



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A BIOMECHANIKY

INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND BIOMECHANICS

POPIS ROZLOŽENÍ NAPĚTÍ V BLÍZKOSTI KOŘENE OSTRÉHO VRUBU

ON THE STRESS DISTRIBUTION NEAR THE TIP OF A SHARP NOTCH

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Jakub Ostratický

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

doc. Ing. Tomáš Profant, Ph.D.

BRNO 2023

Zadání bakalářské práce

Ústav:	Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky
Student:	Jakub Ostratický
Studijní program:	Základy strojního inženýrství
Studijní obor:	Základy strojního inženýrství
Vedoucí práce:	doc. Ing. Tomáš Profant, Ph.D.
Akademický rok:	2022/23

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Popis rozložení napětí v blízkosti kořene ostrého vrubu

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Vrub je běžnou součástí technických konstrukcí a také potenciálním zdrojem problémů jejich provozu a užití. Vrub se chová jako koncentrátor napětí způsobující nukleaci a následný růst trhlin ze svého kořene. Cílem uchazeče bude seznámení se s problematikou popisu rozložení napětí v blízkosti kořene ostrého vrubu a aplikací základních principů lomové mechaniky na vyhodnocování iniciace a budoucího růstu trhlin v jeho okolí.

Cíle bakalářské práce:

1. Studium teorie k sestavení asymptotického rozvoje napětí v okolí kořene vrubu.
2. Vyjádření parametrů charakterizující singularitu napětí v kořeni vrubu pro různé materiálové kombinace a geometrii vrubu.
3. Aplikace základních principů lomové mechaniky na vyhodnocování iniciace a budoucího růstu trhlin v jeho okolí.

Seznam doporučené literatury:

Broberg, K. B., Cracks and Fracture, Academic Press, 1999.

Sun, C. T., Jin, Z.-H., Fracture Mechanics, Elsevier, 2012.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2022/23

V Brně, dne

L. S.

prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc.
ředitel ústavu

doc. Ing. Jiří Hlinka, Ph.D.
děkan fakulty

ABSTRAKT

Vrub je z hlediska teorie pružnosti koncentrátorem napětí a znalost popisu tohoto napětí v okolí jeho vrcholu je zásadní pro správnou funkčnost celé škály součástí a výrobků. Napětí ve vrcholu vrubu má singulární charakter a je technicky nemožné zabránit vzniku trhlin v jeho okolí. Avšak z lomové mechaniky je známo, že iniciace a šíření trhlin není ovlivněna velikostí napětí na jejich čelech, ale jeho intenzitou reprezentovanou tzv. součinitelem intenzity napětí. V případě vrubu hovoříme o zobecněném součiniteli intenzity napětí nebo jednoduše o amplitudách singulárních částí napětí. Tyto součinitele není možné stanovit přímo z výsledků dnes běžných numerických metod jako je např. MKP, ale je nutné použít metody lineární lomové mechaniky založené na asymptotickém řešení rovnic rovnováhy pružnosti. Předkládaná práce se zabývá případem symetrického ostrého vrubu v izotropním materiálu zatíženém v módu *I* nebo *II*. V práci je analyzován charakter singularity napětí na čele vrubu a vyjádřen odpovídající součinitel intenzity napětí. Získané asymptotické řešení je srovnáno s numerickým řešením MKP.

KLÍČOVÁ SLOVA

Ostrý vrub, zobecněný součinitel koncentrace napětí, asymptotické řešení, lomová mechanika

ABSTRACT

The notch is a stress concentrator from the point of view of elasticity theory and the knowledge of the description of this stress in the vicinity of its tip is necessary for the correct functionality of a wide range of mechanical components and products. The stress at the tip of the notch is singular and it is technically impossible to prevent the initiation of cracks in its vicinity. However, it is known from fracture mechanics that the initiation and propagation of cracks is not influenced by the magnitude of the stress at their tips, but its intensity characterized by the so-called stress intensity factor. In the case of a notch, it is a generalized stress intensity factor or simply the amplitudes of the singular parts of the stress field. These coefficients cannot be determined directly from the results of widely used numerical methods such as FEM, but it is necessary to use linear fracture mechanics methods based on the asymptotic solution of the equilibrium equations in elasticity. The presented work deals with the case of a symmetric sharp notch in an isotropic material under the mode I or II loadings. The stress singularity and the related stress intensity factor at the notch tip are analysed and evaluated. The derived asymptotic solution is compared with the results obtained from the FEM analysis.

KEYWORDS

Sharp notch, generalized stress concentration factor, asymptotic solution, fracture mechanics

BIBLIOGRAFICKÁ CITACE

Ostratický, Jakub. *Popis rozložení napětí v blízkosti kořene ostrého vrubu*. Brno, 2023, 26 s. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky. Vedoucí bakalářské práce Ing. Tomáš Profant, Ph.D.

ČESTNÉ PROHLÁŠENÍ

Prohlašuji, že bakalářskou práci jsem vypracoval samostatně, pod odborným vedením Ing. Tomáš Profant, Ph.D. Současně prohlašuji, že všechny zdroje obrazových a textových informací, ze kterých jsem čerpal, jsou řádně citovány v seznamu použitých zdrojů.

.....

Podpis autora

PODĚKOVÁNÍ

Tímto bych chtěl poděkovat vedoucímu mé bakalářské práce Ing. Tomáš Profant, Ph.D, za jeho vedení, cenné rady a ochotu se kterou se mi vždy věnoval při řešení různých problémů a nejasností.

OBSAH

1	ÚVOD	9
2	ZÁKLADY LINEÁRNÍ ELASTICKÉ LOMOVÉ MECHANIKY	10
3	FORMULACE PROBLÉMU	13
4	VÝPOČET ROZLOŽENÍ NAPĚTÍ PŘED ČELEM VRUBU	17
4.1	Exponenty singularity napětí	17
4.2	Napětí v blízkosti kořene vrubu.....	18
5	ZÁVĚR	23
6	CITOVANÁ LITERATURA.....	24
7	SEZNAM OBRÁZKŮ A GRAFŮ	25
8	SEZNAM PŘÍLOH	26

1 ÚVOD

Většina strojních součástí obsahuje tvarové změny ve formě vrubů, které mohou být koncentrátorem napětí. S rostoucím napětím v okolí vrubu hrozí tvorba a šíření trhlin, které mohou vést až k selhání součásti. Aby se dalo nebezpečné šíření trhliny rozpoznat a zamezit jejímu dalšímu šíření, muselo v oblasti mechaniky dojít ke vzniku nového vědního oboru, *lomové mechaniky*.

Jako první na tuto skutečnost v roce 1920 ve své práci poukázal A. A. Griffith. Ten svou teorii aplikoval na skle, které je velmi křehké a splňuje tedy podmínky pro šíření velmi nebezpečného křehkého lomu. Na tomto materiálu popsal svůj *energetický přístup* posuzování stabilního šíření křehkých trhlin, kde přírůstek práce nutné k růstu trhliny se musí rovnat změně deformační energie odpovídající povrchové energii nově vzniklých ploch trhliny. Nicméně, Griffithův energetický přístup řešení problematiky křehkého lomu je příliš obecný a obtížně aplikovatelný na různorodost problémů v inženýrské praxi, kde je třeba brát v úvahu celou škálu odlišných druhů materiálů, geometrii součástí a typů zatěžování. Tento problém vyřešil až o téměř čtyřicet let později G. R. Irwin, který zavedl tzv. *součinitel intenzity napětí K* , jako amplitudu singulární části asymptotického rozvoje napětí před čelem trhliny. Irwin ukázal, že k růstu trhliny dojde pouze za předpokladu, že součinitel intenzity napětí K dosáhne své kritické hodnoty. Tato kritická hodnota se nazývá *lomová houževnatost materiálu* a je součástí množiny běžných a snadno měřitelných materiálových charakteristik, což je z hlediska inženýrské praxe velmi důležité.

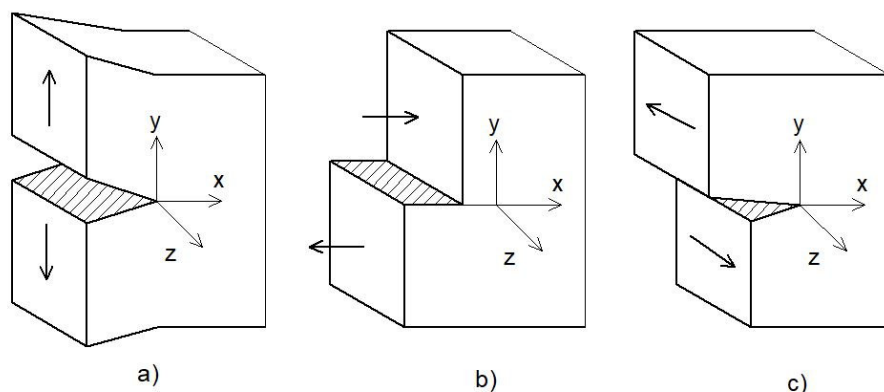
Obrat v přístupu konstruktérů a techniků k lomové mechanice nastal během druhé světové války. Způsobil jej případ křehkého lomu trupů nákladních lodí třídy *Liberty*. Fenomén lodí této třídy spočíval v rychlosti a technologii jejich výroby, která byla postavena na tehdy zdaleka ne zvládnutém svařování jednotlivých plátů trupu lodí na rozdíl od tehdy konvenčního nýtovaného spoje. Tato metoda byla velice efektivní, jenže nikdo nepředpokládal vznik vad a vnitřních pnutí vlivem tepelného namáhání. Tehdy z celkového počtu 2700 vyrobených lodí jich bylo několik stovek poškozeno křehkým lomem. V některých případech se loď dokonce rozlomila v půli. Vyšetřením těchto událostí se došlo k závěru, že za selháním velké části konstrukcí stojí šíření vnitřních vad, které mohou vést k lomu součástí.

2 ZÁKLADY LINEÁRNÍ ELASTICKÉ LOMOVÉ MECHANIKY

Lom součásti lze definovat jako rychlý růst trhliny při statickém zatížení, kdy není překročena mez kluzu daného materiálu a *lomová mechanika* je obor mechaniky, který se problematikou lomu zabývá. V *lineární elastické lomové mechanice* (LELM) rozlišujeme tři módy zatěžování [1, 2], mód I – otevírací mód, mód II – rovinný smykový mód a mód III – příčný smykový mód. Tyto módy lze popsat jako rozdíl vzájemných posunů u_x, u_y, u_z mezi oběma líci trhliny. Jestliže se počátek lokálního kartézského souřadného systému nachází na čele trhliny tak, že osa x leží v rovině trhliny, osa y je na ní kolmá a osa z je rovnoběžná s jejím čelem, viz Obr. 1, pak

- *Mód I* – otevírací mód, protější líce trhliny se pohybují přímo od sebe ve směru osy y .
- *Mód II* – rovinný smykový mód, líce trhliny se pohybují ve směru osy x , tj. v protisměrech v rovině trhliny.
- *Mód III* – příčný smykový mód, líce trhliny konají pohyb ve směru osy z , tedy ve směru rovnoběžném s čelem trhliny.

Stabilní šíření trhliny je složitý a komplexní proces porušování materiálu, který kombinuje a je superpozicí těchto tří zatěžovacích módů, přičemž zatěžovací mód I je z energetického hlediska pro trhlínu nejvýhodnější a z hlediska lomové houževnatosti materiálu nejvíce nebezpečný. Čistého módu II je prakticky velmi obtížné dosáhnout a ve skutečnosti se zatěžovací mód II trhliny vyskytuje jen v kombinaci se zatěžovacím módem I. Toho se však s výhodou využívá v mechanismech zvyšující lomovou houževnatost materiálů na základě jejich vnitřní struktury. Mód III je praktický zejména z teoretického hlediska, jelikož jeho popis je matematicky nejschůdnější při zachování všech fyzikálních hledisek šíření trhliny v materiálu.



Obr. 1 Módy zatěžování trhliny: a) Mód I, b) Mód II, c) Mód III

Napětí v těsném okolí vrcholu (kořene) trhliny má singulární charakter a klasická kritéria pevnosti přestávají být v případě lomu materiálu použitelná. Pro případ rovinné napjatosti nebo deformace a případ zatěžování nekonečného tělesa módem I se složky tenzoru napětí σ_{ij} v těsné blízkosti kořene trhliny mohou psát ve tvaru

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}(r, \theta) &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{1}{2} \theta \left(1 - \sin \frac{1}{2} \theta \sin \frac{3}{2} \theta \right), \\ \sigma_{yy}(r, \theta) &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{1}{2} \theta \left(1 + \sin \frac{1}{2} \theta \sin \frac{3}{2} \theta \right), \\ \sigma_{xy}(r, \theta) &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{1}{2} \theta \cos \frac{1}{2} \theta \cos \frac{3}{2} \theta,\end{aligned}\quad (1)$$

kde (r, θ) jsou polární souřadnice s počátkem ve vrcholu trhliny, tj.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \theta = \arctan \frac{y}{x} \quad (2)$$

Amplituda K_I v (1) je tzv. *součinitel intenzity napětí* závislý na vnějším zatížení a geometrii tělesa. Součinitel intenzity napětí zavedl Irwin v [3] jako charakteristiku popisující „intenzitu“ singularity napětí ve vrcholu trhliny danou vztahem

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{yy}(r, 0). \quad (3)$$

Podmínka stabilního šíření trhliny se může pomocí součinitele intenzity napětí K_I jednoduše formulovat následovně

$$K_I < K_{Ic}, \quad (4)$$

kde K_{Ic} se nazývá lomová houževnatost materiálu a jedná se o experimentálně zjištěnou materiálovou konstantu, která uvádí odolnost materiálu vůči šíření trhliny. Kritérium (4) tedy nepracuje přímo s napětím σ_{yy} , protože to v případě jeho singulárního charakteru před čelem trhliny nedává smysl, ale srovnává jeho amplitudu s její kritickou velikostí. Zbývá poznamenat, že jednotky součinitele intenzity napětí jsou $\text{MPa} \times \text{m}^{1/2}$.

Obecnější energetický přístup popisu šíření trhliny zavedl Williams [4] vycházející z energetické bilance na čele trhliny. Jeho přístup má výhodu, že se neomezuje jen na trhliny, ale zejména na obecné koncentrátoři napětí tvaru vrubu. Pro stanovení lomového kritéria rostoucí trhliny se nejdříve vyjádří změna potencionální energie způsobené přítomností trhliny s ohledem na jeho vnější zatížení. Tato změna (úbytek) potencionální energie porušeného tělesa je přímo úměrný povrchové energii nově vzniklého povrchu trhliny. Je-li povrchová energie na jednotku plochy označena jako γ a přírůstek délky trhliny jako da , potom celková energie nově vzniklého povrchu je rovna hodnotě $2da\gamma$ a platí

$$-dW = 2da\gamma \Rightarrow -\frac{dW}{da} = 2\gamma \quad (5)$$

Výraz na levé straně (5) reprezentuje rychlost disipace energie na čele trhliny jako změnu (pokles) potencionální energie W v závislosti na prodloužení trhliny da . Tato veličina se značí G a nazývá se *hnací síla trhliny*. Pomocí G se může formulovat kritérium stabilního růstu trhliny

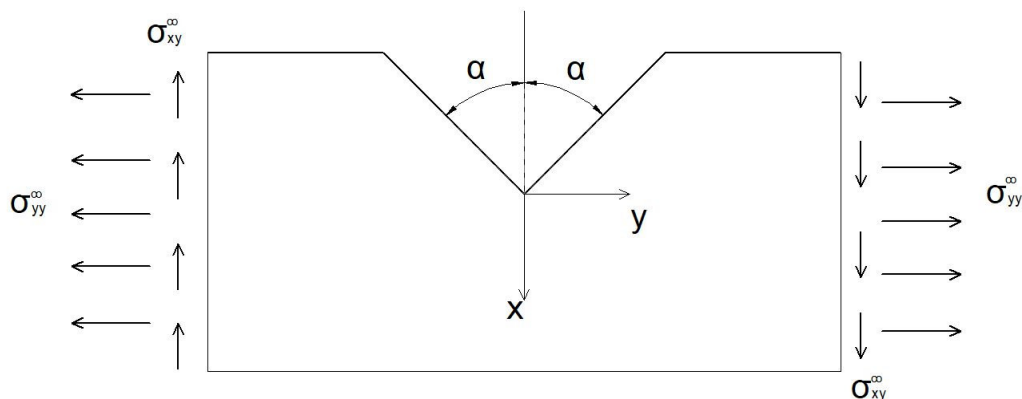
$$-dW = 2da\gamma \Rightarrow -\frac{dW}{da} = 2\gamma \quad (6)$$

Podobně jako u lomové houževnatosti K_{Ic} , také zde zavádíme novou materiálovou konstantu, kritickou hodnotu rychlosti uvolňování deformační energie (hnací síly trhliny) G_{Ic} [1] jejíž jednotky jsou $J \times m^{-2}$.

Je ale nutné poznamenat, že použití součinitele intenzity napětí K_I se omezuje na vyšetřování lomu křehkých materiálů, u nichž je plastická zóna před čelem trhliny zanedbatelně malá vzhledem k délce trhliny (small scale yielding). V opačném případě nemusí být např. splněna podmínka lineárního elastického chování materiálu z důvodů rozsáhlé plastické zóny před čelem trhliny. A v případě velmi krátkých trhlín, jejichž délka je úměrná vnitřní struktuře materiálu může dokonce dojít k změně rozložení napětí před čelem trhliny tak, že napětí přestanou být singulární ve vrcholu trhliny a budou zde nabývat konečných hodnot.

3 FORMULACE PROBLÉMU

Uvažujme rovinný problém izotropního tělesa s vrubem zatíženého na vnější hranici zatížením σ_{yy}^{∞} a σ_{xy}^{∞} viz. Obr. 2. Líce vrubu jsou bez napětí a jejich rozevření je 2α . Za předpokladu platnosti lineární elastické lomové mechaniky (LELM) popíšeme pole napětí před čelem vrubu pomocí jejích analytických matematických nástrojů, které jsou pro případ trhliny popsány např. v [5].



Obr. 2 Geometrie ostrého vrubu s rozevřením 2α a vnějším zatížením σ_{yy}^{∞} a σ_{xy}^{∞} .

Rovinné problémy v pružnosti jsou charakteristické zanedbáním jejich deformací (rovinná deformace) nebo napětí (rovinná napjatost) v jednom směru, zpravidla v ose z . Rovnice rovnováhy, kinematické a konstitutivní vztahy se v případě rovinné deformace pak redukují na tvar

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0, \quad (7)$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right), \quad (8)$$

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy}],$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [\nu\varepsilon_{xx} + (1-\nu)\varepsilon_{yy}], \quad (9)$$

$$\sigma_{xy} = 2\mu\varepsilon_{xy},$$

kde

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (10)$$

je modul pružnosti ve smyku, E je Youngův modul a ν je Poissonova konstanta. S velkou výhodou lze v rovinné pružnosti zavést tzv. Airyho funkci napětí $\phi(x, y)$, která redukuje rovinný problém (7)-(9) na hledání jediné analytické funkce, pomocí níž lze vyjádřit složky napětí následovně

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}, \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \text{ a } \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}. \quad (11)$$

Dosažením (11) do (7) se dostane biharmonická rovnice

$$\nabla^2 \nabla^2 \phi = 0 \quad (12)$$

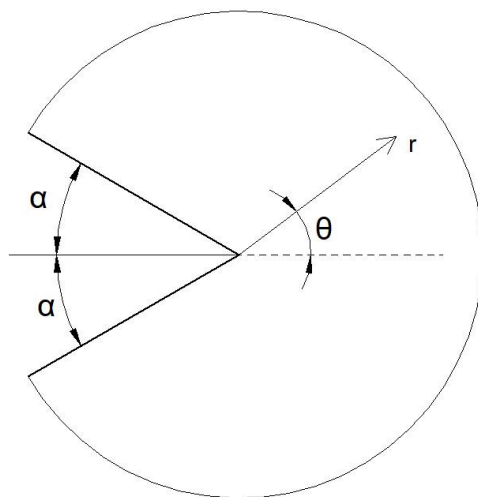
kde ∇^2 je tzv. Laplaceův operátor, pro který platí

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \quad (13)$$

V dalším pro nás bude výhodnější pracovat s polárním souřadnicovým systémem (r, θ) , ve kterém má Laplaceův operátor tvar

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}. \quad (14)$$

Jestliže je počátek polárního souřadnicového systému ve vrcholu vrubu, viz Obr. 3, potom je možné uvažovat Airyho funkci napětí v okolí kořene vrubu ve formě asymptotického rozvoje



Obr. 3 Polární souřadnicový systém (r, θ) ve vrcholu vrubu s rozevřením 2α .

$$\phi(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} r^{\lambda_n+1} F_n(\theta), \quad (15)$$

kde λ_n jsou vlastní čísla a $F_n(\theta)$ jejich odpovídající vlastní funkce. Dosazením (15) do (12) se dostanou obyčejné diferenciální rovnice pro funkce F_n ve tvaru

$$\frac{\partial^4 F_n(\theta)}{\partial \theta^4} + 2(\lambda_n^2 + 1) \frac{d^2 F_n(\theta)}{d\theta^2} + (\lambda_n^2 - 1)^2 F_n(\theta) = 0 \quad (n = 0, \dots, \infty). \quad (16)$$

Řešení každé z rovnic (16) má následující tvar

$$F_n(\theta) = A_n \sin((\lambda_n + 1)\theta) + B_n \cos((\lambda_n + 1)\theta) + C_n \sin((\lambda_n - 1)\theta) + D_n \cos((\lambda_n - 1)\theta), \quad (17)$$

kde konstanty A_n, B_n, C_n a D_n jsou neznámé a musí být stanoveny z okrajových podmínek na lících vrubu

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{r\theta} = 0 \quad \text{pro } \theta = -\pi + \alpha, \pi - \alpha. \quad (18)$$

Pro jednoduchost, uvažujme nejdříve $\sigma_{xy}^\infty = 0$, tj. zatěžování vrubu v módu I. V tomto případě Airyho funkce napětí $\phi^I(r, \theta)$ je z důvodů symetrie úlohy sudou funkcí a konstanty A_n a C_n se můžou položit rovny nule. Pak lze (15) na základě (17) zjednodušit na tvar

$$\phi^I = \sum_{n=0}^{\infty} r^{\lambda_n^I + 1} [B_n^I \cos((\lambda_n^I + 1)\theta) + D_n^I \cos((\lambda_n^I - 1)\theta)]. \quad (19)$$

Složky tenzoru napětí $\sigma_{\theta\theta}$ a $\sigma_{r\theta}$ se z (19) vyjádří jako

$$\sigma_{\theta\theta}^I = \frac{\partial^2 \phi^I}{\partial r^2} = \sum_{n=0}^{\infty} r^{\lambda_n^I - 1} \lambda_n^I (\lambda_n^I + 1) [B_n^I \cos((\lambda_n^I + 1)\theta) + D_n^I \cos((\lambda_n^I - 1)\theta)] \quad (20)$$

$$\sigma_{r\theta}^I = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi^I}{\partial \theta} \right) = \quad (21)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} r^{\lambda_n^I - 1} \lambda_n^I [B_n^I (\lambda_n^I + 1) \sin((\lambda_n^I + 1)\theta) + D_n^I (\lambda_n^I - 1) \sin((\lambda_n^I - 1)\theta)].$$

Podobně se vyjádří Airyho funkce napětí (15) pro mód II, u kterého musí být funkce $F_n(\theta)$ ze vztahu (17) liché, tj.

$$\phi^{II} = \sum_{n=0}^{\infty} r^{\lambda_n^{II} + 1} \cdot [A_n^{II} \sin((\lambda_n^{II} + 1)\theta) + C_n^{II} \sin((\lambda_n^{II} - 1)\theta)] \quad (22)$$

a odpovídající složky napětí jsou

$$\sigma_{\theta\theta}^{II} = \frac{\partial^2 \phi^{II}}{\partial r^2} = \sum_{n=0}^{\infty} r^{\lambda_n^{II}-1} \lambda_n^{II} (\lambda_n^{II} + 1) [A_n^{II} \sin((\lambda_n^{II} + 1)\theta) + C_n^{II} \sin((\lambda_n^{II} - 1)\theta)] \quad (23)$$

$$\sigma_{r\theta}^{II} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi^{II}}{\partial \theta} \right) = \quad (24)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} r^{\lambda_n^{II}-1} \lambda_n^{II} [B_n^{II} (\lambda_n^{II} + 1) \cos((\lambda_n^{II} + 1)\theta) + D_n^{II} (\lambda_n^{II} - 1) \cos((\lambda_n^{II} - 1)\theta)]$$

Vyjádřením zbývajících složek napětí $\sigma_{rr}^{I,II}$ a jejich dosazením společně s (20), (21), (23) a (24) do konstitutivních vztahů (9) se mohou vyjádřit deformace $\varepsilon_{rr}^{I,II}$, $\varepsilon_{r\theta}^{I,II}$ a $\varepsilon_{\theta\theta}^{I,II}$ a následně z (8) i rozevření trhliny $u_r^{I,II}$ a $u_\theta^{I,II}$. V dalším však tyto vztahy nebudeme potřebovat, a navíc jsou snadno dohledatelné v dostupné literatuře, např. [1], [5].

4 VÝPOČET ROZLOŽENÍ NAPĚTÍ PŘED ČELEM VRUBU

4.1 Exponenty singularity napětí

Výpočet exponentů singularity λ_n vychází z Airyho funkce napětí (15), kde konstanty A_n, B_n, C_n a D_n jsou vypočítány dosazením (20) a (21) nebo (23) a (24) do okrajových podmínek (18). Tímto se dostane soustava čtyř homogenních rovnic, která se může zapsat v maticovém tvaru následovně

$$A\mathbf{k} = \mathbf{0}, \quad (25)$$

kde

$$\mathbf{k} = [A_n, B_n, C_n, D_n]^T \quad (26)$$

a

$$A = \begin{bmatrix} \lambda(\lambda + 1)\cos(\alpha + (\alpha - \pi)\lambda) & \cdots & \cdots & \lambda(\lambda - 1)\sin(\alpha + (\pi - \alpha)\lambda) \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \lambda(\lambda + 1)\sin(\alpha + (\alpha - \pi)\lambda) & \cdots & \cdots & -\lambda(\lambda + 1)\cos(\alpha + (\pi - \alpha)\lambda) \end{bmatrix}. \quad (27)$$

Symbol $[\]^T$ v (26) značí transpozici. Aby soustava rovnic (25) neměla jen triviální řešení $A_n = B_n = C_n = D_n = 0$, musí platit

$$\det A(\lambda_n) = 0. \quad (28)$$

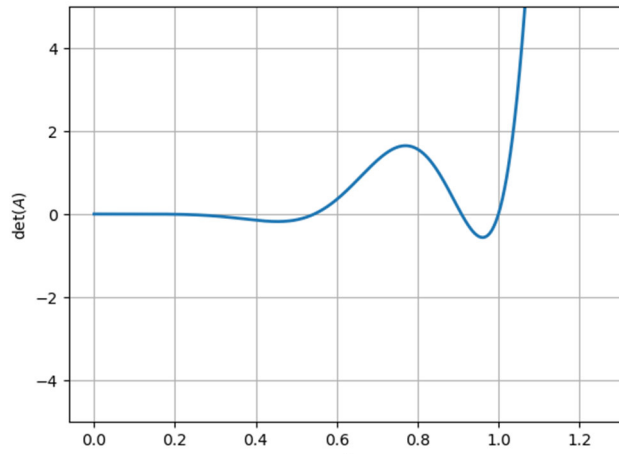
Podmínka (28) vede na řešení nelineární rovnice, které nejde vyjádřit v uzavřeném tvaru, ale musí se hledat pomocí dostupných numerických nástrojů [6] [7] [8]. Průběh funkce

$$f(\lambda) = \det A(\lambda) \quad (29)$$

pro úhel $\alpha = \pi/4$ je vykreslen na Obr. 4 pro hodnoty $\lambda > 0$. Interval $\lambda \in (0,1)$ je z hlediska lomové mechaniky nejzajímavější, jelikož v tomto intervalu hodnot exponentů λ_n jsou napětí (20), (21), (23) a (24) singulární. Kořeny funkce $f(\lambda)$ splňující podmínku (28) jsou hledané exponenty λ_n . V případě funkce $f(\lambda)$ zobrazené na Obr. 4, má tato funkce tři kořeny

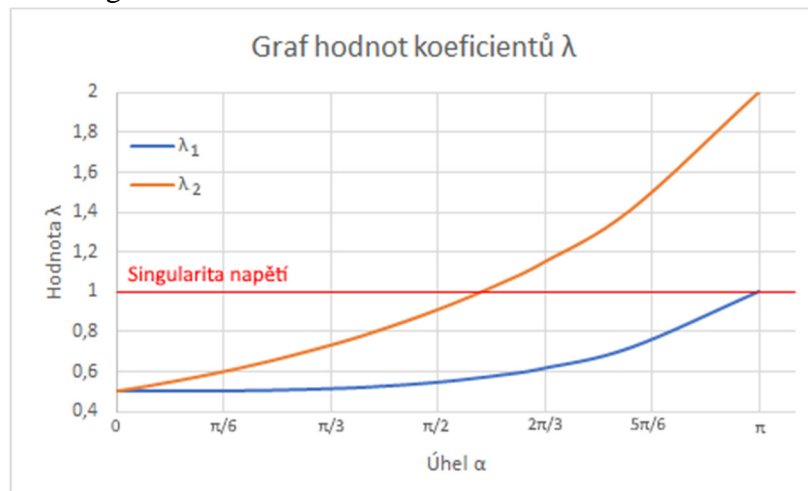
$$\lambda_1 = 0.544, \lambda_2 = 0.909 \text{ a } \lambda_3 = 1. \quad (30)$$

První kořen λ_1 odpovídá módu *I* zatěžování a druhý kořen λ_2 odpovídá módu *II* zatěžování vrubu [9]. Exponent λ_3 má v lomové mechanice specifický význam a má souvislost s tzv. *T*-napětím, které významným způsobem ovlivňuje způsob šíření trhliny. Stanovení *T*-napětí však dalece překračuje rozsah této bakalářské práce. Hodnoty exponentů λ_1 a λ_2 pro různé



Obr. 4 Průběh funkce $f(\lambda) = \det A(\lambda)$ pro úhel rozevření $\alpha = \pi/4$ pro hodnoty $\lambda > 0$.

hodnoty úhlů rozevření vrubu α jsou zobrazeny v grafu na Obr. 5. Je evidentní, že pro úhel $\alpha = 0$ nabývají oba indexy hodnotu $\lambda_1 = \lambda_2 = 1/2$, protože jde o případ trhliny v homogenním materiálu. Velmi zajímavý výsledek je, že pro rozevření vrubu větší než $\alpha \approx 3\pi/5$ je hodnota $\lambda_2 > 1$ a v důsledku toho nejsou smyková napětí (24) v případě zatěžovacího módu II v kořeni vrubu singulární.



Obr. 5 Hodnoty exponentů λ_1 a λ_2 v závislosti na úhlu rozevření vrubu α .

4.2 Napětí v blízkosti kořene vrubu

Teoreticky napětí v blízkosti kořene vrubu roste nade všechny meze a není možné jej stanovit experimentálními ani numerickými prostředky. Avšak pomocí numerických metod, např. *metodou konečných prvků* (MKP) lze odhadnout hodnoty amplitud $A_{1,2}$, $B_{1,2}$, $C_{1,2}$ a $D_{1,2}$ odpovídající exponentům λ_1 a λ_2 v Airyho funkci napětí (15) pro daný způsob zatěžování a geometrii vrubu. Pro jednoduchost a bez újmy na obecné platnosti použitých metod budeme v dalším uvažovat pouze zatěžovací mód I vrubu a budeme se zabývat jen singulárními členy asymptotických rozvoju (20) a (21). Za této podmínky se jejich tvar redukuje na výrazy

$$\sigma_{\theta\theta}^I = r^{\lambda_1-1} \lambda_1 (\lambda_1 + 1) [B_1 \cos(\lambda_1 + 1)\theta + D_1 \cos(\lambda_1 - 1)\theta] \quad (31)$$

$$\sigma_{r\theta}^I = r^{\lambda_1-1} \lambda_1 [B_1 (\lambda_1 + 1) \sin(\lambda_1 + 1)\theta + D_1 (\lambda_1 - 1) \sin(\lambda_1 - 1)\theta] \quad (32)$$

Z důvodů symetrie se taktéž redukuje okrajové podmínky (18) na jedinou, a to buď pro $\theta = \pi - \alpha$ nebo $\theta = -\pi + \alpha$. Odtud plyne, že se redukce bude také týkat matice \mathbf{A} ze vztahu (27), která bude mít tvar

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} \lambda_1 (\lambda_1 + 1) \sin(\alpha + \lambda_1(\alpha - \pi)) & \lambda_1 (1 - \lambda_1) \sin(\alpha + \lambda_1(\pi - \alpha)) \\ -\lambda_1 (\lambda_1 + 1) \cos(\alpha + \lambda_1(\alpha - \pi)) & -\lambda_1 (\lambda_1 + 1) \cos(\alpha + \lambda_1(\pi - \alpha)) \end{bmatrix} \quad (33)$$

a vektor \mathbf{k} se redukuje na tvar

$$\mathbf{k}' = [B_1, D_1]^T. \quad (34)$$

Jelikož pro matici \mathbf{A}' platí

$$\det \mathbf{A}' = 0, \quad (35)$$

jsou její řádky i sloupce lineárně závislé a platí, např.

$$-\lambda_1 (\lambda_1 + 1) \cos(\alpha + \lambda_1(\alpha - \pi)) B_1 - \lambda_1 (\lambda_1 + 1) \cos(\alpha + \lambda_1(\pi - \alpha)) D_1 = 0. \quad (36)$$

Odtud se snadno vyjádří, že

$$B_1 = -D_1 \frac{\cos(\alpha + \lambda_1(\pi - \alpha))}{\cos(\alpha + \lambda_1(\alpha - \pi))}, \quad (37)$$

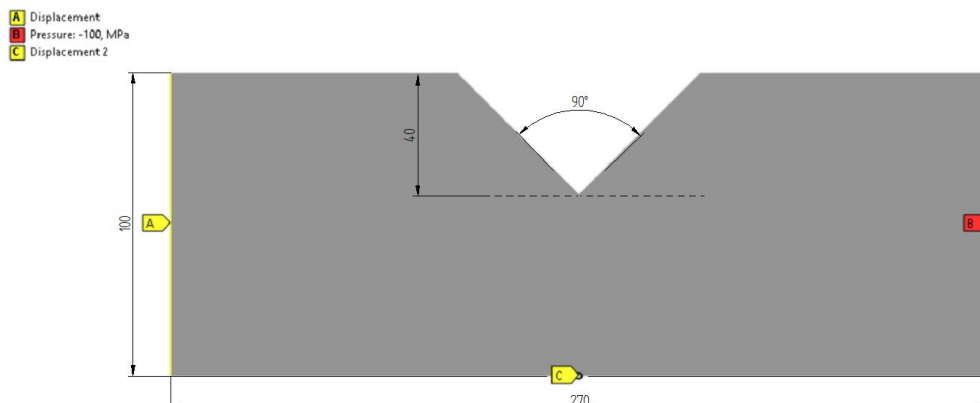
a dosazením do (31) a (32) se dostane

$$\sigma_{\theta\theta}^I = r^{\lambda_1-1} \lambda_1 (\lambda_1 + 1) D_1 \left[-\frac{\cos(\alpha + \lambda_1(\pi - \alpha))}{\cos(\alpha + \lambda_1(\alpha - \pi))} \cos(\lambda_1 + 1)\theta + \cos(\lambda_1 - 1)\theta \right] \quad (38)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{r\theta}^I = r^{\lambda_1-1} \lambda_1 D_1 & \left[-\frac{\cos(\alpha + \lambda_1(\pi - \alpha))}{\cos(\alpha + \lambda_1(\alpha - \pi))} (\lambda_1 + 1) \sin(\lambda_1 + 1)\theta \right. \\ & \left. + (\lambda_1 - 1) \sin(\lambda_1 - 1)\theta \right]. \end{aligned} \quad (39)$$

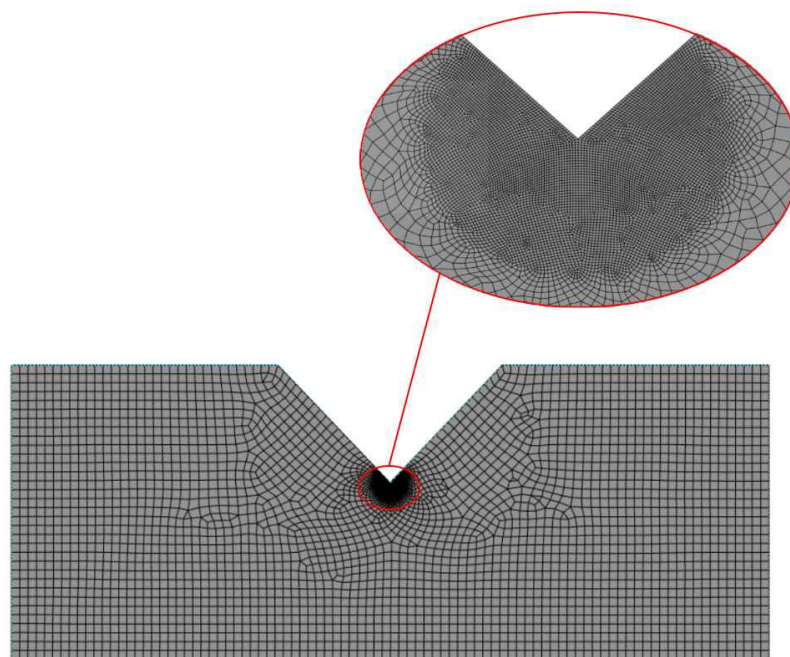
Vztahy (38) a (39) jsou analytickým vyjádřením singulárních částí složek napětí $\sigma_{r\theta}$ a $\sigma_{\theta\theta}$ v těsné blízkosti kořene symetrického homogenního vrubu zatíženého módem I . Zatímco exponent λ_1 závisí na geometrii vrubu, tj. na úhlu jeho rozevření α , součinitel D_1 závisí na vnějším zatížení σ_{yy}^∞ a na tvaru vnější hranice tělesa a jediný způsob, jak získat jeho hodnotu, je využít numerické nástroje typu MKP.

Za tímto účelem jsme jako MKP nástroj zvolili komerční program ANSYS [10], ve kterém jsme vytvořili desku s vrubem, jehož úhel rozevření byl $\alpha = \pi/4$. Deska byla zatížena vnějším napětím $\sigma_{yy}^{\infty} = 100$ MPa, viz Obr. 6. Vazba A má nulové posunutí $u_x = u_y = 0$



Obr. 6 Model vrubu z programu ANSYS s okrajovými podmínkami.

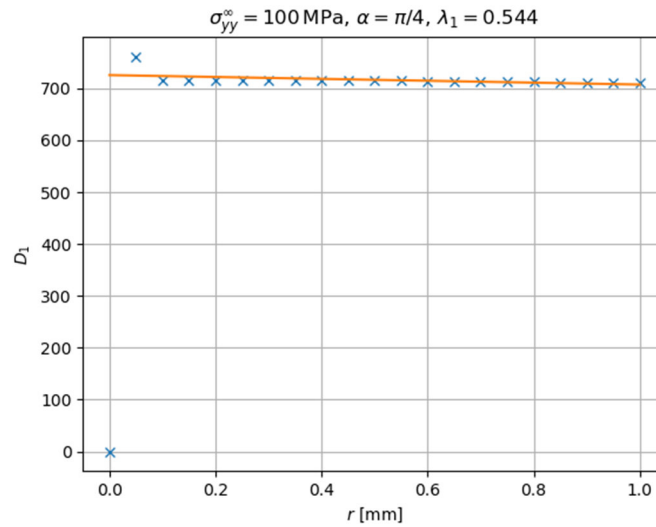
čímž zamezuje desce v pohybu způsobeného zatížením. Vazba C zamezuje posun v ose x díky čemuž se vrub může pouze otvírat podle módu I . Z důvodu vysoké koncentrace napětí a jeho dostatečně dobré aproximace konečnými prvky, byla konečnoprvková síť velmi zjemněna v okolí čela vrubu, viz. Obr. 7. Z této oblasti jsme odečítali hodnoty napětí před čelem vrubu ve směru osy x a na kružnicích o poloměru r se středem ve vrcholu vrubu.



Obr. 7 Konečnoprvková síť tělesa s vrubem a její zjemnění v kořeni vrubu.

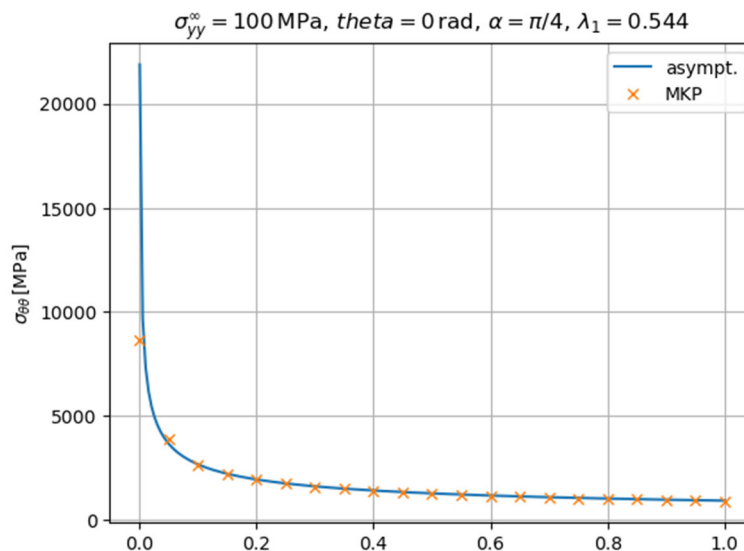
Hodnoty součinitele D_1 odhadneme tzv. *přímou metodou*, která je velmi jednoduchá, avšak použitelná pouze v případě jednoduchého zatěžování vrubu buď módem I nebo II . Součinitel D_1 se může vyjádřit pro $\theta = 0$ ze vztahu (38) následovně:

$$D_1 = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^{1-\lambda_1}}{\lambda_1(\lambda_1 + 1)} \left[-\frac{\cos(\alpha + \lambda_1(\pi - \alpha))}{\cos(\alpha + \lambda_1(\alpha - \pi))} + 1 \right]^{-1} \sigma_{\theta\theta}^I. \quad (40)$$



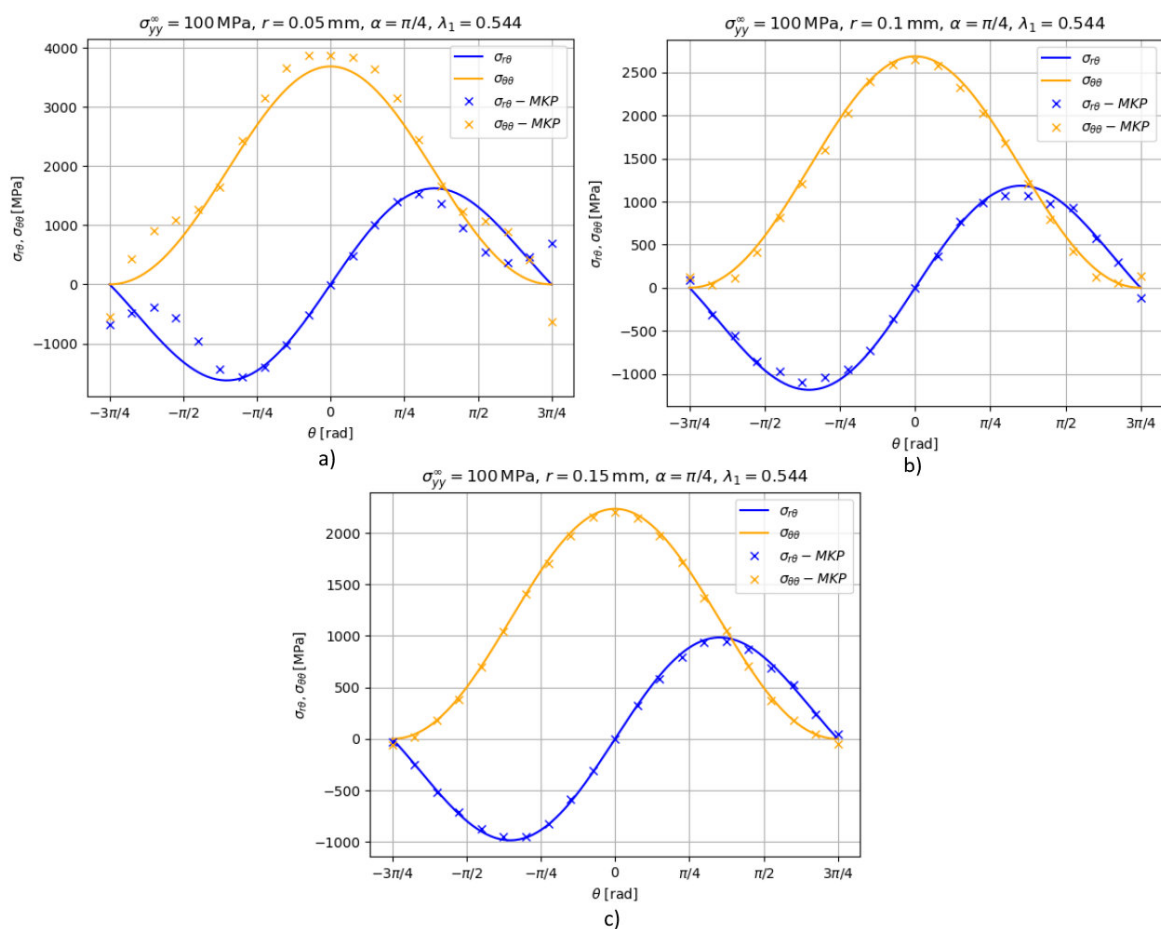
Obr. 6 Hodnoty součinitele D_1 v závislosti na vzdálenosti r od kořene vrubu s úhlem rozevření $\alpha = \pi/4$ a zatížením $\sigma_{yy}^\infty = 100 \text{ MPa}$. Modré křížky značí hodnoty D_1 z (40) pro napětí $\sigma_{\theta\theta}^I = \sigma_{\theta\theta}^{I,MKP}$ před čelem vrubu. Oranžová přímka je extrapolace těchto hodnot metodou nejmenších čtverců do hodnoty $r = 0$.

Když se za hodnoty $\sigma_{\theta\theta}^I$ v (40) dosadí numerické výsledky napětí $\sigma_{\theta\theta}^{I,MKP}$ před čelem vrubu podél osy x pro různé vzdálenosti r , dostane se graf zobrazený na Obr. 8. Modré křížky značí hodnoty D_1 z (40) pro $\sigma_{\theta\theta}^I = \sigma_{\theta\theta}^{I,MKP}$ v případě vrubu s úhlem rozevření $\alpha = \pi/4$ a vnějším zatížením $\sigma_{yy}^\infty = 100 \text{ MPa}$. Teoreticky musí být tyto hodnoty na vzdálenosti r od kořene vrubu nezávislé, avšak prakticky tomu tak nemůže být, jelikož MKP není schopno extrapolovat singularitu v napětí $\sigma_{\theta\theta}^I$ v blízkosti kořene vrubu Obr. 9. Ve skutečnosti MKP



Obr. 7 Asymptotické řešení a MKP řešení pro $\sigma_{\theta\theta}^I$ před čelem vrubu s úhlem rozevření $\alpha = \pi/4$ a vnějším zatížením $\sigma_{yy}^\infty = 100 \text{ MPa}$.

napětí $\sigma_{\theta\theta}^I$ v blízkosti kořene vrubu podhodnocuje, pro hodnotu $r = 0$ mu přiřadí sice velkou, ale konečnou hodnotu. To se projeví rozkolísáním hodnot D_1 pro velmi malé r a nulovou hodnotou D_1 pro $r = 0$. Aby se mohla odhadnout limita ve vztahu (40), musí se těmito hodnotami proložit pomocí metody nejmenších čtverců přímka, jejíž hodnota pro $r = 0$ je hledaný odhad součinitele D_1 . Zpětným dosazením D_1 do (38) a (39) se dostanou úplné vztahy pro singulární členy asymptotického rozvoje napětí před čelem vrubu. Obr. 10 ukazuje rozložení napětí $\sigma_{\theta\theta}^I$ dané vztahem (38) a numerické řešení pomocí MKP. Přes velmi dobrou shodu jde vidět podhodnocení numerického řešení MKP proti skutečnému napětí reprezentovanému asymptotickým řešením (38) pro velmi malé hodnoty r . Selhání numerického řešení MKP pro malé hodnoty r také ukazují grafy na Obr. 10, které zobrazují hodnoty napětí $\sigma_{r\theta}^I$ a $\sigma_{\theta\theta}^I$ v závislosti na úhlu θ pro $r = 0,05, 0,10$ a $0,15$ mm. Zatímco pro hodnoty $r = 0,10$ a $0,15$ mm je vidět výborná shoda mezi numerickým řešením MKP a asymptotickým řešením, v těsné blízkosti čela vrubu vykazuje MKP značné odchylky od skutečného napětí reprezentovaného asymptotickými vztahy (38) a (39).



Obr. 8 Asymptotické řešení a MKP řešení pro $\sigma_{r\theta}^I$ a $\sigma_{\theta\theta}^I$ podél kružnice o poloměru a) $r = 0.05$, b) $r = 0.1$ a c) $r = 0.15$ mm se středem v kořeni vrubu. Úhel rozvření vrubu je $\alpha = \pi/4$ a vnější zatížení $\sigma_{yy}^\infty = 100$ MPa

5 ZÁVĚR

Cílem práce bylo popsat rozložení napětí v okolí kořene ostrého vrubu pomocí principů lineární elastické lomové mechaniky.

Z okrajových podmínek převládajících v blízkosti kořene vrubu bylo sestaveno asymptotické řešení pro jednotlivé složky napětí v závislosti na geometrii (rozevření) vrubu.

Součástí hledaného asymptotického řešení bylo sestavení algoritmu pro vyjádření hodnot exponentů singularity napětí pro různé hodnoty rozevření vrubu. Tyto výpočty byly provedeny s pomocí analytických a numerických knihoven v programovacím jazyce Python.

Dalším nezbytným krokem k sestrojení asymptotického řešení pro ostrý vrub byl odhad amplitudy singulární části asymptotického řešení. Odhad této veličiny byl proveden za pomocí softwaru ANSYS, který provádí numerické výpočty pomocí MKP a opět numerických a analytických knihoven v jazyce Python.

Na závěr byla srovnána získaná asymptotická řešení pro jednotlivé složky napětí s odpovídajícím řešením MKP pro konkrétní případ geometrie a zatížení symetrického homogenního ostrého vrubu.

Z důvodu nedostatku času bylo diskutováno pouze řešení pro jednu geometrii vrubu a jeho zatížení módem *I*. Avšak i přesto je z popisu použitých analytických a numerických metod zřejmé jejich bezproblémové použití na případ zatížení vrubu v módu *II*.

6 CITOVANÁ LITERATURA

- [1] L. P. POOK, Lineární elastická lomová mechanika pro konstruktéry: teorie a aplikace Brno: Vysoké učení technické v Brně: nakladatelství VUTIUM, 2017., 2017 ISBN 978-80-214-4760-8..
- [2] Ondáček a E. Ondráček, Mechanika těles: Prožnost pevnost II, Brno: Akademick nakladatelství CERM, 2006.
- [3] G. Irwin, „Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate *Journal of Applied Mechanics*, sv. 24, pp. 361-364, 1957.
- [4] M. Williams, „Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension,“ *Journal of Applied Mechanics*, sv. 74, p. 526–528., 1957.
- [5] C. T. Sun a Z. -H. Jin, Fracture mechanics, Amstrdam: Academic Press, 2012 ISBN 978-0-12-385001-0..
- [6] „NumPy - an open source project that enables numerical computing with Python [Online]. Available: <https://numpy.org/about/>. [Přístup získán 23 květen 2023].
- [7] „SymPy - Python based library for symbolic mathematics,“ [Online]. Available: <https://www.sympy.org/en/index.html>. [Přístup získán 23 květen 2023].
- [8] „Project Jupyter - Free software, open standards, and web services for interactive computing across all programming languages,“ [Online]. Available: <https://jupyter.org> [Přístup získán 23 květen 2023].
- [9] M. H. Sadd, Elasticity - Theory applications and numerics, Burlington: Elsevier, 2009
- [10] „ANSYS - Engineering Simulation Software,“ ANSYS, Inc, [Online]. Available: <https://www.ansys.com/>. [Přístup získán 23 květen 2023].

7 SEZNAM OBRÁZKŮ

Obr. 1 Módy zatěžování trhliny: a) Múd I, b) Múd II, c) Múd III	10
Obr. 2 Geometrie ostrého vrubu s rozevřením 2α a vnějším zatížením σ_{yy}^{∞} a σ_{xy}^{∞}	13
Obr. 3 Polární souřadnicový systém (r, θ) ve vrcholu vrubu s rozevřením 2α	14
Obr. 4 Průběh funkce $f(\lambda) = \det A(\lambda)$ pro úhel rozevření $\alpha = \pi/4$ pro hodnoty $\lambda > 0$	18
Obr. 5 Hodnoty exponentů λ_1 a λ_2 v závislosti na úhlu rozevření vrubu α	18
Obr. 6 Model vrubu v programu ANSYS s okrajovými podmínkami	20
Obr. 7 Konečnorvková síť tělesa s vrubem a její zjemnění v kořeni vrubu.	20
Obr. 8 Hodnoty součinitele D_1 v závislosti na vzdálenosti r od kořene vrubu s úhlem rozevření $\alpha = \pi/4$ a zatížením $\sigma_{yy}^{\infty} = 100$ MPa. Modré křížky značí hodnoty D_1 z (40) pro napětí $\sigma_{\theta\theta}^{\infty} = \sigma_{\theta\theta}^{I, MKP}$ před čelem vrubu. Oranžová přímka je extrapolace těchto hodnot metodou nejmenších čtverců do hodnoty $r = 0$	21
Obr. 9 Asymptotické řešení a MKP řešení pro $\sigma_{\theta\theta}^I$ před čelem vrubu s úhlem rozevření $\alpha = \pi/4$ a vnější zatížení $\sigma_{yy}^{\infty} = 100$ MPa.....	21
Obr. 10 Asymptotické řešení a MKP řešení pro $\sigma_{r\theta}^I$ a $\sigma_{\theta\theta}^I$ podél kružnice o poloměru a) $r = 0.05$, b) $r = 0.1$ a c) $r = 0.15$ mm se středem v kořeni vrubu. Úhel rozevření vrubu je $\alpha = \pi/4$ a vnější zatížení $\sigma_{yy}^{\infty} = 100$ MPa	22

8 SEZNAM PŘÍLOH

1. ExponentyLambda: Výpočet v programu Excel pro vykreslení hodnot λ_1 a λ_2 v závislosti na úhlu α
2. ModelVrubu: Model vrub v programu ANSYS pro výpočet napětí pomocí MKP
3. RozlozeniNapeti.ipynb: Program v jazyce Python v prostředí Jupyter Notebook pro výpočet exponentů singularity, numerický výpočet rozložení napětí a porovnání s MKP