstupů predikované sítě se skutečnými hodnotami výstupů procesu v odpovídajících si časových okamžicích. Takto můžeme modelovat soustavy lineární v parametrech, neboť jednokroková predikce je formulována ve tvaru lineární regrese. Navíc neuronová sít' umožňuje vstupně výstupní identifikaci nelineárních autoregresivních modelů s vnějším vstupem (NARX – Nonlinear AutoRegressive models with eXogenous inputs). Obecně můžeme zvolit libovolný algoritmus podporující učení s učitelem a topologii vlastní neuronové sítě.



Obrázek 4: Dynamická neuronová síť pro vstupně výstupní identifikaci procesu.

5. IDENTIFIKACE

V adaptivním řízení je identifikace parametrů soustavy právě tak důležitá jako samotná syntéza regulátoru. V průmyslových aplikacích se v převážné míře odhadují parametry regresního modelu ARX metodou nejmenších čtverců. Volba struktury modelu při tom v zásadní míře ovlivňuje kvalitu identifikace a její nevhodná volba může vést až k selhání regulátoru. Ukazuje se, že při uvažování poruchové veličiny $e_s(k)$ je vhodnější užití regresního modelu ARMAX zpřesňujícího odhad parametrů, kterým navíc získáme model stochastické části procesu. Nevýhodou tohoto modelu může být pomalejší konvergence parametrů.

Identifikace procesu probíhá ve zpětnovazebním obvodu, nejčastěji se používá přímý přístup, tj. nepoužívá se žádaná hodnota $w(t)$, jenom vstup generovaný regulátorem (akční zásah) $u(t)$ a výstup $y(t)$ ze zpětnovazebního obvodu. Úlohou regulátoru je stabilizovat proces a kompenzovat poruchy, tato skutečnost spolu s vlivem A/D převodníku dále zhoršuje možnost estimace parametrů soustavy.

5.1 ALGORITMY IDENTIFIKACE NA BÁZI METOD NEJMENŠÍCH ČTVERCŮ

Jedním z hlavních problémů adaptivního řízení je sledování časově proměnných parametrů procesu. V případě metod nejmenších čtverců je nutné algoritmus rozšířit o techniku umožňující potlačování staré informace tzv. technikou zapomínání. Nejznámější je zapomínání exponenciální, kdy exponenciálně klesá vliv starších dat na odhady parametrů $\hat{\theta}(k)$ a jejich kovarianční matici $P(k)$.

$$P^{-1}(k+1) = \lambda_e P^{-1}(k) + \varphi(k+1)\varphi^T(k+1) \quad (5.1)$$

$$\hat{\theta}(k+1) = \hat{\theta}(k) + P(k+1)\varphi(k+1)[y(k+1) - \varphi^T(k+1)\hat{\theta}(k)] \quad (5.2)$$

Klasický algoritmus nejmenších čtverců s konstantním exponenciálním zapomínáním λ_e vykazuje dobré výsledky v případě perzistentně buzeného procesu, kdy data $\{\varphi(k)\}$ v sobě obsahují dostatečné množství informací o dynamice systému. Ovšem v případě nedostatečného buzení procesu vyvstává problém, že pouze část dat

by měla být nahrazena daty nově příchozími $\varphi(k)$. Následkem čehož mohou vlastní čísla kovarianční matice $P^{-1}(k)$ vést k nule a zesílení $P(k)\varphi(k)$ nabývat neomezených hodnot. Algoritmus se navíc stává náchylný na působení šumu. Tento fenomén je znám jako estimator windup.

S problematikou identifikace při adaptivním řízení jsou spojeny zejména tyto problémy.

- estimator windup – řeší se modifikací konstantního zapomínání na techniku obsahující v sobě schopnost měnit množství zapomínané informace v závislosti na charakteru dat
- kovarianční matice by měla být pozitivně definitní, v některých případech vlivem nepřesností, zaokrouhlovacích chyb, nedostatečným buzením soustavy a působením $e_s(k)$ může nastat, že bude indefinitní a získaný odhad parametrů může divergovat. – problému se předchází odmocninovými filtry
- vlivem $e_s(k)$ a chyby měření můžeme získat posunutý odhad parametrů vedoucí až na selhání regulátoru – zpřesnění odhadu lze docílit vhodnou volbou struktury modelu, která nejlépe vystihuje charakter procesu popř. zavedením pomocných instrumentů

5.1.1 Jednorázová metoda nejmenších čtverců (LS)

Regresní model ARX bez uvažování poruchové veličiny $e_s(k)$ u níž předpokládáme nulovou střední hodnotu je ve tvaru.

$$y(k) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u(k) \quad (5.3)$$

odtud diferenční rovnice

$$y(k) = -\sum_{i=1}^{n_a} a_i y(k-i) + \sum_{i=1}^{n_b} b_i u(k-i) \quad (5.4)$$

lineární regresi zapíšeme ve tvaru násobení dvou vektorů

$$y(k) = \varphi^T(k)\theta \quad (5.5)$$

Předchozí zápis rozšíříme o N měření a uvažujeme n hledaných parametrů

$$Y = \Phi\theta \quad (5.6)$$

kde

$$n = n_a + n_b$$

$Y^T = (y(1) \dots y(N))$ – je sloupcový N -řádkový vektor měřených výstupů

$\phi^T = (\varphi(1) \dots \varphi(N))$ – je matice o N -řádcích a n sloupcích

θ – je sloupcový n -řádkový vektor hledaných parametrů

Chyba odhadu

$$\hat{e} = \sum_{k=1}^N y(k) - \varphi^T(k)\theta = Y - \phi\theta \quad (5.7)$$

kde $\hat{e} = (\hat{e}(1) \dots \hat{e}(N))$

Metoda nejmenších čtverců vychází z minima účelové funkce [1, 8]

$$J(\theta) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \hat{e}^2(k) = \frac{1}{2} \hat{e}^T \hat{e} \quad (5.8)$$

Cílem je určit

$$\min_{\theta} J(\theta) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N [y(k) - \varphi^T(k)\theta]^2 = \frac{1}{2} (Y - \phi\theta)^T (Y - \phi\theta) \quad (5.9)$$

Minimum funkce nalezneme, položíme-li derivaci podle vektoru parametrů rovnou nule

$$0 = \left. \frac{\partial J(\theta)}{\partial \theta} \right|_{\theta=\hat{\theta}} = \frac{1}{2} [\phi^T (Y - \phi\theta) + (Y - \phi\theta)^T \phi]$$

získáme

$$0 = \left. \frac{\partial J(\theta)}{\partial \theta} \right|_{\theta=\hat{\theta}} = \phi^T (Y - \phi\theta) = \phi^T Y - \phi^T \phi\theta$$

$$\theta = (\phi^T \phi)^{-1} \phi^T Y \quad (5.10)$$

Matice $(\phi^T \phi)^{-1}$ nesmí být singulární, tj. nesmí obsahovat lineárně závislé vektory $\varphi(k)$, proto při odhadování požadujeme její pozitivní definitnost.

Vztah (5.10) lze zapsat do ekvivalentního tvaru

$$\theta = [\sum_{k=1}^N \varphi(k)\varphi^T(k)]^{-1} [\sum_{k=1}^N \varphi(k)y(k)] \quad (5.11)$$

5.1.1 Rekurzivní metoda nejmenších čtverců (RLS)

Cílem rekurzivního výpočtu je do stávajícího rozměru matice ϕ začlenit další měření, ta by bez redukce byla v každém kroku postupně rozšiřována o nový řádek.

Pro ilustraci vlastností rekurzivního výpočtu bude uveden motivační příklad.

Mějme model popsany rovnicí

$$y(k) = b \cdot k + y(k-1) + e_s(k) \quad (5.12)$$

$$b = \frac{1}{k} [y(k) - y(k-1) - e_s(k)] \quad (5.13)$$

kde $e_s(k)$ je porucha s rozptylem σ^2 a nulovou střední hodnotou.

Odhad parametru $\hat{\theta} = b$ ve smyslu minima kvadrátu odchylek může být střední hodnota.

$$\hat{\theta}(k) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \frac{1}{i} [y(i) - y(i-1) - e_s(i)] \quad (5.14)$$

Požadujeme, aby předchozí vzorec byl přepsán do rekurzivního tvaru tak, že $\hat{\theta}(k)$ bude roven minulému odhadu $\hat{\theta}(k-1)$ plus korekce. (5.15)

$$\begin{aligned} \hat{\theta}(k) &= \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \frac{1}{i} [y(i) - y(i-1)] \\ &= \frac{1}{k} \left\{ \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{i} [y(i) - y(i-1)] + \frac{1}{k} [y(k) - y(k-1)] \right\} \\ &= \frac{1}{k} \left\{ (k-1) \hat{\theta}(k-1) + \frac{1}{k} [y(k) - y(k-1)] \right\} \\ &= \hat{\theta}(k-1) + \frac{1}{k^2} \{ y(k) - y(k-1) - k \cdot \hat{\theta}(k-1) \} \end{aligned}$$

Z vlastností rekurzivního výpočtu vyplývá, že odhad $\hat{\theta}(k)$ bude mít s rostoucí k větší váhu a korekční člen naopak váhu menší. Korekční člen závisí na apriorní chybě predikce, tedy rozdílu mezi změřenou hodnotou výstupu a jeho nejnovějším odhadem. Před započítáním výpočtu je nutná inicializace $\hat{\theta}(0)$.

Pro odvození rekurzivní metody nejmenších čtverců [1, 8] uvažujme odhad parametru podle vzorce (5.16)

$$\begin{aligned} \hat{\theta}(k+1) &= (\phi^T(k+1)\phi(k+1))^{-1} \phi^T(k+1)Y(k+1) \\ &= [\sum_{i=1}^{k+1} \varphi(i)\varphi^T(i)]^{-1} [\sum_{i=1}^{k+1} \varphi(i)y(i)] \end{aligned}$$

Označíme

$$P(k+1) = (\phi^T(k+1)\phi(k+1))^{-1} = [\sum_{i=1}^{k+1} \varphi(i)\varphi^T(i)]^{-1} \quad (5.17)$$

kde $P(k)$ je kovarianční matice

Potom pro odhad můžeme psát (5.18)

$$\hat{\theta}(k+1) = P(k+1)\phi^T(k+1)Y(k+1) = P(k+1)[\sum_{i=1}^{k+1} \varphi(i)y(i)]$$

V každém kroku $k+1$ rozšíříme matici o jeden řádek

$$\hat{\theta}(k+1) = P(k+1)[\phi^T(k) \quad \varphi(k+1)] \begin{bmatrix} Y(k) \\ y(k+1) \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

$$P(k+1) = \left[[\phi^T(k) \quad \varphi(k+1)] \begin{bmatrix} \phi(k) \\ \varphi^T(k+1) \end{bmatrix} \right]^{-1} \quad (5.20)$$

$$= [\phi^T(k)\phi(k) + \varphi(k+1)\varphi^T(k+1)]^{-1}$$

nebo lépe výpočet v kroku $k+1$ vyjádříme rekurzivně, pro $P^{-1}(k+1)$ píšeme

$$P^{-1}(k+1) = P^{-1}(k) + \varphi(k+1)\varphi^T(k+1) \quad (5.21)$$

Dosazením $P^{-1}(k)$ do (5.19) jednoduše získáme rekurentní vztah pro $\hat{\theta}(k+1)$

$$\hat{\theta}(k+1) = P(k+1)[\sum_{i=1}^k \varphi(i)y(i) + \varphi(k+1)y(k+1)] \quad (5.22)$$

$$= P(k+1)[P^{-1}(k)\hat{\theta}(k) + \varphi(k+1)y(k+1)]$$

$$= \hat{\theta}(k) + P(k+1)\varphi(k+1)[y(k+1) - \varphi^T(k+1)\hat{\theta}(k)]$$

výraz $P(k+1)\varphi(k+1)$ označíme jako matici zesílení $K(k+1)$ a dostaneme

$$K(k+1) = P(k+1)\varphi(k+1) \quad (5.23)$$

$$\hat{\theta}(k+1) = \hat{\theta}(k) + K(k+1)[y(k+1) - \varphi^T(k+1)\hat{\theta}(k)] \quad (5.24)$$

S užitím lemmy o inverzi matice

$$[A + BCD]^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B[C^{-1} + DA^{-1}B]^{-1}DA^{-1} \quad (5.25)$$

aplikované na vzorec

$$P(k+1) = [P^{-1}(k) + \varphi(k+1)\varphi^T(k+1)]^{-1}$$

kde $A = P^{-1}(k)$, $B = \varphi(k+1)$, $C = 1$, $D = \varphi^T(k+1)$

určíme $P(k+1)$

$$P(k+1) = P(k) - \frac{P(k)\varphi(k+1)\varphi^T(k+1)P(k)}{1 + \varphi^T(k+1)P(k)\varphi(k+1)} \quad (5.26)$$

Dalšího zjednodušení dosáhneme dosazením rovnice (5.26) do vztahu (5.23) pro výpočet matice zesílení

$$K(k+1) = P(k+1)\varphi(k+1)$$

$$= P(k)\varphi(k+1) - \frac{P(k)\varphi(k+1)\varphi^T(k+1)P(k)\varphi(k+1)}{1 + \varphi^T(k+1)P(k)\varphi(k+1)}$$

$$= \frac{P(k)\varphi(k+1)}{1 + \varphi^T(k+1)P(k)\varphi(k+1)} \quad (5.27)$$

Výsledný algoritmus metody nejmenších čtverců je vyjádřen následujícími rekurentními vztahy

$$\hat{e}(k+1|k) = y(k+1) - \varphi^T(k+1)\hat{\theta}(k) \quad (5.28)$$

$$K(k+1) = \frac{P(k)\varphi(k+1)}{1+\varphi^T(k+1)P(k)\varphi(k+1)}$$

$$\hat{\theta}(k+1) = \hat{\theta}(k) + K(k+1)\hat{e}(k+1|k)$$

$$P(k+1) = P(k) - K(k+1)\varphi^T(k+1)P(k)$$

První rovnice vyjadřuje míru shody mezi procesem a jeho modelem, veličina $\hat{e}(k+1|k)$ představuje apriorní chybu predikce závisující na rozdílu mezi skutečným a odhadovaným výstupem. Matice zesílení $K(k)$ je v podstatě váhový součinitel určující, s jakou váhou bude daný rozdíl ovlivňovat vývoj parametrů $\hat{\theta}(k)$ modelu. Na kovarianční matici $P(k)$ můžeme pohlížet jako na akumulátor informací o minulých hodnotách vstupů a výstupů (regresních proměnných), přičemž prvky na její hlavní diagonále vyjadřují rozptyl mezi skutečnými a odhadovanými parametry soustavy.

Z důvodu rekurzivního výpočtu algoritmus vyžaduje počáteční nastavení $P(0)$ a $\hat{\theta}(0)$. V případě, že o soustavě nevíme nic, volíme

$$P(0) = 10^9 I$$

$$\hat{\theta}(0) = (1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0)$$

5.1.2 Rekurzivní metoda nejmenších čtverců s konečným datovým horizontem (FDW-RLS)

Metoda FDW-RLS [7] vychází z přístupu, že estimace parametrů $\hat{\theta}$ v každém kroku výpočtu probíhá na nejnovějším datovém horizontu délky p . Minimalizací účelové funkce

$$J(\theta) = \frac{1}{2} \sum_{k=N-p+1}^N \hat{e}^2(k) \quad (5.29)$$

získáme předpis pro FDW-RLS

$$\hat{e}(k+1|p) = y(k-p+1) + \varphi^T(k-p+1)\hat{\theta}(k) \quad (5.30)$$

$$P_\alpha(k+1) = P(k) + \frac{P(k)\varphi(k-p+1)\varphi^T(k-p+1)P(k)}{1-\varphi^T(k-p+1)P(k)\varphi(k-p+1)} \quad (5.31)$$

$$\alpha(k+1) = \hat{\theta}(k) - P_\alpha(k+1)\varphi(k-p+1)\hat{e}(k+1|p) \quad (5.32)$$

$$P(k+1) = P_\alpha(k+1) - \frac{P_\alpha(k+1)\varphi(k+1)\varphi^T(k+1)P_\alpha(k+1)}{1+\varphi^T(k+1)P_\alpha(k+1)\varphi(k+1)} \quad (5.33)$$

$$\hat{e}(k+1|k) = y(k+1) - \varphi^T(k+1)\alpha(k+1) \quad (5.34)$$

$$\hat{\theta}(k+1) = \alpha(k+1) + P(k+1)\varphi(k+1)\hat{e}(k+1|k) \quad (5.35)$$

kde $\alpha(k+1)$ a $P_\alpha(k+1)$ jsou pomocné proměnné. Algoritmus je vhodné inicializovat rekurzivní metodou nejmenších čtverců. Při sledování časově proměnných parametrů je vlivem iterativního výpočtu na horizontu pevné délky metoda náchylnější na estimator windup a současně na dodržení pozitivní definitnosti matice $P(k)$. Obecnou výhodou této metody oproti klasické rekurzivní metodě nejmenších čtverců je však zlepšení aproximačních vlastností.

5.1.3 Zjednodušená rekurzivní metoda nejmenších čtverců s konečným datovým horizontem (SFDW-RLS)

Dále byl odvozen zjednodušený algoritmus SFDW-RLS [7] kladoucí nižší nároky na výpočet. Jeho podstatnou nevýhodou je však častá divergence v důsledku nedodržení pozitivní definitnosti matice $P(k)$, navíc dosahuje nejvýše kvality identifikace jako klasická metoda FDW-RLS.

$$\hat{e}(k+1|k) = y(k+1) - \varphi^T(k+1)\hat{\theta}(k)$$

$$P_\alpha(k+1) = P(k) + \frac{P(k)\varphi(k-p+1)\varphi^T(k-p+1)P(k)}{1 - \varphi^T(k-p+1)P(k)\varphi(k-p+1)} \quad (5.36)$$

$$P(k+1) = P_\alpha(k+1) - \frac{P_\alpha(k+1)\varphi(k+1)\varphi^T(k+1)P_\alpha(k+1)}{1 + \varphi^T(k+1)P_\alpha(k+1)\varphi(k+1)} \quad (5.37)$$

$$\hat{\theta}(k+1) = \hat{\theta}(k) + P(k+1)\varphi(k+1)\hat{e}(k+1|k) \quad (5.38)$$

Algoritmus jako takový je pro potřeby adaptivního řízení, byť doplněný o techniku zapomínání, nevhodný. Patříčnými úpravami je však možné docílit jeho numerické stability a spolehlivosti.

5.2 TECHNIKY VEDOUcí NA ZPŘESNĚNí ODHADU PARAMETRŮ U METOD NEJMENŠíCH ČTVERCŮ

5.2.1 Metody pomocných proměnných (RIV)

Uvažujme systém modelovaný diferenční rovnicí

$$y(k) = -\sum_{i=1}^{n_a} a_i y(k-i) + \sum_{i=1}^{n_b} b_i u(k-i) + \hat{e}(k) \quad (5.39)$$

rovnicí vyjádříme ve tvaru lineární regrese.

$$y(k) = \varphi^T(k)\theta + \hat{e}(k) \quad (5.40)$$

Hledáním minima kriteriální funkce [4, 14, 17]

$$J(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \hat{e}^2(k) \quad (5.41)$$

obdržíme vztah pro výpočet parametrů

$$\hat{\theta} = \left[\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varphi(k)\varphi^T(k) \right]^{-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varphi(k)y(k) \right] \quad (5.42)$$

Dále uvažujme reálný proces generující data, tak jak je předpokládáno u modelu ARX.

$$y(k) = \varphi^T(k)\theta + e_s(k)$$

kde θ je vektor skutečných parametrů systému a $e_s(k)$ je šum nekorelovaný se vstupním signálem $u(k)$. V případě správného odhadu $\hat{\theta}$ by se vektory θ a $\hat{\theta}$ měly shodovat

$$\begin{aligned} \hat{\theta} - \theta &= \\ &= \left[\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varphi(k)\varphi^T(k) \right]^{-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varphi(k)y(k) - \left\{ \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varphi(k)\varphi^T(k) \right\} \theta \right] \\ &= \left[\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varphi(k)\varphi^T(k) \right]^{-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varphi(k)e_s(k) \right] = 0 \end{aligned} \quad (5.43)$$

Aby se předcházející rovnice rovnala nule, musí platit

1. $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varphi(i)\varphi^T(i)$ není singulární
2. $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varphi(i)e_s(i) = 0$

Opomineme-li případ první podmíněný informačním obsahem měřených dat, je pro splnění předpokladu nutné dodržet podmínku druhou. Myšlenkou metody je změnit vektor pozorování $\varphi(k)$ tak, aby byl co nejvíce korelovaný s nezašuměnými daty $\{\varphi(k)\}$ a co nejméně korelovaný s šumem $e_s(k)$. Snažíme se docílit

$$E\varphi(k)\hat{e}(k) = R_{\varphi\hat{e}}(0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varphi(i)\hat{e}(i) = 0 \quad (5.44)$$

Nevychýlený odhad parametrů ve shodě s výše popsanou strategií získáme výpočtem

$$\hat{\theta} = \left[\sum_{k=1}^N \xi(k)\varphi^T(k) \right]^{-1} \left[\sum_{k=1}^N \xi(k)y(k) \right] \quad (5.45)$$

za předpokladu platnosti

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi(i)\hat{e}(i) = 0 \quad (5.46)$$

kde $\xi(k)$ je označován jako vektor pomocných proměnných (instrumentů). K volbě instrumentů se používají dva základní přístupy

- metoda pomocných proměnných se zpožděnými pozorováními
- metoda pomocných proměnných s dodatečným modelem

5.2.1.1 Metoda pomocných proměnných se zpožděnými pozorováními (RIVd)

Vektor $\xi(k+1)$ pro model systému

$$y(k) = q^{-d} \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u(k) + \frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})} e_s(k)$$

je ve tvaru [4, 14, 17] (5.47)

$$\xi^T(k+1) = (u(k) u(k-1) \dots u(k-n_b+1) - y(k-n_c) - y(k-n_c-1) \dots - y(k-n_c-n_a+1))$$

$$\hat{\theta}^T(k+1) = (\hat{b}_1 \hat{b}_2 \dots \hat{b}_{n_b} \hat{a}_1 \hat{a}_2 \dots \hat{a}_{n_a})$$

kde n_c představuje počet kroků zpoždění pozorování. Aby získaný odhad byl nevychýlený, musí platit $n_c \geq \deg C(q^{-1})$.

5.2.1.2 Metoda pomocných proměnných s dodatečným modelem (RIVm)

Vektor $\xi(k+1)$ je daný předpisem (5.48)

$$\xi^T(k+1) = (u(k) u(k-1) \dots u(k-n_b+1) - y_{IV}(k) - y_{IV}(k-1) \dots - y_{IV}(k-n_a+1))$$

$$\hat{\theta}^T(k+1) = (\hat{b}_1 \hat{b}_2 \dots \hat{b}_{n_b} \hat{a}_1 \hat{a}_2 \dots \hat{a}_{n_a})$$

kde $y_{IV}(k)$ je generován podle následující rovnice [4, 14]

$$y_{IV}(k) = \xi^T(k) \hat{\theta}(k) \quad (5.49)$$

Instrument $\xi^T(k+1)$ není závislý na minulých hodnotách výstupů, ale na jejich odhadech, proto bude méně korelovat s poruchou a metoda teoreticky povede na neposunutý odhad parametrů.

On-line metoda s pomocnými proměnnými zůstává stejná jako u rekurzivních metod nejmenších čtverců. Dochází pouze k záměně vektoru $\varphi(k+1)$ za vektor $\xi(k+1)$, $\varphi^T(k)$ zůstává zachován.

RIV

$$\begin{aligned}\hat{e}(k+1|k) &= y(k+1) - \varphi^T(k+1)\hat{\theta}(k) \\ K(k+1) &= \frac{P(k)\xi(k+1)}{1+\varphi^T(k+1)P(k)\xi(k+1)} \\ \hat{\theta}(k+1) &= \hat{\theta}(k) + K(k+1)\hat{e}(k+1|k) \\ P(k+1) &= P(k) - K(k+1)\varphi^T(k+1)P(k)\end{aligned}\tag{5.50}$$

FDW-RIV

$$\begin{aligned}\hat{e}(k+1|p) &= y(k-p+1) + \varphi^T(k-p+1)\hat{\theta}(k) \\ P_\alpha(k+1) &= P(k) + \frac{P(k)\xi(k-p+1)\varphi^T(k-p+1)P(k)}{1-\varphi^T(k-p+1)P(k)\xi(k-p+1)}\end{aligned}\tag{5.51}$$

$$\alpha(k+1) = \hat{\theta}(k) - P_\alpha(k+1)\xi(k-p+1)\hat{e}(k+1|p)\tag{5.52}$$

$$P(k+1) = P_\alpha(k+1) - \frac{P_\alpha(k+1)\xi(k+1)\varphi^T(k+1)P_\alpha(k+1)}{1+\varphi^T(k+1)P_\alpha(k+1)\xi(k+1)}\tag{5.53}$$

$$\begin{aligned}\hat{e}(k+1|k) &= y(k+1) - \varphi^T(k+1)\alpha(k+1) \\ \hat{\theta}(k+1) &= \alpha(k+1) + P(k+1)\xi(k+1)\hat{e}(k+1|k)\end{aligned}\tag{5.54}$$

SFDW-RIV

$$\begin{aligned}\hat{e}(k+1|k) &= y(k+1) - \varphi^T(k+1)\hat{\theta}(k) \\ P_\alpha(k+1) &= P(k) + \frac{P(k)\xi(k-p+1)\varphi^T(k-p+1)P(k)}{1-\varphi^T(k-p+1)P(k)\xi(k-p+1)}\end{aligned}\tag{5.55}$$

$$P(k+1) = P_\alpha(k+1) - \frac{P_\alpha(k+1)\xi(k+1)\varphi^T(k+1)P_\alpha(k+1)}{1+\varphi^T(k+1)P_\alpha(k+1)\xi(k+1)}\tag{5.56}$$

$$\hat{\theta}(k+1) = \hat{\theta}(k) + P(k+1)\xi(k+1)\hat{e}(k+1|k)\tag{5.57}$$

Metody instrumentálních proměnných je nutné inicializovat, používá se většinou klasická metoda nejmenších čtverců. Horizont inicializace se volí 5-8 násobek počtu neznámých parametrů. Metody dávají kvalitní odhady modelu v případě působení vysokofrekvenčního šumu.

5.2.2 Metody pseudolineární regrese (RPLR)

Rodina metod RPLR využívá pseudolineární regrese ve smyslu predikce výstupu modelu $\hat{y}(k|\theta)$, neboť část veličin ve vektoru pozorování $\varphi^T(k, \theta)$ je odhadována, a podmíněně tak závisí na hodnotách parametrů θ .

$$\hat{y}(k|\theta) = \varphi^T(k, \theta)\theta$$

Metody v převážné míře vedou na odhadování regresních modelů ARMAX a ARARMAX popř. ARARX. V rámci identifikace získáme zpřesnění odhadu parametrů a model stochastické části procesu [4, 14]. Pro inicializaci volíme klasickou rekurzivní metodu nejmenších čtverců s horizontem inicializace v rozsahu 5-8 násobku počtu odhadovaných parametrů. Algoritmus rekurzivního výpočtu zůstává beze změny. Poznamenejme, že konvergence parametrů stochastické části procesu bývá pomalejší než konvergence polynomů $A(q)$ a $B(q)$.

5.2.2.1 Rozšířená metoda nejmenších čtverců (RELS)

Mějme diferenční rovnici popisující systém prvního řádu

$$y(k+1) = -a_1 y(k) + b_1 u(k) + c_1 e_s(k) + e_s(k+1)$$

Požadujeme, aby chyba predikce měla vlastnosti bílého šumu. Položíme kritérium pro minimalizaci

(5.58)

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [y(k+1) - \hat{y}(k+1|k)]^2 &= \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [-a_1 y(k) + b_1 u(k) + c_1 e_s(k) - \hat{y}(k+1|k)]^2 + \\ &+ \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [e_s(k+1)]^2 \end{aligned}$$

kde druhý člen nejsme schopni ovlivnit. Minima kritéria docílíme tak, že první člen položíme roven nule. Jestliže neznámé parametry nahradíme jejich odhady, získáme predikci výstupu modelu ve tvaru pseudolineární regrese

(5.59)

$$\hat{y}(k+1|k) = -\hat{a}_1(k)y(k) + \hat{b}_1(k)u(k) + \hat{c}_1(k)\hat{e}(k|k) = \varphi^T(k+1)\hat{\theta}(k)$$

V obecném případě je vektor pozorování a hledaných parametrů ve tvaru

$$\begin{aligned} \varphi^T(k+1) &= (u(k) u(k-1) \dots u(k-n_b+1) - y(k) - y(k-1) \dots \\ &- y(k-n_a+1) \hat{e}(k|k) \hat{e}(k+1|k+1) \dots \hat{e}(k-n_c+1|k-n_c+1) \end{aligned} \quad (5.60)$$

$$\hat{\theta}^T(k+1) = (\hat{b}_1 \hat{b}_2 \dots \hat{b}_{n_b} \hat{a}_1 \hat{a}_2 \dots \hat{a}_{n_a} \hat{c}_1 \hat{c}_2 \dots \hat{c}_{n_c})$$

5.2.2.2 Metoda maximální věrohodnosti (RMLLS)

Metoda je vylepšením rozšířené metody nejmenších čtverců. Vylepšení spočívá v tom, že vektor pozorování je filtrován přenosem $\frac{1}{C(k, q^{-1})}$ představujícího stochastickou část procesu [3, 18]. Tato modifikace zlepšuje konvergenci parametrů a rychlost snižování korelace mezi vektorem pozorování a chybou predikce. Nutnou podmínkou pro použití filtru je jeho stabilita. Stabilita polynomu $C(k, q^{-1})$ může být vyšetřena podle konvergence řady

$$\frac{1}{C(k, q^{-1})} = x(0) + x(1)q^{-1} + x(2)q^{-2} + \dots \quad (5.61)$$

V případě, že řada konverguje k nule, tedy platí $\lim_{k \rightarrow \infty} x(k) = 0$, je polynom stabilní. V opačném případě pro umístění kořenů do jednotkové kružnice zavádíme koeficient zkrácení $0.5 \leq \alpha \leq 0.99$

$$C(k, q^{-1}) = 1 + \alpha(k)\hat{c}_1(k)q^{-1} + \dots + \alpha(k)\hat{c}_{n_c}(k)q^{-n_c} \quad (5.62)$$

Tento se podle rekurentního výpočtu v každém kroku odhadování asymptoticky blíží k jedné

$$\alpha(k) = \alpha(0)\alpha(k-1) + 1 - \alpha(0) \quad (5.63)$$

Vektor pozorování a odhadovaných parametrů má pak v obecném případě tvar

$$\begin{aligned} \varphi^T(k+1) &= \frac{1}{C(k, q^{-1})} (u(k) u(k-1) \dots u(k-n_b+1) - y(k) - y(k-1) \dots \\ &\quad - y(k-n_a+1) \hat{e}(k|k) \hat{e}(k+1|k+1) \dots \hat{e}(k-n_c+1|k-n_c+1) \quad (5.64) \\ \hat{\theta}^T(k+1) &= (\hat{b}_1 \hat{b}_2 \dots \hat{b}_{n_b} \hat{a}_1 \hat{a}_2 \dots \hat{a}_{n_a} \hat{c}_1 \hat{c}_2 \dots \hat{c}_{n_c}) \end{aligned}$$

5.2.2.3 Chyba výstupu s rozšířeným modelem predikce (ROEEPMLS)

Metoda v sobě zahrnuje vlastnosti modelu s chybou výstupu a chybou rovnice. Pro reálné procesy je výhodná zejména z důvodu potlačování kvantifikačního šumu. Hlavní rozdíl oproti metodě RELS spočívá v nahrazení měřené veličiny $y(k)$ ve vektoru pozorování $\varphi^T(k)$ jejím aposteriorním odhadem $\hat{y}(k|k)$ [3]. Veličina $y(k)$ je poruchou ovlivňována přímo, kdežto $\hat{y}(k|k)$ nepřímo. To je důvod proč metoda

podává lepší výsledky na konečném časovém horizontu než RELS. Tvar vektoru pozorování a hledaných parametrů je pak

$$\begin{aligned} \varphi^T(k+1) &= (u(k) \ u(k-1) \dots \ u(k-n_b+1) - \hat{y}(k|k) - \hat{y}(k-1|k-1) \dots \\ &\quad - \hat{y}(k-n_a+1|k-n_a+1) \ \hat{e}(k|k) \ \hat{e}(k+1|k+1) \dots \ \hat{e}(k-n_c+1|k-n_c+1) \\ \hat{\theta}^T(k+1) &= (\hat{b}_1 \ \hat{b}_2 \dots \ \hat{b}_{n_b} \ \hat{a}_1 \ \hat{a}_2 \dots \ \hat{a}_{n_a} \ \hat{h}_1 \ \hat{h}_2 \dots \ \hat{h}_{n_c}) \end{aligned} \quad (5.65)$$

kde koeficienty polynomu $C(k, q^{-1})$ získáme řešením rovnice

$$c_i = a_i + h_i \quad (5.67)$$

5.2.2.4 Zobecněná metoda nejmenších čtverců (RGLS)

Zobecněná metoda nejmenších čtverců modeluje poruchu procesem AR. Cílem je vybělení chyby predikce pro model ve tvaru [3, 18]

$$y(k)A(q^{-1}) = q^{-d}B(q^{-1})u(k) + \frac{e_s(k)}{D(q^{-1})} \quad (5.68)$$

Pro podání důkazu předpokládejme systém prvního řádu, jehož chování popisuje diferenční rovnice

$$y(k+1) = b_1 u(k) - a_1 y(k) + \frac{e_s(k+1)}{1+d_1 q^{-1}} \quad (5.69)$$

Označme

$$\alpha(k+1) = [1 + a_1 q^{-1}]y(k+1) - b_1 u(k) = \frac{e_s(k+1)}{1+d_1 q^{-1}} \quad (5.70)$$

čímž dostaneme

$$(1 + d_1 q^{-1})\alpha(k+1) = e_s(k+1) \quad (5.71)$$

Pro apriorní predikci výstupu v případě neznámých parametrů obdržíme

$$\hat{y}(k+1|k) = \hat{b}_1(k)u(k) - \hat{a}_1(k)y(k) - \hat{d}_1(k)\alpha(k) = \varphi^T(k+1)\hat{\theta}(k) \quad (5.72)$$

Regresní vektory jsou v obecném případě ve tvaru

$$\begin{aligned} \varphi^T(k+1) &= (u(k) \ u(k-1) \dots \ u(k-n_b+1) - y(k) - y(k-1) \dots \\ &\quad - y(k-n_a+1) - \alpha(k) - \alpha(k-1) \dots - \alpha(k-n_d+1) \end{aligned} \quad (5.73)$$

$$\hat{\theta}^T(k+1) = (\hat{b}_1 \ \hat{b}_2 \dots \ \hat{b}_{n_b} \ \hat{a}_1 \ \hat{a}_2 \dots \ \hat{a}_{n_a} \ \hat{d}_1 \ \hat{d}_2 \dots \ \hat{d}_{n_d}) \quad (5.74)$$

kde proměnná $\alpha(k)$ je v souladu se vztahem (5.70) generována rovnicí

$$\alpha(k) = A(q^{-1})y(k) - q^{-d}B(q^{-1})u(k-1) \quad (5.75)$$

5.2.2.5 Maticově rozšířená metoda nejmenších čtverců (REMLS)

REMLS je metoda odhadující parametry regresního ARARMAX modelu

$$y(k) = q^{-d} \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u(k) + \frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})D(q^{-1})} e_s(k) \quad (5.76)$$

Abychom získali vektorovou formu regresní rovnice, vektor hledaných parametrů a vektor pozorování jsou rozšířeny na tvar [7]

$$\varphi(k+1) = \begin{bmatrix} \varphi_{a,b}(k+1) \\ \varphi_{c,d}(k+1) \end{bmatrix}, \quad \hat{\theta}(k+1) = \begin{bmatrix} \hat{\theta}_{a,b}(k+1) \\ \hat{\theta}_{c,d}(k+1) \end{bmatrix} \quad (5.77)$$

$$\theta_{a,b}^T(k+1) = (\hat{b}_1 \hat{b}_2 \dots \hat{b}_{n_b} \hat{a}_1 \hat{a}_2 \dots \hat{a}_{n_a})$$

$$\theta_{c,d}^T(k+1) = (\hat{c}_1 \hat{c}_2 \dots \hat{c}_{n_c} \hat{d}_1 \hat{d}_2 \dots \hat{d}_{n_d}) \quad (5.78)$$

$$\varphi_{a,b}^T(k+1) = (u(k) u(k-1) \dots u(k-n_b+1) - y(k) - y(k-1) \dots - y(k-n_a+1))$$

$$\varphi_{c,d}^T(k+1) = (-\hat{e}_c(k|k) - \hat{e}_c(k+1|k+1) \dots - \hat{e}_c(k-n_c+1|k-n_c+1) \hat{e}_d(k|k) \hat{e}_d(k+1|k+1) \dots \hat{e}_d(k-n_d+1|k-n_d+1)) \quad (5.79)$$

kde pro jednotlivé odhady platí

$$\hat{e}_c(k|k) = y(k) - \varphi_{a,b}^T(k) \theta_{a,b}(k) \quad (5.80)$$

$$\hat{e}_d(k|k) = \hat{e}_c(k|k) - \varphi_{c,d}^T(k) \theta_{c,d}(k) \quad \text{nebo} \quad \hat{e}_d(k|k) = y(k) - \varphi^T(k) \hat{\theta}(k) \quad (5.81)$$

5.3 TECHNIKY PRO POTLAČOVÁNÍ STARÉ INFORMACE

Z důvodu identifikace časově proměnných systémů je do identifikačních algoritmů vycházejících z metody nejmenších čtverců nutné zavést techniku umožňující jejich adaptivitu tak, aby bylo možné průběžně sledovat vývoj parametrů soustavy v čase.

5.3.1 Konstantní exponenciální zapomínání

Konstantní exponenciální zapomínání [1, 8] je vhodné pro estimaci plynule se měnících parametrů. Podstatou této techniky je rovnoměrné zapomínání veškeré staré informace. Neboť předpokládáme, že nová data vystihují proces lépe, než data

stará. Rovnice pro průběžné sledování parametrů získáme minimalizací modifikovaného kritéria

$$J(\theta) = \frac{1}{2} \sum_{i=k_0}^k \lambda_e^{k-i} \hat{e}^2(i) \quad (5.82)$$

V případě konečného datového horizontu pak

$$J(\theta) = \frac{1}{2} \sum_{i=k-p+1}^k \lambda_e^{k-i} \hat{e}^2(i) \quad (5.83)$$

kde $0 < \lambda_e \leq 1$ je faktor exponenciálního zapomínání. Pro $\lambda_e = 1$ se algoritmus zjednoduší na rekurzivní metodu nejmenších čtverců a všechna získaná data pak mají stejnou váhu na odhady parametrů. Malá hodnota koeficientu λ_e zrychluje adaptaci ovšem na úkor přesnosti a navíc vzrůstá citlivost algoritmu na působení šumu, proto se λ_e obvykle volí v rozsahu $0.995 \leq \lambda_e \leq 0.999$.

RLS s konstantním exponenciálním zapomínáním

$$\begin{aligned} \hat{e}(k+1|k) &= y(k+1) - \varphi^T(k+1)\hat{\theta}(k) \\ K(k+1) &= \frac{P(k)\varphi(k+1)}{\lambda_e + \varphi^T(k+1)P(k)\varphi(k+1)} \end{aligned} \quad (5.84)$$

$$\begin{aligned} \hat{\theta}(k+1) &= \hat{\theta}(k) + K(k+1)\hat{e}(k+1|k) \\ P(k+1) &= \frac{1}{\lambda_e} [P(k) - K(k+1)\varphi^T(k+1)P(k)] \end{aligned} \quad (5.85)$$

FDW-RLS s konstantním exponenciálním zapomínáním

$$P_\alpha(k+1) = P(k) + \frac{P(k)\varphi(k-p+1)\varphi^T(k-p+1)P(k)}{\lambda_e^{-p} - \varphi^T(k-p+1)P(k)\varphi(k-p+1)} \quad (5.86)$$

$$\begin{aligned} \hat{e}(k+1|p) &= y(k-p+1) + \varphi^T(k-p+1)\hat{\theta}(k) \\ \alpha(k+1) &= \hat{\theta}(k) - \lambda_e^p P_\alpha(k+1)\varphi(k-p+1)\hat{e}(k+1|p) \end{aligned} \quad (5.87)$$

$$P(k+1) = \frac{1}{\lambda_e} \left[P_\alpha(k+1) - \frac{P_\alpha(k+1)\varphi(k+1)\varphi^T(k+1)P_\alpha(k+1)}{\lambda_e + \varphi^T(k+1)P_\alpha(k+1)\varphi(k+1)} \right] \quad (5.88)$$

$$\begin{aligned} \hat{e}(k+1|k) &= y(k+1) - \varphi^T(k+1)\alpha(k+1) \\ \hat{\theta}(k+1) &= \alpha(k+1) + P(k+1)\varphi(k+1)\hat{e}(k+1|k) \end{aligned}$$

SFDW-RLS s konstantním exponenciálním zapomínáním

$$\hat{e}(k+1|k) = y(k+1) - \varphi^T(k+1)\hat{\theta}(k)$$

$$P_{\alpha}(k+1) = P(k) + \frac{P(k)\varphi(k-p+1)\varphi^T(k-p+1)P(k)}{\lambda_e^{-p+1} - \varphi^T(k-p+1)P(k)\varphi(k-p+1)} \quad (5.89)$$

$$P(k+1) = \frac{1}{\lambda_e} \left[P_{\alpha}(k+1) - \frac{P_{\alpha}(k+1)\varphi(k+1)\varphi^T(k+1)P_{\alpha}(k+1)}{\lambda_e + \varphi^T(k+1)P_{\alpha}(k+1)\varphi(k+1)} \right] \quad (5.90)$$

$$\hat{\theta}(k+1) = \hat{\theta}(k) + P(k+1)\varphi(k+1)\hat{e}(k+1|k)$$

V případě nedostatečně vybuzeného systému však může vlivem exponenciálního růstu kovarianční matice $P(k)$ s faktorem λ_e dojít k numerickému zhroucení odhadování, které může vést až na nestabilitu zpětnovazebního regulačního obvodu při adaptivním řízení.

5.3.2 Konstantní směrové zapomínání

Jako vhodnější filosofie k přístupu zapomínání se jeví zapomínat stará data pouze v případě, kdy mohou být nahrazena daty novými. Tento přístup bývá označován jako směrové zapomínání [2, 15]. Algoritmus předpokládá, že data mají směr a stará data mohou být zapomínána pouze v určitém specifickém směru.

RLS s konstantním směrovým zapomínáním

$$\hat{e}(k+1|k) = y(k+1) - \varphi^T(k+1)\hat{\theta}(k)$$

$$\zeta(k+1) = \varphi^T(k+1)P(k)\varphi(k+1) \quad (5.91)$$

$$\varepsilon^{-1}(k+1) = \lambda_e + \frac{1-\lambda_e}{\zeta(k+1)} \quad (5.92)$$

$$\hat{\theta}(k+1) = \hat{\theta}(k) + \frac{P(k)\varphi(k+1)}{1+\zeta(k+1)}\hat{e}(k+1|k) \quad (5.93)$$

$$P(k+1) = P(k) - \frac{P(k)\varphi(k+1)\varphi^T(k+1)P(k)}{\varepsilon(k+1)+\zeta(k+1)}, \quad \zeta(k+1) > 0 \quad (5.94)$$

$$P(k+1) = P(k), \quad \zeta(k+1) \leq 0 \quad (5.95)$$

kde $\zeta(k+1)$ je veličina označující míru informace obsažené ve vektoru dat $\varphi(k+1)$ a dovoluje obnovu matice $P(k)$ pouze v případě, kdy je pozitivně definitní, $\varepsilon(k+1)$ je faktor směrového zapomínání.

Algoritmus výrazně omezuje vzniku estimator windup jevu, obecně jej však neodstraňuje, nesou-li data málo informace. Metoda připouští užití i relativně

malých hodnot koeficientu λ_e oproti metodě s konstantním exponenciálním zapomínáním.

5.3.3 Adaptivní směrové zapomínání

Adaptivní směrové zapomínání důsledněji zabraňuje ztrátě části akumulované informace nekompensované ziskem informace nové a předchází vzniku estimator windup jevu. Odhad faktoru zapomínání $\lambda_e(k+1)$ se odvíjí od dosaženého souladu modelu s chováním reálného procesu a to tak, aby množství zapomínané informace bylo úměrné (při daném koeficientu úměrnosti ρ) očekávanému množství informace obsažené v posledních datech $\varphi(k+1)$ [15].

RLS s adaptivním směrovým zapomínáním

$$\begin{aligned}\hat{e}(k+1|k) &= y(k+1) - \varphi^T(k+1)\hat{\theta}(k) \\ \zeta(k+1) &= \varphi^T(k+1)P(k)\varphi(k+1) \\ \eta(k+1) &= \frac{\hat{e}^2(k+1|k)}{\lambda(k)}\end{aligned}\quad (5.96)$$

$$\begin{aligned}\lambda_e^{-1}(k+1) &= \\ &1 + (1 + \rho) \left[\ln(1 + \zeta(k+1)) - \frac{\zeta(k+1)}{1 + \zeta(k+1)} + \frac{\zeta(k+1)}{1 + \zeta(k+1)} \frac{(v(k)+1)\eta(k+1)}{1 + \zeta(k+1) + \eta(k+1)} \right]\end{aligned}\quad (5.97)$$

Pro pomalu se měnící parametry lze výraz (5.97) zjednodušit až na

$$\lambda_e^{-1}(k+1) = 1 + (1 + \rho) \frac{\zeta(k+1)}{1 + \zeta(k+1)} \frac{(v(k)+1)\eta(k+1)}{1 + \zeta(k+1) + \eta(k+1)}\quad (5.98)$$

$$v(k+1) = \lambda_e(k+1)(v(k) + 1)\quad (5.99)$$

$$\lambda(k+1) = \lambda_e(k+1) \left[\lambda(k) + \frac{\hat{e}^2(k+1|k)}{1 + \zeta(k+1)} \right]\quad (5.100)$$

$$\varepsilon^{-1}(k+1) = \lambda_e(k+1) + \frac{1 - \lambda_e(k+1)}{\zeta(k+1)}\quad (5.101)$$

$$\hat{\theta}(k+1) = \hat{\theta}(k) + \frac{P(k)\varphi(k+1)}{1 + \zeta(k+1)} \hat{e}(k+1|k)$$

$$P(k+1) = P(k) - \frac{P(k)\varphi(k+1)\varphi^T(k+1)P(k)}{\varepsilon(k+1) + \zeta(k+1)}, \quad \zeta(k+1) > 0$$

$$P(k+1) = P(k), \quad \zeta(k+1) \leq 0$$

kde $v(k+1)$ a $\lambda(k+1)$ jsou skalární veličiny akumulující informaci získanou z dat $\{\varphi(k)\}$, $\eta(k+1)$ vypovídá o množství informace obsažené v nově příchozích datech $\varphi(k+1)$. Počáteční hodnoty se volí

$$v(0) = 10^{-6}$$

$$\lambda(0) = 10^{-3}$$

$$\rho = 0,99$$

Algoritmus odhaduje hustotu pravděpodobnosti parametrů podmíněnou daty $\{\varphi(k)\}$ na základě Bayesova vztahu. Ačkoliv je metoda relativně robustní může dojít k nárůstu některých vlastních čísel matice $P(k)$ a tím ke ztrátě schopnosti sledovat vývoj v určitém směru.

5.3.4 Směrové zapomínání založené na dekompozici informační matice

Motivací pro návrh algoritmu byla skutečnost, že ke vzniku estimator windup jevu dochází v důsledku jednotného zapomínání všech prvků matice $P(k)$. Jinými slovy, potlačování staré informace se provádí prostřednictvím skaláru λ_e , což přirozeně vede na myšlenku nahradit skalár λ_e maticí [3].

$$P^{-1}(k+1) = F(k+1)P^{-1}(k) + \varphi(k+1)\varphi^T(k+1) \quad (5.102)$$

Kde $F(k+1)$ je tzv. matice zapomínání. Vhodnou maticí $F(k+1)$ je možné přizpůsobovat vlastní čísla $P(k)$ s různou vahou, a překonat tak nedostatek exponenciálního zapomínání. Matice $F(k+1)$ navíc zaručuje, že $P(k)$ bude pozitivně definitní po celou dobu odhadování a nedojde ke ztrátě významné informace o dynamice systému v případě nedostatečného buzení. Označme

$$P^{-1}(k+1) = F(k+1)\bar{P}^{-1}(k) + \varphi(k+1)\varphi^T(k+1) \quad (5.103)$$

$$\bar{P}^{-1}(k) = F(k+1)P^{-1}(k) \quad (5.104)$$

$\bar{P}^{-1}(k)$ informační maticí. V každém kroku výpočtu je pak zapomínána pouze specifická část informační matice a to ta, která není v určitém smyslu ortogonální k prostoru buzení. Výsledné rovnice popisující aktualizaci $P^{-1}(k+1)$ a odhad parametrů $\hat{\theta}(k+1)$ jsou dány vztahy

$$\hat{e}(k+1|k) = y(k+1) - \varphi^T(k+1)\hat{\theta}(k)$$

$$M(k+1) = (1 - \lambda_e) \frac{P^{-1}(k)\varphi(k+1)\varphi^T(k+1)}{\varphi^T(k+1)P^{-1}(k)\varphi(k+1)}, \quad |\varphi_w(k+1)| > \varepsilon_w \quad (5.105)$$

$$M(k+1) = 0 \quad |\varphi_w(k+1)| \leq \varepsilon_w \quad (5.106)$$

$$P^{-1}(k+1) = [I - M(k+1)]P^{-1}(k) + \varphi(k+1)\varphi^T(k+1) \quad (5.107)$$

$$\hat{\theta}(k+1) = \hat{\theta}(k) + P(k+1)\varphi(k+1)\hat{e}(k+1|k)$$

kde $M(k+1) = I - F(k+1)$,

vektor $\varphi_w(k+1) = (w(k-1) \dots w(k-n) - y(k-1) \dots - y(k-n))$

a skalár ε_w představuje pásmo necitlivosti s hodnotou odpovídající odhadované úrovni šumu σ^2 .

Užitím lemmy o inverzi matice (5.25) získáme vhodnější zápis algoritmu

$$\hat{e}(k+1|k) = y(k+1) - \varphi^T(k+1)\hat{\theta}(k)$$

$$\bar{P}(k) = P(k) + \frac{1-\lambda_e}{\lambda_e} \frac{\varphi(k+1)\varphi^T(k+1)}{\varphi^T(k+1)P^{-1}(k)\varphi(k+1)}, \quad |\varphi_w(k+1)| > \varepsilon_w \quad (5.108)$$

$$\bar{P}(k+1) = P(k), \quad |\varphi_w(k+1)| \leq \varepsilon_w \quad (5.109)$$

$$P(k+1) = \bar{P}(k) - \frac{\bar{P}(k)\varphi(k+1)\varphi^T(k+1)\bar{P}(k)}{1+\varphi^T(k+1)\bar{P}(k)\varphi(k+1)} \quad (5.110)$$

$$\hat{\theta}(k+1) = \hat{\theta}(k) + P(k+1)\varphi(k+1)\hat{e}(k+1|k)$$

5.3.5 Adaptivní směrové zapomínání založené na dekompozici informační matice

Myšlenkou algoritmu je využití přístupu maticového zapomínání kovarianční matice $P(k)$ s proměnným faktorem zapomínání λ_e . Algoritmus se tak dokáže rychleji přizpůsobovat změnám procesu oproti konstantnímu maticovému zapomínání, neboť zapomínání je úměrné informačnímu obsahu měřených dat $\{\varphi(k)\}$. Čímž současně poskytuje menší citlivost na působení poruchy $e_s(k)$.

$$\zeta(k+1) = \varphi^T(k+1)P(k)\varphi(k+1)$$

$$\eta(k+1) = \frac{\hat{e}^2(k+1|k)}{\lambda(k)}$$

$$\lambda_e^{-1}(k+1) =$$

$$1 + (1 + \rho) \left[\ln(1 + \zeta(k+1)) - \frac{\zeta(k+1)}{1+\zeta(k+1)} + \frac{\zeta(k+1)}{1+\zeta(k+1)} \frac{(v(k)+1)\eta(k+1)}{1+\zeta(k+1)+\eta(k+1)} \right]$$

Pro soustavu s pomalu se měnícími parametry je výhodnější zapomínat podle

$$\lambda_e^{-1}(k+1) = 1 + (1 + \rho) \frac{\zeta(k+1)}{1+\zeta(k+1)} \frac{(v(k)+1)\eta(k+1)}{1+\zeta(k+1)+\eta(k+1)}$$

$$v(k+1) = \lambda_e(k+1)(v(k)+1)$$

$$\lambda(k+1) = \lambda_e(k+1) \left[\lambda(k) + \frac{\hat{\theta}^2(k+1|k)}{1+\zeta(k+1)} \right]$$

$$\varepsilon^{-1}(k+1) = \lambda_e(k+1) + \frac{1-\lambda_e(k+1)}{\zeta(k+1)}$$

$$\hat{e}(k+1|k) = y(k+1) - \varphi^T(k+1)\hat{\theta}(k)$$

$$\hat{\theta}(k+1) = \hat{\theta}(k) + \frac{P(k)\varphi(k+1)}{1+\zeta(k+1)} \hat{e}(k+1|k)$$

$$\bar{P}(k) = P(k) + \frac{1-\lambda_e}{\lambda_e} \frac{\varphi(k+1)\varphi^T(k+1)}{\varphi^T(k+1)P^{-1}(k)\varphi(k+1)}, \quad |\varphi_w(k+1)| > \varepsilon_w$$

$$\bar{P}(k+1) = P(k), \quad |\varphi_w(k+1)| \leq \varepsilon_w$$

$$P(k+1) = \bar{P}(k) - \frac{\bar{P}(k)\varphi(k+1)\varphi^T(k+1)\bar{P}(k)}{1+\varphi^T(k+1)\bar{P}(k)\varphi(k+1)}$$

Poznamenejme, že aplikace adaptivního zapomínání dle Bayesova vztahu na klasické exponenciální zapomínání není vhodná. Exponenciální zapomínání nepřipouští příliš malé hodnoty λ_e . V případě malých hodnot λ_e je snížena přesnost odhadu parametrů a navíc se v návaznosti na nedodržení podmínky pozitivnosti matice $P(k)$ může dostavit numerické zhroucení algoritmu. Proto je adaptivní modifikace zapomínání využívána pouze v souvislosti se směrovým zapomínáním.

5.4 TECHNIKY PRO DODRŽENÍ POZITIVNÍ DEFINITNOSTI KOVARIANČNÍ MATICE

5.4.1 Filtr REFIL

Jednou z možností jak dodržet pozitivnost kovarianční matice je užití odmocninového filtru Refil. Kovarianční matice se rozkládá (faktorizuje) na produkt dvou matic ve tvaru

$$P(k) = Q(k)Q^T(k) \quad (5.111)$$

Jestliže matice $Q(k)$ je dolní (horní) trojúhelníková matice, pak se jedná o Choleskyho dekompozici (LU - Lower Upper) a $Q(k)$ se nazývá odmocninou matice $P(k)$. Identifikační algoritmus pak přímo nepracuje s maticí $P(k)$, ale obnovuje její

odmocninu $Q(k)$, čímž zaručuje pozitivní definitnost původní kovarianční matice $P(k)$. Matici $Q(k)$ získáme řešením paralelního algoritmu

$$q_{ii} = \sqrt{p_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} q_{ik}^2}, \quad q_{ij} = \frac{1}{q_{jj}} \left(p_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} q_{ik} q_{jk} \right) \quad \text{pro } i > j \quad (5.112)$$

Pro analytické vyjádření rekurentního algoritmu obnovujícího přímo rozklad $Q(k)$ a odhad parametrů $\hat{\theta}(k)$ vyjdeme ze vztahu pro výpočet $P(k)$ a $\hat{\theta}(k)$ dle rekurzivní metody nejmenších čtverců, tedy

$$\hat{\theta}(k+1) = \hat{\theta}(k) + \frac{P(k)\varphi(k+1)}{1+\varphi^T(k+1)P(k)\varphi(k+1)} \hat{e}(k+1|k) \quad (5.113)$$

$$P(k+1) = P(k) - \frac{P(k)\varphi(k+1)\varphi^T(k+1)P(k)}{1+\varphi^T(k+1)P(k)\varphi(k+1)}$$

Faktorizací kovarianční matice $P(k)$ získáme předpis

$$\begin{aligned} P(k+1) &= Q(k+1)Q^T(k+1) = Q_k Q^T - \frac{Q_k Q^T \varphi_{k+1} \varphi_{k+1}^T Q_k^T}{1+\varphi_{k+1}^T Q_k^T \varphi_{k+1}} \\ &= Q_k \left[I - Q^T \varphi_{k+1} \varphi_{k+1}^T Q \frac{1}{1+\varphi_{k+1}^T Q_k^T \varphi_{k+1}} \right] Q_k^T \\ &= Q_k \left[I - f_{k+1} f_{k+1}^T \frac{1}{1+f_{k+1}^T f_{k+1}} \right] Q_k^T \end{aligned} \quad (5.114)$$

$$\text{kde pomocný vektor je dán } f(k+1) = Q^T(k)\varphi(k+1) \quad (5.115)$$

Řešení se tím zjednoduší na hledání rozkladu pouze

$$\left[I - f_{k+1} f_{k+1}^T \frac{1}{1+f_{k+1}^T f_{k+1}} \right] = [I - \alpha f_{k+1} f_{k+1}^T] [I - \alpha f f^T]^T \quad (5.116)$$

$$= I - 2\alpha f_{k+1} f_{k+1}^T + \alpha^2 f f^T f f^T \quad (5.117)$$

Položením rovnosti odpovídajících si částí zápisu (5.117) získáme kvadratickou rovnici pro hledaný skalár α . Z důvodu přehlednosti zavedeme pomocnou proměnnou $\beta(k)$

$$\beta(k+1) = 1 + f^T(k+1)f(k+1) \quad (5.118)$$

$$\frac{f_{k+1} f_{k+1}^T}{\beta_{k+1}} = 2\alpha f_{k+1} f_{k+1}^T - \alpha^2 f f^T f f^T = 2\alpha f_{k+1} f_{k+1}^T - (\beta_{k+1} - 1)\alpha^2 f f^T$$

$$\frac{1}{\beta_{k+1}} = 2\alpha - (\beta_{k+1} - 1)\alpha^2$$

$$0 = (\beta_{k+1}^2 - \beta)\alpha^2 - 2\beta\alpha + 1 \quad (5.119)$$

vyřešením rovnice (5.119) obdržíme hodnotu α pro kterou platí

$$\alpha_{1,2} = \frac{2\beta \pm \sqrt{4\beta^2 - 4(\beta^2 - \beta)}}{2(\beta^2 - \beta)} = \frac{\beta \pm \sqrt{\beta}}{\beta(\beta - 1)} = \frac{\sqrt{\beta}(\sqrt{\beta} \pm 1)}{\beta(\sqrt{\beta} + 1)(\sqrt{\beta} - 1)} \quad (5.120)$$

Výsledná dvojice možných řešení je

$$\alpha_1 = \frac{1}{\beta + \sqrt{\beta}}, \alpha_2 = \frac{1}{\beta - \sqrt{\beta}} \quad (5.121)$$

Dosazením např. α_1 do (5.116) a odtud v souladu s předpisem (5.114) získáme

$$Q_{k+1}Q^T = Q_k \left[I - \frac{f_{k+1}f^T}{\beta + \sqrt{\beta}} \right] \left[I - \frac{ff^T}{\beta + \sqrt{\beta}} \right]^T Q^T \quad (5.122)$$

Pro obnovu matice $Q(k)$ pak platí

$$Q(k+1) = Q(k) - \frac{Q(k)f(k+1)f^T(k+1)}{\beta(k+1) + \sqrt{\beta(k+1)}} \quad (5.123)$$

a pro přímý výpočet parametrů $\hat{\theta}(k)$ dle (5.113) z matice $Q(k)$ píšeme

$$\hat{\theta}(k+1) = \hat{\theta}(k) + \frac{Q(k)f(k+1)}{\beta(k+1)} \hat{e}(k+1|k) \quad (5.124)$$

Výsledný algoritmus metody nejmenších čtverců s filtrem Refil popisují následující vztahy

$$\hat{e}(k+1|k) = y(k+1) - \varphi^T(k+1)\hat{\theta}(k)$$

$$f(k+1) = Q^T(k)\varphi(k+1)$$

$$\beta(k+1) = 1 + f^T(k+1)f(k+1)$$

$$\omega(k+1) = \beta(k+1) + \sqrt{\beta(k+1)} \quad (5.125)$$

$$L(k+1) = Q(k)f(k+1) \quad (5.126)$$

$$\hat{\theta}(k+1) = \hat{\theta}(k) + \frac{L(k+1)}{\beta(k+1)} \hat{e}(k+1|k) \quad (5.127)$$

$$Q(k+1) = Q(k) - \frac{L(k+1)f^T(k+1)}{\omega(k+1)} \quad (5.128)$$

Počáteční nastavení $P(0)$ a $\hat{\theta}(0)$ se volí shodně s rekurzivní metodou nejmenších čtverců.

Principiálně stejná strategii odvození faktorizace $P(k)$ jaká byla užita pro algoritmus REFIL, jehož výsledné vztahy jsou mimo jiné uvedeny v literatuře [17, 13], může být aplikována na rekurzivní metody nejmenších čtverců a jejich varianty, užívajících jak techniky zapomínání tak současně techniky vedoucí na neposunutý odhad parametrů.

Odvodme nyní vztah pro metodu REFIL s konstantním exponenciálním zapomínáním. Vyjdeme opět z metody nejmenších čtverců, jejíž modifikované rovnice pro výpočet $P(k)$ a $\hat{\theta}(k)$ jsou

$$\hat{\theta}(k+1) = \hat{\theta}(k) + \frac{P(k)\varphi(k+1)}{\lambda_e + \varphi^T(k+1)P(k)\varphi(k+1)} \hat{e}(k+1|k) \quad (5.129)$$

$$P(k+1) = \frac{1}{\lambda_e} \left[P(k) - \frac{P(k)\varphi(k+1)\varphi^T(k+1)P(k)}{\lambda_e + \varphi^T(k+1)P(k)\varphi(k+1)} \right] \quad (5.130)$$

Zápis pro $P(k)$ ve shodě s Choleskyho dekompozici

$$P(k+1) = Q(k+1)Q^T(k+1) = \frac{1}{\lambda_e} Q_k \left[I - f_{k+1}f^T \frac{1}{\lambda_e + f^T f} \right] Q_k^T \quad (5.131)$$

hledáme rozklad

$$\begin{aligned} \left[I - f_{k+1}f^T \frac{1}{\lambda_e + f^T f} \right] &= [I - \alpha f_{k+1}f^T][I - \alpha f f^T]^T \\ &= I - 2\alpha f_{k+1}f^T + \alpha^2 f f^T f f^T \end{aligned} \quad (5.132)$$

zavedeme pomocnou proměnnou $\beta(k)$ a řešíme kvadratickou rovnici

$$\beta(k+1) = \lambda_e + f^T(k+1)f(k+1) \quad (5.133)$$

$$\frac{f_{k+1}f^T}{\beta_{k+1}} = 2\alpha f_{k+1}f^T - \alpha^2 f f^T f f^T = 2\alpha f_{k+1}f^T - (\beta_{k+1} - \lambda_e)\alpha^2 f f^T \quad (5.134)$$

$$0 = (\beta_{k+1}^2 - \lambda_e\beta)\alpha^2 - 2\beta\alpha + 1 \quad (5.135)$$

odtud řešením (5.135) získáme α

$$\alpha_{1,2} = \frac{2\beta \pm \sqrt{4\beta^2 - 4(\beta^2 - \lambda_e\beta)}}{2(\beta^2 - \lambda_e\beta)} = \frac{\beta \pm \sqrt{\lambda_e\beta}}{\beta(\beta - \lambda_e)} = \frac{\sqrt{\beta}(\sqrt{\beta} \pm \sqrt{\lambda_e})}{\beta(\sqrt{\beta} + \sqrt{\lambda_e})(\sqrt{\beta} - \sqrt{\lambda_e})} \quad (5.136)$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{\beta + \sqrt{\lambda_e\beta}}, \alpha_2 = \frac{1}{\beta - \sqrt{\lambda_e\beta}} \quad (5.137)$$

Obnova matice $Q(k)$ pro α_1 pak probíhá podle (5.139)

$$Q_{k+1}Q^T = \frac{1}{\sqrt{\lambda_e}} Q_k \left[I - \frac{f_{k+1}f^T}{\beta + \sqrt{\lambda_e\beta}} \right] \left[I - \frac{f f^T}{\beta + \sqrt{\lambda_e\beta}} \right]^T Q_k^T \frac{1}{\sqrt{\lambda_e}} \quad (5.138)$$

$$Q(k+1) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_e}} \left[Q(k) - \frac{Q(k)f(k+1)f^T(k+1)}{\beta(k+1) + \sqrt{\lambda_e\beta(k+1)}} \right] \quad (5.139)$$

Konečný zápis algoritmu REFIL s konstantním exponenciálním zapomínáním vyjádřený rekurentními vztahy je

$$\begin{aligned} \hat{e}(k+1|k) &= y(k+1) - \varphi^T(k+1)\hat{\theta}(k) \\ f(k+1) &= Q^T(k)\varphi(k+1) \\ \beta(k+1) &= \lambda_e + f^T(k+1)f(k+1) \\ \omega(k+1) &= \beta(k+1) + \sqrt{\lambda_e\beta(k+1)} \\ L(k+1) &= Q(k)f(k+1) \\ \hat{\theta}(k+1) &= \hat{\theta}(k) + \frac{L(k+1)}{\beta(k+1)} \hat{e}(k+1|k) \end{aligned} \quad (5.140)$$

$$Q(k+1) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_e}} \left[Q(k) - \frac{L(k+1)f^T(k+1)}{\omega(k+1)} \right] \quad (5.141)$$

Ačkoliv je tato metoda robustní co do konvergence parametrů, problematika estimator windup jím řešena není. Jako výhodnější spojení se jeví dekompozice $P(k)$ a techniky zapomínání zabraňující ztrátě akumulované informace v případě ustáleného stavu procesu. Možným řešením popsaných požadavků je algoritmus REFIL s adaptivním směrovým zapomínáním. Odvození metody je analogicky shodné s odvozením metody REFIL s konstantním exponenciálním zapomínáním, proto jen v krátkosti rekapitulujeme základní myšlenky.

Rekurzivní výpočet matice $P(k)$ doplněný o techniku adaptivního směrového zapomínání probíhá podle

$$P(k+1) = P(k) - \frac{P(k)\varphi(k+1)\varphi^T(k+1)P(k)}{\varepsilon(k+1) + \varphi^T(k+1)P(k)\varphi(k+1)}, \quad \zeta(k+1) > 0 \quad (5.142)$$

Rozklad $P(k)$ užitím Choleskyho dekompozice popisuje

$$P(k+1) = Q(k+1)Q^T(k+1) = Q_k \left[I - f_{k+1}f^T \frac{1}{\varepsilon_{k+1} + f^T f} \right] Q^T \quad (5.143)$$

řešení problému se zjednoduší na hledání rozkladu

$$\left[I - f_{k+1}f^T \frac{1}{\varepsilon_{k+1} + f^T f} \right] = [I - \alpha f_{k+1}f^T][I - \alpha f f^T]^T \quad (5.144)$$

opět řešíme kvadratickou rovnici

$$\beta(k+1) = \varepsilon(k+1) + f^T(k+1)f(k+1) \quad (5.145)$$

$$0 = (\beta_{k+1}^2 - \varepsilon_{k+1}\beta)\alpha^2 - 2\beta\alpha + 1 \quad (5.146)$$

jejím řešením je dvojice

$$\alpha_1 = \frac{1}{\beta + \sqrt{\varepsilon\beta}}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{\beta - \sqrt{\varepsilon\beta}} \quad (5.147)$$

Rovnice výsledného algoritmu REFIL s adaptivním směrovým zapomínáním je

$$\begin{aligned} \hat{e}(k+1|k) &= y(k+1) - \varphi^T(k+1)\hat{\theta}(k) \\ f(k+1) &= Q^T(k)\varphi(k+1) \\ \zeta(k+1) &= f^T(k+1)f(k+1) \end{aligned} \quad (5.148)$$

$$\eta(k+1) = \frac{\hat{e}^2(k+1|k)}{\lambda(k)} \quad (5.149)$$

$\lambda_e^{-1}(k+1) =$

$$1 + (1 + \rho) \left[\ln(1 + \zeta(k+1)) - \frac{\zeta(k+1)}{1 + \zeta(k+1)} + \frac{\zeta(k+1)}{1 + \zeta(k+1)} \frac{(v(k)+1)\eta(k+1)}{1 + \zeta(k+1) + \eta(k+1)} \right] \quad (5.150)$$

Pro soustavu s pomalu se měnícími parametry namísto (5.150) píšeme

$$\lambda_e^{-1}(k+1) = 1 + (1 + \rho) \frac{\zeta(k+1)}{1+\zeta(k+1)} \frac{(v(k+1)\eta(k+1))}{1+\zeta(k+1)+\eta(k+1)} \quad (5.151)$$

$$v(k+1) = \lambda_e(k+1)(v(k) + 1) \quad (5.152)$$

$$\lambda(k+1) = \lambda_e(k+1) \left[\lambda(k) + \frac{\hat{e}^2(k+1|k)}{1+\zeta(k+1)} \right] \quad (5.153)$$

$$\varepsilon^{-1}(k+1) = \lambda_e(k+1) + \frac{1-\lambda_e(k+1)}{\zeta(k+1)} \quad (5.154)$$

$$\varepsilon(k+1) = \varepsilon_{min}, \quad \varepsilon(k+1) < \varepsilon_{min} \quad (5.155)$$

$$\beta(k+1) = \varepsilon(k+1) + \zeta(k+1) \quad (5.156)$$

$$\omega(k+1) = \beta(k+1) + \sqrt{\varepsilon(k+1)\beta(k+1)} \quad (5.157)$$

$$L(k+1) = Q(k)f(k+1)$$

$$\hat{\theta}(k+1) = \hat{\theta}(k) + \frac{L(k+1)}{1+f^T(k+1)f(k+1)} \hat{e}(k+1|k) \quad (5.158)$$

$$Q(k+1) = Q(k) - \frac{L(k+1)f^T(k+1)}{\omega(k+1)}, \quad \zeta(k+1) > 0 \quad (5.159)$$

$$Q(k+1) = Q(k), \quad \zeta(k+1) \leq 0 \quad (5.160)$$

kde $0 < \varepsilon_{min} < 1$ představuje minimální hodnotu faktoru směrového zapomínání volenou tak, aby spadala do definičního oboru funkce odmocniny a současně umožňovala splnění podmínky pro zapomínání staré informace. Aplikací filtru Refil v tomto případě dosáhneme podstatného zlepšení chování identifikačního algoritmu.

Předcházející algoritmy byly modifikací klasické metody nejmenších čtverců. V daleko větší míře jsou však na divergenci parametrů náchylnější metody pracující s konečným datovým horizontem. Aplikujme tedy Choleskyho dekompozici na algoritmus SFDW-RLS s konstantním exponenciálním zapomínáním. Obnova $P_\alpha(k)$ a $P(k)$ v původním algoritmu je podle

$$P_\alpha(k+1) = P(k) + \frac{P(k)\varphi(k-p+1)\varphi^T(k-p+1)P(k)}{\lambda_e^{-p+1} - \varphi^T(k-p+1)P(k)\varphi(k-p+1)}$$

$$P(k+1) = \frac{1}{\lambda_e} \left[P_\alpha(k+1) - \frac{P_\alpha(k+1)\varphi(k+1)\varphi^T(k+1)P_\alpha(k+1)}{\lambda_e + \varphi^T(k+1)P_\alpha(k+1)\varphi(k+1)} \right]$$

Rozkladem jednotlivých matic získáme

$$P_\alpha(k+1) = Q(k+1)Q^T(k+1) = Q_k \left[I + f_{ak+1}f_a^T \frac{1}{\lambda_e^{-p+1} - f_a^T f_a} \right] Q^T \quad (5.161)$$

$$P(k+1) = Q_a(k+1)Q_a^T(k+1) = \frac{1}{\lambda_e} Q_{ak+1} \left[I - f_{k+1}f^T \frac{1}{\lambda_e + f^T f} \right] Q_a^T \quad (5.162)$$

kde byly zavedeny pomocné vektory

$$f_a(k+1) = Q^T(k)\varphi(k-p+1) \quad (5.163)$$

$$f(k+1) = Q_a^T(k+1)\varphi(k+1) \quad (5.164)$$

problém opět převedeme na řešení rozkladu

$$\left[I + f_{ak+1}f_a^T \frac{1}{\lambda_e^{-p+1} - f_a^T f_a} \right] = [I + \alpha_a f_{ak+1}f_a^T][I + \alpha_a f_a f_a^T]^T \quad (5.165)$$

$$\left[I - f_{k+1}f^T \frac{1}{\lambda_e + f^T f} \right] = [I - \alpha f_{k+1}f^T][I - \alpha f f^T]^T \quad (5.166)$$

roznásobením a položením rovnosti odpovídajících si členů výrazů (5.165) a (5.166) získáme kvadratické rovnice

$$0 = (\beta_{ak+1}^2 - \lambda_e^{-p+1}\beta_a)\alpha_a^2 - 2\beta_a\alpha_a + 1 \quad (5.167)$$

$$0 = (\beta_{k+1}^2 - \lambda_e\beta)\alpha^2 - 2\beta\alpha + 1 \quad (5.168)$$

kde pro jednotlivé pomocné proměnné platí

$$\beta_a = \lambda_e^{-p+1} - f_a^T(k+1)f_a(k+1) \quad (5.169)$$

$$\beta = \lambda_e + f^T(k+1)f(k+1) \quad (5.170)$$

Řešením kvadratických rovnic obdržíme hledané kořeny $\alpha_{a1,2}$ a $\alpha_{1,2}$.

$$\alpha_{a1} = \frac{1}{\beta_a + \sqrt{\lambda_e^{-p+1}\beta_a}}, \quad \alpha_{a2} = \frac{1}{\beta_a - \sqrt{\lambda_e^{-p+1}\beta_a}} \quad (5.171)$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{\beta + \sqrt{\lambda_e\beta}}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{\beta - \sqrt{\lambda_e\beta}} \quad (5.172)$$

Nyní můžeme sestavit výsledné rovnice algoritmu SFDW-REFIL

$$\hat{e}(k+1|k) = y(k+1) - \varphi^T(k+1)\hat{\theta}(k)$$

$$f_a(k+1) = Q^T(k)\varphi(k-p+1)$$

$$\beta_a = \lambda_e^{-p+1} - f_a^T(k+1)f_a(k+1)$$

$$\beta_a = 1, \quad \beta_a < 1 \quad (5.173)$$

$$Q_a(k+1) = Q(k) + \frac{Q(k)f_a(k+1)f_a^T(k+1)}{\beta_a + \sqrt{\lambda_e^{-p+1}\beta_a}} \quad (5.174)$$

$$f(k+1) = Q_a^T(k+1)\varphi(k+1)$$

$$\beta = \lambda_e + f^T(k+1)f(k+1)$$

$$Q(k+1) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_e}} \left[Q_a(k+1) - \frac{Q_a(k+1)f(k+1)f^T(k+1)}{\beta + \sqrt{\lambda_e\beta}} \right] \quad (5.175)$$

$$\hat{\theta}(k+1) = \hat{\theta}(k) + Q(k+1)Q^T(k+1)\varphi(k+1)\hat{e}(k+1|k) \quad (5.176)$$

Algoritmus SFDW-REFIL během výpočtu zachovává pozitivnost matice $P(k)$, a tím zlepšuje stabilitu konvergence původního algoritmu SFDW-RLS. Na druhou stranu je algoritmus použitelný pouze pro menší počet vzorů p z důvodu omezujících podmínek platných pro odmocninový rozklad. Ukazuje se, že s rostoucím počtem p může v určitém rozsahu dojít k navýšení přesnosti odhadu parametrů a urychlení adaptace při časově proměnných parametrech soustavy. Naopak nevýhodou může být časté přeučení algoritmu v případě nedostatečného vybudování procesu a zvýšená náchylnost na estimator windup. Obecně je pro metody nejmenších čtverců pracujících s konečným datovým horizontem odmocninová faktorizace přínosem, zvláště je-li doplněna o techniku pro zpřesnění odhadu parametrů. Výhodnější se však jeví užití jiného typu filtru namísto filtru Refil, a to zejména v případech, kdy je v algoritmu zastoupena technika pro potlačování staré informace.

Vztahy pro FDW-REFIL sestavené aplikací Choleskyho dekompozice na FDW-RLS budou z důvodu opakující se strategie odvození uvedeny již bez důkazů

$$f_a(k+1) = Q^T(k)\varphi(k-p+1)$$

$$\beta_a = \lambda_e^{-p} - f_a^T(k+1)f_a(k+1) \quad (5.177)$$

$$\beta_a = 1, \quad \beta_a < 1$$

$$Q_a(k+1) = Q(k) + \frac{Q(k)f_a(k+1)f_a^T(k+1)}{\beta_a + \sqrt{\lambda_e^{-p}\beta_a}} \quad (5.178)$$

$$\hat{e}(k+1|p) = y(k-p+1) + \varphi^T(k-p+1)\hat{\theta}(k) \quad (5.179)$$

$$(5.180)$$

$$\alpha(k+1) = \hat{\theta}(k) - \lambda_e^p Q_a(k+1)Q_a^T(k+1)\varphi(k-p+1)\hat{e}(k+1|p)$$

$$f(k+1) = Q_a^T(k+1)\varphi(k+1)$$

$$\beta = \lambda_e + f^T(k+1)f(k+1)$$

$$Q(k+1) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_e}} \left[Q_a(k+1) - \frac{Q_a(k+1)f(k+1)f^T(k+1)}{\beta + \sqrt{\lambda_e}\beta} \right]$$

$$\hat{e}(k+1|k) = y(k+1) - \varphi^T(k+1)\alpha(k+1)$$

$$\hat{\theta}(k+1) = \alpha(k+1) + Q(k+1)Q^T(k+1)\varphi(k+1)\hat{e}(k+1|k) \quad (5.181)$$

5.4.2 Filtr LDFIL

Aplikací LDU (Lower Diagonal Upper) dekompozice na kovarianční matici $P(k)$ získáme filtr typu LDFIL [12, 13].

$$P(k) = U(k)D(k)U^T(k) \quad (5.182)$$

kde $U(k)$ je dolní trojúhelníková matice s jednotkami na hlavní diagonále a $D(k)$ je diagonální matice. Parametry na hlavní diagonále nejvíce ovlivňují identifikaci. Problém hledání rozkladů matice $P(k)$ lze numericky vyčíslit řešením paralelního algoritmu

$$d_i = p_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} d_k u_{ki}^2 \quad u_{ij} = \frac{1}{d_i} (p_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} d_k u_{ki} u_{kj}) \quad \text{pro } i > j \quad (5.183)$$

Rekurentní vztah pro obnovu matice $U(k)$ získáme aplikací lemmy o inverzi matice (5.25) na

$$P^{-1}(k+1) = U^{-1}(k)D^{-1}(k)U^{-1T}(k) + \varphi(k+1)\varphi^T(k+1) \quad (5.184)$$

po úpravě získáme

$$\begin{aligned} U(k+1)D(k+1)U^T(k+1) &= \\ &= U_k D_k U^T - U D U^T \varphi_{k+1} (1 + \varphi^T U D U^T \varphi)^{-1} \varphi^T U D U^T \\ &= U_k [D_k - D U^T \varphi_{k+1} (1 + \varphi^T U D U^T \varphi)^{-1} \varphi^T U D] U^T \\ &= U_k \left[D_k - D f_{k+1} f^T D \frac{1}{1 + f^T D f} \right] U^T \end{aligned} \quad (5.185)$$

$$\text{kde pro pomocný vektor platí } f(k+1) = U^T(k)\varphi(k+1) \quad (5.186)$$

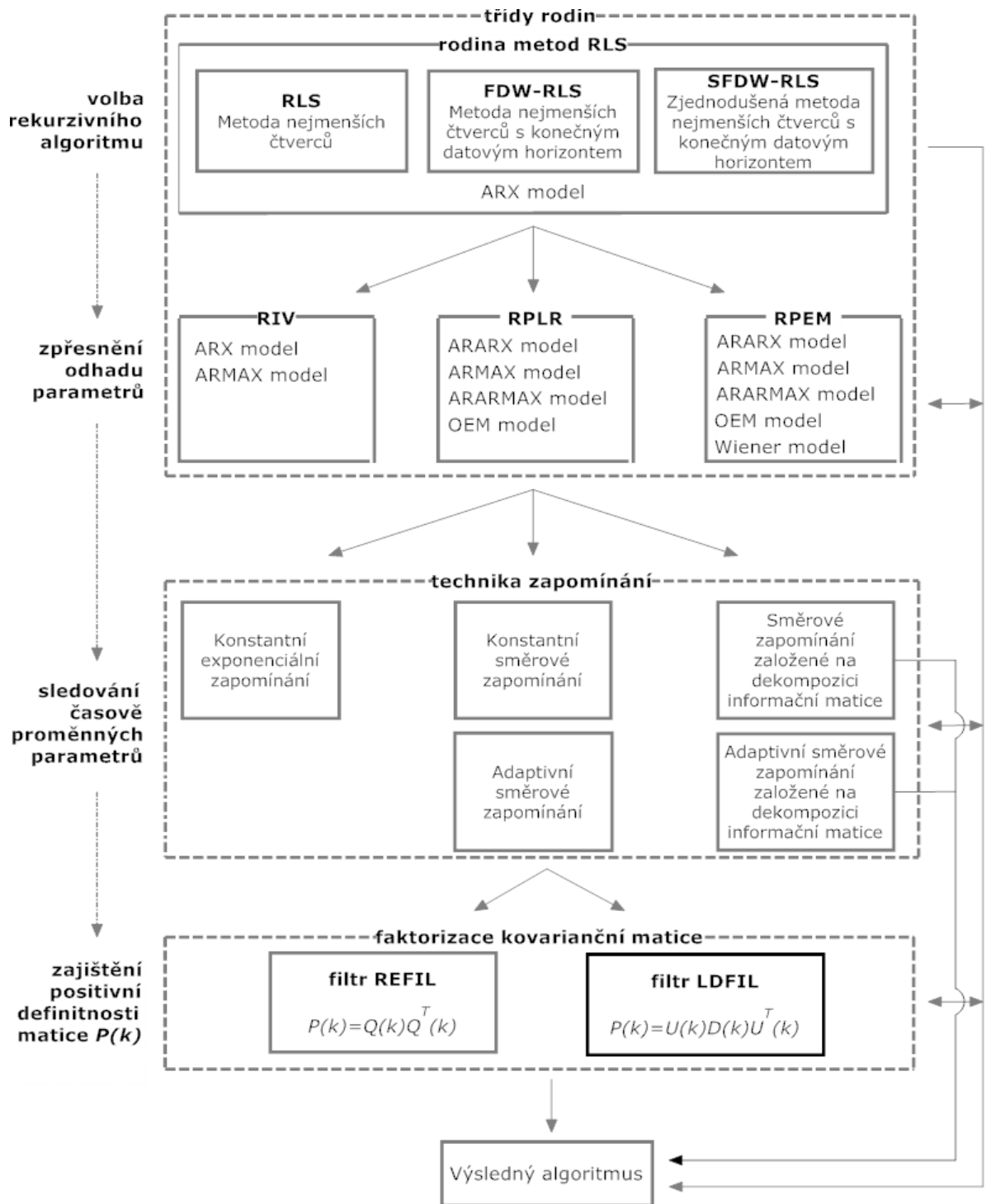
Po vyjádření matice $H(k)$ ze vztahu

$$H(k+1)D(k+1)H^T(k+1) = D_k - D f_{k+1} f^T D \frac{1}{1 + f^T D f} \quad (5.187)$$

můžeme přímo aktualizovat matici $U(k)$

$$U(k+1) = U(k)H(k+1) \quad (5.188)$$

Na Obr. (5) je schematicky naznačen postup korektního sestavení identifikačního algoritmu na bázi metod nejmenších čtverců podle představ autora diplomové práce. Zavedením vhodné techniky pro potlačení vlivu rušivého signálu vzniklého působením šumu a vlivem kvantifikace měřené veličiny, získáme aparát, který navíc doplněný o techniku pro zajištění numerické stability a schopnosti adaptovat se na změnu parametrů podmíněnou pouze projevem prostředí, poskytuje



Obrázek 5: Návrh identifikačního algoritmu na bázi metod nejmenších čtverců.

robustní řešení problému V/V parametrické identifikace. Takto sestavený algoritmus může spolehlivě pracovat i při krátkých periodách vzorkování T_s . Často zmiňovaná výsada metod s principy umělé inteligence. Ve schématu je uvedena rodina metod

nesoucí označení RPEM (metody predikčních chyb [20]), které nebyly v práci zmiňovány. Tyto pro formulaci chyby predikce vyžadují výpočet přínosu gradientů od jednotlivých parametrů využívající aproximace Hessianovy matice.

5.5 IDENTIFIKACE UMĚLÝMI NEURONOVÝMI SÍTĚMI

V této kapitole bude přiblížena problematika parametrické identifikace umělými neuronovými sítěmi (NN - Neural Networks). V současnosti existuje celá řada typů neuronových sítí umožňujících řešení problematiky identifikace a řízení dynamických soustav. Pro potřeby identifikace je možné použít libovolného algoritmu podporujícího učení s učitelem, který navíc dovoluje zpracovávat reálná čísla zastoupena hodnotami veličin vzniklých V/V měřením z procesu. Charakteristikou neuronové sítě není pouze algoritmus nastavování vah, ale rovněž topologie sítě. Tyto vlastnosti spadají do souhrnu označovaného jako paradigma NN. Budeme-li vycházet z předpokladů Kolmogorova teorému, je pro aproximaci libovolné reálné soustavy zapotřebí alespoň třívrstvé neuronové sítě s nespécifikovaným počtem neuronů v každé z nich. Ve vícevrstevných neuronových sítích obecně vyvstává problém nesnadné interpretace parametrů $\hat{\theta}(k)$ hledaného regresního modelu. Problém se proto často převádí na identifikaci pouze jedním neuronem, tzv. neuronový estimátor, kde hledané koeficienty jsou zastoupeny přímo hodnotami synaptických vah. Neuronový estimátor ovšem nemusí vždy poskytovat kvalitní odhady parametrů $\hat{\theta}(k)$, a to zejména tehdy, jedná-li se o systémy vyšších řádů, u nichž často dochází ke konvergenci k lokálním minimům prostoru generovaného vstupním vektorem.

5.5.1 Back Propagation (BP)

Back Propagation v pojetí dynamického modelování je gradientní iterativní algoritmus minimalizující kvadrát chyby predikce výstupu $\hat{e}(k+1|k)$. Chybová funkce NN je v obecném případě pro p trénovacích vzorů, n vstupů a m výstupů dána podle

$$E_c = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^p \sum_{j=1}^m (d_{jk} - y_{jk})^2 \quad (5.189)$$

kde d_{jk} je požadovaný výstup j příslušného neuronu pro k -tý trénovací vzor a y_{jk} je hodnota výstupu j predikovaná neuronem pro k -tý trénovací vzor.

Pro každý funkční prvek (neuron) sítě musíme stanovit, jak se projeví změna jednotlivých váhových koeficientů w_{ji} , zde j označuje daný neuron a i dílčí váhy neuronu, na výslednou chybu predikce a jakým směrem je máme upravit tak, aby výsledná chyba byla co nejmenší. Za tímto účelem je nutné určit gradient chybové funkce v závislosti na váhových koeficientech w_{ji} .

Aktualizace vah neuronu v kroku k probíhá rekurentně podle

$$w_{ji}^{k+1} = w_{ji}^k + \Delta w_{ji}^{k+1} \quad (5.190)$$

Gradient váhy Δw_{ji}^k pak spočteme jako parciální derivaci chyby podle jednotlivých váhových koeficientů. Protože kriteriální funkce může v některých případech ustrnout v lokálním minimu, zavádíme do výpočtu tzv. setrvačnost, tj. momentum s koeficientem setrvačnosti α a rovněž stabilizující nebo-li učící konstantu η [10].

$$\Delta w_{ji}^k = -\eta \frac{\partial E_c^k}{\partial w_{ji}^k} + \alpha \Delta w_{ji}^{k-1} \quad (5.191)$$

Pro výpočet parciální derivace chyby $\frac{\partial E_c}{\partial w_{ji}}$ vyjdeme z předpokladu, že výstup neuronu je funkcí výstupů $f(\xi)$, jak napovídá schéma na obr. (6). Aplikací pravidla o derivaci složené funkce dostáváme

$$\frac{\partial E_c^k}{\partial w_{ji}^k} = \frac{\partial E_c^k}{\partial y_j^k} \frac{\partial y_j^k}{\partial \xi_j^k} \frac{\partial \xi_j^k}{\partial w_{ji}^k} \quad (5.192)$$

Vyjma vstupní vrstvy sítě, kde váha w_{ji} propojuje vstup i s neuronem j , tak váha w_{ji} spojuje neuron i z předchozí vrstvy s neuronem j současné vrstvy. Hodnotu potenciálu neuronu ξ_j tak stanovíme podle

$$\xi_j^k = \sum_{i=1}^n (y_i^k w_{ji}^k) \quad (5.193)$$

a parciální derivaci ξ_j podle w_{ji} bude

$$\frac{\partial \xi_j^k}{\partial w_{ji}^k} = y_i^k \quad (5.194)$$

Hodnotu výstupu neuronu y_j chápeme jako obecnou přenosovou funkci $f_j(\xi_j)$, do níž vstupuje potenciál ξ_j . Parciální derivaci y_j podle ξ_j sestavíme podle pravidla derivací funkce více proměnných.

$$\frac{\partial y_i^k}{\partial \xi_j^k} = \frac{\partial f_j(\xi_j^k)}{\partial \xi_j^k} \quad (5.195)$$

Parciální derivaci $\frac{\partial E_c}{\partial y_j}$ označíme v souladu se strategií zpětného šíření jako přínos chyby δ_j neuronu j .

$$\frac{\partial E_c^k}{\partial y_i^k} = -\delta_j^k \quad (5.196)$$

Výsledný algoritmus popisující rekurentní obnovu vah w_{ji}^{k+1} neuronové sítě má konečnou podobu [10]

$$w_{ji}^{k+1} = w_{ji}^k + \eta \delta_j^k \frac{\partial f_j(\xi_j^k)}{\partial \xi_j^k} y_i^k + \alpha \Delta w_{ji}^k \quad (5.197)$$

Tímto obecným vztahem můžeme popsat libovolnou strukturu sítě Back propagation. Rovnice pro obnovu vah w_i^{k+1} jednoho neuronu s lineární transformační funkcí ve tvaru $f(\xi) = \xi$ tak bude

$$w_i^{k+1} = w_i^k + \eta \delta^k x_i^k + \alpha \Delta w_i^k \quad (5.198)$$

kde x_i jsou vstupy neuronu.

Úpravou na maticový tvar a dosažením známého označení získáme rovnici pro obnovu vah ($\hat{\theta}(k)$) neuronového estimátoru podle algoritmu Back propagation

$$\hat{e}(k+1|k) = y(k+1) - \varphi^T(k+1)\hat{\theta}(k) \quad (5.199)$$

$$\hat{\theta}(k+1) = \hat{\theta}(k) + \eta \hat{e}(k+1|k) \varphi(k+1) + \alpha (\hat{\theta}(k) - \hat{\theta}(k-1)) \quad (5.200)$$

Pro velikost konstanty $\alpha = 0$ můžeme mezi odhadem vektoru parametrů $\hat{\theta}(k)$ algoritmem Back propagation (BP) a rekurzivní metodou nejmenších čtverců (RLS)

$$\eta(k) = (1 + \varphi^T(k+1)P(k)\varphi(k+1))^{-1} \quad (5.201)$$

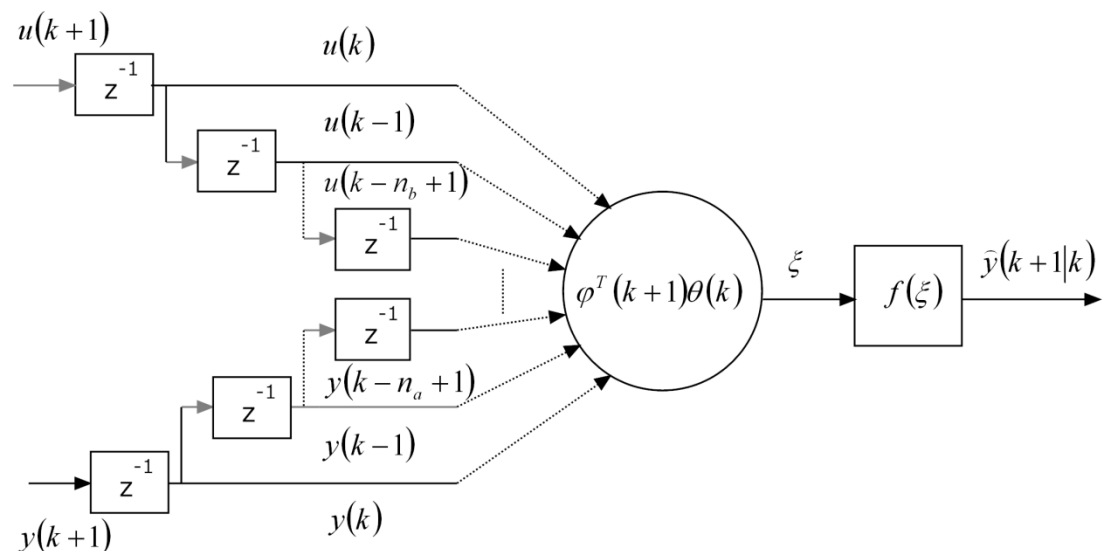
$$\hat{\theta}(k+1) = \hat{\theta}(k) + \eta(k)\hat{e}(k+1|k)P(k)\varphi(k+1) \quad (5.202)$$

pozorovat jistou analogii. Ta spočívá v parametru učení η , který u obou metod váhuje míru odchylky predikce výstupu. Ovšem u metody RLS se velikost $\eta(k)$ odvíjí od dosaženého souladu chování modelu s procesem a navíc se na odhadu podílí časově proměnná čtvercové matice upravující konvergenci, čímž je každý

prvek korekčního členu váhován zvlášť. Oproti tomu u metody BP je konstantním skalárem určen krok, který jednotně ovlivňuje korekční člen, a tím i vývoj všech parametrů. Poznamenejme, že varianty algoritmu BP s proměnným krokem učení $\eta(k)$ jsou snadno náchylné na přeučení.

Konvergenční vlastnosti algoritmu významně ovlivňuje volba parametrů učení η a momentové konstanty α mající význam filtru pro potlačení oscilací v odhadování. Hodnoty parametrů jsou podmíněné charakterem procesu a řádem zvoleného modelu. Obecně by měly být vymezeny v intervalu (0; 1).

Blokové schéma neuronového estimátoru korespondujícího s rovnicí (5.199) zachycuje obr. (6).



Obrázek 6: Neuronový estimátor – model neuronu.

5.5.2 Marquardt-Levenberg (ML)

Metoda Marquardt Levenberg [9] je modifikací algoritmu Back propagation co do dopředného učení. Vyznačuje se oproti původní metodě rychlejší konvergencí parametrů $\hat{\theta}(k)$. Obnova $\hat{\theta}(k)$ probíhá podle vztahu

$$\hat{\theta}(k+1) = \hat{\theta}(k) - [J^T(\hat{\theta}(k))J(\hat{\theta}(k)) + \lambda I]^{-1} J^T(\hat{\theta}(k)) \hat{E}(k+1|k) \quad (5.203)$$

Jakobián $J(\hat{\theta}(k))$ pro jeden neuron může být zapsán následovně

$$J(\hat{\theta}(k)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{E}_1}{\partial w_1} & \dots & \frac{\partial \hat{E}_1}{\partial w_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \hat{E}_p}{\partial w_1} & \dots & \frac{\partial \hat{E}_p}{\partial w_n} \end{pmatrix} = (\varphi(k+1) \quad \dots \quad \varphi(k-p+1))^T \quad (5.204)$$

kde $\hat{E}(k+1|k)^T = (\hat{e}(k+1|k) \quad \dots \quad \hat{e}(k-p+1|k))$ je p -řádkový vektor chyb predikcí. Volba parametru λ určuje povahu algoritmu, pro malé hodnoty se chování přibližuje Gauss – Newtonově optimalizační metodě a naopak pro větší hodnoty má algoritmus vlastnosti gradientní metody.

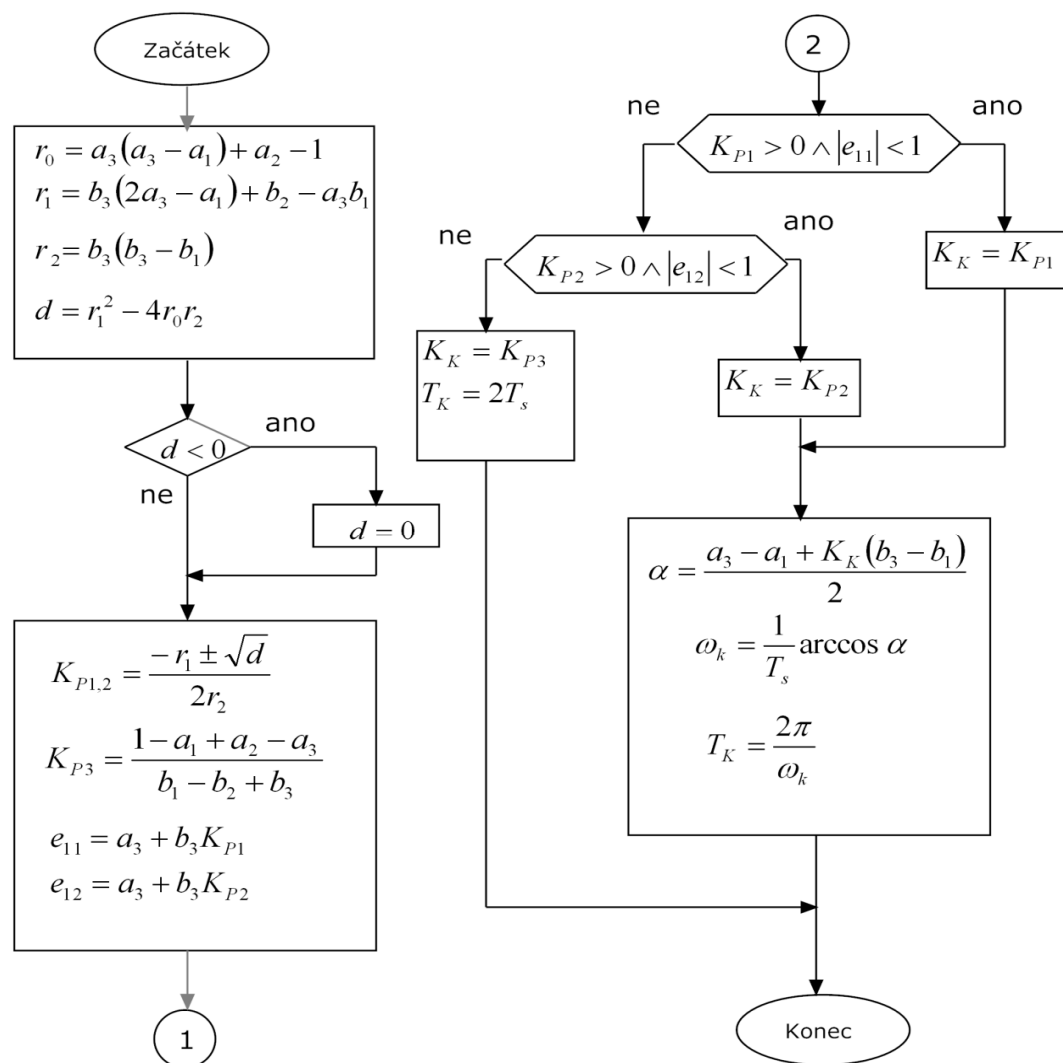
5.6 NÁVRH PARAMETRŮ REGULÁTORU MODIFIKOVANOU METODOU ZIEGLERA A NICHOLSE

Součástí explicitního adaptivního regulátoru je technika nastavování parametrů regulátoru opírající se o znalost matematického modelu soustavy. Problém optimalizace regulátoru na identifikované parametry modelu řeší celá řada přístupů, vzpomeňme např. algebraický přístup – požadujeme, aby uzavřený systém měl stejný charakteristický polynom jako zvolený přenos patřičného řádu, dále podle lineárního kvadratického kritéria nebo metody přímé syntézy PID regulátorů, z nichž nejrozšířenější je právě metoda Zieglera a Nicholse [1].

Metoda Zieglera a Nicholse (ZN) používá k nastavení regulátoru tzv. kritického bodu frekvenční charakteristiky určeného kritickým zesílením K_k a periodou kritických kmitů T_K . Bylo dokázáno, že toto nastavení se blíží optimálnímu nastavení pro minimum kvadratické plochy. Předpokladem pro použití metody je systém vyššího než druhého řádu, nebo v něm musí být dopravním zpožděním a poměr třech dominantních časových konstant by neměl být větší dvanácti. Nastavení parametrů diskrétního ekvivalentu PID regulátoru a Takahashiho regulátoru z kritických hodnot podle metody Zieglera a Nicholse je uvedeno v tab. (1).

Tabulka 1: Nastavení parametrů číslicových regulátorů metodou ZN.

Typ regulátoru	Metoda nastavení regulátoru	K	T_i	T_d
Číslicová varianta PID	ZN – klasické nastavení	$0.6K_K$	$0.5T_K$	$0.125T_K$
	ZN - omezení kmitavého průběhu	$0.3K_K$	T_K	$0.125T_K$
Takahashiho regulátor	ZN – klasické nastavení	$0.6K_k - \frac{T_i}{2}$	$1.2K_k \frac{T_s}{T_K}$	$3K_k \frac{T_K}{40T_s}$



Obrázek 7: Výpočet kritických parametrů modelu třetího řádu.

Samotný výpočet kritických parametrů modelu zapojeného do zpětnovazebního obvodu se stavitelným proporcionálním regulátorem K_P vychází z řešení polynomiální rovnice.

$$D(z^{-1}) = A(z^{-1}) + z^{-d}K_P B(z^{-1}) \quad (5.205)$$

Dynamické vlastnosti regulačního obvodu určují póly charakteristického polynomu $D(z^{-1})$. K tomu, aby byl obvod přiveden na mez stability, postačuje, aby alespoň jeden z pólů charakteristického polynomu byl umístěn na jednotkové kružnici a ostatní uvnitř kružnice. Vývojový diagram pro výpočet kritických parametrů soustavy třetího řádu je zachycen na obr. (7).

6. POROVNÁNÍ VLASTNOSTÍ ALGORITMŮ OPTIMALIZAČNÍ ÚLOHY

V následující kapitole bude ověřeno chování adaptivních regulátorů a metod identifikace jak na simulovaných soustavách, tak na reálných procesech. Podmínkou optimálního nastavení adaptivního regulátoru je znalost řízené soustavy. Těžištěm práce je proto právě porovnání jednotlivých algoritmů identifikace. Rovněž bude zkoumán dopad vlivu periody vzorkování T_s , úroveň kvantifikačního šumu, samotná volba a počátečního nastavení identifikačního algoritmu na kvalitu regulačního děje. Stejně jako přínos jednotlivých regulátorů.

Všechny metody uvedené v simulacích jsou součástí grafického rozhraní pro vyhodnocení optimalizační úlohy. Simulace na matematických modelech je navíc doplněna o kvantifikaci měřenosné veličiny A/D a D/A převodníky pracujících v rozsahu $\mp 10V$ s parametrem kvantování q_n :

- $q_{12} \doteq 0.0049V$ pro 12bitový A/D a D/A převodník
- $q_8 \doteq 0.0781V$ pro 8bitový A/D a D/A převodník

Fyzikální model zde představuje laboratorní přípravek realizovaný operačními zesilovači. Komunikace mezi přípravkem a rozhraním MATLAB/Simulink probíhá prostřednictvím programovatelného automatu firmy B&R a komunikační knihovny `mk_pvi`.

Simulovaná soustava je popsána přenosem G_M

$$G_M(z) = \frac{2}{(s+1)(s+1)(10s+1)} \quad (6.1)$$

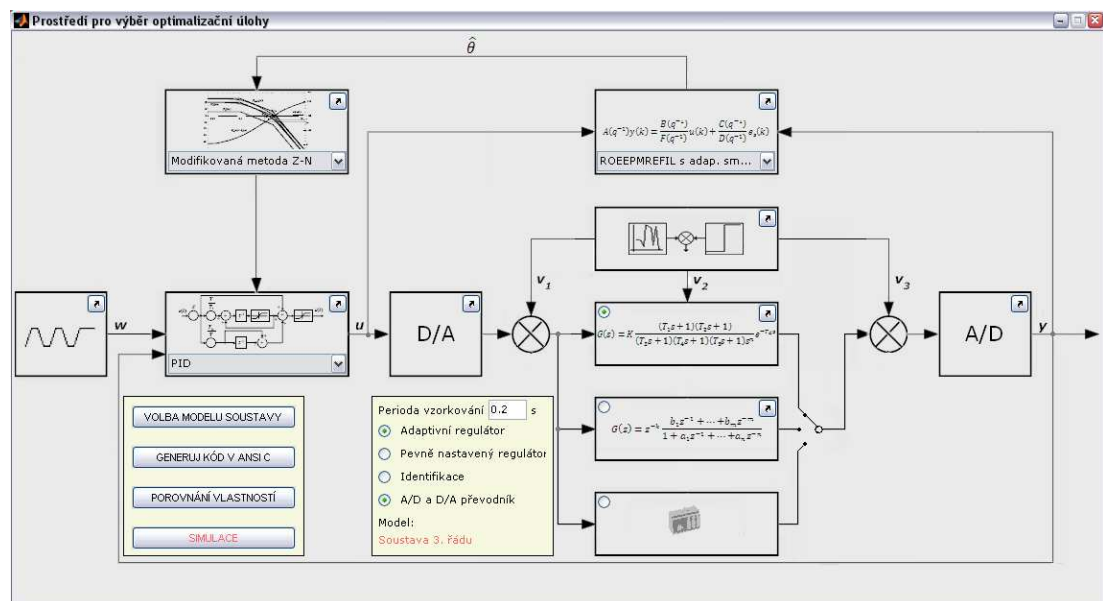
Fyzikální model byl nastaven tak, aby přibližně odpovídal matematickému popisu G_{F1} a G_{F2}

$$G_{F1}(z) = \frac{1}{(2s+1)(s+1)(3s+1)} \quad (6.2)$$

$$G_{F2}(z) = \frac{1}{(2s+1)(s+1)(10s+1)} \quad (6.3)$$

GRAFICKÉ PROSTŘEDÍ

Motivací k vytvoření grafického prostředí byl požadavek průběžného sledování vývoje kovarianční matice $P(k)$ u metod nejmenších čtverců a časového vývoje odhadů parametrů $\hat{\theta}(k)$. Grafické prostředí bylo vyvíjeno v programu MATLAB 7.6.0 (R2008a) s využitím jeho nadstavby Simulink. Práce s rozhraním je zcela intuitivní. Grafická reprezentace odpovídá fyzikální představě o zpětnovazebním řízení a V/V identifikaci. Jednoduchá navigace je navíc umocněna významovými symboly. V hlavním panelu, viz obr. (8), který se zobrazí voláním funkce *hlavni.m* má uživatel možnost volby mezi třemi základní typy optimalizačních úloh, tj. řízení procesu adaptivním popř. pevně nastaveným regulátorem a V/V parametrickou identifikací.

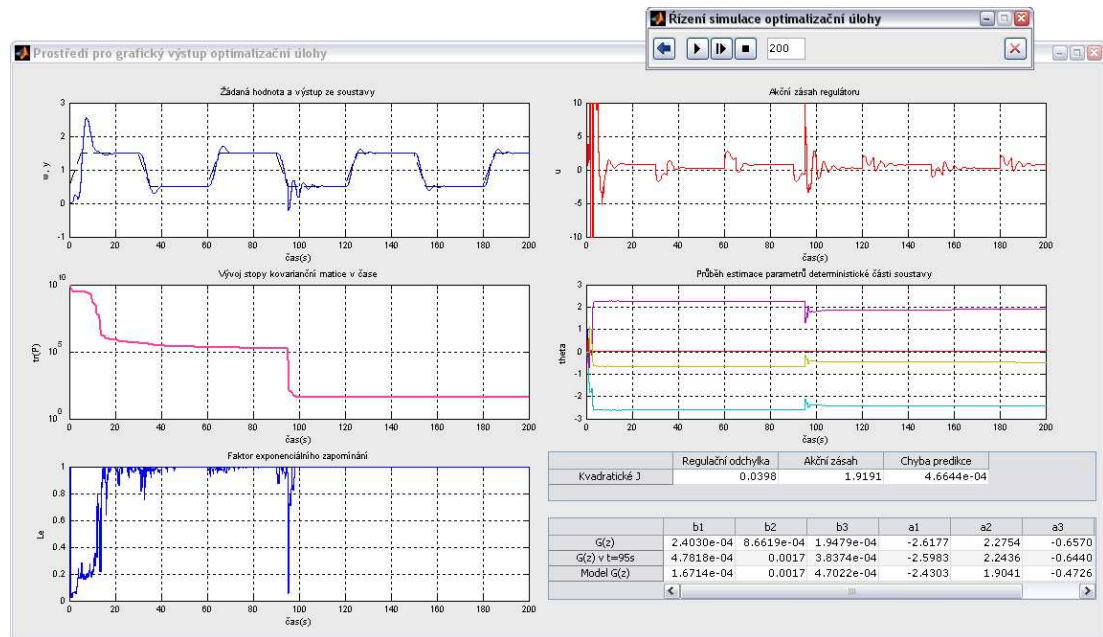


Obrázek 8: Grafické prostředí pro výběr optimalizační úlohy.

Implementované algoritmy jsou realizací metod přímo popsanych v diplomové práci. V prostředí je možnost individuálního nastavení dílčích algoritmů, tj. volba řádu jednotlivých polynomů modelu, počáteční inicializace, úprava výpočtu metody Zieglera a Nicholse z kritických hodnot parametrů, apod. Jednotlivé algoritmy řízení a identifikace jsou navzájem libovolně kombinovatelné.

Výběrem algoritmu a přechodem do panelu pro grafický výstup úlohy, viz obr. (9), máme možnost průběžného nebo jednorázového vykreslení výsledků

simulace a to jak pro modelované, tak pro reálné soustavy. Kliknutím na graf v panelu se graf zobrazí ve vlastním okně. Součástí výstupu je rovněž číselná reprezentace estimovaného modelu, popř. modelované soustavy a vyhodnocení kvality regulace i identifikace prostřednictvím kvadratických kritérií.



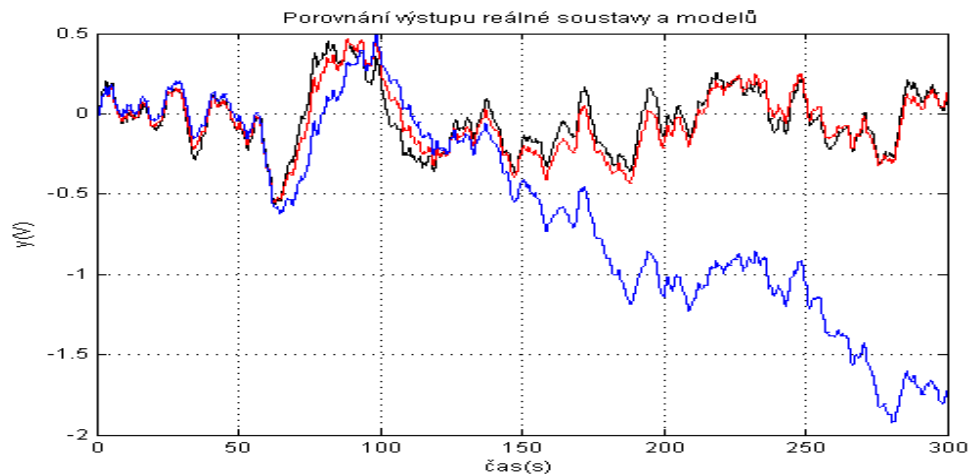
Obrázek 9: Grafický výstup k úloze adaptivního řízení.

6.1 POROVNÁNÍ VLASTNOSTÍ IDENTIFIKAČNÍCH ALGORITMŮ NA REÁLNÉ SOUSTAVĚ

Implementované algoritmy identifikace byly ověřeny na datech vzniklých vstupně výstupním měřením z reálné soustavy $G_{F1}(z)$ s periodou vzorkování $T_s = 0.2s$. Na vstup soustavy byl přiveden signál o vlastnostech bílého šumu. Tento spolu s obarveným šumem soustavou tvoří množinu trénovacích dat. Na základě nového měření pak analogickým způsobem byla vytvořena množina dat testovacích.

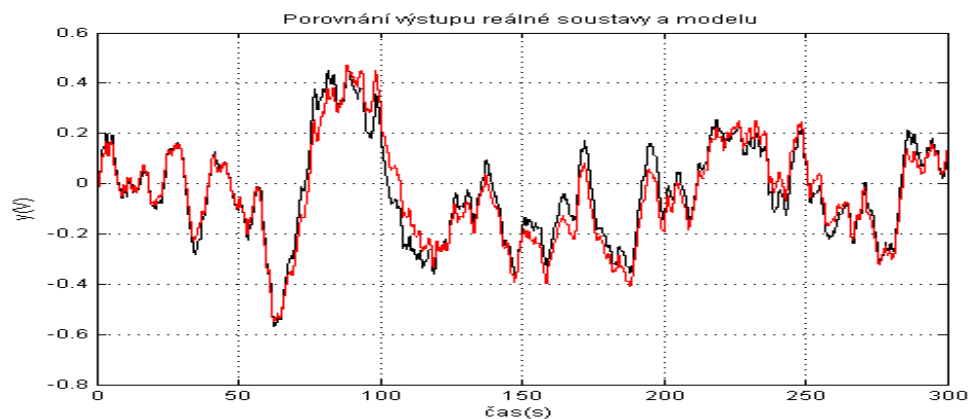
Pokud nebude řečeno jinak, počáteční nastavení metod nejmenších čtverců bude shodné s doporučeným nastavením uvedeným v diplomové práci a do algoritmů nebude zahrnuta technika pro potlačování staré informace. Pro aproximaci soustavy byl zvolen model třetího řádu s dopravním zpožděním. Řády polynomů popisující stochastickou část procesu jsou rovny třem. Měřený výstup ze soustavy je v grafech znázorněn černou barvou.

V grafu na obr. (10) je zachycen vliv faktoru exponenciálního zapomínání na kvalitu modelu. Pro hodnotu faktoru $\lambda_e = 0.98$ pozorujeme u metody RLS snížení přesnosti odhadování oproti metodě bez zapomínání $\lambda_e = 1$. A to z důvodu nerovnoměrného vlivu trénovacích dat na tvorbu modelu.

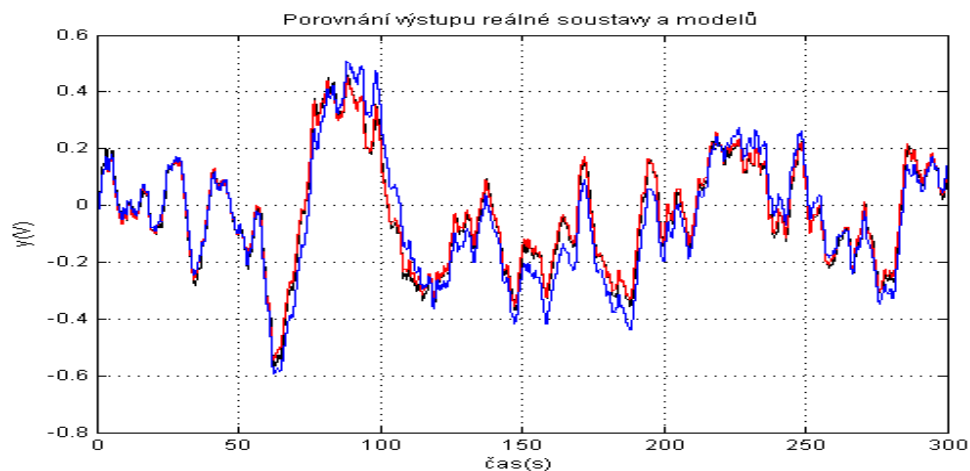


Obrázek 10: Porovnání výstupu reálné soustavy s výstupy predikovanými modely vzniklých estimací metodou RLS ($\lambda_e = 1, \lambda_e = 0.98$).

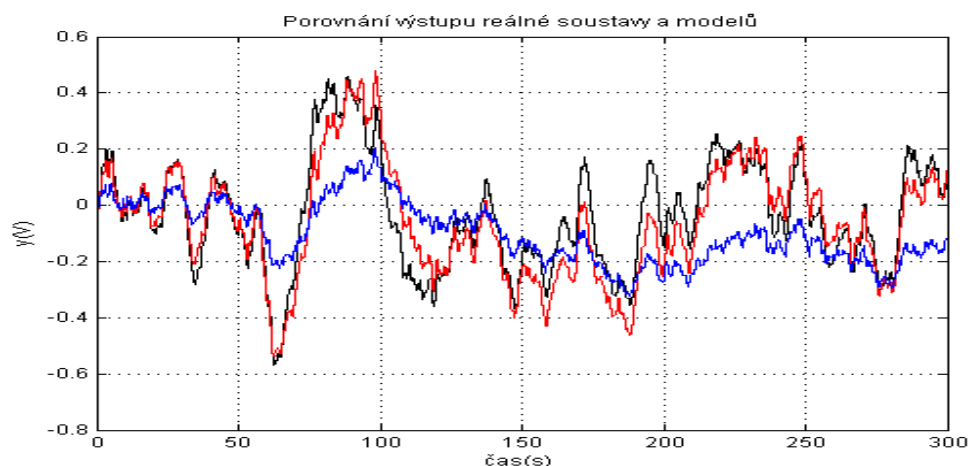
V následujícím grafu, obr. (11), je zobrazen průběh odezvy modelu získaného metodou FDW-ROEPMREFIL a reálné soustavy na budící signál. Přesnost odhadu FDW-ROEPMREFIL vzhledem k RLS vzrostla. Vysvětlujeme tím, že úroveň šumu a kvantovacího šumu je signifikantní a způsobuje vychýlení odhadu lineární regrese.



Obrázek 11: Porovnání výstupu reálné soustavy s predikovaným výstupem modelu estimovaného metodou **FDW-ROEPMREFIL**.



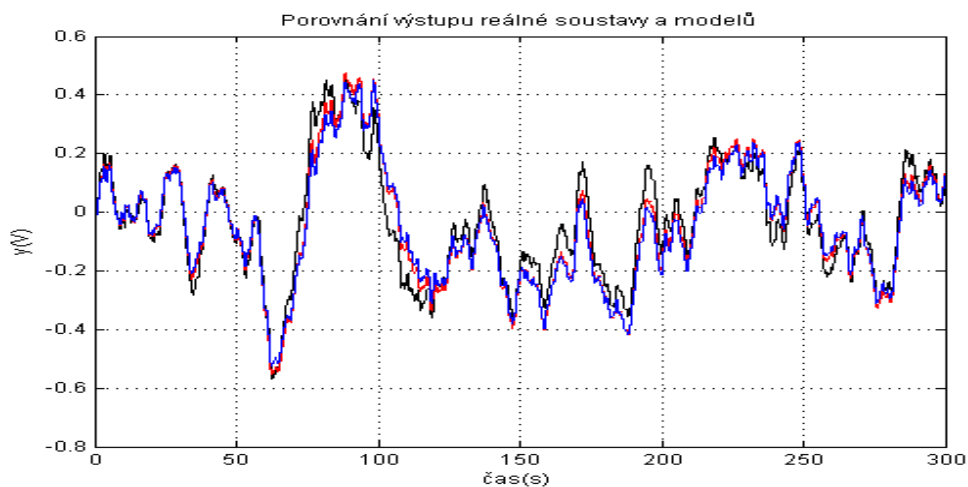
Obrázek 12: Porovnání kvality modelů vzniklých estimací metodou RIVm a využitím identifikačního toolboxu voláním `amx(3,4,3,1)`.



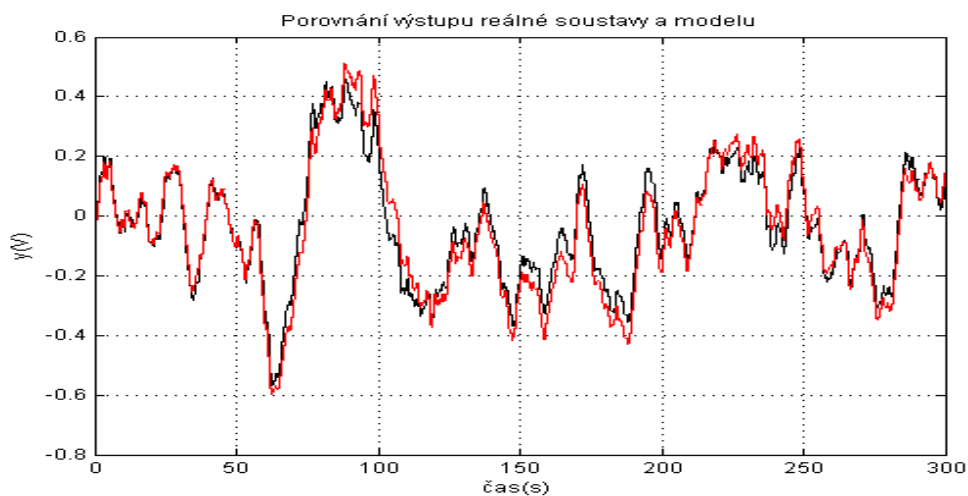
Obrázek 13: Vliv volby řádu modelu (2. řád, 1. řád s dopravním zpožděním) u metody REMLS na kvalitu identifikace.

Na obr. (12) vidíme průběhy odezev modelů vytvořených implementovanou metodou RIVm a s užitím identifikačního toolboxu v prostředí MATLABu. Porovnání co do přesnosti predikce jednoznačně ukazuje ve prospěch metody RIVm.

Z výsledků simulace na obr. (13) odvozujeme, že chování reálné soustavy lze reprezentativně aproximovat lineárním modelem druhého řádu. Zjednodušením na model prvního řádu s dopravním zpožděním jsou však již dynamické vlastnosti soustavy postihnuty nekvalitně.



Obrázek 14: Porovnání výstupů predikovaných modely vzniklých estimací metodou **ML** a **EML** s výstupem reálné soustavy.



Obrázek 15: Porovnání výstupů reálné soustavy s modelem vytvořeným metodou **BP**.

Další třídou metod jsou neuronové estimátory. Vlastnosti modelů získaných metodami Marquardt-Levenberg (ML) a Extended Marquardt-Levenberg (EML), jedná se o rozšíření metody ML na model ARMAX, jsou ukázány v grafu (14). Přesnějšího odhadu dosáhla metoda EML. U obou metod docházelo v průběhu identifikace k oscilacím parametrů $\hat{\theta}(k)$. Oscilace lze potlačit zvolením modelu nižšího řádu ovšem na úkor přesnosti získaného odhadu.

Metodou BP, viz obr. (15), byla aproximována soustava modelem třetího řádu s dopravním zpožděním. Tento dosahuje vyšší přesnosti než modely vytvořené algoritmem ML a EML a než většina modelů sestavených metodami nejmenších čtverců (vyjma metody RIVm). Na druhou stranu pro aproximaci soustavy modelem nižšího řádu algoritmus nenalezl řešení a získaný model byl nestabilní.

Shrnutí výsledků jednotlivých metod identifikace je zaznamenáno v tab. (2)

Tabulka 2: Modely vzniklé estimací jednotlivých metod a jejich vyhodnocení

Identifikační algoritmus		Přenos deterministické části modelu $G(z)$	$R(0)$
RLS	$\lambda_e = 1$	$G(z) = \frac{0.0013z^{-1}+0.0034z^{-2}+0.0007z^{-3}-0.0001z^{-4}}{1-1.3181z^{-1}+0.0019z^{-2}+0.3192z^{-3}}$	0.0045
	$\lambda_{exp} = 0.98$	$G(z) = \frac{0.0015z^{-1}+0.0030z^{-2}+0.0002z^{-3}+0.0001z^{-4}}{1-1.5081z^{-1}+0.3580z^{-2}+0.1419}$	0.6828
	$\lambda_{směr} = 0.98$	$G(z) = \frac{0.0015z^{-1}+0.0032z^{-2}+0.0003z^{-3}-0.0002z^{-4}}{1-1.1414z^{-1}+0.1528z^{-2}+0.2614z^{-3}}$	0.0043
SFDW-REFIL	$p = 1$	$G(z) = \frac{0.0069z^{-1}+0.0055z^{-2}-0.0001z^{-3}-0.0003z^{-4}}{1-2.2367z^{-1}+0.9111z^{-2}+0.4246z^{-3}}$	0.0041
FDW-ROEPM-REFIL	$p = 1$	$G(z) = \frac{0.0009z^{-1}+0.0041z^{-2}+0.0001z^{-3}-0.0003z^{-4}}{1-1.4130z^{-1}+0.1513z^{-2}+0.2648z^{-3}}$	0.0029
RIVd	$n_c = 4$	$G(z) = \frac{0.0013z^{-1}+0.0027z^{-2}-0.0009z^{-3}-0.0001z^{-4}}{1-1.8546z^{-1}+0.8967z^{-2}-0.0402z^{-3}}$	0.0092
RIVm		$G(z) = \frac{0.0013z^{-1}+0.0032z^{-2}-0.0002z^{-3}-0.0003z^{-4}}{1-1.4516z^{-1}+0.1782z^{-2}+0.2780z^{-3}}$	0.0003
RELS	$n_c = 3$	$G(z) = \frac{0.0013z^{-1}+0.0033z^{-2}+0.002z^{-3}-0.0003z^{-4}}{1-1.4746z^{-1}+0.2303z^{-2}+0.2468z^{-3}}$	0.0048
	$n_c = 6$	$G(z) = \frac{0.0013z^{-1}+0.0033z^{-2}+0.002z^{-3}-0.0003z^{-4}}{1-1.4796z^{-1}+0.2421z^{-2}+0.2401z^{-3}}$	0.0042
REMLS		$G(z) = \frac{0.0013z^{-1}+0.0034z^{-2}+0.003z^{-3}-0.0003z^{-4}}{1-1.4447z^{-1}+0.1788z^{-2}+0.2685z^{-3}}$	0.0049
REMLS		$G(z) = \frac{0.0013z^{-1}+0.0031z^{-2}}{1-1.6775z^{-1}+0.6795z^{-2}}$	0.0072
REMLS		$G(z) = \frac{0.0013z^{-1}+0.0036z^{-2}}{1-0.9988z^{-1}}$	0.0320
ROEPMPLS		$G(z) = \frac{0.0013z^{-1}+0.0033z^{-2}+0.0002z^{-3}-0.0003z^{-4}}{1-1.4746z^{-1}+0.2303z^{-2}+0.2468z^{-3}}$	0.0048
RGLS		$G(z) = \frac{0.0013z^{-1}+0.0034z^{-2}+0.003z^{-3}-0.0003z^{-4}}{1-1.4326z^{-1}+0.1591z^{-2}+0.2761z^{-3}}$	0.0050

Identifikační algoritmus		Přenos deterministické části modelu $G(z)$	$R(0)$
BP	$p = 100$ $\eta = 0.01$ $\alpha = 0.001$	$G(z) = \frac{0.0016z^{-1} + 0.0037z^{-2} + 0.0010z^{-3} - 0.0003z^{-4}}{1 - 1.1890z^{-1} + 0.2645z^{-2} + 0.4573z^{-3}}$	0.0026
EML	$p = 350$ $\lambda = 0.01$	$G(z) = \frac{0.0015z^{-1} + 0.0033z^{-2} + 0.0006z^{-3} - 0.0003z^{-4}}{1 - 1.2692z^{-1} - 0.1145z^{-2} + 0.3869z^{-3}}$	0.0033
ML	$p = 350$ $\lambda = 0.01$	$G(z) = \frac{0.0015z^{-1} + 0.0029z^{-2} + 0.0005z^{-3} + 0.0001z^{-4}}{1 - 1.5232z^{-1} - 0.3738z^{-2} + 0.1520z^{-3}}$	0.0045
ARMAX _{amx(3,4,3,1)}		$G(z) = \frac{0.0013z^{-1} + 0.0035z^{-2} + 0.0072z^{-3} - 0.0004z^{-4}}{1 - 1.2800z^{-1} - 0.1270z^{-2} + 0.4101z^{-3}}$	0.0034

kde pro kritériu $R(0)$ píšeme

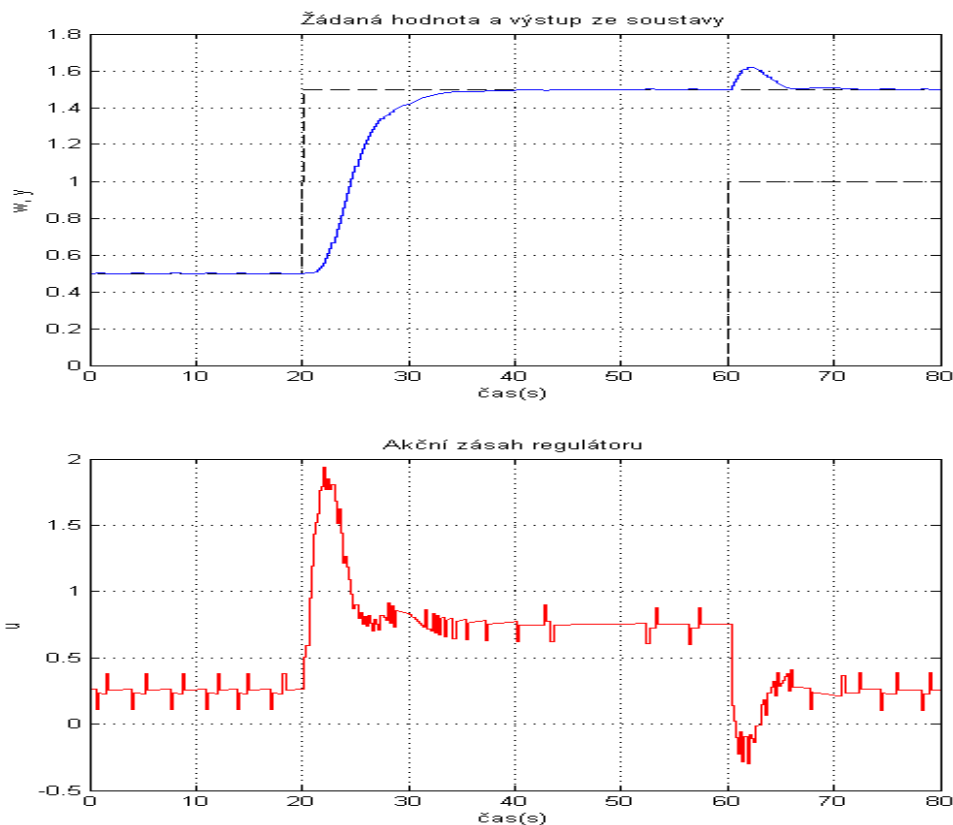
$$R(0) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \hat{e}^2(k) \quad (6.4)$$

Z průběhu simulací a údajů uvedených v tab. (2) vyplývá, že se na přesnosti modelů vyjma samotného algoritmu podílí i volba řádu jednotlivých polynomů. Přínos technik pro zpřesnění odhadu parametrů u metod nejmenších čtverců zde v některých případech není zaznamenán. Poznamenejme, že uvedené modely byly estimovány na základě buzení soustavy bílým šumem. Výsledky identifikace při adaptivním řízení mohou být proto zcela odlišné. Na chybovosti modelu se v zásadní míře podepisuje právě vliv poruchy. Chování reálné soustavy $G_{F1}(z)$ je ovlivněno ofsetem a driftem operačních zesilovačů a samotná data jsou zatížena chybou měření. Proto formulace lineární vstupně výstupní závislosti nemusí zcela postihnout chování procesu. Nejlepších výsledků aproximace, plně reprezentující dynamiku soustavy, bylo dosaženo metodou RIVm.

Z porovnání vlastností metod nejmenších čtverců a neuronových estimátorů vyvozují, že oba přístupy nabízejí obdobná řešení co do přesnosti, avšak řešení metod nejmenších čtverců je numericky spolehlivější.

6.2 OVĚŘENÍ CHOVÁNÍ ADAPTIVNÍCH REGULÁTORŮ NA SIMULOVANÝCH SOUSTAVÁCH

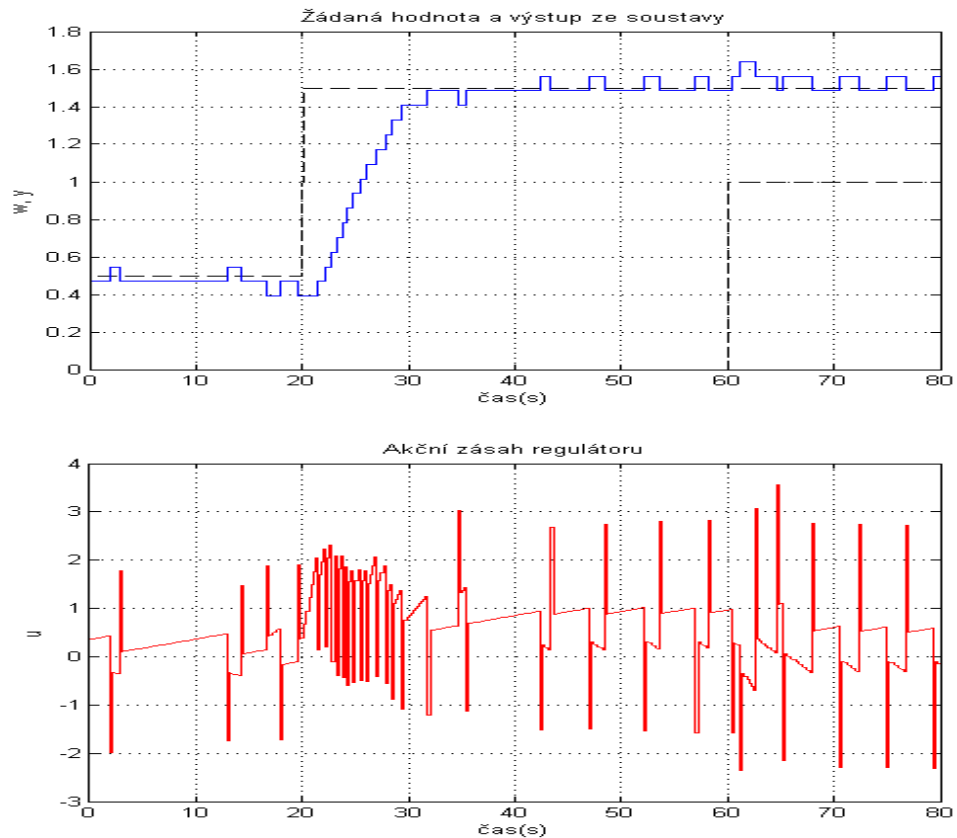
Obr. (16-18) ukazují odezvu systému na skokovou změnu řízení a poruchy spolu s akčním zásahem regulátoru. Výstup procesu (vždy horní z obrázků) a vstupní signál (vždy dolní z obrázků) jsou uvedeny pro skokovou změnu řízení $+1V$ v čase 20s. Deterministická porucha $+1V$ je přivedena do části $\frac{1}{(10s+1)}$ soustavy $G_M(z)$ v čase 60s.



Obrázek 16: Adaptivní Takahashiho regulátor s identifikace metodou ROEEPMLS se směrovým zapomínáním založeném na dekompozici informační matice pro $\lambda_e = 0.95$. Perioda vzorkování $T_s = 0.2s$. A/D a D/A převodníky jsou 12bitové.

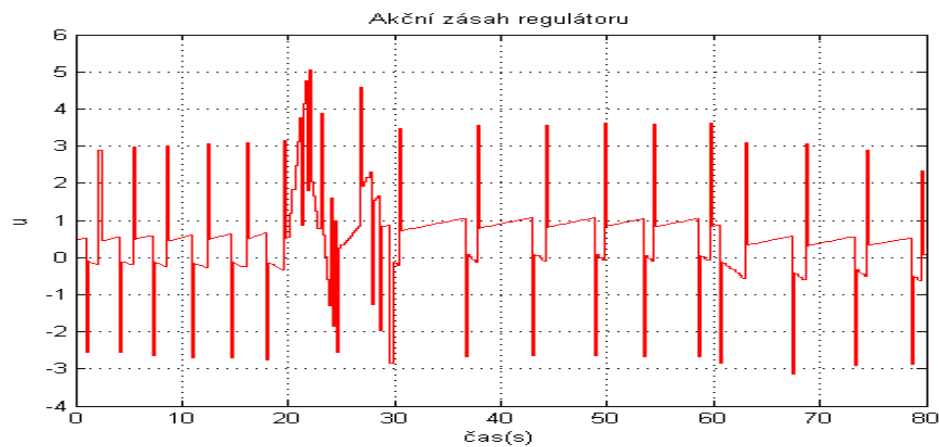
Z důvodu rychlejšího potlačení poruchy je s ohledem na výpočetní realizaci volena kratší perioda vzorkování. Krátká perioda vzorkování spolu s A/D a D/A převodníky podstatně znesnadňuje možnost identifikace. Výsledky simulace na obr.

(16) dokazují, že identifikační metoda na bázi metod nejmenších čtverců je schopna překonat vliv 12bitových A/D a D/A převodníků.



Obrázek 17: Adaptivní Takahashiho regulátor se zpětnovazební identifikací metodou ROEEPMLS se směrovým zapomínáním založeném na dekompozici informační matice pro $\lambda_e = 0.95$. Perioda vzorkování $T_s = 0.2s$. A/D a D/A převodníky jsou 8bitové.





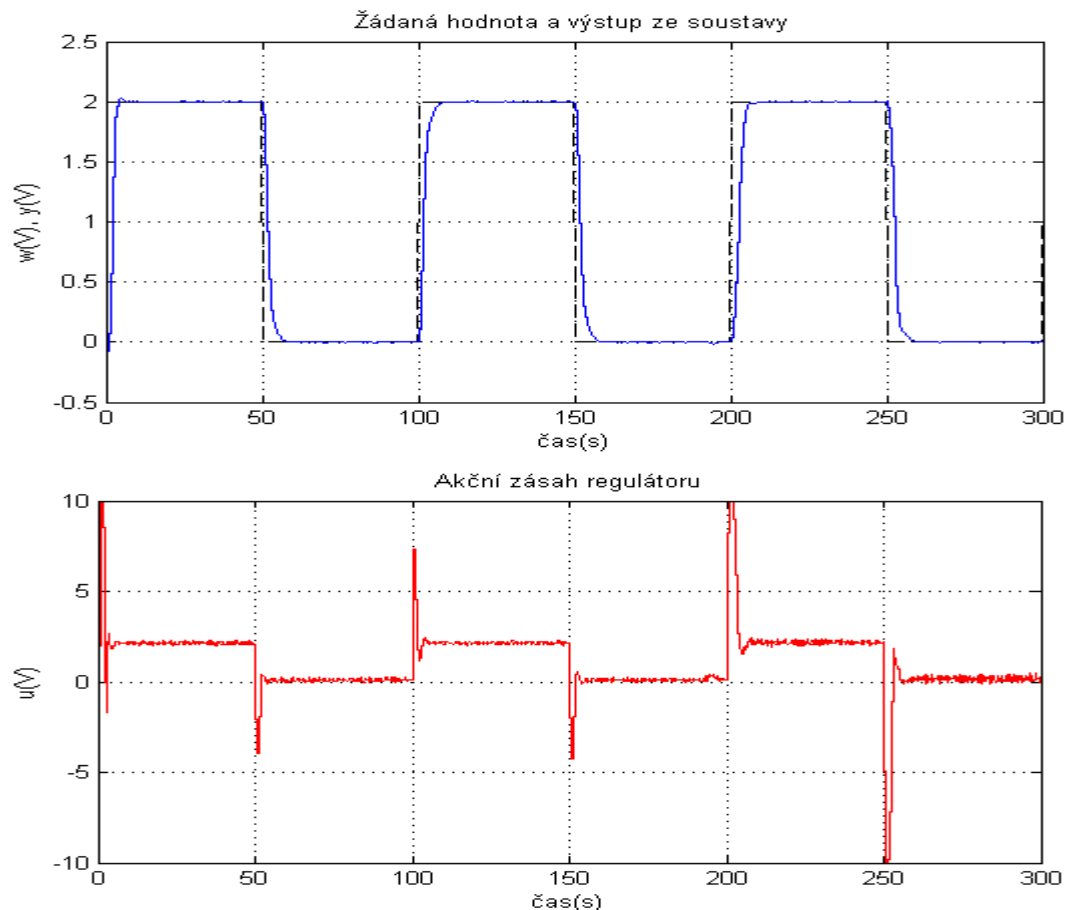
Obrázek 18: Identifikace algoritmem Marquardt-Levenberg s konstantou tlumení $\lambda = 0.01$ v uzavřené smyčce s Takahashiho regulátorem pro 8bitové A/D a D/A převodníky. $T_s = 0.2s$.

Snížení rozlišovací schopnosti A/D a D/A převodníků má negativní dopad na kvalitu regulačního pochodu viz obr. (17-18). Oba uvedené přístupy identifikace mohou být pro dané podmínky v procesu vyhodnoceny jako použitelné. Porovnáním metod pozorujeme větší kmitavost akčního členu u adaptivního regulátoru s identifikačním algoritmem Marquardt – Levenberg. Výsledky poukazují na skutečnost, že metody nejmenších čtverců mohou dosahovat stejných kvalit pro potřeby adaptivního řízení jako neuronové estimátory při krátké periodě vzorkování a výrazné nejistotě měření dat z procesu.

6.3 OVĚŘENÍ CHOVÁNÍ ADAPTIVNÍCH REGULÁTORŮ NA REÁLNÝCH SOUSTAVÁCH

Následující simulace jsou ověřením vlastností adaptivních regulátorů na reálných soustavách. Zkoumán je především dopad změny dynamiky řízené soustavy na chování zpětnovazebního obvodu. Přepnutí regulované soustavy z $G(z)_{F1}$ na $G(z)_{F2}$ nastane v okamžiku ustáleného děje přibližně v čase 195s. Rekurzivní algoritmy identifikace byly inicializovány bez předchozí znalosti soustavy a odhad parametrů systému probíhá pro model třetího řádu. Samotný regulátor, před započítím bodového přenosu parametrů θ , je nastaven tak, aby zaručoval stabilní

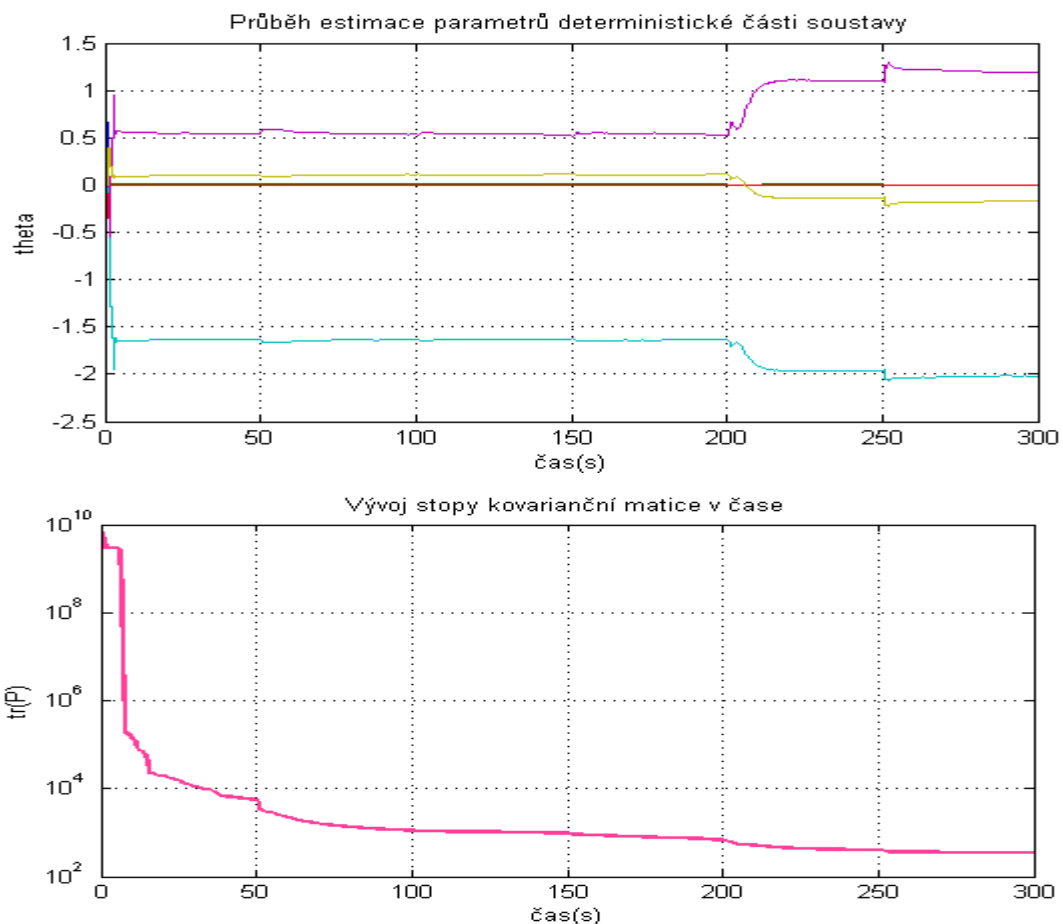
chování systému. Vedle průběhu akční $u(k)$ a regulované veličiny $y(k)$ je pro některé simulace uveden i záznam vývoje stopy kovarianční matice $P(k)$, proměnného faktoru zapomínání $\lambda_e(k)$ a odhadovaných parametrů $\hat{\theta}(k)$.



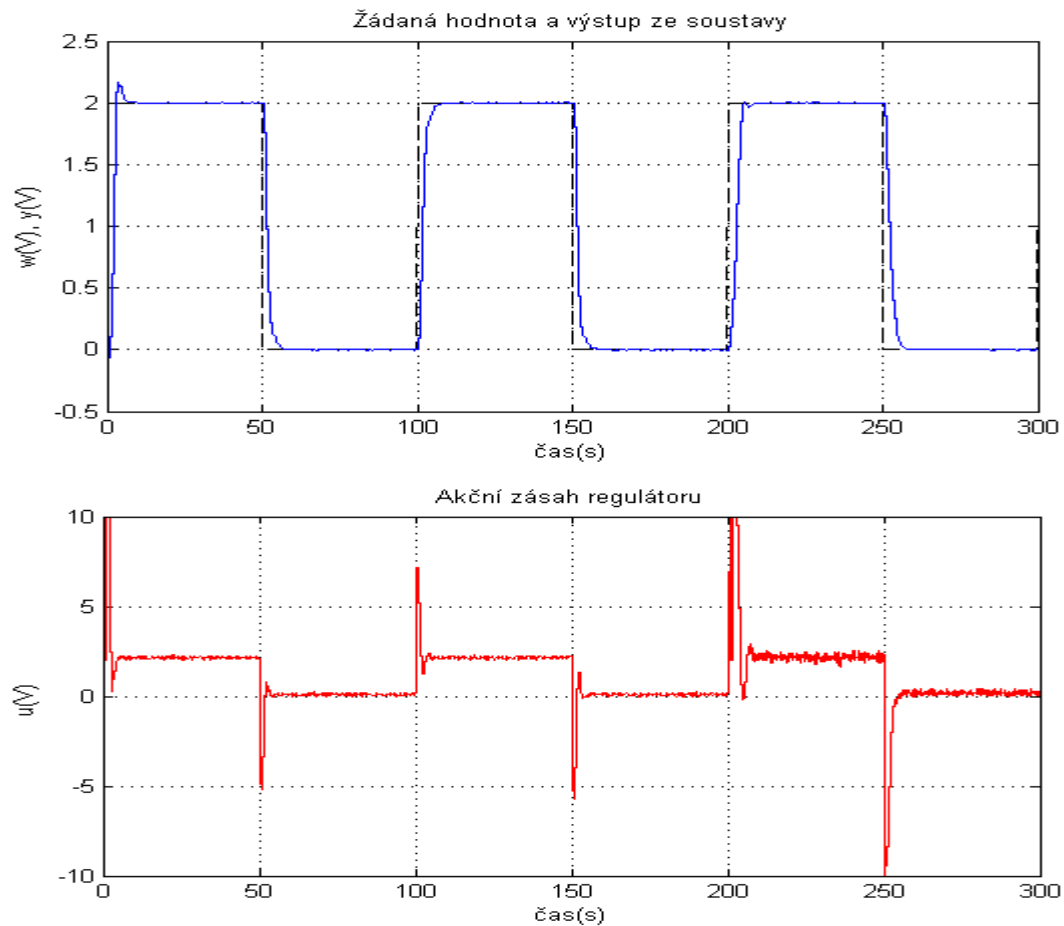
Obrázek 19: Takahashiho adaptivní regulátor s metodou identifikace ROEEPMLS se směrovým zapomínáním založeném na dekompozici informační matice. Faktor zapomínání byl volen $\lambda_e = 0.95$ a perioda vzorkování $T_s = 0.2s$.

Obr. (19) ukazuje průběh regulované veličiny a akčního zásahu. Vzhledem k adaptivním vlastnostem identifikačního algoritmu dochází k vytvoření kvalitního modelu již v prvních krocích výpočtu a tím je zamezeno nekorektnímu akčnímu zásahu, typickému pro adaptivní regulátory na počátku řídicího procesu. Změna dynamiky soustavy byla plně pokryta bez viditelných projevů. Na obr. (20) pozorujeme vývoj odhadů parametrů a stopy kovarianční matice. Vývoj stopy matice

naznačuje, že rozptyl mezi odhady parametrů klesá, čímž prokazuje zvyšování souladu mezi procesem a jeho modelem. Odhady parametrů, v případě, že nedochází ke změnám projevu v prostředí, se vyznačují svojí stabilitou. Vývoj hodnot parametrů je doprovázena změnou dynamiky soustavy a to jen v okamžicích buzení, kdy data v sobě nesou dostatečné množství informací o dynamice procesu. Při započítí samotné identifikace pozorujeme překmit hodnot parametrů. Ten je způsoben přechodem od inicializace metodou RLS k ROEEPMLS. Vysoká hodnota držena kovarianční maticí při počátku výpočtu je dána tím, že algoritmus při inicializaci neoperuje s polynomy pro stochastický popis systému.



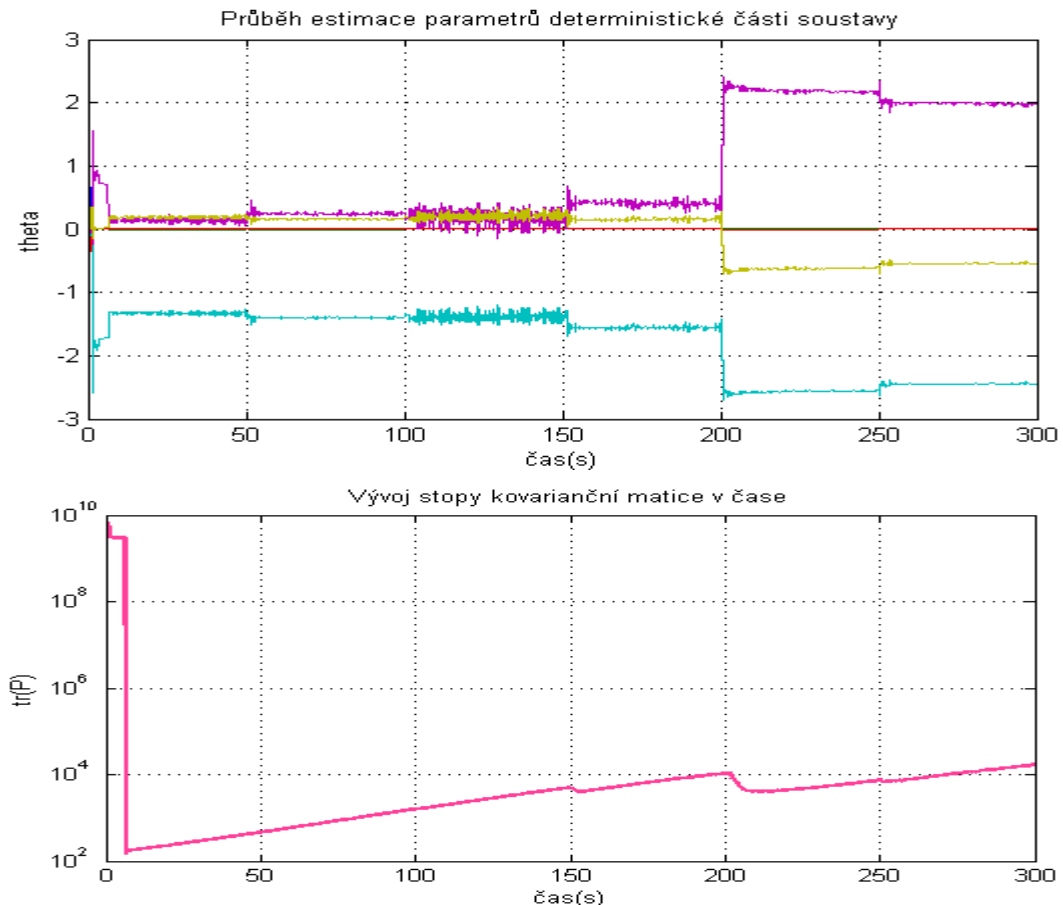
Obrázek 20: Průběh stopy kovarianční matice $P(k)$ a parametrů modelu $\hat{\theta}(k)$ pro ROEEPMLS se směrovým zapomínáním založeném na dekompozici informační matice.



Obrázek 21: FDW-ROEPMREFIL s konstantním exponenciálním zapomínáním v uzavřené smyčce s Takahashiho regulátorem. Faktor $\lambda_e = 0.995$ a perioda vzorkování $T_s = 0.2s$.

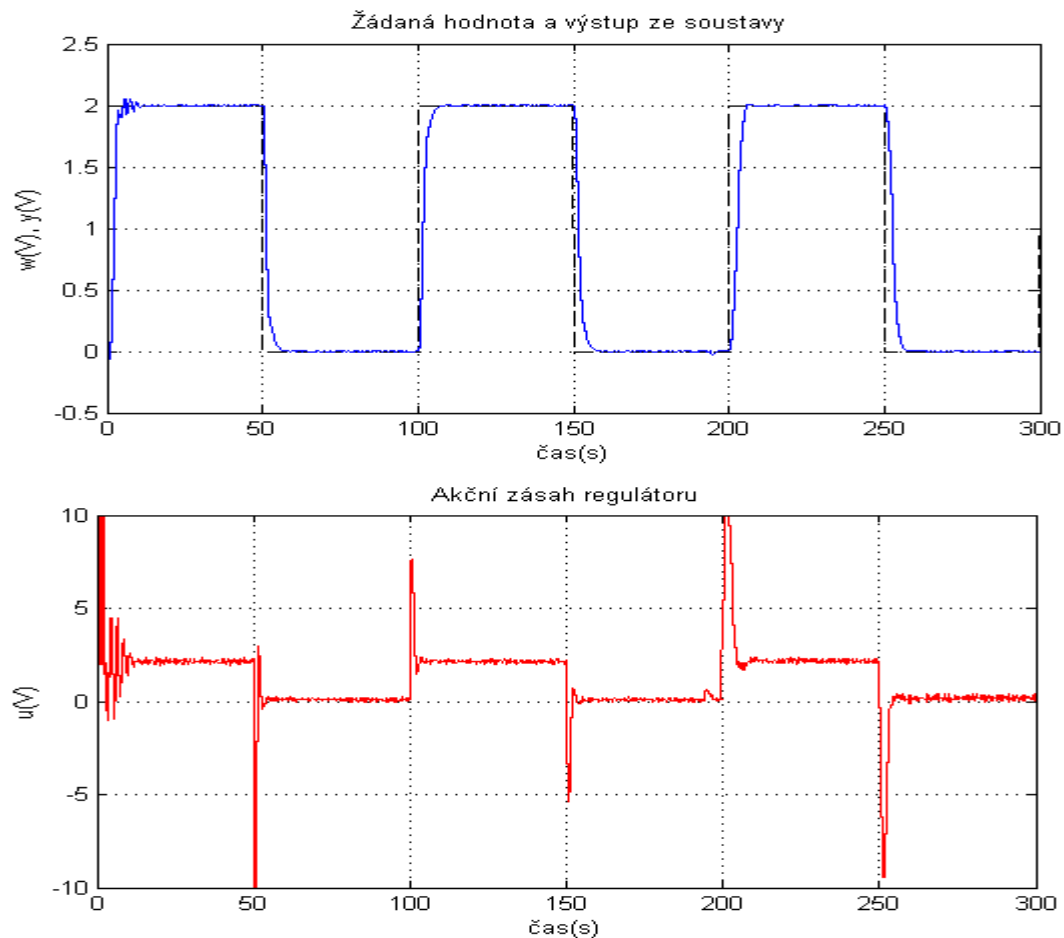
Porovnáním technik pro potlačování staré informace, konstantního exponenciálního zapomínání, obr. (21), a směrového zapomínání dekompozicí informační matice, vyvozujeme, že algoritmus s exponenciálním zapomínáním ztrácí na adaptibilitě vůči dynamice procesu. Počátky řízení jsou doprovázeny překmitem. Při změně povahy soustavy se však model úspěšně přizpůsobuje na nové vstupně výstupní chování procesu a tento soulad s časem narůstá. Projevem souladu může být chápán útlum kmitů akčního členu. Odhady parametrů jsou doprovázeny oscilacemi a dochází k jejich skokovému zpřesnění vždy při změně žádané hodnoty, viz obr. (22). U kovarianční matice se projevuje příznak estimátor windup jevu. Na němž se

zde podílí samotné vlastnosti metody pracující s konečným datovým horizontem, umocněné exponenciálním zapomínáním.



Obrázek 22: Odpovídající průběhy $P(k)$ a $\hat{\theta}(k)$ k identifikaci s technikou konstantního exponenciálního zapomínání.

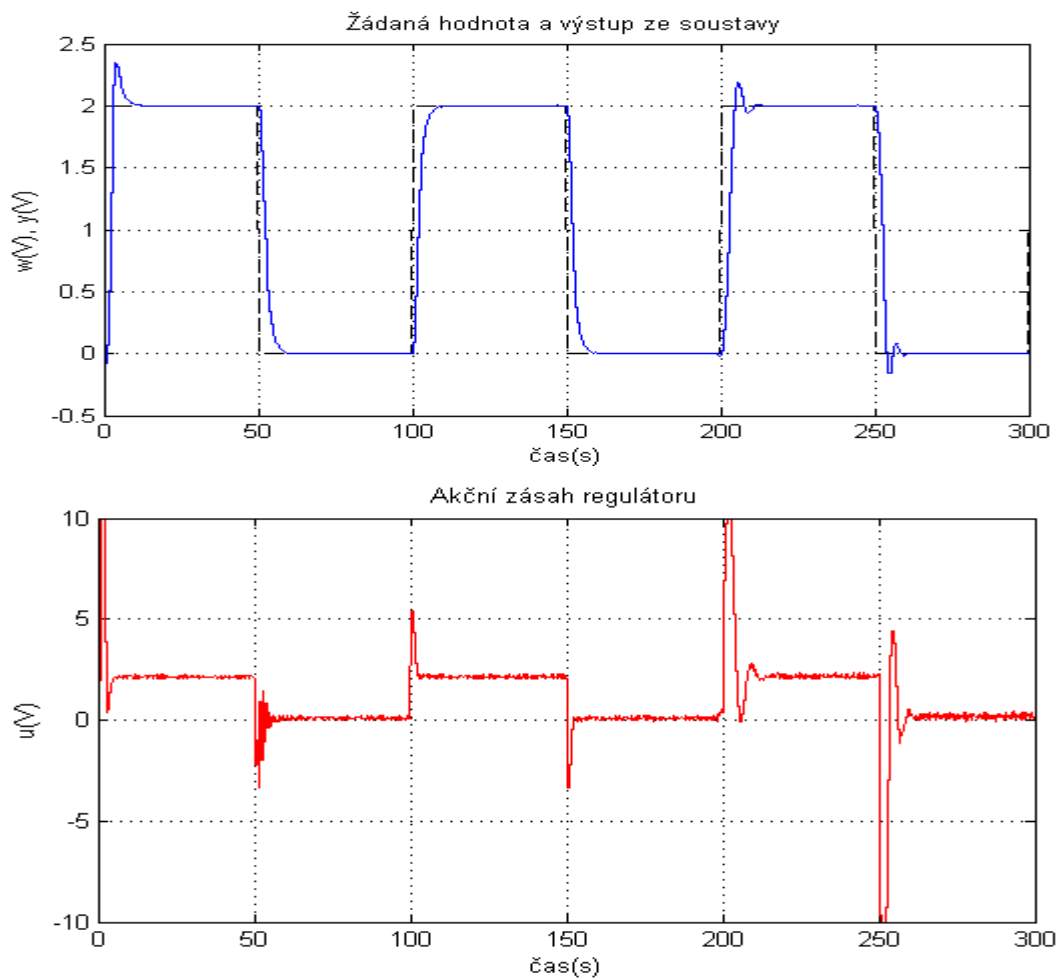
Volba adaptivního faktoru zapomínání na charakter algoritmu se směrovým zapomínáním dekompozicí informační matice, obr. (23), nepřináší znatelné vylepšení původního algoritmu. Můžeme poznamenat, že algoritmus konverguje rychleji na úkor přesnosti odhadů. Dále pozorujeme oscilace výstupní veličiny při započetí řídicího procesu vzniklé rozkmitem parametrů přepnutím inicializační metody na výslednou ROEEPMLS.



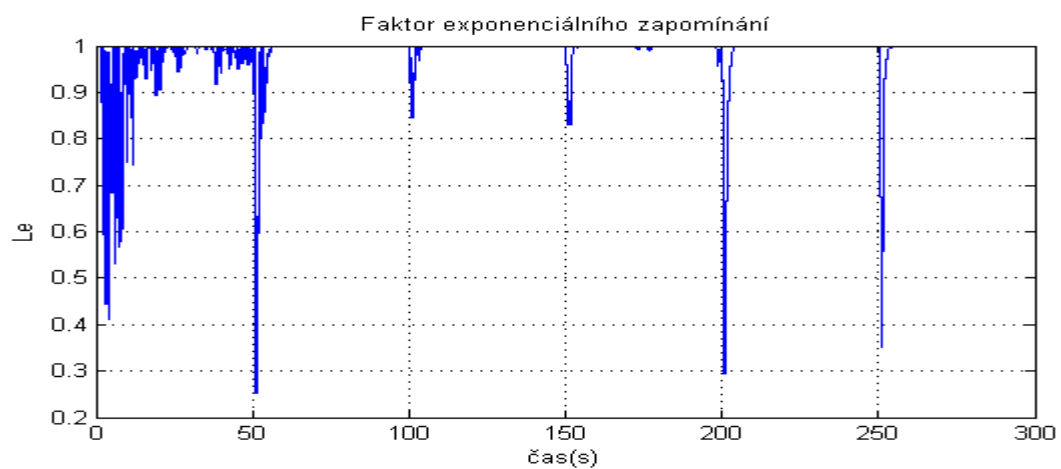
Obrázek 23: Takahashiho regulátor s identifikací v uzavřené smyčce metodou ROEEPMLS s adaptivním směrovým zapomínáním založeném na dekompozici informační matice. $T_s = 0.2s$.

Obr. (24) ukazuje průběhy regulované veličiny a akčního zásahu při zpětnovazební identifikaci metodou ROEPMREFIL s adaptivním směrovým zapomínáním. Z průběhů vyvozujeme, že se algoritmus přizpůsobuje změnám soustavy pozvolna a ve vymezeném časovém horizontu nedosáhl požadovaného souladu modelu se soustavou.

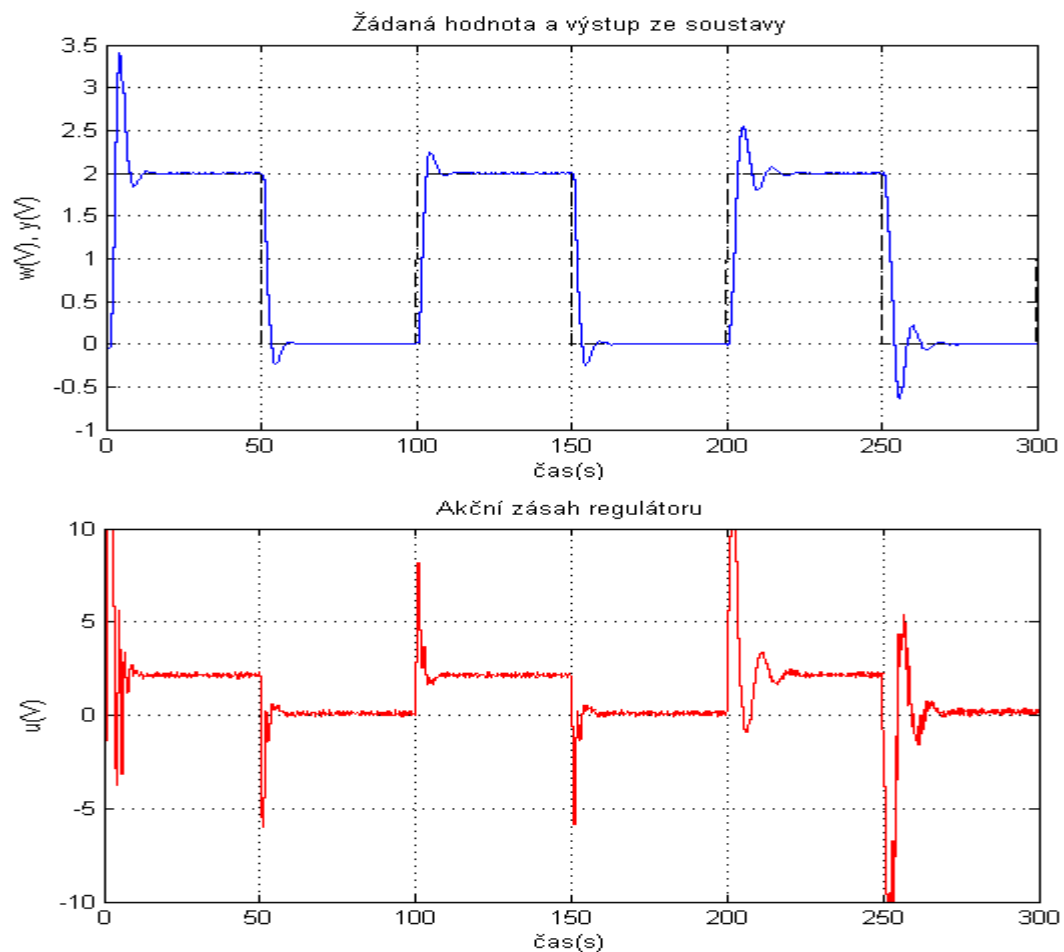
Obr. (25) je záznamem průběhu proměnného faktoru zapomínání sledujícího míru buzení procesu. Ačkoliv jeho průběh odpovídá povaze procesu, aplikace skalárního směrového zapomínání ne zcela potlačuje vliv starších dat



Obrázek 24: Takahashiho regulátor s identifikací v uzavřené smyčce metodou ROEPMREFIL s adaptivním směrovým zapomínáním. $T_S = 0.2s$.



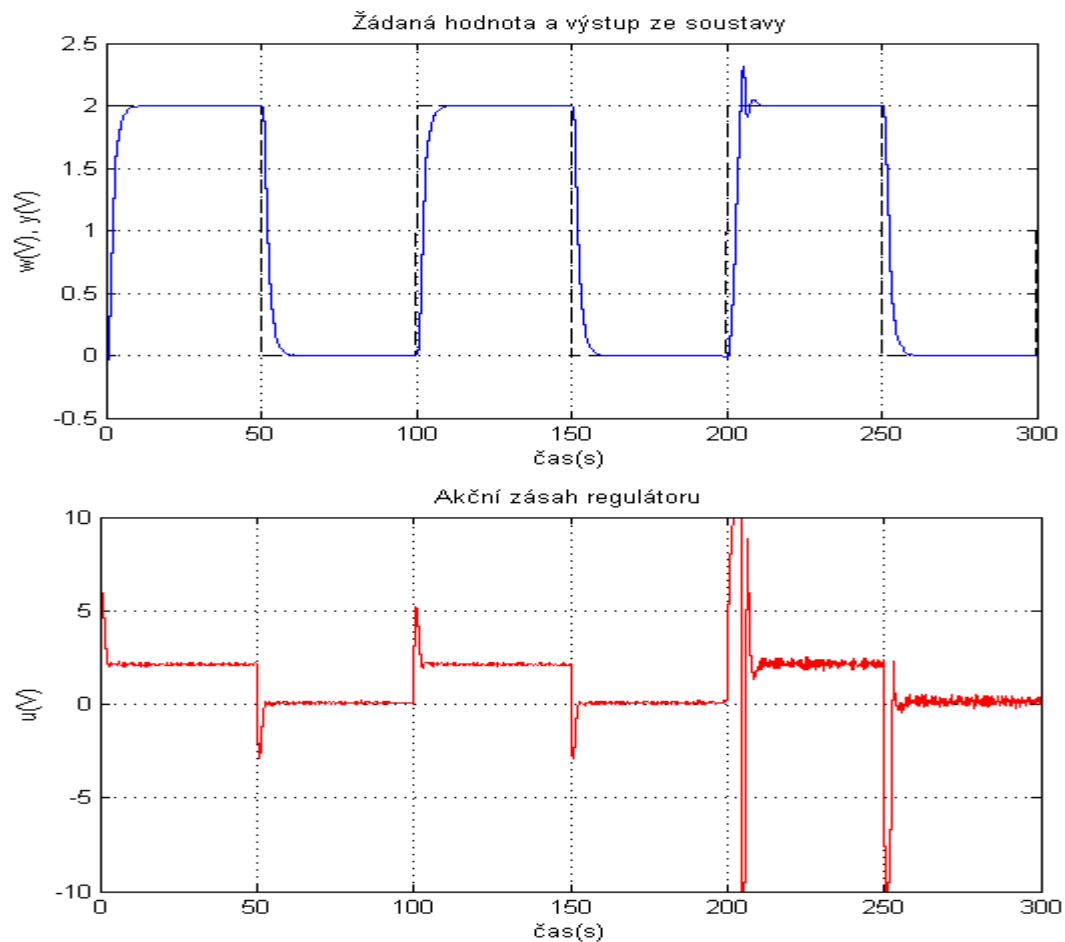
Obrázek 25: Průběh faktoru λ_e pro techniku adaptivního směrového zapomínání.



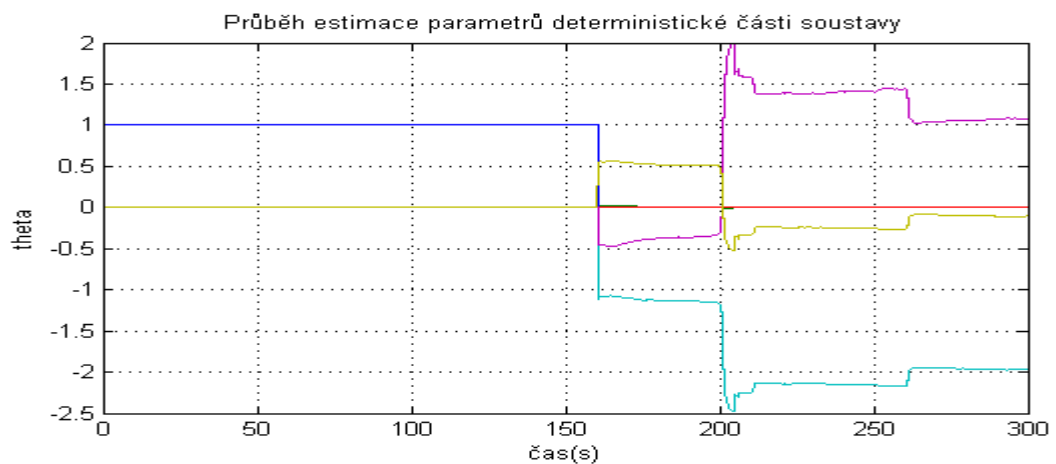
Obrázek 26: Diskrétní ekvivalent PI-D regulátoru s identifikací v uzavřené smyčce metodou ROEPMREFIL s adaptivním směrovým zapomínáním. $T_s = 0.2s$.

Obr. (26) představuje záměnu Takahashiho regulátoru za diskrétní ekvivalent PI-D regulátoru. Identifikační metoda zůstala stejná jako v předcházejícím případě, tedy ROEPMREFIL s adaptivním směrovým zapomínáním. Ani v tomto případě nedošlo k optimálnímu nastavení regulátoru vzhledem k omezení překmitu výstupní veličiny po změně dynamiky řízené soustavy.

Obr. (27) znázorňuje průběh řízené veličiny a akčního zásahu s identifikací v uzavřené smyčce metodou Marquardt – Levenberg. Z důvodu dlouhého horizontu trénovacích dat $p = 800$ se pevně nastavený Takahashiho regulátor přepne do adaptivního režimu až v čase 160s. Při skokové změně soustavy se adaptivní regulátor optimálně přizpůsobil ve vymezeném časovém intervalu.



Obrázek 27: Takahashiho regulátor s algoritmem identifikace ML. Konstanta tlumení $\lambda = 0.01$. $T_s = 0.2s$.



Obrázek 28: Odpovídající průběh odhadu parametrů eximovaných metodou ML při adaptivním řízení.

Na obr. (28) je zachycen vývoj odhadu parametrů v čase pro metodu identifikace ML. Skoková změna hodnot parametrů podmíněná přepnutím soustav nastane v okamžiku změny žádané hodnoty. Parametry jsou s rostoucím časem, a tím upadajícím vlivem starších dat zpřesňovány.

Dopad volby identifikačního algoritmu na výkon regulátoru odpovídající výše uvedeným grafům je vyhodnocen z hlediska kvality regulace kvadratickými kritérii. Shrnutí uvádí tab. (3).

Tabulka 3: Vyhodnocení kvality regulace kvadratickými kritérii.

Metoda	J_u	J_e
Takahashiho regulátor a ROEEPMLS se směrovým zapomínáním dekompozicí informační matice	0.1664	0.1241
Takahashiho regulátor a FDW – ROEPMREFIL,	0.4451	0.1247
Takahashiho regulátor a ROEEPMLS s adaptivním směrovým zapomínáním dekompozicí informační matice	0.1052	0.1251
Takahashiho regulátor a ROEPMREFIL s adaptivním směrovým zapomínáním	0.2031	0.1252
Takahashiho regulátor a ML	0.5762	0.1277

Jednotlivá kvadratická kritéria jsou formulována ve tvaru

$$J_u = \frac{1}{k_2 - k_1 + 1} \sum_{k=k_1}^{k_2} \Delta u^2(k) \quad (6.5)$$

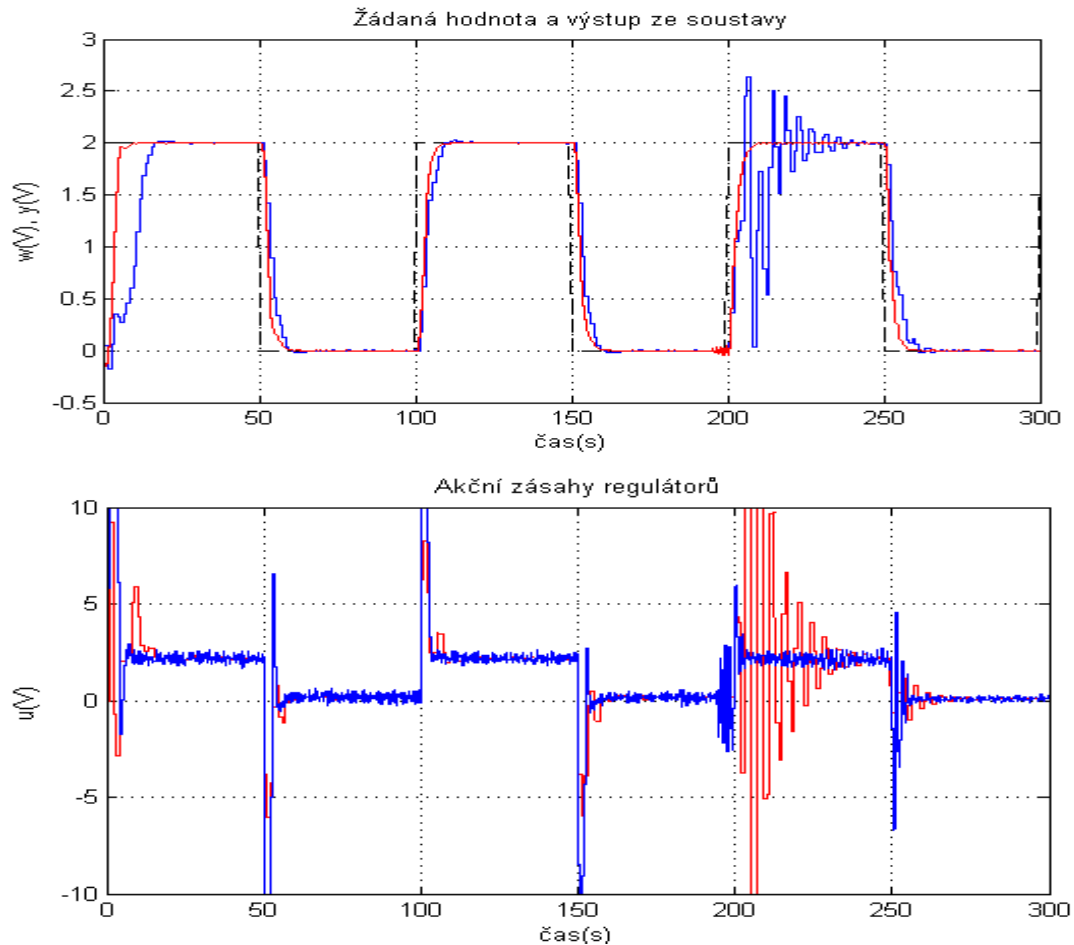
$$J_e = \frac{1}{k_2 - k_1 + 1} \sum_{k=k_1}^{k_2} e^2(k) \quad (6.6)$$

kde $e(k)$ značí regulační odchylku, $u(k)$ hodnotu akčního zásahu a $k_1 = 800$, $k_2 = 1500$.

Vyhodnocení jednotlivých přístupů naznačuje vysokou schopnost adaptace a numerické spolehlivosti metody s technikou maticového zapomínání. Nejhuře pro hodnoty penalizace v porovnání s ostatními metodami dopadl algoritmus ML.

Krátká perioda vzorkování způsobí, že do řízeného procesu je vnášeno menší dopravní zpoždění, v důsledku čehož je rychleji potlačena deterministická porucha a odezva na skok řízení, jak pozorujeme v grafu na obr. (29). Zde se identifikační

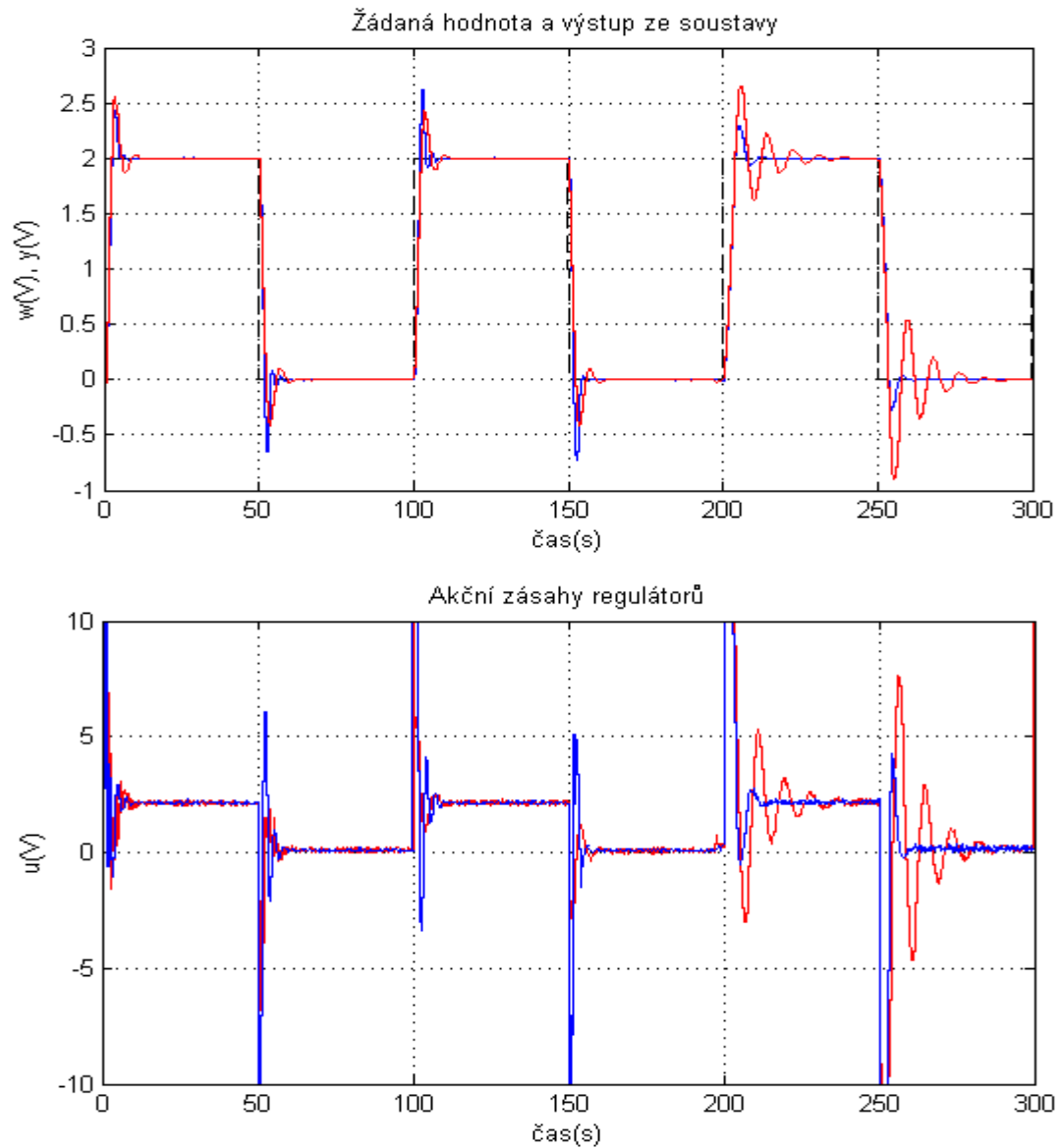
algoritmus při krátké periodě vzorkování přizpůsobil z časového hlediska rychleji na změnu dynamiky soustavy oproti situaci, kdy je soustava vzorkována s větší periodou vzorkování. Vysvětlujeme tím, že algoritmus má v daném okamžiku větší množství dat vystihující nové vlastnosti soustavy.



Obrázek 29: Vliv periody vzorkování na dynamické vlastnosti zpětnovazebního obvodu s adaptivním Takahashiho regulátorem a ROEEPMLS se směrovým zapomínáním dekompozicí informační matice. $T_s = 0.2s$ a $T_s = 1s$. Přepnutí soustavy z $G(z)_{F2}$ na $G(z)_{F1}$ nastane v čase $t = 195s$.

V grafu na obr. (30) je zobrazeno porovnání řídicí veličiny a akčního zásahu při řízení pevně nastaveným a adaptivním PID regulátorem. Před skokovou změnou soustavy oba regulátory dosahují přibližně stejné kvality řízení. Větší překmit kompenzovaný kratší dobou odezvy je u adaptivního regulátoru. Po skokové změně

soustavy je řízení pevně nastaveným PID regulátorem značně kmitavé a neefektivní. Oproti tomu adaptivní PID regulátor se plně přizpůsobil nové dynamice soustavy.



Obrázek 30: Porovnání **pevně nastaveného** a **adaptivního** PID regulátoru při změně dynamiky řízené soustavy. Reálný proces je vzorkován s periodou $T_s = 0.2s$.

7. ZÁVĚR

V rámci diplomové práce byla řešena metodika návrhu adaptivního číslicového regulátoru. Důraz byl kladen zejména na úlohu zpětnovazební parametrické identifikace, zastávající v dané problematice klíčovou roli. Úvodní část práce je věnována algoritmům diskrétního řízení. Dále jsou uvedeny struktury matematických modelů vhodných pro popis reálných soustav a jich využívající metody on-line identifikace. V části zabývající se syntézou regulátoru opírající se o znalost estimovaného modelu je popsána modifikovaná metoda Zieglera a Nicholse. Všechny popsané algoritmy jsou součástí prostředí umožňující jejich grafické vyhodnocení.

Hlubší zaměření na problém identifikace bylo motivováno rozdíly mezi výsledky čisté simulace a výsledky získané implementací na reálných soustavách. Problematika identifikace je řešena dvěma základními přístupy: klasickými metodami založenými na rekurzivním odhadu parametrů metodami nejmenších čtverců a neuronových estimátorů.

V případě metod nejmenších čtverců byla řešena otázka získání neposunutého odhadu z dat zatížených nejistotou měření. K tomu byly využity prostředky pseudolineární regrese a pomocných instrumentů. Zajištění pozitivní definitnosti kovariancí matice, a tím numerické stability algoritmu je docíleno aplikací filtrů REFIL a LDFIL. Vylepšením konvergenčních vlastností, zejména s ohledem na změnu dynamiky soustavy, je dosaženo implementací technik se selektivním vážením dat.

Pro modelování neuronovými estimátory byl zvolen algoritmus Back Propagation a jeho modifikace co do dopředného učení Marquardt-Levenberg.

Z porovnání obou přístupů lze vyvodit tyto závěry

- 1) Metody nejmenších čtverců i neuronové estimátory (s momentovou konstantou) mohou přirozeně pracovat s filtry eliminující vliv šumu a oscilaci odhadovaných parametrů nemající přitom vliv na dynamiku soustavy.

- 2) Neuronové sítě pro tvorbu modelu nevyžadují souvislé měření V/V dat [19], tedy dat nenesoucích informaci o dynamice systému. Je způsobeno tím, že v algoritmu není obsažena setrvačnost v podobě akumulace předchozích informací. (viz kovarianční matice u metod nejmenších čtverců).
- 3) Inicializace neuronových estimátorů je značně komplikovaná (korekční člen má velkou váhu). A nelze tak zaručit korektní chování řídicího algoritmu na počátku procesu.
- 4) Obě třídy metod mohou pracovat s krátkou periodou vzorkování na reálných procesech s kvantifikací měřenosné veličiny.

Porovnáním obou řešení co do aproximačních vlastností vzešla vítězně metoda z řad nejmenších čtverců, stejně tak i pro sledování časově proměnných parametrů (bylo užito techniky směrového zapomínání dekompozicí informační matice).

Srovnání pevně nastaveného a adaptivního regulátoru ukazuje v daném případě na rovnocenné kvality obou, při změně dynamiky řízené soustavy pak jednoznačně ve prospěch adaptivního regulátoru.

8. SEZNAM POUŽITÝCH ZDROJŮ

- [1] PIVOŇKA, P.: Optimalizace regulátorů, VUT Brno, skriptum, 2005.
- [2] KULHAVÝ, R.: Průběžné sledování parametrů metodou nejmenších čtverců se selektivním potlačováním staré informace. ČSAV 1985.
- [3] CAO*, L., SCHWARTZ, H.: A directional forgetting algorithm based on the decomposition of the information matrix. Automatica 36 (2000).
- [4] BLAHA, P.: Metody pomocných proměnných. VUT Brno, prezentace, 2007.
- [5] BLAHA, P.: Metody identifikace založené na vybělení chyby predikce. VUT Brno, prezentace, 2007.
- [6] BLAHA, P.: Modely lineárních systémů. VUT Brno, prezentace, 2007.
- [7] DING* , F., YONGSONG, X.: A finite-data-window least squares algorithm with a forgetting factor for dynamical modeling. Automatica 186 (2007).
- [8] PIVOŇKA, P.: Číslicová řídicí technika, VUT Brno, skriptum, 2003.
- [9] ŠVANCARA, K.: Adaptive optimal controller with identification based on neural networks. VUT Brno, FEKT, 2006. 99s. Vedoucí disertační práce prof. Ing. Petr Pivoňka, CSc.
- [10] ŠÍMA, J., NERUDA, R.: Teoretické otázky neuronových sítí.
- [11] PIVOŇKA, P., SCHMIDT, M.: Comparative analysis of discrete implementations in PID controllers. VUT Brno.
- [12] BOHM, J.: Přehled použití odmocninových filtrů. ČSAV 1980.
- [13] BIERMAN, G. J.: Factorization methods for discrete sequential estimation. Academic Press, New York, 1977.
- [14] I. D. LANDAU.: Identification et commande des systemes. 2e edition revue et augmentée. Hermes, Paris, 1993.
- [15] BOBÁL, V. a kol.: Praktické aspekty samočinně se nastavujících regulátorů. VUTUM, 1999. ISBN 80-214-1299-2.
- [16] LORENC, V. Prostředí pro porovnávání vlastností samo se nastavujících regulátorů. Brno: VUT Brno, FEKT, 2006. 63 s. Vedoucí diplomové práce prof. Ing. Petr Pivoňka, CSc.

- [17] FIKAR, M., MIKLEŠ, J.: Identifikácia systémov. STU Bratislava, skriptum, 2006. ISBN 80-227-1177-2.
- [18] L. LJUNG.: Systém identification – theory for the user (sekond edition). Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1999, ISBN 0-13-656695-2.
- [19] SUN, Y. J., LI, J. W., SONG, S.: A new robust BP algorithm and its application on the identification of dynamic systém. Changsha, 2003.
- [20] MOORE, J. B., BOEL, R. K.: Asymptotically optimum recursive prediction error methods in adaptive estimation and control. Automatica, Vol. 22, No. 2, pp. 237-240, 1986.

SEZNAM ELEKTRONICKÝCH PŘÍLOH

V adresáři VIZUALIZACE se nachází zdrojový kód grafického prostředí.

Elektronická verze diplomové práce Dokoupil_Jakub.pdf je uložena pod adresářem DP.